Hawgent
Since 1990's

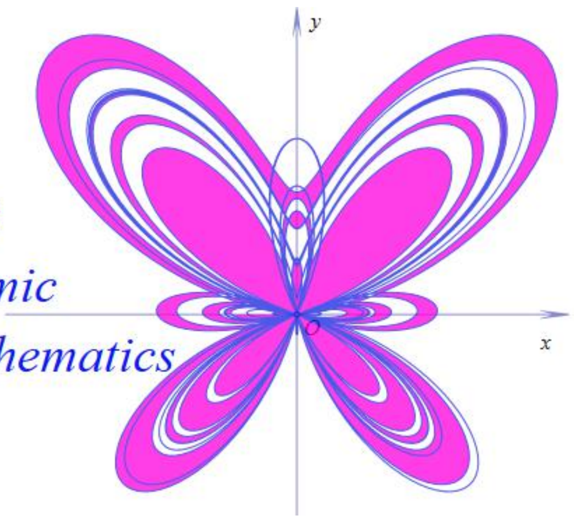
Hawgent 皓骏动态数学课程系列

动态解析
高中数学综合问题

（下册）

深入学科，彻底突破数学教学和数学学习中的重点难点问题
开展数学实验、数学教学、数学学习和数学研究的必备工具

Hawgent
Dynamic
Mathematics



皓骏（广州）数学技术中心

Hawgent Technology Centre in Mathematics

内容介绍

在学习数学过程中，有许多问题在查看了详细的解答或听到了老师的讲解之后，很多学生仍然不得其解，即使他们在下一次遇到同一个问题也未必能够给出正确或完整的解答.

这是因为，在学习过程中，数学更加需要理解.

本课程收集并整理了一些综合性很高的数学问题，它们让老师感到难教，让学生感到难学.就是说，对于这些类似的问题许多数学老师都反应他们在花费了很大力气、很多时间的讲解之后，很多学生仍然是似懂非懂.

同样是学习，但方法有优劣之分，效率有高低之分.把看似复杂、抽象的问题变得更容易一些，抓住数学的本质使学生多一些理性思考而少一些机械记忆，让学生感悟到自然朴实的数学思想方法从而能够举一反三，这是我们追求的理念.

Hawgent 皓骏团队利用动态数学技术将这类问题呈现在学生面前，为他们提供了一个动手、观察、探索、猜想和验证的机会与平台，帮助他们利用变化的图形和数据发现问题内在的关系，并逐渐形成真正属于他们自己的解决问题的思路，这是我们追求的目标.

如果这种方式能够得到大家的认同，对我们是一种鼓励，并将激发我们更加努力工作的热情，同时希望有更多志同道合者加入我们的队伍，将这项工作持续下去，越做越好.当然也欢迎各种不同的声音，甚至是批评的意见，从而帮助我们得到提高和成长.

欢迎联系：11033149@qq.com

目　录

第五章 直线与圆

直线与圆是几何中最基础和最重要的两种图形，是代数方法在几何研究中的应用的开始. 对于这部分内容，学生应该深刻领会并熟练应用数形结合的思想方法，既要注重代数运算的简洁，也要充分利用几何图形的性质，还要认真考虑代数式的几何意义，在对参数的讨论过程中不要遗漏某些特殊值所表示的特殊情况.

解答问题使用的方法会直接影响到运算量的多少以及问题解答的正确率.

第一节 直线与圆的位置关系

1． x-截距与 y-截距间的关系

例 1． 已知直线 l 在 x 轴、y 轴上截距的绝对值相等，且到点（1，2）的距离为 $\sqrt{2}$，求直线 l 的方程.

【动感体验】

要全面考虑可能成立的各种情况. 已知直线 l 在 x 轴、y 轴上截距的绝对值相等的条件应考虑截距可能为零或不为零两种情况.

如图 5.1.1.所示，点 P 在以 A（1，2）为圆心、半径为 $\sqrt{2}$ 的圆上，直线（记为 l）经过点 P 且与圆 A 相切. 则该 l 到点（1，2）的距离为恒为 $\sqrt{2}$.

打开文件“5-1-例 1.dmr”，拖动点 P，观察可能出现直线 l 在 x 轴、y 轴上截距的绝对值相等的情况.

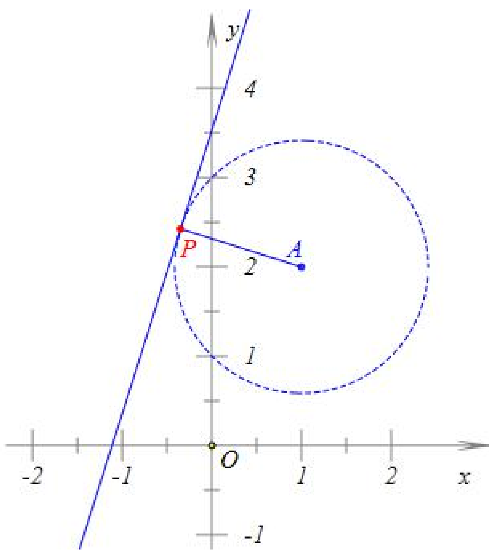


图 5.1.1

【思路点拨】

对于满足条件的直线其截距为零和不为零两种情况分别讨论.

【动态解析】

图 5.1.2—图 5.1.7 所示六种情况下，经过点 P 的直线在 x 轴、y 轴上截距的绝对值均相等.

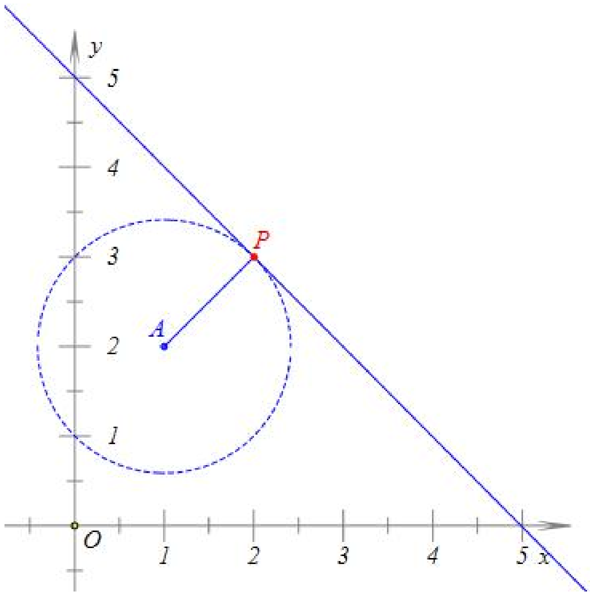


图 5.1.2

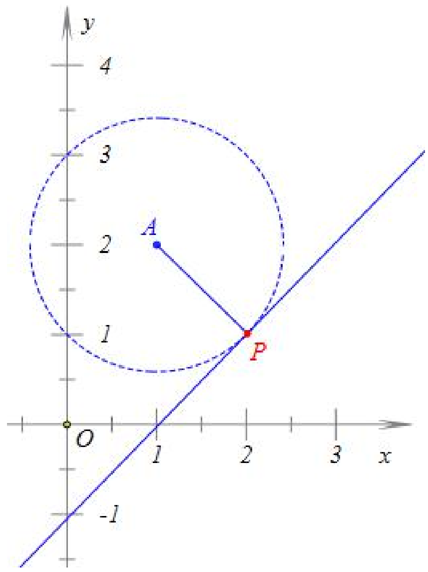


图 5.1.3

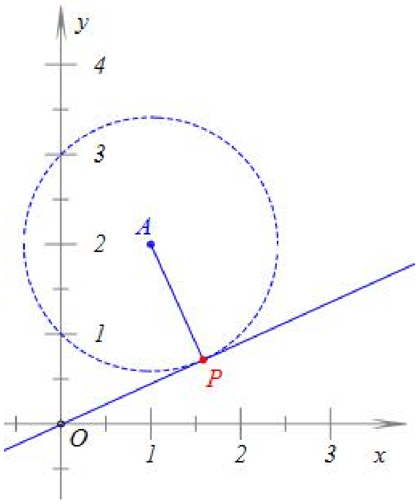


图 5.1.4

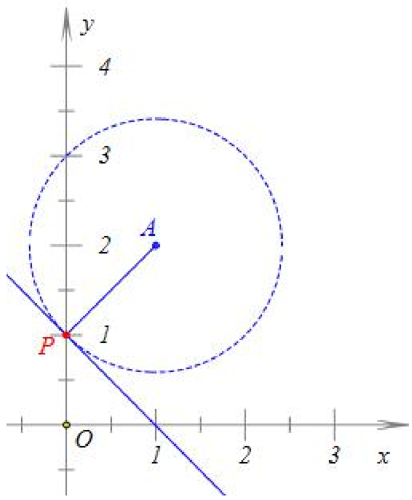


图 5.1.5

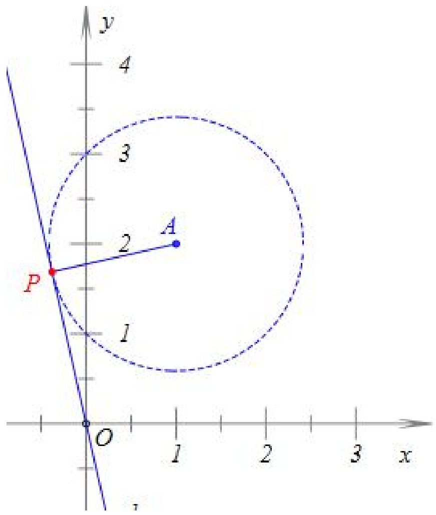


图 5.1.6

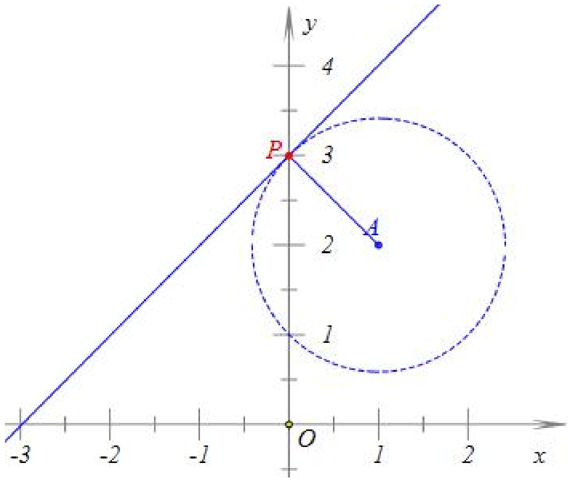


图 5.1.7

可设满足条件的直线的方程为 $y=kx+b$.

当 $b=0$ 时，由点到直线的距离公式得：

$\dfrac{|k-2|}{\sqrt{1+k^2}}=\sqrt{2}$，解得 $k=-2+\sqrt{6}$ 或 $k=-2-\sqrt{6}$.

当 $b\neq 0$ 时，则直线 l 的斜率 k 为 1 或者-1，由点到直线的距离公式得：

$\dfrac{|k+b-2|}{\sqrt{1+k^2}}=\sqrt{2}$，当 $k=1$ 时解得 $b=-1$ 或 $b=3$；当 $k=-1$ 时解得 $b=5$ 或 $b=1$.

因此所求直线的方程为：$y=(-2+\sqrt{6})x$ 或 $y=(-2-\sqrt{6})x$ 或 $y=x-1$ 或 $y=x+3$ 或 $y=-x+5$ 或 $y=-x+1$.

【简要评注】

从本题的题设条件，很容易选择利用直线的截距式方程表示直线进行求解，但要注意避免遗漏直线经过原点的情况. 在这里我们首先考虑到直线到点 A 的距离为 $\sqrt{2}$，再寻找满足要求的直线，就容易分类了.

有时候利用直线的截距式在绘制直线时非常方便，但答案通常写成斜截式.

2．直线与圆的位置关系

例 2．若圆 $x^2+y^2-4x-4y-10=0$ 上至少有三个不同的点到直线 $l:ax+by=0$ 的距离为 $2\sqrt{2}$，求直线 l 的倾斜角的取值范围.

方 法 一

【动感体验】

方程$x^2+y^2-4x-4y-10=0$可化为$(x-2)^2+(y-2)^2=18$，该圆的圆心为(2,2)、半径为$3\sqrt{2}$，圆心在直线$y=x$上． $l:ax+by=0$是一条过原点的直线，系数a,b决定其倾斜角．令$k=-\dfrac{a}{b}$，则l的方程为：$y=kx$．考虑k变化时与直线$y=kx$平行并与之距离为$2\sqrt{2}$的两条直线与圆交点的个数．打开文件“5-1-例2.dmr”，实线表示直线$y=kx$，虚线是两条到直线$y=kx$的距离等于$2\sqrt{2}$，通过拖动点P或者动画按钮可以改变k的值，如图5.1.8—5.1.12所示为其中的几种情况．

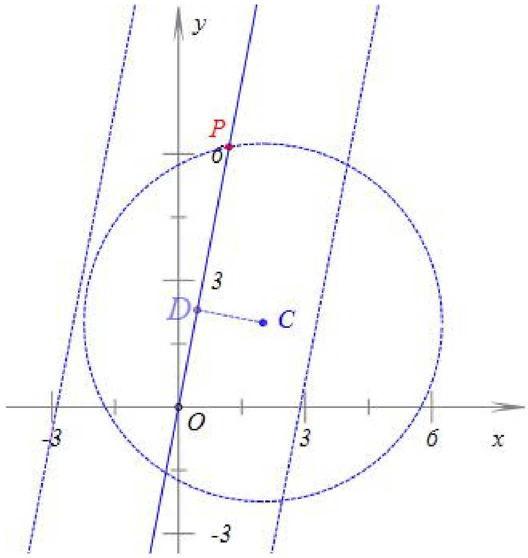


图5.1.8

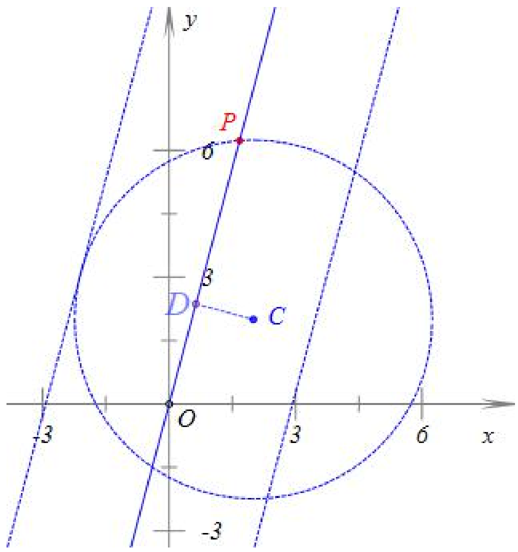


图5.1.9

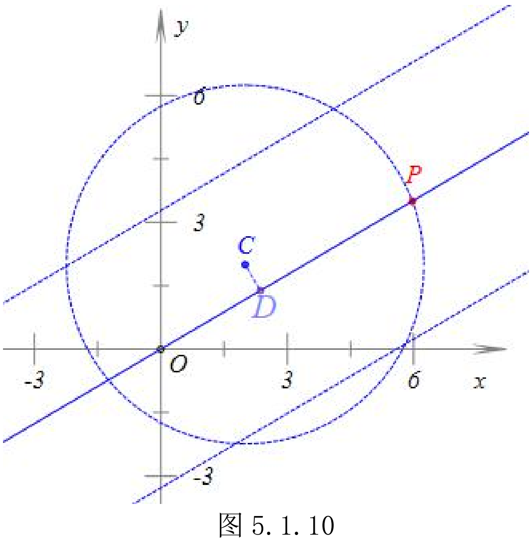


图5.1.10

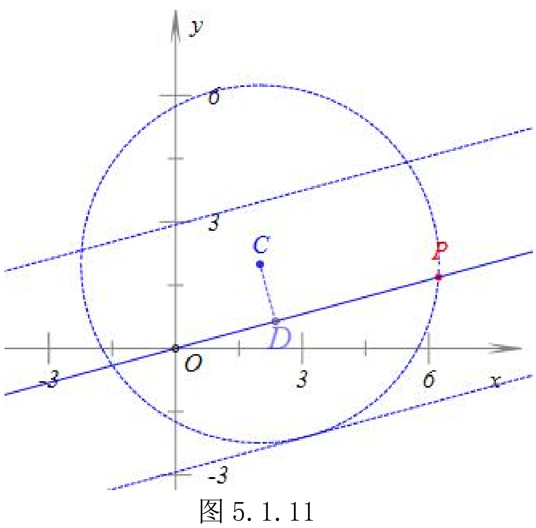


图5.1.11

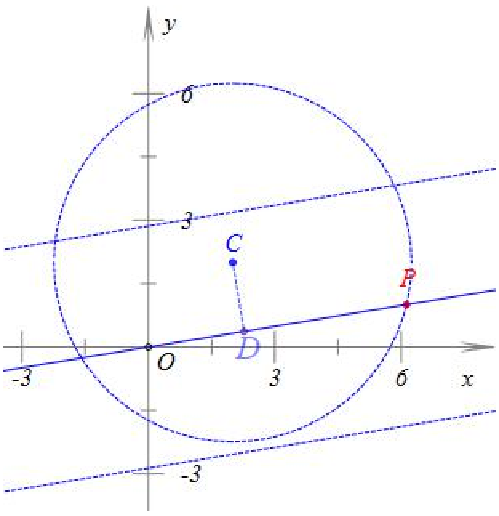


图 5.1.12

【思路点拨】

改变 k 的值考虑当圆上恰好有三个点到直线 l 的距离为 $2\sqrt{2}$ 时，两条平行线与圆的位置关系．这时两平行线应该其一与圆相切另一与圆相交，而圆心到直线 l 的距离恰好为 $\sqrt{2}$，由此不难确定直线 l 的倾斜角的取值范围.

【动态解析】

注意到 $OC=2\sqrt{2}$，当圆心到直线 l 的距离 CD 恰好为 $\sqrt{2}$ 时，如图 1（1)、图 1（4）所示，$\angle COD=\dfrac{\pi}{6}$. 由此不难确定若圆 $x^2+y^2-4x-4y-10=0$ 上至少有三个不同的点到直线 l 的距离为 $2\sqrt{2}$ 时, 直线 l 的倾斜角的取值范围是 $[\dfrac{\pi}{12},\dfrac{5\pi}{12}]$.

方 法 二

【动感体验】

方程 $x^2+y^2-4x-4y-10=0$ 可化为 $(x-2)^2+(y-2)^2=18$，可知该圆的圆心为(2，2)、半径为 $3\sqrt{2}$．进入文件“5-1-例 2.dmr”第二页，点 C 是方程 $x^2+y^2-4x-4y-10=0$ 所在圆的圆心．点 P 是圆 C 上的动点，$CD\perp OP$ 与 D，因此可以用直线 OP 表示方程 $ax+by=0$ 对应的直线 l，拖动点 P，观察直线 OP 与圆 C 的位置关系，判断当圆 C 上至少有三个不同的点到直线 OP 的距离为 $2\sqrt{2}$ 时直线 OP 所应满足的条件，如图 5.1.13—5.1.14 所示，为其中的几种情形.

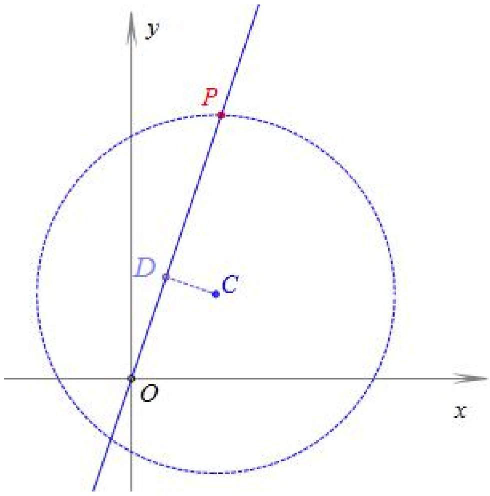


图 5.1.13

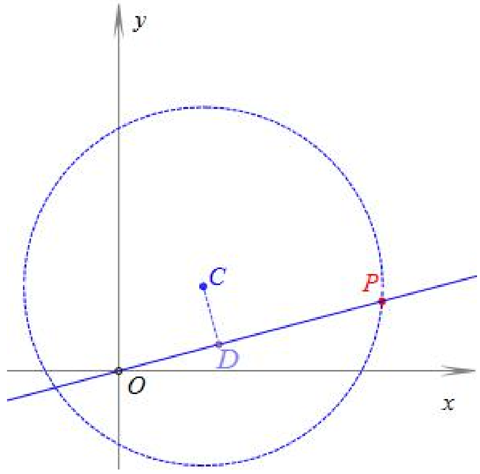


图 5.1.14

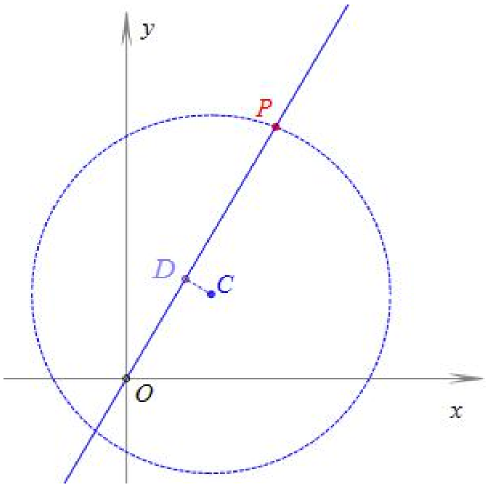


图 5.1.15

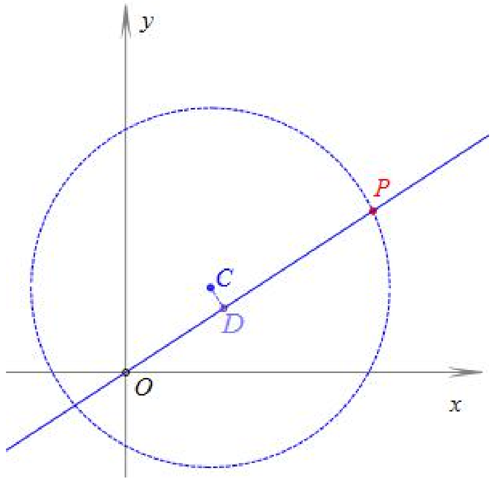


图 5.1.16

【思路点拨】

将圆上的点到直线的距离转化成为圆心到直线的距离.

【动态解析】

令 $k=-\dfrac{a}{b}$，则 l 的方程为： $y=kx$.

当直线 OP 在圆心 C 左上方时，若圆上正好有 3 个点到 l 的距离为 $2\sqrt{2}$ ，如图 5.1.13 所示，则此时 $|CD|=3\sqrt{2}-2\sqrt{2}=\sqrt{2}$. 又因为 $|OC|=2\sqrt{2}$ ， $\angle xOC=\dfrac{\pi}{4}$ ，所以在 $Rt\triangle CDO$ 中， $\angle COD=\dfrac{\pi}{6}$ ，所以 $\angle xOD=\angle xOC+\angle COD=\dfrac{5\pi}{12}$.

当直线 OP 在圆心 C 的右下方时，若圆上正好有 3 个点到 l 的距离为 $2\sqrt{2}$ ，如图 5.1.14

所示，则此时$|CD|=3\sqrt{2}-2\sqrt{2}=\sqrt{2}$. 又因为$|OC|=2\sqrt{2}$，$\angle xOC=\dfrac{\pi}{4}$，所以在$Rt\triangle CDO$中，$\angle COD=\dfrac{\pi}{6}$，所以$\angle xOD=\angle xOC-\angle COD=\dfrac{\pi}{12}$.

因此当$\dfrac{\pi}{12}<\angle xOD<\dfrac{5\pi}{12}$时，如图 5.1.15、图 5.1.16 所示，圆上有四个不同的点到l的距离为$2\sqrt{2}$.

【简要评注】

本题解答过程中要抓住两个关键：一，把圆上的点到直线的距离转化成为圆心到直线的距离；二，直线的特征：经过原点.

3．直线与动圆的位置关系

例 3．已知曲线$C: y=x^2$与直线$l: x-y+2=0$交于两点$A(x_A, y_A)$和$B(x_B, y_B)$，且$x_A<x_B$. 记曲线C在点A和点B之间那一段L与线段AB所围成的平面区域（含边界）为D. 设点$P(s,t)$是$C: y=x^2$上一点，且点P与点A和点B均不重合.

（1）若点Q是线段AB的中点，试求线段PQ的中点M的轨迹方程;

（2）若曲线$G: x^2-2ax+y^2-4y+a^2+\dfrac{51}{25}=0$与$D$有公共点，试求$a$的最小值.

（一）求点M的轨迹方程

这里Q是定点，P是曲线C上的动点，M是线段PQ的中点，M随P点而运动. 既然曲线C是抛物线，可以猜测M的轨迹也是一条抛物线. 至于它轨迹方程，就是求点M的坐标之间的关系. 注意到P点的坐标满足曲线C的方程，而点M的坐标又可以通过P和Q点坐标来表示，因此这个轨迹方程不难求出.

事实上，由$\begin{cases} y=x^2 \\ x-y+2=0 \end{cases}$解得：$x_A=-1$，$x_B=2$；$y_A=1$，$y_B=4$，因为$Q$是线段$AB$的中点所以有$Q(\dfrac{1}{2},\dfrac{5}{2})$. 又$M(x,y)$为$PQ$的中点，所以有$x=\dfrac{\frac{1}{2}+s}{2}$，$y=\dfrac{\frac{5}{2}+t}{2}$. 反解得$s=\dfrac{4x-1}{2}$，$t=\dfrac{4y-5}{2}$. 因为点$P$在曲线$C$上，$t=s^2$. 将上式代入得

$\dfrac{4y-5}{2}=(\dfrac{4x-1}{2})^2$，化简得 $y=\dfrac{1}{8}(4x-1)^2+\dfrac{5}{4}$.

用表示点 M 的坐标，则有 $s=\dfrac{4x-1}{2}$，$t=\dfrac{4y-5}{2}$，即 $\dfrac{4y-5}{2}=(\dfrac{4x-1}{2})^2$，化简得 $y=\dfrac{1}{8}(4x-1)^2+\dfrac{5}{4}$.

所以点 M 的轨迹方程为：$y=\dfrac{1}{8}(4x-1)^2+\dfrac{5}{4}$，它表示一个抛物线，如图 5.1.17 所示.

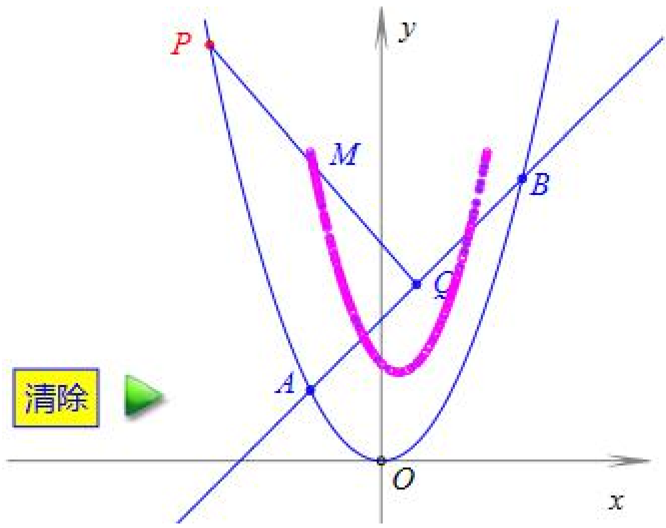


图 5.1.17

（二）求 a 的最小值

【动感体验】

很明显 $G:x^2-2ax+y^2-4y+a^2+\dfrac{51}{25}=0$ 是一个圆的方程．可化为 $(x-a)^2-(y-2)^2=(\dfrac{7}{5})^2$，它表示一个半径为常数 $\dfrac{7}{5}$ 而圆心为（a，2）的圆. 随着 a 的变化，这是一个可以左右平行移动的圆.

进入文件“5-1-例 3.dmr”第二页，如图 5.1.18 所示，圆 T 表示方程 $x^2-2ax-y^2-4y+a^2+\dfrac{51}{25}=0$ 对应的曲线.通过变量尺改变 a 的值或通过按钮设置 a 的值，从而可以水平移动圆 T 的位置.观察区域 D 与圆 T 有公共点的情况下，点 T 的横坐标 a 应满足的条件

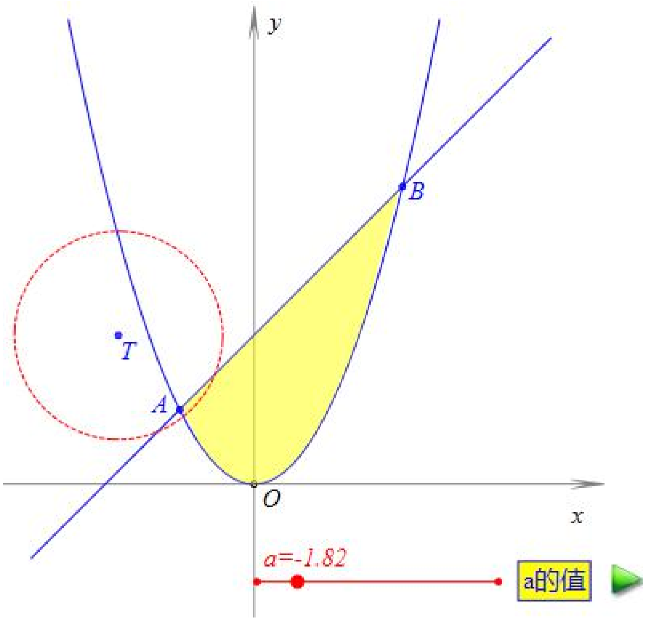


图 5. 1. 18

【思路点拨】

求圆与 D 有公共点时的 a 最小值，就是求圆与线段 AB 相切且位于线段左侧时的 a 的值.

【动态解析】

如图 5. 1. 19 所示，当圆 T 经过点 A 时，将 A（-1，1）代入 $(x-a)^2-(y-2)^2=(\frac{7}{5})^2$

解得：$a=-1-\frac{2\sqrt{6}}{5}$ 或 $a=-1+\frac{2\sqrt{6}}{5}$（舍去）.

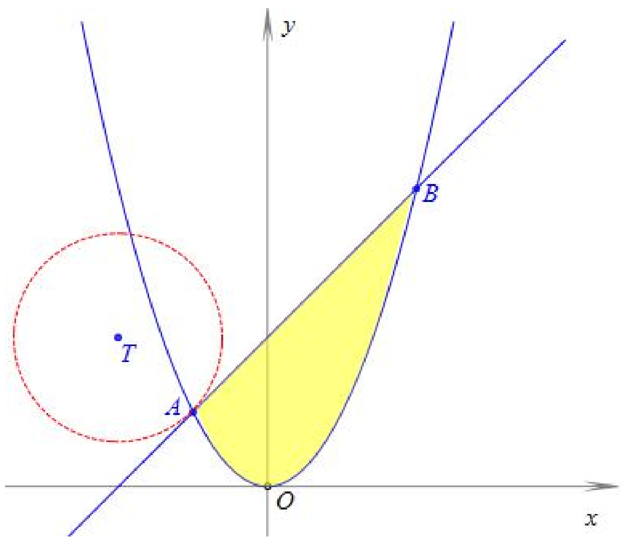


图 5. 1. 19

当圆 T 与直线 $l:x-y+2=0$ 相切时，由点到直线的距离公式得：

$\frac{|a-2+2|}{\sqrt{2}}=\frac{7}{5}$，解得：$a=-\frac{7\sqrt{2}}{5}$ 或 $a=\frac{7\sqrt{2}}{5}$（舍去）. 此时切点坐标为（$-\frac{7\sqrt{2}}{10}$，

$2-\frac{7\sqrt{2}}{10}$ ），因为 $-\frac{7\sqrt{2}}{10}>-1$，所以切点在线段 AB 内. 由此可知 a 的最小值为

$a=-\frac{7\sqrt{2}}{5}$.

【简要评注】

本题中的动圆圆心在一条水平直线上移动，半径固定，因而比较容易了解圆与区域、圆与直线的位置关系. 而最值是取在线段的端点的状态下还是圆与直线相切的条件下，这时本题重点要考察的内容. 直观的演示可以帮助我们探索与发现问题，但只有从数学的角度进行推理和计算才能得到结论.

4．求与圆有关的动态向量

例 4． 直线 $Ax+By+C=0$ 与圆 $x^2+y^2=4$ 相交于 M、N 两点，若 $C^2=A^2+B^2$，求 $\overrightarrow{OM}\cdot\overrightarrow{ON}$（$O$ 为坐标原点）的值.

【动感体验】

圆 $x^2+y^2=4$ 是圆心为坐标原点半径为 2 的圆，设 $\overrightarrow{OM}$ 和 $\overrightarrow{ON}$ 之间的夹角为 α，根据向量的数量积的定义 $\overrightarrow{OM}\cdot\overrightarrow{ON}=|\overrightarrow{OM}|\cdot|\overrightarrow{ON}|\cdot\cos\alpha=4\cos\alpha$，因此关键在于确定向量 $\overrightarrow{OM}$ 与 $\overrightarrow{ON}$ 之间的夹角 α 的大小.

由 $C^2=A^2+B^2$ 得到：$\frac{|C|}{\sqrt{A^2+B^2}}=1$，这说明原点 O 到直线 $Ax+By+C=0$ 的距离等于 1. 因此可以将直线 $Ax+By+C=0$ 看作是经过单位圆上一点并且与单位圆相切的动直线. 打开文件“5-1-例 4.dmr”，拖动点 P，观察直线 $Ax+By+C=0$ 与圆 $x^2+y^2=4$ 两个交点 M、N 的变化规律. 如图 5.1.20 是其中一种情形.

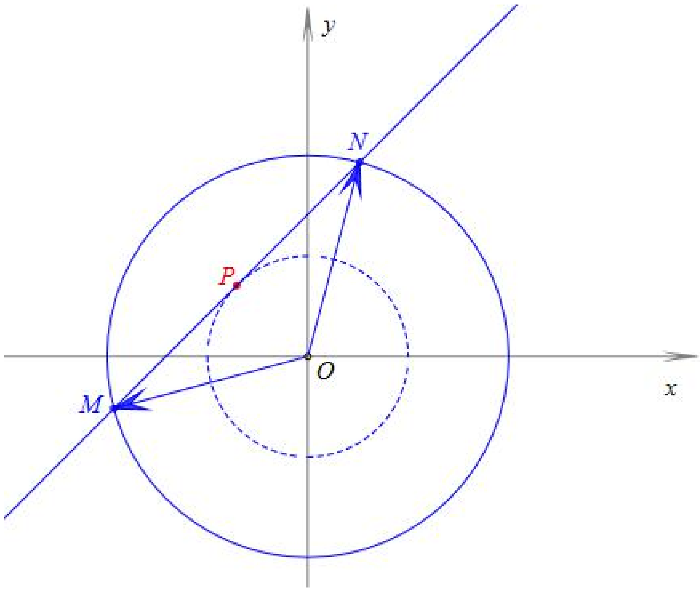


图 5.1.20

【思路点拨】

分析条件$C^2 = A^2 + B^2$的几何意义，研究与夹角α有关的几何关系.

【动态解析】

因为直线$Ax + By + C = 0$过点P且与单位圆相切，所以OP垂直且平分MN. 在$Rt\Delta\ OPM$中，$OP = 1$，$OM = 2$，所以$\angle POM = \frac{\pi}{3}$，$\angle MON = \frac{2\pi}{3}$.

所以$\overrightarrow{OM} \cdot \overrightarrow{ON} = |\overrightarrow{OM}| \cdot |\overrightarrow{ON}| \cdot \cos\alpha = 4\cos\alpha = 4 \cdot \cos\frac{2\pi}{3} = -2$.

因此选择 A.

【简要评注】

解决本题的关键在于在熟练掌握向量的数量积概念的前提下挖掘条件$C^2 = A^2 + B^2$，从而确定直线$Ax + By + C = 0$的特征以求出向量之间的夹角.

5．与直线截距有关的不等关系

例 5． 若直线$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$通过点$M(\cos\alpha, \sin\alpha)$，则（　　）

A．$a^2 + b^2 \leqslant 1$　　　　B．$a^2 + b^2 \geqslant 1$

C. $\dfrac{1}{a^2}+\dfrac{1}{b^2}\leqslant 1$　　　　D. $\dfrac{1}{a^2}+\dfrac{1}{b^2}\geqslant 1$

【动感体验】

由$M(\cos\alpha,\sin\alpha)$想到单位圆，M是这个单位圆上的动点．条件直线$\dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{b}=1$通过点$M(\cos\alpha,\sin\alpha)$实际上是说直线和单位圆有公共点，其中隐含圆心到直线的距离与单位圆的半径1的关系．打开文件“5-1-例5.dmr”，如图5.1.21所示，经过点M和点N的直线表示方程$\dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{b}=1$对应的直线，点$P$和点$Q$分别是直线与$x$轴、$y$轴的交点．拖动点$N$可以任意改变直线性质特征，研究四个选项所表示的几何意义以及成立的可能性．

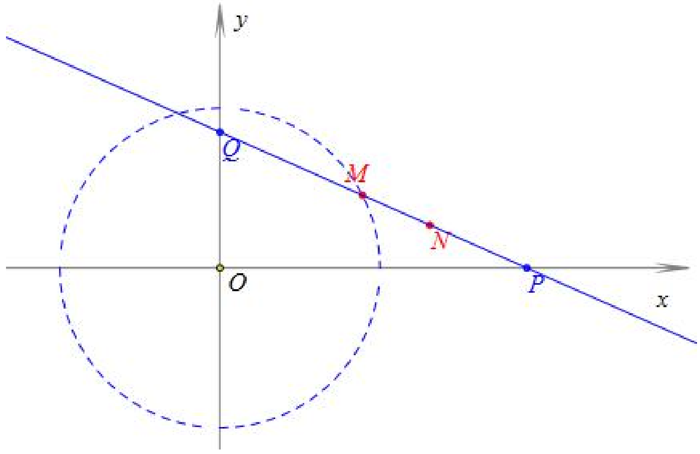


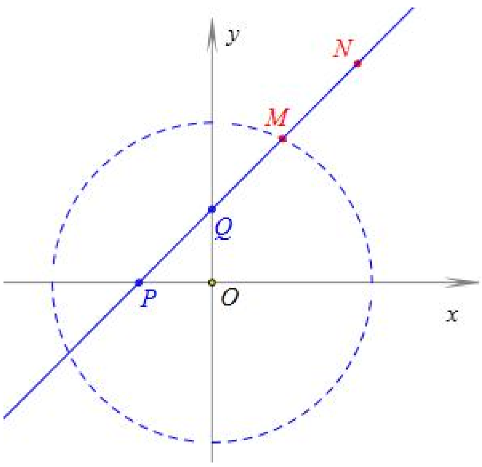
图5.1.21

【思路点拨】

在直角三角形POQ中考虑斜边上的高与单位圆半径之间的关系．

【动态解析】

图5.1.22和图5.1.23说明$a^2+b^2\leqslant 1$和$a^2+b^2\geqslant 1$两种情况都可能成立．



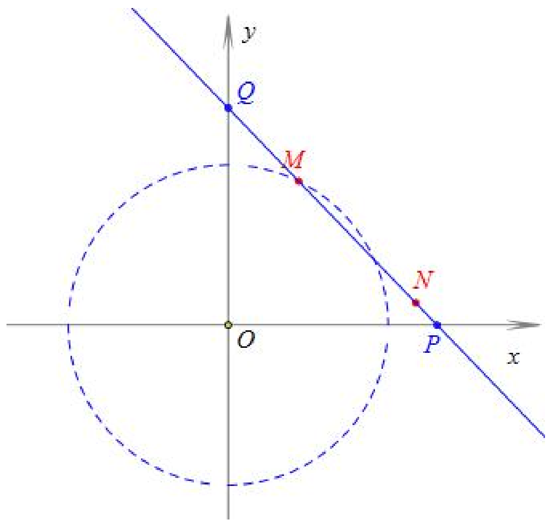


图 5.1.22　　　　　　　　　　　　　　　　图 5.1.23

当直线 $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$ 与圆 O 相切时，如图 5.1,24 所示，直角三角形 POQ 斜边上的高线等于圆 O 的半径 1.

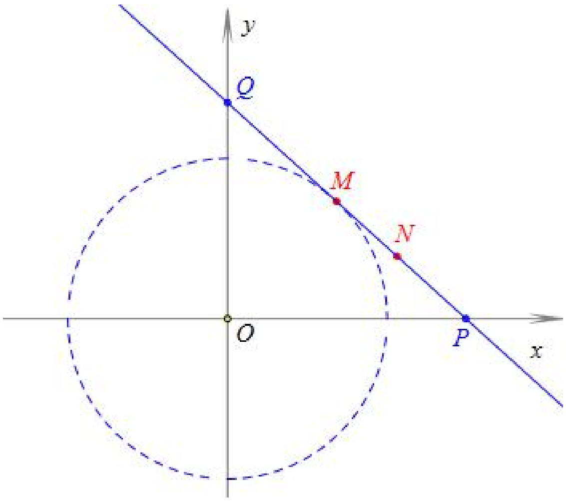


图 5.1.24

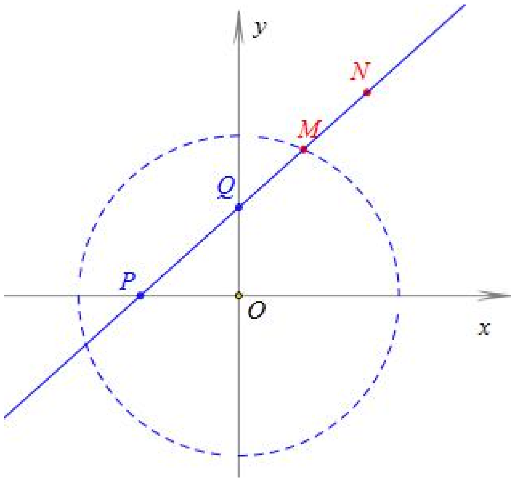


图 5.1.25

而其他情况下，如图 5.1,25 所示，直角三角形 POQ 斜边上的高线小于圆 O 的半径 1.

通过面积公式可以求得直角三角形 POQ 斜边上的高等于 $\frac{a\cdot b}{\sqrt{a^2+b^2}}$，由 $\frac{a\cdot b}{\sqrt{a^2+b^2}}\le 1$

化简得：$\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}\ge 1$.

因此答案选择 D.

如图 5.1.26 所示，则给出直线与单位圆没有公共点的情况，这时 $OM=\frac{a\cdot b}{\sqrt{a^2+b^2}}>1$，

由此 $\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}<1$，即选项 C 表明的关系.

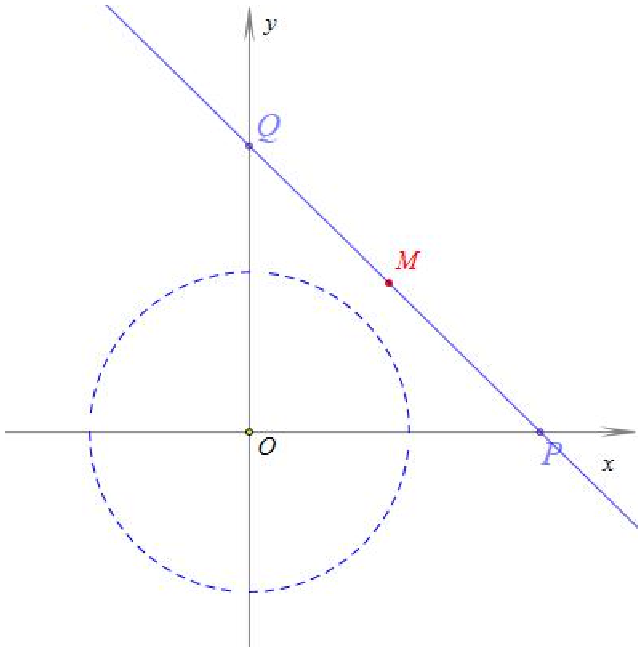


图 5.1.26

【简要评注】

本题中a,b为截距，恰好是直线与两坐标轴的交点及原点所构成的直角三角形的直角边长，因此设法在$Rt\Delta POQ$中找出a^2+b^2及$\dfrac{1}{a^2}+\dfrac{1}{b^2}$的几何意义是解决问题的关键.

本节小结

研究直线与圆的位置关系，通常转换为圆心与直线的距离问题.此外，充分利用代数式的所表示的几何性质，能够提高我们的解题效率、减少出错率和计算量.

拓展练习

1.1．若圆$(x-3)^2+(y+5)^2=r^2$上有且仅有两点到直线$4x-3y-2=0$的距离为1，则半径r的取值范围是_________.

1.2． 圆$x^2+y^2=1$与直线$y=kx+2$没有公共点的充要条件是(　　)

A. $k\in(-\sqrt{2},\sqrt{2})$　　B. $k\in(-\infty,-\sqrt{2})\cup(\sqrt{2},+\infty)$

C. $k\in(-\sqrt{3},\sqrt{3})$　　D. $k\in(-\infty,-\sqrt{3})\cup(\sqrt{3},+\infty)$

1.3． 若过点$A(4,0)$的直线l与曲线$(x-2)^2+y^2=1$有公共点，则直线l的斜率的取值范围为（　　）

A．$(-\sqrt{3},\sqrt{3})$　　B．$[-\sqrt{3},\sqrt{3}]$

C. $\left(-\frac{\sqrt{3}}{3},\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$　　　D. $\left[-\frac{\sqrt{3}}{3},\frac{\sqrt{3}}{3}\right]$

1.4．已知$m\in\mathbf{R}$，直线l：$mx-(m^2+1)y=4m$和圆C：$x^2+y^2-8x+4y+16=0$.

（1）求直线l斜率的取值范围；

（2）直线l能否将圆C分割成弧长的比值为$\frac{1}{2}$的两段圆弧？为什么？

第二节　直线系与圆系

1．动直线与动圆的位置关系

例 1． 已知圆M：$(x+\cos\theta)^2+(y-\sin\theta)^2=1$，直线$l$：$y=kx$，下面四个命题：

A．对任意实数k与θ，直线l和圆M相切；
B．对任意实数k与θ，直线l和圆M有公共点；
C．对任意实数θ，必存在实数k，使得直线l与和圆M相切；
D．对任意实数k，必存在实数θ，使得直线l与和圆M相切.
其中真命题的代号是______________（写出所有真命题的代号）

【动感体验】

这里给出的是圆M的标准方程，其半径为 1，圆心为$(-\cos\theta,\sin\theta)$. 可以想象出这些圆的半径都是 1，而圆心在单位圆上，所以这些圆都过原点；而直线l：$y=kx$则是过原点的直线但不包括y轴.这就不难考虑圆和直线可能有怎样的位置关系了.

打开文件“5-2-例 1.dmr”，如图 5.2.1 所示，拖动点A可以改变的圆M的圆心A的位置.点P是圆O上的动点，可以用经过点O和点P的直线表示直线l：$y=kx$. 拖动点A或者点P，观察和研究圆M和直线l之间的位置关系.

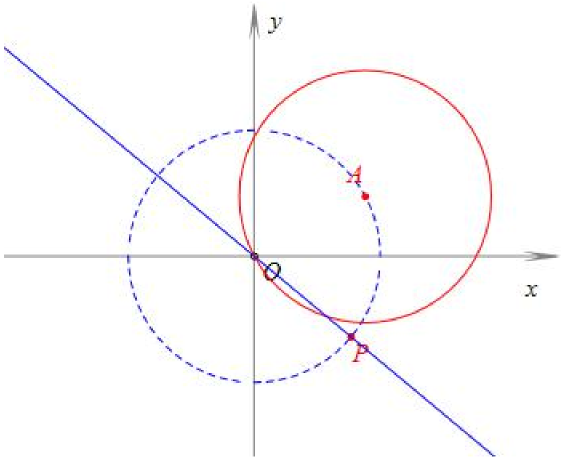


图 5.2.1

【思路点拨】

将圆M与直线l之间的位置关系转化为圆M的半径OA与点M到直线l的距离之间的大小关系.

【动态解析】

通过图 5.2.1 可以观察到，圆M与直线l均经过坐标原点O，因此选项B正确，但选项A错误.

当点P在任意位置时，只要拖动点M使得$OP \perp OA$，就有直线l和圆M相切，即对任意实数k，都存在实数θ，使得直线l和圆M相切，如图 5.2.2 所示. 因此选项D正确.

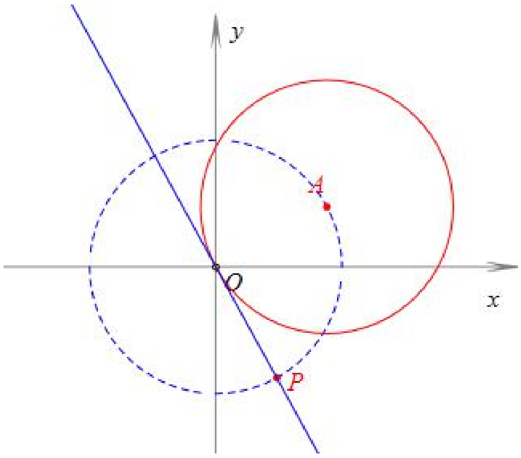


图 5.2.2

当点M在任意位置时，只要拖动点P使得$OP \perp OA$，就有直线l和圆M相切. 但是当点A在x轴上时，如图 5.2.3 和图 5.2.4，则直线l的斜率k不存在，因此选项C错误.

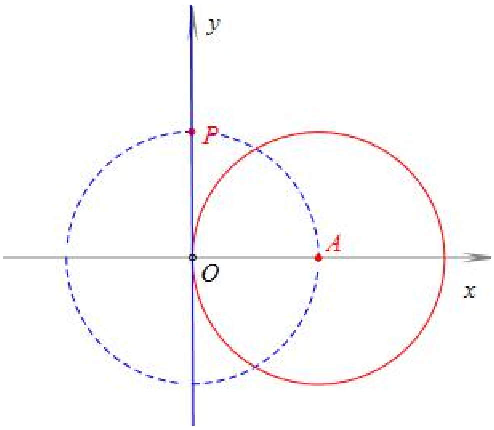


图 5.2.3

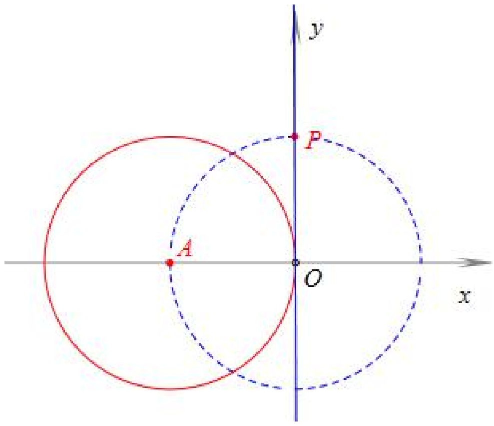


图 5.2.4

正确答案为：B、D.

【简要评注】

本题是不定项选择题，需要对每个命题进行判断. 通过动感体验可以发现动圆与动直线经过的共同点（原点），动中求静是这类问题的一种常见解答思路.

2．动直线及其包络问题

例 2． 设直线系M：$x\cos\theta+(y-2)\sin\theta=1$（$0 \le \theta \le 2\pi$），对于下列四个命题：

A．M中的所有直线均经过一个定点

B．存在定点 P 不在 M 中的任一条直线上

C．对于任意整数 n（$n\geq 3$），存在正 n 边形，其所有边均在 M 中的直线上

D．M 中的直线所能围成的正三角形面积都相等

其中真命题的代号是____________（写出所有真命题的代号）．

【动感体验】

首先是认识直线系 M：$x\cos\theta+(y-2)\sin\theta=1$（$0\leq\theta\leq 2\pi$）具有怎样的特征. 设 $\theta=0,\dfrac{\pi}{2},\pi,\dfrac{3\pi}{2}$ 可以分别得到直线 $x=1$、$y=3$、$x=-1$ 和 $y=1$. 这四条直线与点(0, 2)的距离都等于 1，可以想象直线系 M 是否具有这样的特征. 事实上由 $\dfrac{|0\cdot\cos\theta+(2-2)\cdot\sin\theta-1|}{\sqrt{\cos^2\theta+\sin^2\theta}}=1$ 知道，直线系 M 所表示的是到点 $(0,2)$ 的距离为 1 的直线. 或者说直线系是以点 $(0,2)$ 为圆心、半径为 1 的圆上的切线.

也可以把 $(\cos\theta,\sin\theta)$ 看成直线的单位法向量，于是由向量 $(x,y-2)$ 与 $(\cos\theta,\sin\theta)$ 的数量积等于 1 知直线系 M 是到点 $(0,2)$ 的距离为 1 的直线. 或者说直线系是以点 $(0,2)$ 为圆心、半径为 1 的圆上的切线.

打开文件“5-2-例 2.dmr”，如图 5.2.5 所示，通过变量尺改变字母 θ 的值或通过按钮设置它的值，或者单击动画按钮，观察直线系 M 的特征.

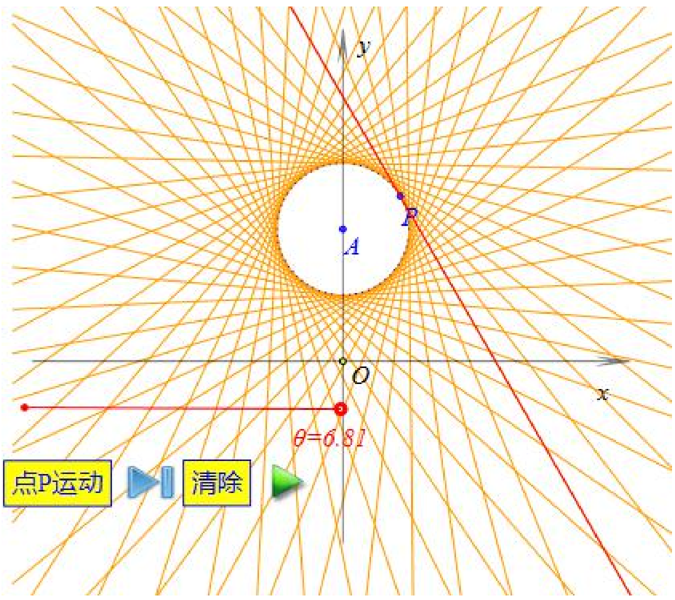


图 5.2.5

【思路点拨】

通过直线 M 的特征及其所围成的区域，对四个命题进行判断.

【动态解析】

M 中的直线不经过任何一个定点，因此选项 A 错误.

圆 A 内的所有点均不在 M 中的任何一条直线上，因此选项 B 正确.

当θ均匀变化，即点P在圆周上匀速运动时，直线之间的交点就是正n边形的顶点，如图 5.2.6—5.2.11 所示，因此选项 C 正确.

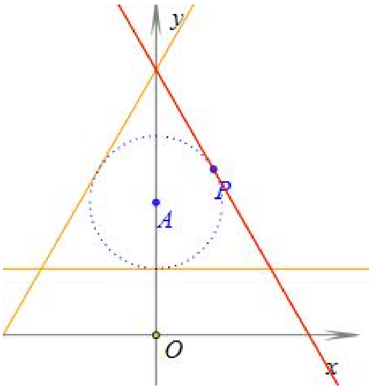


图 5.2.6

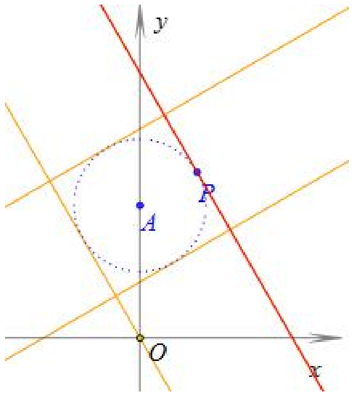


图 5.2.7

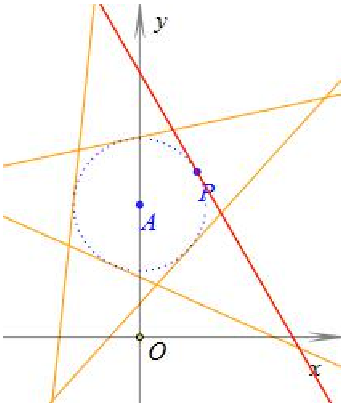


图 5.2.8

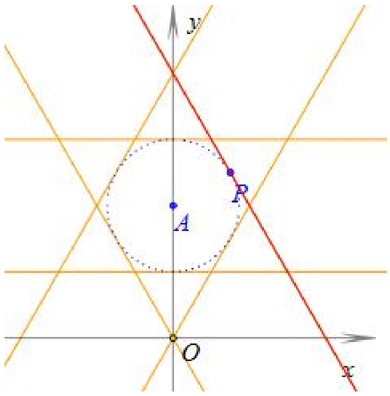


图 5.2.9

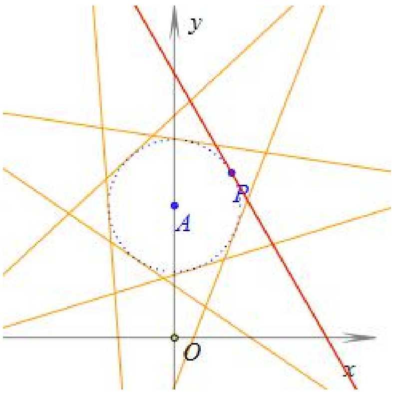


图 5.2.10

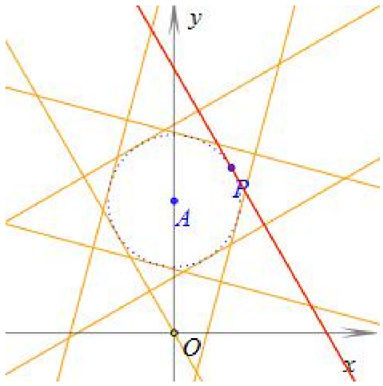


图 5.2.11

单击动画按钮，在打开的用户输入对话框中，如图 5.2.12 所示，可以输入多边形的边数，然后单击“确定”按钮，即可呈现由M中的直线所组成的对应正多边形.

图 5.2.12

M 中的直线所能围成的区域是圆 A 内部，而其内部可以有无数多个面积不同的正三角形，因此选项 D 错误.

所以答案为：B、C.

【简要评注】

抓住直线系的特征才能更好地研究其特点.除了通常的过定点的直线系以及平行直线系外，本题中的直线系也是一种典型类型.

3．动圆及其性质特征

例 3． 设有一组圆 $C_k:(x-k+1)^2+(y-3k)^2=2k^4(k\in\mathbf{N}^*)$．下列四个命题：

A．存在一条定直线与所有的圆均相切

B．存在一条定直线与所有的圆均相交

C．存在一条定直线与所有的圆均不相交

D．所有的圆均不经过原点

其中真命题的代号是______________．（写出所有真命题的代号）

【动感体验】

打开文件“5-2-例 3.dmr”，单击动画按钮，结果如图 5.2.13 所示，表示一组圆 $C_k:(x-k+1)^2+(y-3k)^2=2k^4(k\in\mathbf{N}^*)$，观察这组圆的特点，对四个命题进行判断

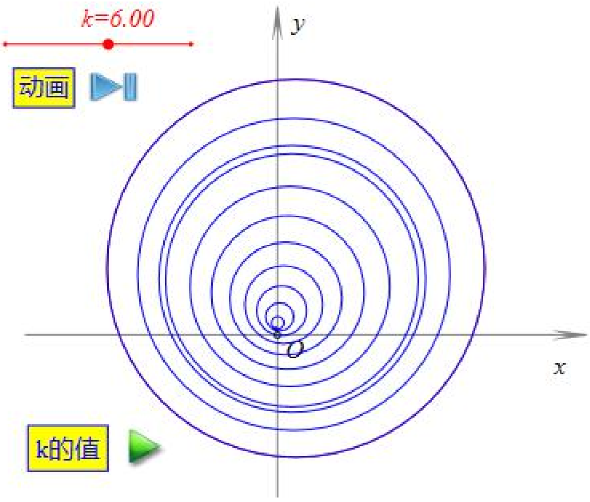


图 5.2.13

【思路点拨】

通过圆心 $C(k-1,3k)$ 与半径 $\sqrt{2}k^2$ 研究系列圆的性质特征.

【动态解析】

可以从最容易判断的选项 D 入手，只需看原点的坐标(0，0)是否适合圆的方程就行了.事实上通过 $(-k+1)^2+9k^2\neq 2k^4$，因此所有的圆均不经过原点，所以选项 D 为真命题.

令 $k=1$ 和 $k=2$ 分别得到：

$C_1:x^2+(y-3)^2=2$ 和 $C_2:(x-1)^2+(y-6)^2=32$

圆心距为$\sqrt{10}$，半径的差等于$3\sqrt{2}$，因为$\sqrt{10}<3\sqrt{2}$，所以两圆内含. 由此看来不可能存在一条直线与所有的圆均相切，所以选项A为假命题.

由于这些圆的圆心为$C_k(k-1,3k)$，所以这些圆的圆心在直线$y=3x+3$上. 这条直线就与所有的圆均相交，所以选项B为真命题.

由于这些圆的半径为$\sqrt{2}k^2$随着k的增大而无限增大，因此不可能存在一条定直线与所有的圆均不相交. 所以选项C是假命题.

因此答案为：B，D.

【简要评注】

在研究直线系和圆系的有关问题时，要抓住他们的共性及其相互关系，才能准确地把握运动中的图形的性质特征. 直线与圆的位置关系的判断还是要充分利用圆心与直线的距离.

本节小结

直线系是一簇有共同特征的直线的总称. 虽然在课本中没有详细介绍，但在练习中却经常出现. 一般地方程中含有函数时就表现为直线系. 圆系的问题也类似，解答过程中方法的选择非常重要.

直线系与圆系的问题都可以分别理解为直线运动与圆运动的问题，在运动的过程探索规律是这一类型题目的典型特征. 抓住共性，例如过直线或圆定点、圆心或者圆的半径固定等等，才能抓住问题的本质和解决问题的关键.

拓展练习

2.1． 在例题3中，若将题设中的$k\in N^*$改为$k\in R$，则上述四个命题中哪几个是真命题？

2.2． 已知椭圆G的中心在坐标原点，长轴在x轴上，离心率为$\frac{\sqrt{3}}{2}$，两个焦点分别为F_1和F_2，椭圆G上一点到F_1和F_2的距离之和为12. 圆C_k：$x^2+y^2+2ky-4y-21=0(k\in R)$的圆心为点$A_k$.

（1）求椭圆G的方程；

（2）求$\Delta A_kF_1F_2$面积；

（3）问是否存在圆C_k包围椭圆G？请说明理由.

第三节 求最值问题

1．求三角形面积的最值

例 1． 若 $AB=2$， $AC=\sqrt{2}BC$， $S_{\Delta ABC}$ 的最大值 ________ ．

【动感体验】

因为 $AB=2$， $AC=\sqrt{2}BC$，可以认为三角形 ABC 的 A、B 两点是确定的而 C 点尚未确定. 可以考虑在满足条件 $AC=\sqrt{2}BC$ 下的点 C 的轨迹图形，然后通过数形结合的方法求三角形面积的最大值.

打开文件“5-3-例 1.dmr”，如图 5.3.1 所示，拖动点 C，观察线段 AC 与 BC 之间的关系，并研究点 C 对三角形 ABC 的形状和面积的影响.

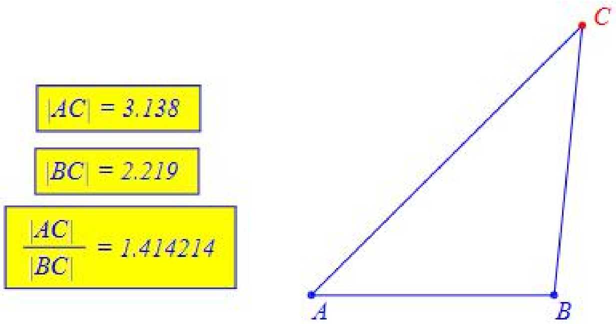


图 5.3.1

【思路点拨】

以 AB 的中点为坐标原点，以有向线段 AB 的方向为 x 轴正方向建立直角坐标系，则点 A 、 B 的坐标可表示为 $A(-1,0)$ 、 $B(1,0)$. 设点 C 的坐标为 $C(x,y)$ ， 则有： $\sqrt{(x+1)^2+y^2}=\sqrt{2}\cdot\sqrt{(x-1)^2+y^2}$ ，化简得： $(x-3)^2+y^2=8$，它表示一个坐标圆心在 $(3,0)$ 、半径为 $2\sqrt{2}$ 的圆. 显然当点 C 与 AB 的距离最大时三角形 ABC 面积取最大值.

【动态解析】

点 C 的轨迹表示一个坐标圆心在 $(3,0)$ 、半径为 $2\sqrt{2}$ 的圆. 进入文件“5-3-例 1.dmr”的第二页，如图 5.3.2 所示.

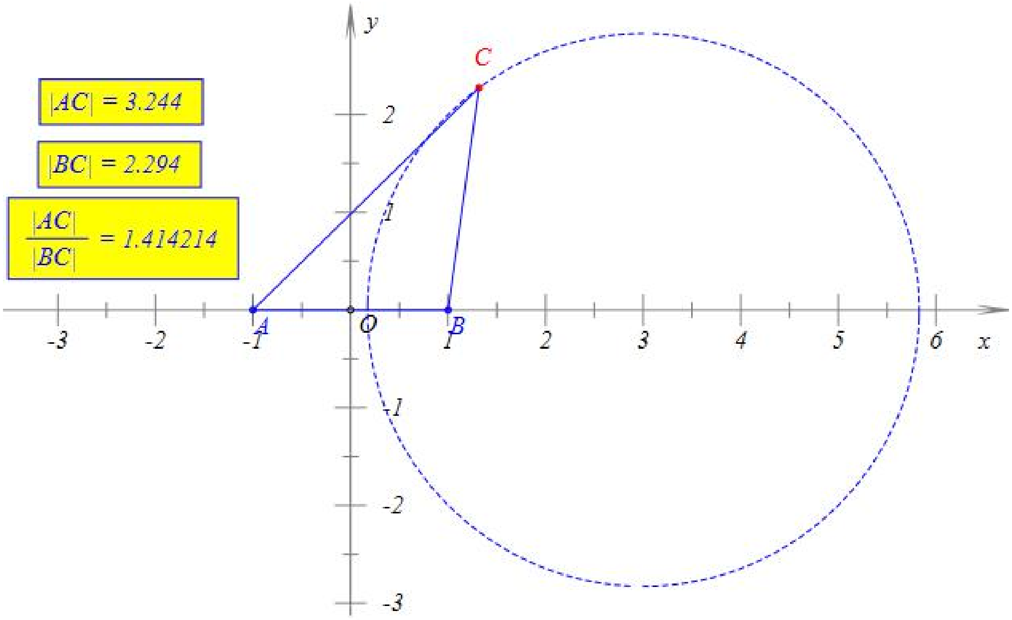


图 5.3.2

容易知道，当点C在圆心正上方或正下方时，三角形ABC的高最大（等于圆的半径），面积也最大. 因此三角形ABC的最大面积等于$\frac{1}{2}\cdot 2\cdot 2\sqrt{2}=2\sqrt{2}$.

【简要评注】

建立坐标系求动点轨迹是代数方法在几何中的应用，引进坐标系即可简化计算，也可使问题变得直观，容易理解. 在本题中，利用点C的轨迹所在的圆直观地表示代数式$AC=\sqrt{2}BC$是解决问题的突破口.

2．求向量数量积的最值

例 2． 已知正三角形OAB的三个顶点都在抛物线$y^2=2x$上，其中O为坐标原点，设圆C是OAB的外接圆（点C为圆心）.

（1）求圆C的方程；

（2）设圆M的方程为$(x-4-7\cos\theta)^2+(y-7\sin\theta)^2=1$，过圆$M$上任意一点$P$分别作圆$C$的两条切线$PE$，$PF$，切点为$E$，$F$，求$\overrightarrow{CE}\cdot\overrightarrow{CF}$的最大值和最小值.

（一）求圆C的方程

打开文件“5-3-例 2.dmr”，如图 5.3.11 所示.

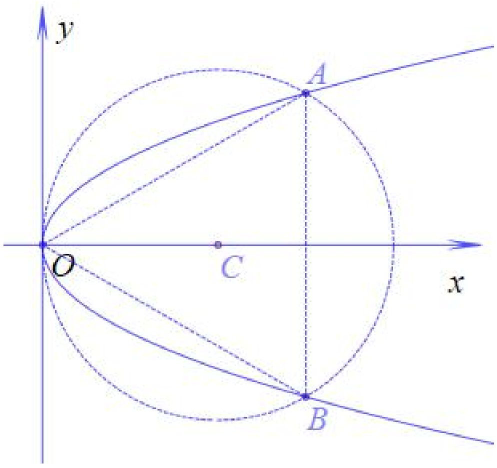


图 5.3.11

利用正三角形 OAB 的三个顶点都在抛物线 $y^2=2x$ 上的条件容易求出 A 点的坐标，进而求出三角形外接圆的圆心和半径.

具体解法如下：

因为 OAB 是正三角形，可知点 A 与点 B 关于 x 轴对称．所以 $\angle xOA=30^o$.

设点 $A(x,\sqrt{2x})$ ，则有：$\tan(\angle xOA)=\dfrac{\sqrt{3}}{3}=\dfrac{\sqrt{2x}}{x}$ ，解得：$x=6$.

由正弦定理知：$\dfrac{OA}{\sin(\angle OBA)}=2R$ ，解得：$R=4$ ．则圆心的坐标为 $(4,0)$.

所以圆 C 的方程为：$(x-4)^2+y^2=16$.

（二）求 $\overrightarrow{CE}\cdot\overrightarrow{CF}$ 的最大值和最小值

【动感体验】

设 $\angle ECF=2\alpha$ ，则 $\overrightarrow{CE}\cdot\overrightarrow{CF}=|\overrightarrow{CE}||\overrightarrow{CF}|\cdot\cos 2\alpha$ ．因 $CE=CF=4$，所以 $\overrightarrow{CE}\cdot\overrightarrow{CF}$ 的大小取决于 $\cos 2\alpha$ 的大小．而这又取决于 CP 的大小（如图 5.3.12 所示）．尽管点 M 在以（4，0）为圆心半径为 7 的圆上，P 又是这圆 M 上任意一点，但需要关注的只是 CP 的变化以及对 $\cos 2\alpha$ 大小的影响.

进入文件“5-3-例 2.dmr”的第二页，点 M 和点 P 均可以被拖动，观察 M 和点 P 的位置与 $\overrightarrow{CE}\cdot\overrightarrow{CF}$ 的大小之间的关系．如图 5.3.12—5.3.15 所示为其中的几种情形.

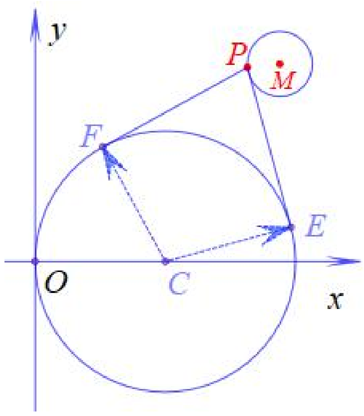


图 5.3.12

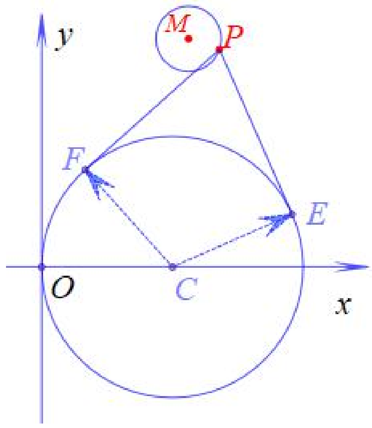


图 5.3.13

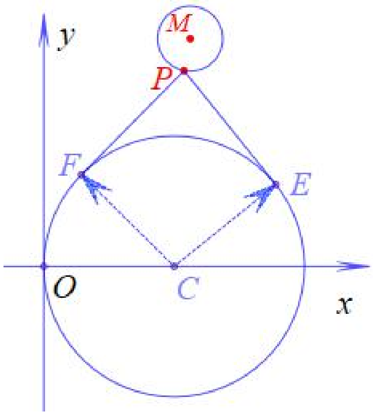


图 5.3.14

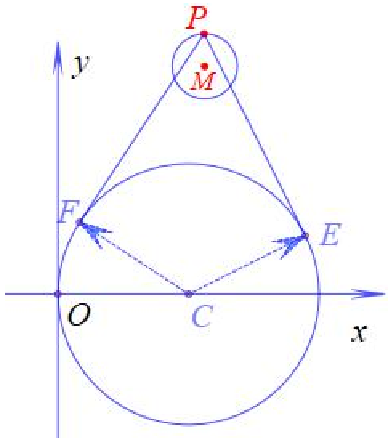


图 5.3.15

【思路点拨】

观察到$|\overrightarrow{CE}|$和$|\overrightarrow{CF}|$为定值，均等于圆C的半径 4，因此$\overrightarrow{CE}\cdot\overrightarrow{CF}$的大小直接与$\angle ECF$有关. 事实上，$\cos 2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1$，而$\cos\alpha = \dfrac{CE}{CP} = \dfrac{4}{CP}$. 当$CP$取最大值时，$\cos 2\alpha$的值最小；当$CP$取最小值时，$\cos 2\alpha$的值最大.

【动态解析】

如图 5.3.16 所示，当点P在线段CM上时，点P距离点C最近，这时$\angle ECF$具有最小值，此时$\overrightarrow{CE}\cdot\overrightarrow{CF}$的值最大. 此时，$CP = CM - PM = 7 - 1 = 6$，而在$Rt\Delta CPF$中，$CF = 4$，所以$\cos\angle FCP = \dfrac{CF}{CP} = \dfrac{2}{3}$.

而$\angle ECP = \angle FCP$，因此

$$\cos\angle ECF = 2\cos^2\angle FCP - 1 = -\frac{1}{9}.$$

所以，$\overrightarrow{CE}\cdot\overrightarrow{CF}$ 的最大值等于 $4\times4\times(-\frac{1}{9})=-\frac{16}{9}$.

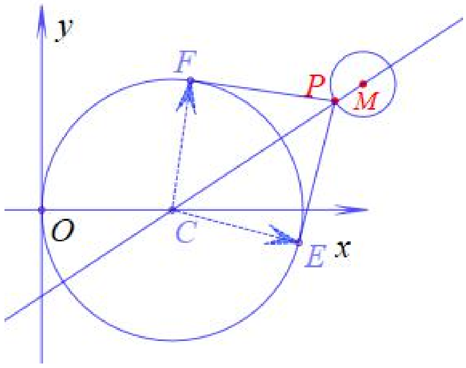


图 5.3.16

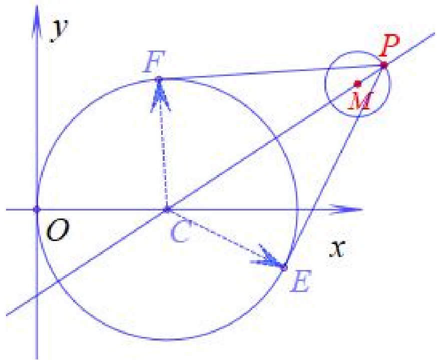


图 5.3.17

如图 5.3.17 所示，当点 P 在射线 CM 的延长线上时，点 P 距离点 C 最远，这时 $\angle ECF$ 具有最大值，此时 $\overrightarrow{CE}\cdot\overrightarrow{CF}$ 的值最小．此时，$CP=CM+PM=7+1=8$，而在 $Rt\Delta CPF$ 中，$CF=4$，所以 $\cos\angle FCP=\frac{CF}{CP}=\frac{1}{2}$.

而 $\angle ECP=\angle FCP$，因此 $\cos\angle ECF=2\cos^2\angle FCP-1=-\frac{1}{2}$．所以，$\overrightarrow{CE}\cdot\overrightarrow{CF}$ 的最小值等于 $4\times4\times(-\frac{1}{2})=-8$.

综上所述 $\overrightarrow{CE}\cdot\overrightarrow{CF}$ 的最大值和最小值分别为：$-\frac{16}{9}$ 和 -8.

【简要评注】

求解最值问题的思路一般有两种，一是化为函数的最值问题，即求出对应问题的函数表达式；另一种则是利用图形的几何意义与几何特征求解．若能将二者有机地结合起来，将能够事半功倍.

本节小结

与圆和直线有关的最值问题是热点问题，除了代数计算方法外，利用图形的几何性质也是重要且简捷的途径．一般来说，与圆有关的最值问题常常在直线与圆相切、直线经过圆心等特殊位置取得.

拓展练习

3.1． 在直角坐标系 xOy 中，以 O 为圆心的圆与直线 $x-\sqrt{3}y=4$ 相切.

（1）求圆 O 的方程；

（2）圆O与x轴相交于A，B两点，圆内的动点P使$\left|PA\right|,\left|PO\right|,\left|PB\right|$成等比数列，求$\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PB}$的取值范围.

3.2． P是双曲线$\dfrac{x^2}{9}-\dfrac{y^2}{16}=1$的右支上一点，$M$、$N$分别是圆$(x+5)^2+y^2=4$和$(x-5)^2+y^2=1$上的点，则$|PM|-|PN|$的最大值为（　　）.

A. 6　　B. 7　　C. 8　　D. 9

第六章 圆锥曲线

圆锥曲线虽然是选修部分的内容，但不过是对于准备升入高等学校进一步学习的学生来说有文理的选择之分，是重要的内容，出现在客观试题和主观试题中. 圆锥曲线包括椭圆、双曲线、抛物线和圆等等，实际上它在中学阶段占有很大的比重. 圆锥曲线部分的试题综合性强，计算量大，因此灵活运用数形结合的思想解决问题非常重要. 用运动的眼光看待问题，这既是命题的一种方向，也是我们深刻理解以及灵活运用圆锥曲线定义和性质的正确途径.

第一节 直线与圆锥曲线

1．直线与抛物形曲线的位置关系

例 1． 若曲线 $y^2=|x|+1$ 与直线 $y=kx+b$ 没有公共点，则 k 、b 分别应满足的条件是 ________________.

【动感体验】

如果题目改成“若曲线 $y^2=x+1$ 与直线 $y=kx+b$ 没有公共点，求 k 、b 分别应满足的条件”，就是一个非常简单的常规题目了，只需要考虑这两个方程组成的方程组没有实数解时 k 、b 分别应满足的条件. 所以解决这个题目的第一步是认识曲线 $y^2=|x|+1$ 的图形. 根据方程的特点这个曲线关于 x 轴和 y 轴都是对称的，所以画出第一象限的图形就可以知道曲线的全貌了. 而在第一象限，这是函数 $y=\sqrt{x+1}$ 的图像. 另外作为一个填空题，要判别直线 $y=kx+b$ 与它有没有公共点看来也无需很大的计算量，通过方程组有无实数解去判断，考虑到一次函数比函数 $y=\sqrt{x+1}$ 的增长要快，这样或许能快速地通过几何直观作出判断.

当 $x\geq 0$ 时，方程 $y^2=|x|+1$ 可化为：$x=y^2-1$，其图像为如图 6.1.1 所示实线部分，将 $x=y^2-1$ 的图像以 y 轴为对称轴进行反射得到方程 $y^2=|x|+1$ 所表示的曲线的另一部分，如图 6.1.2 所示.

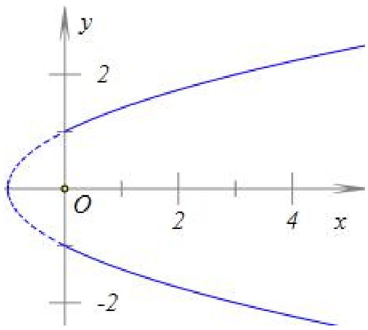


图 6.1.1

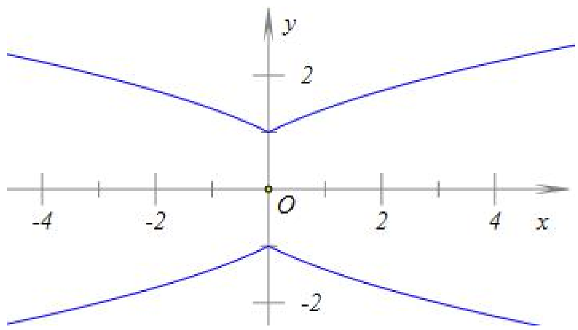


图 6.1.2

打开文件“6-1-例 1.dmr”，如图 6.1.3 所示，可以通过变量尺改变字母 k 和 b 或者通过按钮设置它们的值，从而改变方程 $y=kx+b$ 对应直线的性质. 观察在什么情况下曲线 $y^2=|x|+1$ 与直线 $y=kx+b$ 没有公共点.

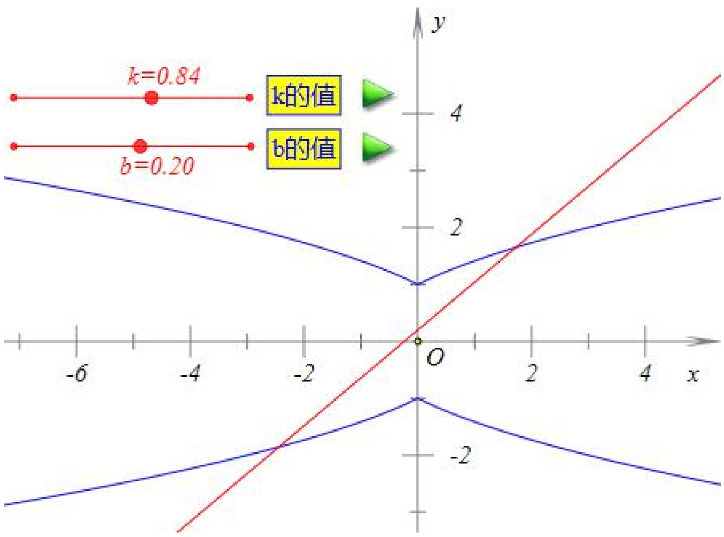


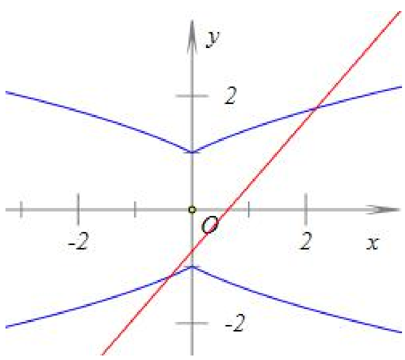
图 6.1.3

【思路点拨】

对抛物线的增长速度与直线的增长速度进行比较.

【动态解析】

当 $-1<b<1$ 时，考虑对于怎样的 k 曲线与直线没有公共点. 我们发现只有当 $k=0$ 时（如图 6.1.5）才能满足要求. 否则不是直线与曲线在第一、三象限相交（$k>0$，如图 6.1.4），就是在第二、四相交（$k<0$，如图 6.1.6）. 从一次函数与幂函数增长的快慢比较也容易理解这一事实.



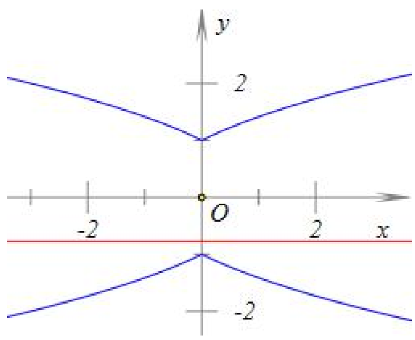


图 6.1.4　　　　　　　　　　图 6.1.5

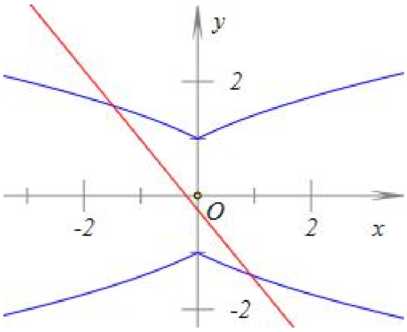


图 6.1.6

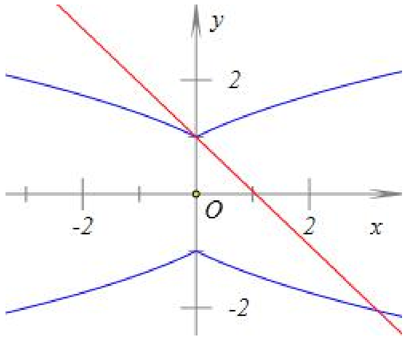


图 6.1.7

当$b=1$时，如图 6.1.7 所示，曲线$y^2=|x|+1$与直线$y=kx+b$一定有公共点. 这是因为直线$y=kx+b$经过点（0，1），而这个点又是曲线$y^2=|x|+1$上的点. 类似地考虑$b=-1$时会得到同样的结果.

当$b>1$时，这时令$k=0$（如图 6.1.9）曲线显然与直线$y=b$相交（因为$y=\sqrt{x+1}$随着自变量的增大无限增大，所以当自变量充分大时函数值总能超过 1）. 而当$k\neq 0$时直线不是在y轴右面和曲线相交（如图 6.1.8）就是在y轴左面与曲线相交（如图 6.1.10）. 因此无论k取何值曲线都会与直线相交. 类似地考虑$b<-1$时会得到同样的结果.

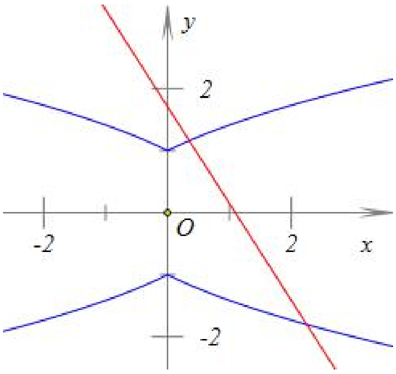


图 6.1.8

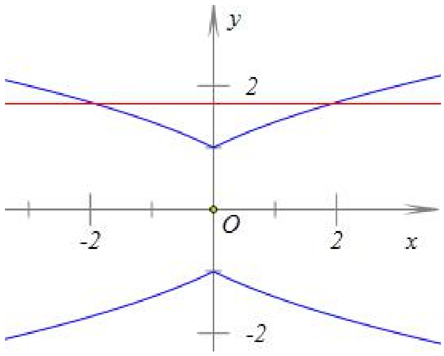


图 6.1.9

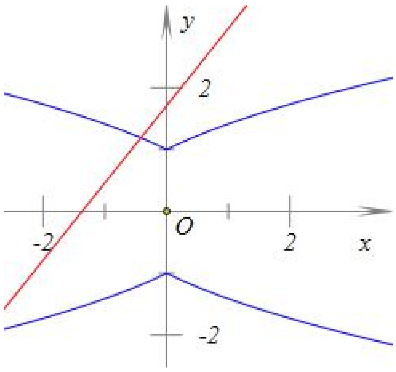


图 6.1.10

所以当曲线$y^2=|x|+1$与直线$y=kx+b$没有公共点的条件是：$k=0$且$-1<b<1$.

【简要评注】

本题体现了近几年来减少计算量而增加思考量的方式对基本数学思想方法的掌握和对基本概念的理解进行考察的趋势.其一是通过曲线方程的特点认识曲线特征，其二是对函数变化趋势的把握，其三是对数形结合和数学实验方法的应用.

从动态体验中可以知道本题中直线的变化速度（$k \neq 0$）最终会超过抛物线，因而可以先确定k的取值范围，然后再研究b满足的条件.作为附件的结论，当$k \neq 0$时，我们也可以进一步研究k，b两个曲线交点位置的影响.

2．直线与抛物线的相交弦问题

例 2．点P在直线$l: y = x - 1$上，若存在过P的直线交抛物线$y = x^2$于A, B两点，且$|PA| = |AB|$，则称点P为“$\mathscr{A}$点”，那么下列结论中正确的是（　　）

A．直线l上的所有点都是“$\mathscr{A}$点”

B．直线l上仅有有限个点是“$\mathscr{A}$点”

C．直线l上的所有点都不是“$\mathscr{A}$点”

D．直线l上有无穷多个点（但不是所有的点）是“$\mathscr{A}$点”

【动感体验】

题目中的直线和抛物线虽然都是同学最熟悉的，但本题却有些新意.一个是对题目本身意义的理解：什么叫点P为“$\mathscr{A}$点”？另外一个是解决方法新颖，不是靠常规的计算弦长和两点距离公式的方法，而是依靠用数学实验的思路获得的对数学事实的洞察：直线$y = x - 1$上的任意一点P一但确定后，移动抛物线上的点A看是否移动到某一位置时P点关于点A的对称点B也在抛物线上（或移动抛物线上的点B看是否移动到某一位置时PB的中点A也在抛物线上）.如果上述情况成立，则说明P为“$\mathscr{A}$点”.

打开文件“6-1-例 2.dmr”，如图 6.1.11 所示，点P为直线$y = x - 1$上的点，点A为抛物线$y = x^2$上的点，点B是点P关于点A的中心对称点.点P、点A均可以被拖动.

当点P在直线$y = x - 1$上某个位置时，拖动点A观察点B是否可能为抛物线$y = x^2$上的点.

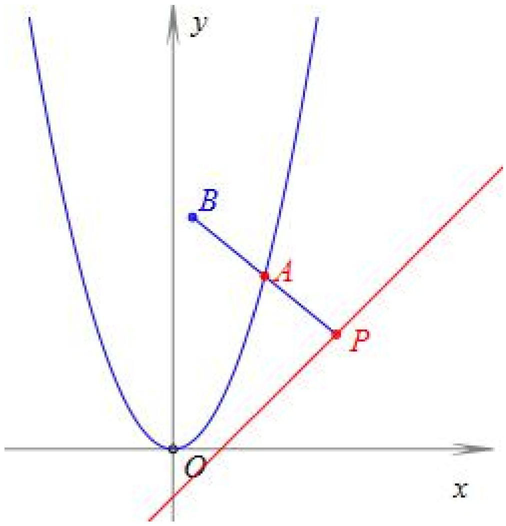


图 6.1.11

【思路点拨】

当点 P 在直线 $y=x-1$ 上某个位置时，若存在抛物线 $y=x^2$ 上某个位置的点 A，则说明 P 为“$\mathscr{A}$点”.

根据点 A 在抛物线上运动的连续性，判断点 A 的存在性.

【动态解析】

对于直线 $y=x-1$ 上的任意点 P，总存在抛物线上的点 A 使得点 B 在抛物线上方，如图 6.1.12 所示；总存在抛物线上的点 A 使得点 B 在抛物线下方，如图 6.1.13 所示.

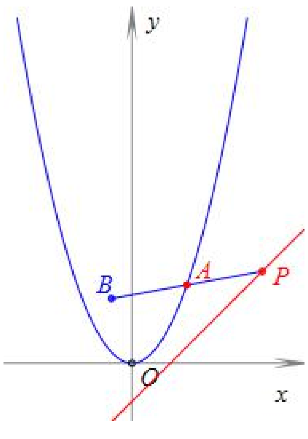


图 6.1.12

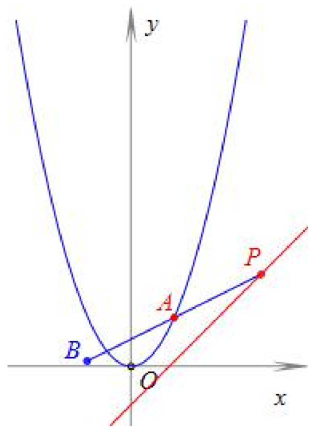


图 6.1.13

因此，根据点 A 在抛物线上运动的连续性，总存在点 A 使得点 B 正好在抛物线上，如图 6.1.14 所示.

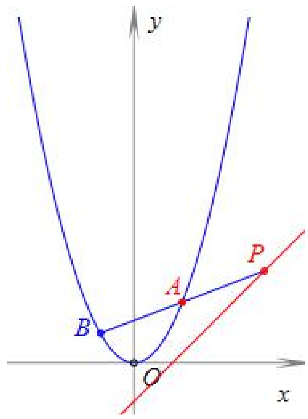


图 6.1.14

故选 A.

【简要评注】

在考场上当然不能利用计算机作动态实验，但如果平时有数学实验的经历，在考场上眼前会浮现动态图形的图景，也可以随手画几个草图帮助判断.

作为一个选择题，可以用上述实验得到解答.如果换成一个证明题也可以从上述实验得到受到启发，得到证明的思路.

本题中要准确找出满足条件的直线 AB 是非常困难的，但通过适当的转换可以看到要证明其存在性却相对容易.

3．直线与双曲线的位置关系

例 3． 在直角坐标系中，对于双曲线 $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>0,\ b>0)$，有以下四个结论：

①存在这样的点 M，使得过点 M 的任意直线都不可能与双曲线有且只有一个公共点；

②存在这样的点 M，使得过点 M 可以作两条直线与双曲线有且只有一个公共点；

③不存在这样的点 M，使得过点 M 可以作三条直线与双曲线有且只有一个公共点；

④存在这样的点 M，使得过点 M 可以作四条直线与双曲线有且只有一个公共点.

这四个结论中，正确的是__________.

方法一：

【动感体验】

这个填空题需要对四个命题的真假性作出判断，其中三个是对具有某种性质点的存在性作出判断，一个是对不存在性某种具有性质的点作出的判断.说明存在性命题为真命题的最好办法是具体指出这样的点，而说明一个不存在性的命题是假命题的最好办法是构造反例.

至于直线与双曲线交点的个数无非是以下几种情况：

（1）直线与双曲线没有公共点；

（2）直线与双曲线只有一个公共点(相切或只有一个交点)；

（3）直线与双曲线有两个公共点.

可以把双曲线和它的渐近线画出来，再想象动点 M 的所有可能位置与过这点的具有不同方向的直线与双曲线的公共点的个数.

打开文件“6-1-例 3.dmr”，如图 6.1.15 所示，通过变量尺可以改变参数 a、b 的值或者通过按钮可以设置它们的值，点 M、点 N 可以被任意拖动，观察直线与双曲线的位置关系，判断上面的结论.

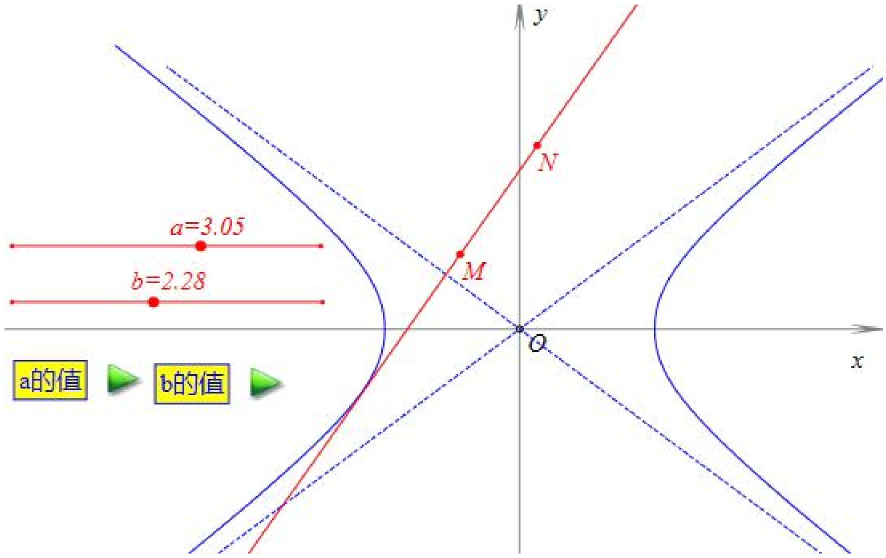


图 6.1.15

【思路点拨】

通过直线 MN 与双曲线的渐近线之间的关系研究直线 MN 与双曲线之间的位置关系.

【动态解析】

设 $k_1=\dfrac{b}{a}$，$k_2=-\dfrac{b}{a}$，则 k_1、k_2 分别表示双曲线两条渐近线的斜率. 同时假设经过点 M 的直线的斜率为 k.

若点 M 在坐标原点位置时，当 $k>\dfrac{b}{a}$（图 6.1.16）或者 $k<-\dfrac{b}{a}$（图 6.1.17）时，或斜率不存在时，直线 MN 与双曲线 $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$ 没有交点；当 $k=\dfrac{b}{a}$（图 6.1.18）或者 $k=-\dfrac{b}{a}$（图 6.1.19）时，直线 MN 与双曲线 $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$ 没有交点；当 $-\dfrac{b}{a}<k<\dfrac{b}{a}$（图 6.1.20 和图 6.1.21）时，直线 MN 与双曲线 $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$ 有两个交点. 因此，此时点 M 的任意直线都不可能与双曲线有且只有一个公共点. 所以结论①正确.

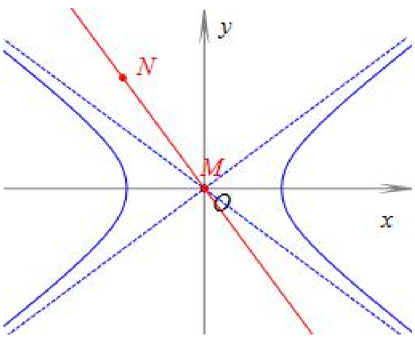


图 6.1.16

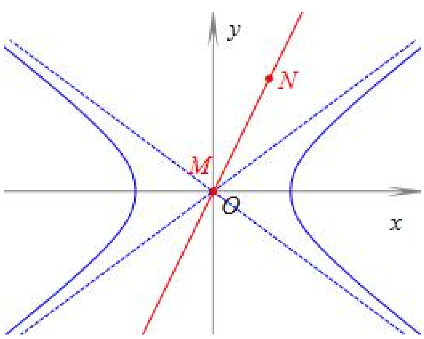


图 6.1.17

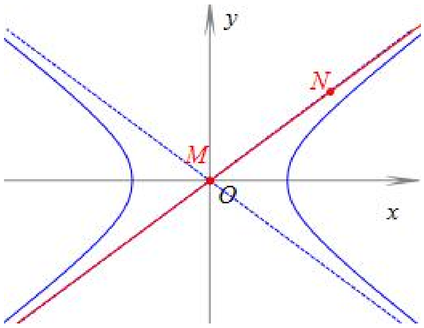


图 6.1.18

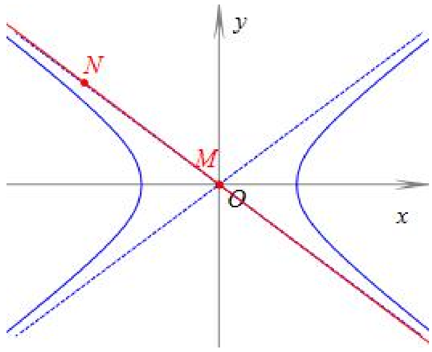


图 6.1.19

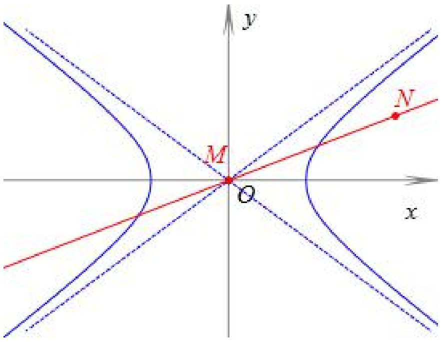


图 6.1.20

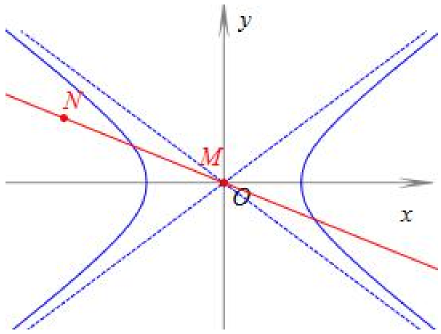


图 6.1.21

由前面的结论知道，当点 M 在原点位置时，过点 M 的任意直线都不可能与双曲线有且只有一个公共点.因此我们分析坐标原点之外的位置.当点 M 在渐近线上时，过点 M 与双曲线的切线（图 6.1.22）以及过点 M 与另外一条渐近线的平行线（图 6.1.23）都与双曲线有且只有一个交点；当点 M 在双曲线上时，过点 M 与双曲线的切线（图 6.1.24）以及过点 M 与其中一条渐近线的平行线（图 6.1.25）都与双曲线有且只有一个交点；当点 M 在其他位置时，过点 M 与两条渐近线分别平行的直线（图 6.1.26、图 6.1.27）与双曲线有且只有一个交点.因此，显然结论②成立.

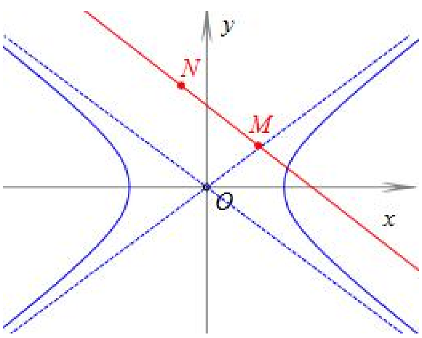


图 6.1.22

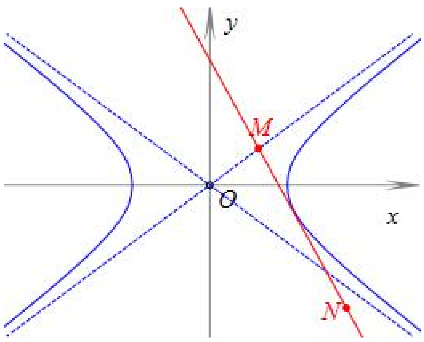


图 6.1.23

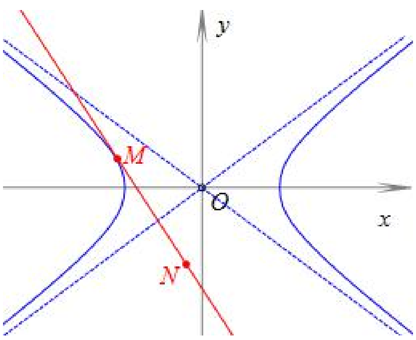


图 6.1.24

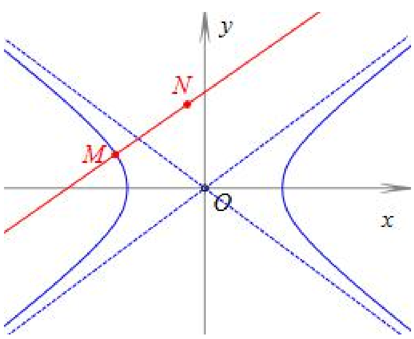


图 6.1.25

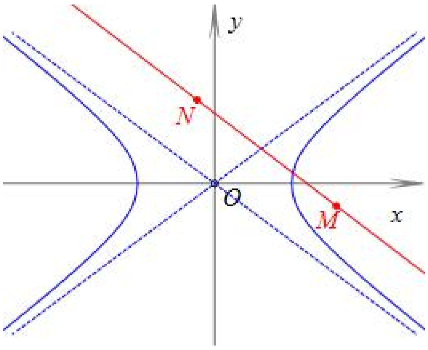


图 6.1.26

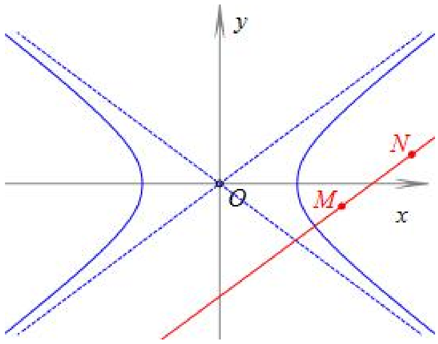


图 6.1.27

显然存在点M，使得过点M可以作三条直线与双曲线有且只有一个公共点.例如经过双曲线的顶点可以作三条直线与双曲线有且只有一个公共点,分别是过点M的竖直直线(图6.1.28)、过点M且斜率为k_1的直线(图6.1.29)和过点M且斜率为k_2的直线(图6.1.30).因此结论③错误.

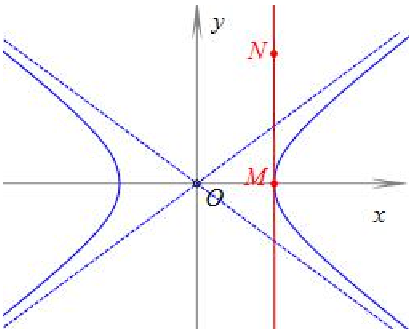


图 6.1.28

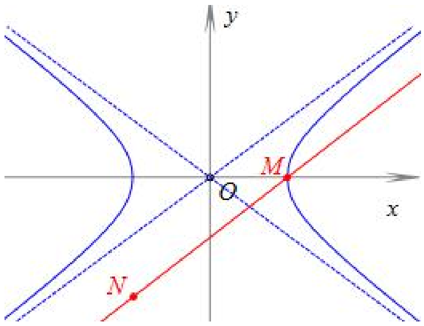


图 6.1.29

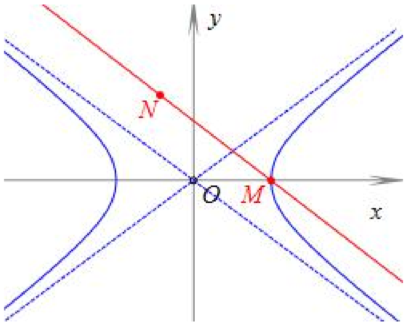
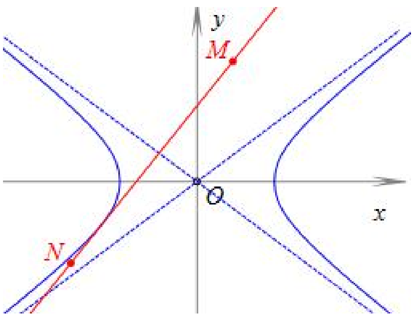


图 6.1.30

如图6.1.31、图6.1.32、图6.1.33、图6.1.34，过点存在四条过点M的直线与双曲线有且只有一个公共点,他们分别是过点M与渐近线平行的两条直线和过点M与双曲线相切的直线.因此结论④正确.



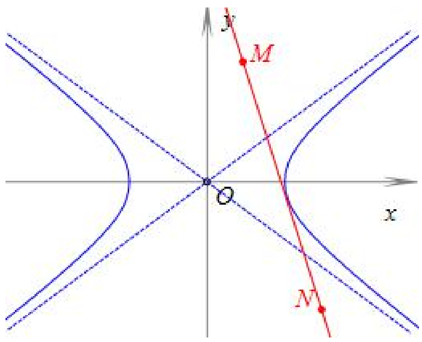


图 6.1.31　　　　　　　　　　　图 6.1.32

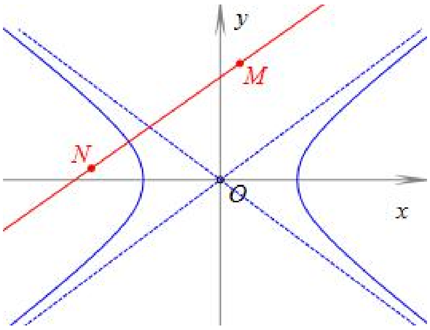


图 6.1.33

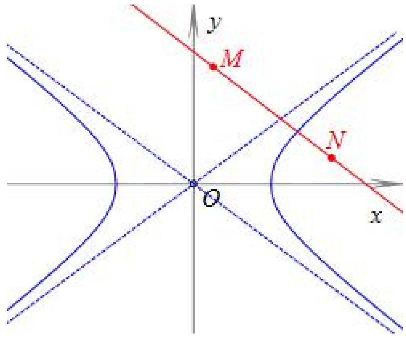


图 6.1.34

方法二：

【动感体验】

进入文件“6-1-例 3.dmr”的第二页，如图 6.1.35 所示，过点 M 的五条直线分别是双曲线 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ 的两条切线、与两条渐近线分别平行的直线和经过平面上任意点 N 的直线. 拖动点 M，然后对四个选项进行判断.

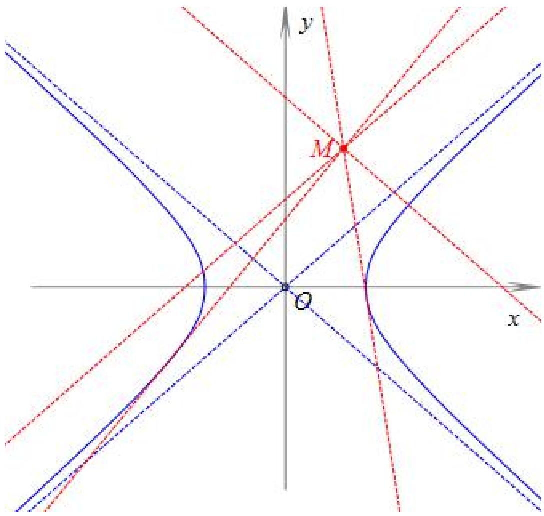


图 6.1.35

【思路点拨】

移动 M 点到各种不同的位置观察直线与双曲线公共点的个数有助本题的解答.

【动态解析】

对于结论①：存在这样的点 M，使得过点 M 的任意直线都不可能与双曲线有且只有一个公共点.

其实把点 M 移动到坐标原点，可以发现点 M 正是所要求的情况. 这时过点 M 的任意直线要么与双曲线有两个交点（如图 6.1.36 所示），要么与双曲线就没有公共点（如图 6.1.37 所示），所以这个命题是真命题.

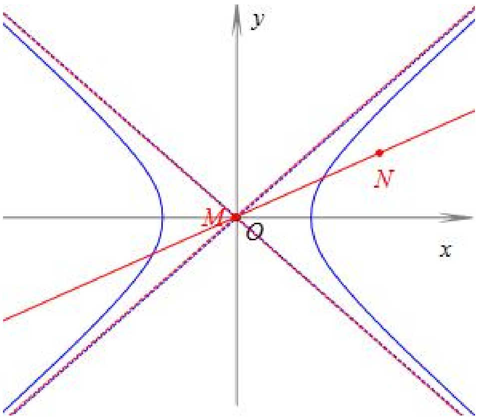


图 6.1.36

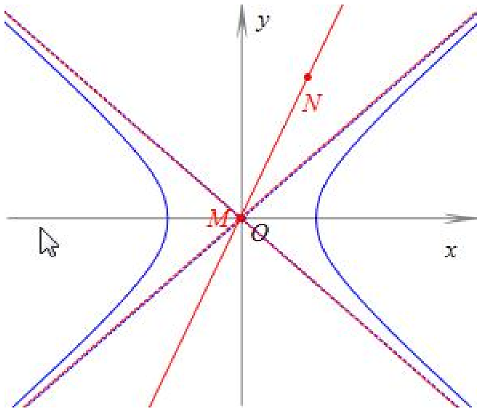


图 6.1.37

对于结论②：存在这样的点 M，使得过点 M 可以作两条直线与双曲线有且只有一个公共点.

这很明显，在图 6.1.35 中过点 M 的那四条直线选择其中两条就符合要求了.所以这个命题也是真命题.

对于结论③：不存在这样的点 M，使得过点 M 可以作三条直线与双曲线有且只有一个公共点.

这显然是错误的，当把点 M 移动到双曲线上，如图 6.1.38 所示，这时过点 M 只能作双曲线的一条切线，因此过点 M 可以作三条直线与双曲线有且只有一个公共点.

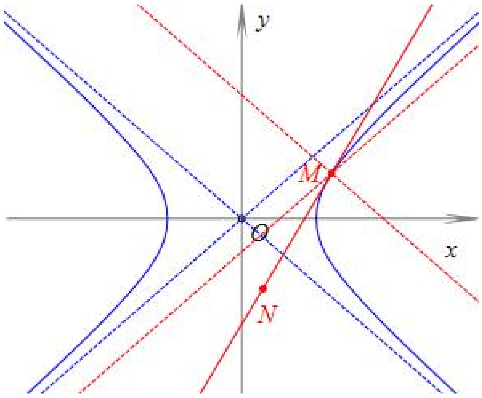


图 6.1.38

④存在这样的点 M，使得过点 M 可以作四条直线与双曲线有且只有一个公共点.

在图 6.1.35 中的点 M 就是符合要求的点.

所以，这四个结论中正确的是①②④.

【简要评注】

直线与双曲线的位置关系较为复杂，因为其中只有一个交点的情况，需要严谨的思维过程方能考虑周全.以本题为例，点 M 应分为四类进行讨论：原点、双曲线上的点、渐近线上的点和其他位置的点，而相应的直线需要考虑与双曲线相切、与渐近线平行等各种情况，动感体验的过程可以帮助我们更加慎密地思考问题.

4．点与椭圆位置关系的应用

例 4．已知椭圆 $C:\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1\left(a>b>0\right)$ 的离心率为 $\dfrac{\sqrt{3}}{3}$，过右焦点 F 的直线 l 与 C

相交于 A、B 两点，当 l 的斜率为 1 时，坐标原点 O 到 l 的距离为 $\frac{\sqrt{2}}{2}$.

（Ⅰ） 求 a，b 的值；

（Ⅱ）C 上是否存在点 P，使得当 l 绕 F 转到某一位置时，有 $\overrightarrow{OP}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}$ 成立？若存在，求出所有的 P 的坐标与 l 的方程；若不存在，说明理由.

（一）求 a、b 的值

这是一个常规题. 两个未知数，有两个联系这两个未知数的方程就可以解. 由离心率为 $\frac{\sqrt{3}}{3}$ 可以得到关于 a，b 的一个关系，现在挖掘另外一个条件.

设点 T 为点 O 到直线 l 的垂足，则在直角三角形 OTF 中，$\angle OFT=45^o$，$OT=\frac{\sqrt{2}}{2}$，所以，$OF=1$，即 $c=1$.

由 $e=\frac{c}{a}=\frac{\sqrt{3}}{3}$ 得，$a=\sqrt{3}$. 所以 $b=\sqrt{a^2-c^2}=\sqrt{2}$.

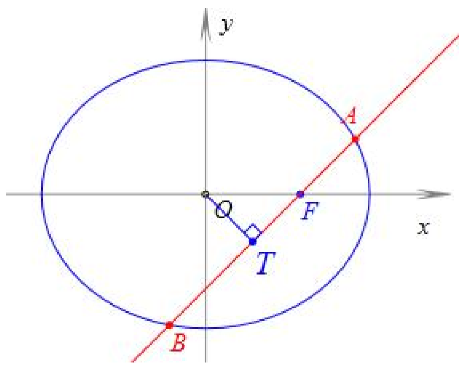


图 6. 1. 39

（二）探索点 P 的存在性

【动感体验】

这是一个探索性问题，l 绕 F 旋转实际上是与 l 的斜率有关的，因此可以设 l 的斜率为 k，利用点斜式列出直线 l 的方程. 根据题设条件 A、B 两点既然是 l 与 C 的交点，其坐标就是直线 l 与 C 的方程组的解，可以通过 k 表示. 用点 A 和点 B 的坐标表示点 P 的坐标，设 $A(x_1,y_1)$ 和 $B(x_2,y_2)$，则 $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}=(x_1+x_2,y_1+y_2)$. 因为 $\overrightarrow{OP}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}$，所以 $\overrightarrow{OP}=(x_1+x_2,y_1+y_2)$，于是点 P 的坐标等于 (x_1+x_2,y_1+y_2) 也可以用 k 表示. 若点 P 在 C 上，P 点的坐标必然适合椭圆的方程. 这样就得到了一个关于 k 的方程. 这个方程如果有实数解，不仅说明 C 上存在适合条件的点 P 还能求出这点的坐标以及直线 l 的方程，否则

这样的点不存在.

打开文件“6-1-例 4.dmr”，如图 6.1.40 所示，四边形 $AOBP$ 是平行四边形，则有 $\overrightarrow{OP}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}$. 点 A 可以被拖动，观察点 P 是否可能在椭圆上.

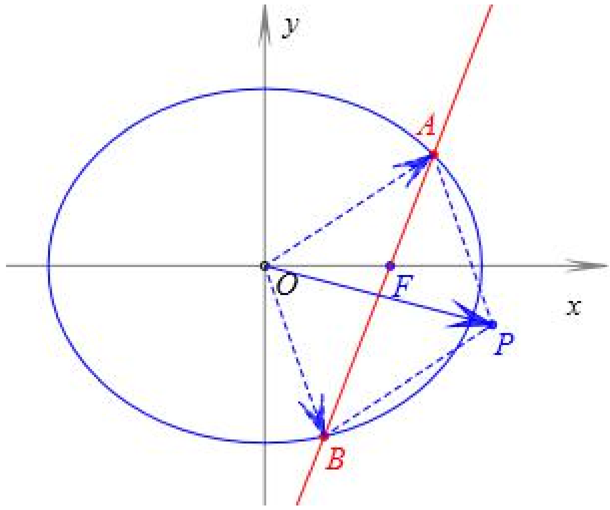


图 6.1.40

【思路点拨】

若同时存在点 P 在椭圆之外和椭圆之内两种情况，则肯定存在点 P 在椭圆上的情况；用点 A 和点 B 的坐标表示点 P 的坐标，根据题设条件反求直线 l 的斜率.

【动态解析】

如果这个题目仅仅是判断 C 上是否存在点 P，使得当 l 绕 F 转到某一位置时，有 $\overrightarrow{OP}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}$ 成立？则无需以上复杂的计算. 可以考虑这样一个连续的动态变化过程：当直线 l 垂直于轴时，点 P 在椭圆外，当 l 的斜率为零时，点 P 在椭圆内，因此必然在一个中间过程的某一时刻使得 P 点落在椭圆上.

当 l 的斜率不存在时，点 P 在椭圆之外，如图 6.1.41 所示. 这是因为 $\overrightarrow{OP}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}=2\overrightarrow{OF}$，$|\overrightarrow{OP}|=2c=2>\sqrt{3}$.

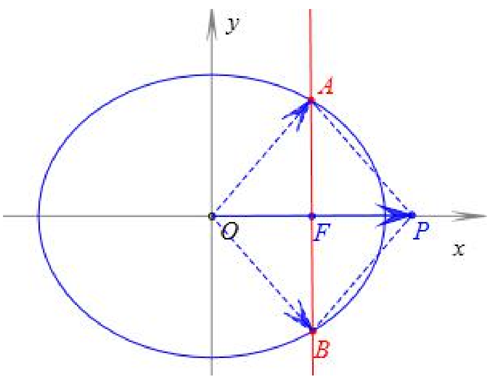


图 6.1.41

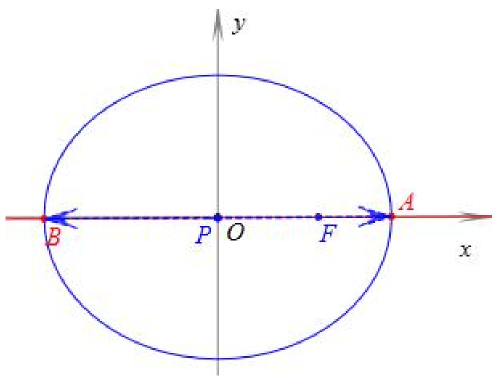


图 6.1.42

当 l 的些率为 0 时，点 P 在椭圆之内，如图 6.1.42 所示，这是因为 $\overrightarrow{OA}=-\overrightarrow{OB}$，所以 $|\overrightarrow{OP}|=0$.

所以一定存在点 P 在椭圆上的情况，使得 $\overrightarrow{OP}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}$，如图 6.1.43 和图 6.1.44 所示.

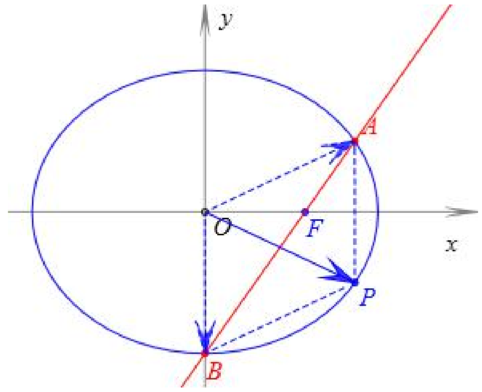


图 6.1.43

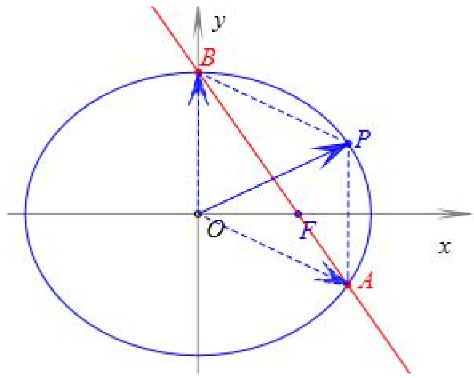


图 6.1.4

设 l 的斜率为 k，由 $\begin{cases} y=k(x-1) \\ \dfrac{x^2}{3}+\dfrac{y^2}{2}=1 \end{cases}$ 得：$(2+3k^2)x^2-6k^2x+3k^2-6=0$，所以，

$x_A+x_B=\dfrac{6k^2}{2+3k^2}$.

则：$x_P=x_A+x_B=\dfrac{6k^2}{2+3k^2}$，$y_P=y_A+y_B=k(x_A+x_B-2)=\dfrac{-4k}{2+3k^2}$.

当点 P 在椭圆上时，$\dfrac{x_P^2}{3}+\dfrac{y_P^2}{2}=1$，代入化简得：$(k^2-2)(3k^2+2)=0$，解得：

$k=-\sqrt{2}$ 或者 $k=\sqrt{2}$.

【简要评注】

这是一个常规的综合题，通过这个题说明对基本知识的熟练掌握是至关重要的. 例如关于椭圆的标准方程，直线方程的几种基本形式，如何求直线与椭圆的交点，点在椭圆上的条件，有关向量的基本知识等等. 此外就是如何分析题目的条件解决探索性问题. 我们可以从探求的点存在入手，转化为研究存在的条件是否能够满足.

不同于一般的存在性问题的解题思路，本题先论证了点 P 的存在性，为后面的求解明确了方向.

本节小结

直线与圆锥曲线的位置关系涉及到函数与方程、数形结合、划归、分类讨论等数学思想. 常规的方法是联立方程后转化为一元二次方程问题，灵活运用数形结合可以避免繁琐的计算.

通过本节所讨论的问题可以看出，只定性地研究交点的个数、存在性等问题时，数形结合会比单纯的代数运算让问题变得更直观、更简洁.

拓展练习

1．直线 $y=2k$ 与曲线 $9k^2x^2+y^2=18k^2|x|$ $(k\in R,且k\neq 0)$ 的公共点的个数为（　　）

A．1　　　B．2　　　C．3　　　D．4

2．讨论直线 $y=kx+b$ 与曲线 $y^2=|x|+1$ 交点的个数.

3．已知双曲线 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$ 的右焦点为 F，若过点 F 且倾斜角为 60^o 的直线与双曲线的右支有且只有一个交点，求此双曲线离心率的取值范围.

4．在例 3 中，除了原点之外，是否还存在其它位置使得过点 M 的任意直线都不可能与双曲线有且只有一个公共点？

5．在例 3 中，点 M 在哪些位置时，不存在过点 M 的三条直线与双曲线有且只有一个公共点？点 M 在哪些位置时，不存在过点 M 的四条直线与双曲线有且只有一个公共点？

第二节 圆与圆锥曲线

1．圆与抛物线的位置关系

例 1．若 A、B 是抛物线 $y^2=4x$ 上的不同两点，弦 AB（不平行于 y 轴）的垂直平分线与 x 轴相交于点 P，则称弦 AB 是点 P 的一条“相关弦”. 已知当 $x>2$ 时，点 $P(x,0)$ 存在无穷多条“相关弦”. 给定 $x_0>2$.

（I）证明：点 $P(x_0,0)$ 的所有“相关弦”的中点的横坐标相同；

（II）试问：点 $P(x_0,0)$ 的“相关弦”的弦长中是否存在最大值？若存在，求其最大值（用 x_0 表示）：若不存在，请说明理由.

（一）证明点 $P(x_0,0)$ 的所有“相关弦”的中点的横坐标相同

【动态体验】

根据 PM 是 AB 的垂直平分线，得到 $PA=PB$，可知 AB 是以 P 为圆心 PA 为半径的圆的弦. 设 $PA=t$，于是 AB 就是抛物线 $y^2=4x$ 与圆 $(x-x_0)^2+y^2=t^2$ 的公共弦.

打开文件“6-2-例 1.dmr”，如图 6.2.1 所示，拖动点 A 可以改变点 P 的相关弦 AB，观察和研究 AB 的中点 M 的运动路径.

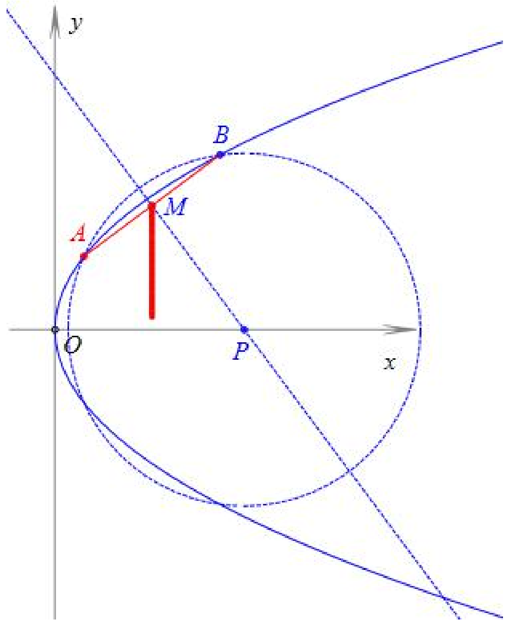


图 6.2.1

【思路点拨】

从抛物线 $y^2=4x$ 与圆 $(x-x_0)^2+y^2=t^2$ 这两个方程消去 y 就得到 AB 的端点的横坐标.

【动态解析】

从 $y^2=4x$ 与 $(x-x_0)^2+y^2=t^2$ 这两个方程消去 y 就得到 AB 的端点的横坐标满足的方程 $x^2+(4-2x_0)x+x_0^2-t^2=0$，再根据关于点 M 是 AB 的中点和根与系数的关系，则有：$x_M=\dfrac{x_A+x_B}{2}=\dfrac{-(4-2x_0)}{2}=x_0-2$.

所以点 $P(x_0,0)$ 的所有“相关弦”的中点的横坐标都相同，等于 x_0-2.

另解：设弦 AB 所在直线方程为 $y=kx+b$，将其带入到抛物线方程中并化简得：$k^2x^2+(2kb-4)x+b^2=0$. 于是：

$$x_A+x_B=\frac{-(2kb-4)}{k^2}，\ x_M=\frac{x_A+x_B}{2}=\frac{2-kb}{k^2}，\ y_M=\frac{2}{k}.$$

AB 的垂直平分线方程为 $y-\dfrac{2}{k}=-\dfrac{1}{k}(x-x_M)$，令 $y=0$，求出 $2=x_0-x_M$. 于是点 $P(x_0,0)$ 的所有“相关弦”的中点的横坐标满足条件 $x_M=x_0-2$.

（二）探索点 $P(x_0,0)$ 的“相关弦”的最长的弦

【动态解析】

对于点 $P(x_0,0)$ 的“相关弦”来说，x_0 是常数. 要求这其中的“相关弦”的弦长当中是否存在最大值就需要把弦长考虑为某一变量的函数，进而考虑这个函数有无最大值.

联系到第一问已经得到的结果，自然想到线段 $x=x_0-2$ 上的点 M 一旦确定 AB 就随之确定了. 于是可以设 M 的坐标为 (x_0-2,t)，把弦长考虑为 t 的函数，用 t 表示弦长. 这时 PM 与 AB 的斜率都可以用 t 表示，直线 AB 的方程就可以用含 t 为参数的方程表示. AB 又是直线与抛物线相交所得到的弦，利用这两个方程组成的方程组不难得出 AB 弦长借助 t 表示的函数解析式. 这样问题就归结为所得到的函数是否存在最大值的问题了.

具体解法如下：

设 M 的纵坐标为 t，直线 AB 的方程为 $y-t=k(x-x_M)$，把 $y=k(x-x_M)+t$ 代入 $y^2=4x$ 中，整理得

$$k^2x^2+2[k(t-kx_M)-2]x+(t-kx_M)^2=0. \qquad (\bullet)$$

则 x_A、x_B 是方程（•）的两个实根，于是有 $x_A\cdot x_B=\dfrac{(t-kx_M)^2}{k^2}$.

设点 P 的“相关弦” AB 的弦长为 l，则：

$$l^2=(x_A-x_B)^2+(y_A-y_B)^2=(1+k^2)(x_A-x_B)^2$$

$$=(1+k^2)[(x_A+x_B)^2-4x_Ax_B]=4(1+k^2)(x_M{}^2-x_Ax_B)$$

因为 $k_{MP}=-\dfrac{t}{2}$，所以 $k_{AB}=\dfrac{2}{t}$，$x_A\cdot x_B=\dfrac{t^2}{4}(t-\dfrac{2x_M}{t})^2$.

代入上式可得：

$$4(1+\frac{4}{t^2})[x_M{}^2-\frac{t^2}{4}(t-\frac{2x_M}{t})^2]$$

$$=(4+t^2)(4x_M-t^2)=-t^4+4t^2(x_M-1)+16x_M$$

$$=-[t^2-2(x_M-1)]^2+4(x_M-1)^2+16x_M$$

$$=-[t^2-2(x_M-1)]^2+4(x_M+1)^2$$

由于 $x_M=x_0-2$，代入上式得：$l^2=-[t^2-2(x_0-3)]^2+4(x_0-1)^2$.

对于 t^2 而言这是一个二次函数，要求这个函数的定义域必须考虑到 M 的几何意义，于

是有：

$0 \le t^2 < 4x_M = 4(x_0-2) = 4x_0-8$，于是$t^2 \in [0,4x_0-8)$.

当$2(x_0-3) \in [0,4x_0-8)$即$x_0 \ge 3$时AB弦长有最大值$2(x_0-1)$；当$2(x_0-3)<0$即$2<x_0<3$时，函数在$t^2=0$处取得最大值，此时AB弦长有最大值$4\sqrt{x_0-2}$.

进入文件“6-2-例 1.dmr”的第二页，呈现如图 6.2.2 所示界面.通过变量尺改变字母t的值或通过按钮设置它们的值，从而可以改变点M的位置，观察动弦AB以及PM、AB斜率的变化，从而加深对解题思路的理解.还可以通过变量尺改变 x0 的值或通过按钮设置它的值，从而改变点P的位置，验证不同情况下答案的正确性（先给定x_0的值，通过笔算计算AB弦长的最大值，然后调整点M的位置观察屏幕上的答案）.

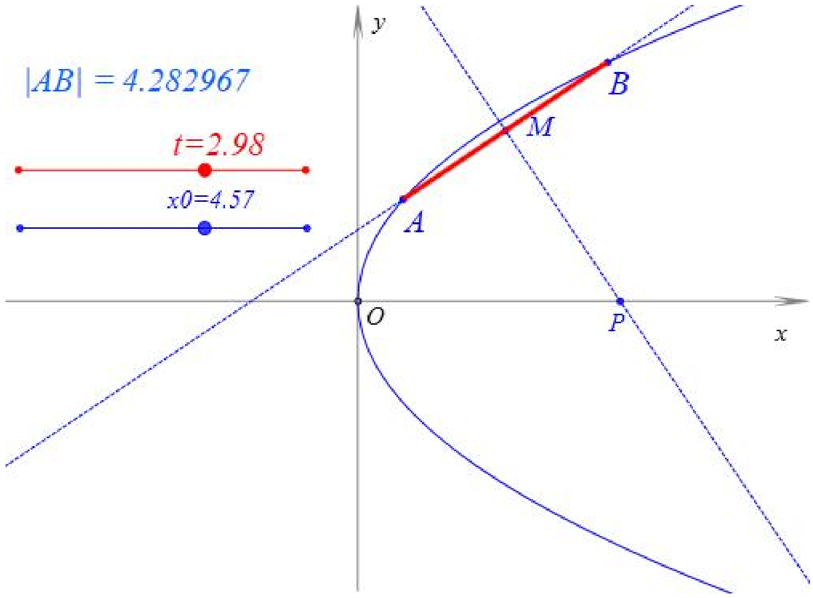


图 6. 2. 2

【简要评注】

本题的第一问给了两个不同的思路，其一是把“相关弦”转化为圆与抛物线的交点问题，进而发现“相关弦”重点的特点；其二是常规的办法用斜截式设出直线的方程，再考虑它与抛物线相交弦的垂直平分线与 x 轴交点的横坐标过定点的条件. 这两个思路的共同点都是从运动变化的角度去寻找这其中的不变关系.

第二问的解决突出了“函数”的思想，这其中考虑了一系列紧密联系的量才得到弦长的函数表达式. 在求这个函数的最大值时要顾及函数的定义域，并用分类讨论的办法分情况求出这个最大值. 本题的计算量比较大，但更应该始终清晰本题总的解题思路.

本题计算机的动感体验应能加深对问题解决思路的理解，是平时学习和复习的有效手段.

2．圆与椭圆位置关系的运用

例 2．已知椭圆的中心在原点，一个焦点是$F(2,0)$，且两条准线间的距离为$d(d>4)$.

（I）求椭圆的方程；

（II）若存在过点 $A(1,0)$ 的直线 l，使点 F 关于直线 l 的对称点在椭圆上，求 d 的取值范围.

（一）求椭圆的方程

设椭圆的方程为 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$，由条件知 $c=2$ 且 $\frac{2a^2}{c}=d$，所以 $a^2=d$，$b^2=a^2-c^2=d-4$，故椭圆的方程是 $\frac{x^2}{d}+\frac{y^2}{d-4}=1(d>4)$.

（二）求 d 的取值范围

【动感体验】

这里的困难是过点 $A(1,0)$ 的直线不止一条，如果设出此直线的方程，再求出点 F 关于直线 l 的对称点然后在考虑这点在椭圆上的计算量会比较大. 不妨换个思路：考虑当过点 A 的直线绕这点转动时，F 关于这条直线的对称点的轨迹.

打开文件“6-2-例 2. dmr”，如图 6.2.3 所示，点 F' 是点 F 关于直线 l 的对称点，拖动点 P 可以使直线 l 绕点 A 任意旋转，研究点 F' 的轨迹；通过变量尺可以改变字母 d 的值或通过按钮设置它的值.

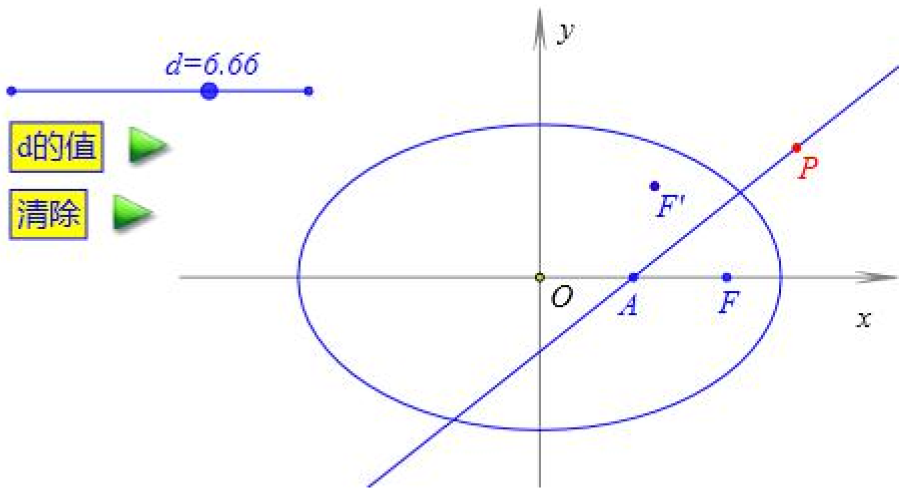


图 6.2.3

【思路点拨】

将点 F' 在圆上的问题转换成为点 F' 的轨迹与椭圆的位置关系问题.

【动态解析】

因为点 F' 的轨迹是以点 A 为中心、以 AF 长为半径的圆. 如图 6.2.4 所示，当圆 A 与椭圆没有交点时，则点 F' 不可能在椭圆上；当 $\frac{d}{d-4}$ 越大即 d 越小时椭圆越扁，圆 A 与椭圆可能会有交点，如图 6.2.5 所示，则椭圆上存在点 F 关于直线 l 的对称点 F'.

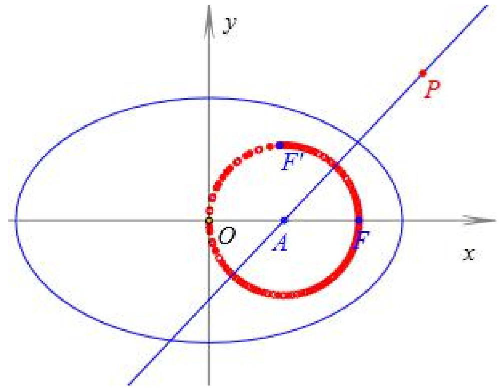


图 6.2.4

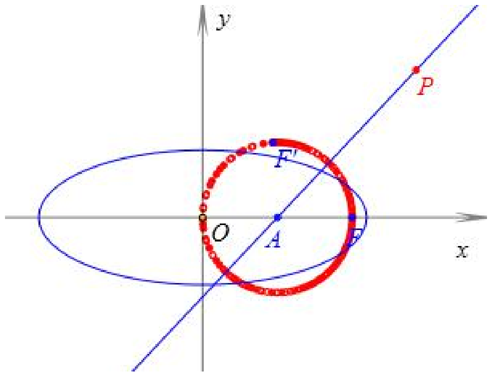


图 6.2.5

因此点 F' 在椭圆上的临界条件是圆 $(x-1)^2+y^2=1$ 与椭圆 $\dfrac{x^2}{d}+\dfrac{y^2}{d-4}=1$ 相切，如图 4 所示. 将 $y^2=1-(x-1)^2$ 代入 $\dfrac{x^2}{d}+\dfrac{y^2}{d-4}=1$ 得：

$4x^2+2dx+d(d-4)=0$，由△$=4d^2-16d(d-4)=0$ 得：

$d=0$（舍去）或者 $d=\dfrac{16}{3}$.

因此，d 的取值范围是 $4<d\le\dfrac{16}{3}$.

【简要评注】

由于直线 l 的不确定性，要直接求 d 的范围还需要引入中间参数，必然会增加计算的复杂程度. 本题巧妙地应用圆心与弦的性质将对称点问题转化为两图形交点的问题，从而简化计算，轻松获得解得结果.

3．直角三角形的存在性问题

例 3． 设 $b>0$，椭圆方程为 $\dfrac{x^2}{2b^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$，抛物线方程为 $x^2=8(y-b)$．如图 6.2.6 所示，过点 $F(0，b+2)$ 作 x 轴的平行线，与抛物线在第一象限的交点为 G，已知抛物线在点 G 的切线经过椭圆的右焦点 F_1.

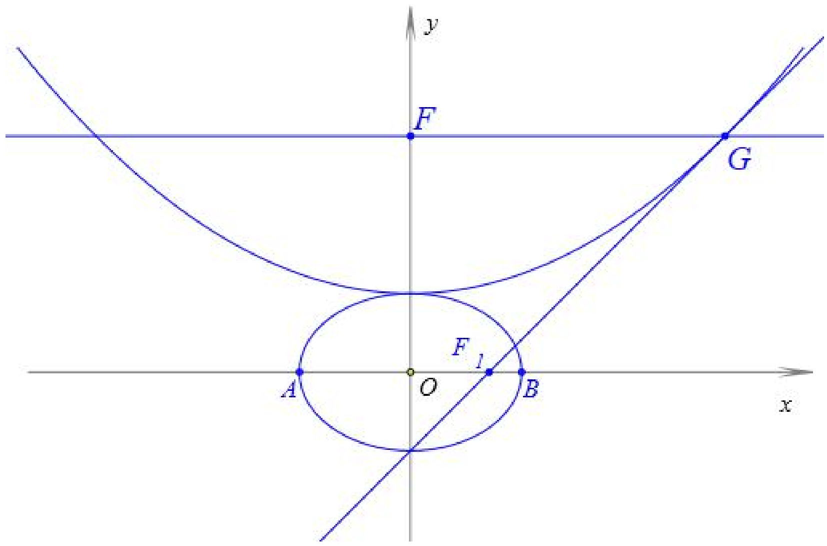


图 6.2.6

（I）求满足条件的椭圆方程和抛物线方程；

（II）设 A，B 分别是椭圆长轴的左、右端点，试探究在抛物线上是否存在点 P，使得 $\triangle ABP$ 为直角三角形？若存在，请指出共有几个这样的点？并说明理由（不必具体求出这些点的坐标）.

（一）求椭圆方程和抛物线方程

只要求出 b 就能求出椭圆方程和抛物线方程了．挖掘已知条件：过点 $F(0,\ b+2)$ 作 x 轴的平行线与抛物线在第一象限的交点 G 的坐标如何表示；过这点的抛物线的切线方程能否求出；椭圆的右焦点的坐标如何表示；根据这些条件能否得到关于 b 的方程．具体解法如下：

由 $x^2=8(y-b)$ 得 $y=\dfrac{1}{8}x^2+b$.

当 $y=b+2$ 得 $x=\pm 4$，所以 G 点的坐标为 $(4,b+2)$，$y'=\dfrac{1}{4}x$，$y'|_{x=4}=1$，

过点 G 的切线方程为 $y-(b+2)=x-4$ 即 $y=x+b-2$.

令 $y=0$ 得 $x=2-b$，$\therefore F_1$ 点的坐标为 $(2-b,0)$，由椭圆方程得 F_1 点的坐标为 $(b,0)$，$\therefore 2-b=b$ 即 $b=1$.

椭圆和抛物线的方程分别为 $\dfrac{x^2}{2}+y^2=1$ 和 $x^2=8(y-1)$.

（二）研究 $\triangle ABP$ 为直角三角形的情况

【动感体验】

打开文件“6-2-例 3.dmr”，如图 6.2.7 所示，拖动点 P 可以改变 $\triangle ABP$ 的形状，研究 $\triangle ABP$ 是否可能为直角三角形以及 $\triangle ABP$ 为直角三角形时点 P 所应满足的条件.

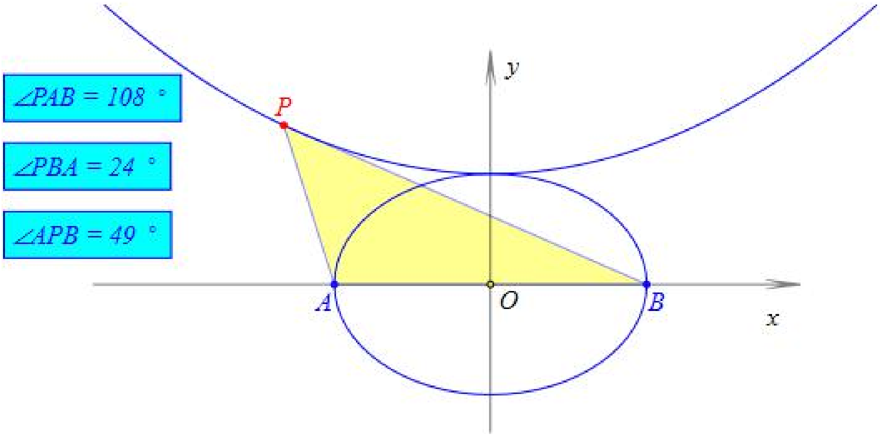


图 6.2.7

【思路点拨】

无非考虑以下两类情况：

以 AB 为直角边. 这只需要分别从 A，B 作长轴的垂线与抛物线相交就能够得到点 P；这样可以得到两个符合条件的直角三角形.

以 AB 为斜边. 这只需要以 AB 为直径作半圆和抛物线相交得到直角三角形的直角顶点；这样又能得到两个符合条件的直角三角形. .

【动态解析】

如图 1 所示，当点 P 在点 A 的正上方时，$PA \perp AB$，这时 $\triangle ABP$ 为直角三角形；类似地，如图 6.2.8 所示，当点 P 在点 B 的正上方时，$PB \perp AB$，这时 $\triangle ABP$ 为直角三角形，如图 6.2.9 所示.

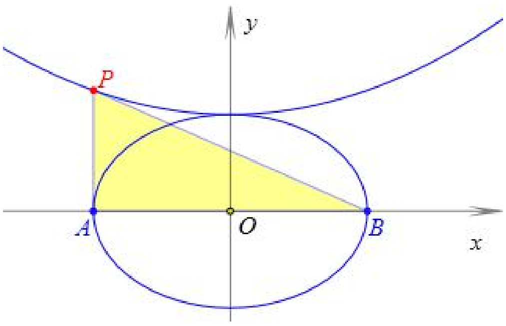


图 6.2.8

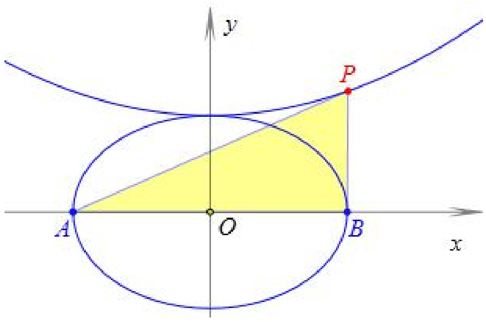


图 6.2.9

若以 AB 为直角三角形的斜边，点 P 存在两个位置，如图 6.2.10 和图 6.2.11 所示，则点 P 存在于抛物线与以 AB 为直径的圆的交点位置.

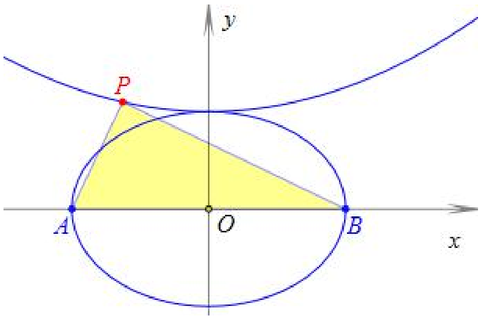


图 6.2.9

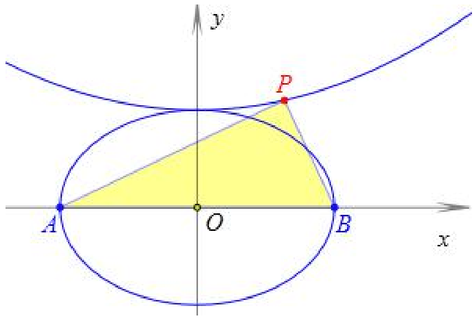


图 6.2.11

综上所述，在抛物线上存在四个不同位置的点 P，使得 $\triangle ABP$ 为直角三角形.

【简要评注】

除了需要注意分类的完整性之外，本题利用了圆的性质：直径所对的圆周角都是直角，这是转化垂直关系的一种重要方法.

4．与向量垂直有关的问题

例 4．已知抛物线 C：$y=2x^2$，直线 $y=kx+2$ 交 C 于 A，B 两点，M 是线段 AB 的中点，过 M 作 x 轴的垂线交 C 于点 N．

（Ⅰ）证明：抛物线 C 在点 N 处的切线与 AB 平行；

（Ⅱ）是否存在实数 k 使 $\overrightarrow{NA}\cdot\overrightarrow{NB}=0$，若存在，求 k 的值；若不存在，说明理由.

（一）证明抛物线 C 在点 N 处的切线与 AB 平行

打开文件“6-2-例 4.dmr”，如图 6.2.12 所示，通过变量尺可以改变字母 k 的值或通过按钮设置它的值，从而可以任意改变直线 $y=kx+2$ 的斜率，观察直线 $y=kx+2$ 与抛物线 $y=2x^2$ 经过点 N 的切线之间的关系.

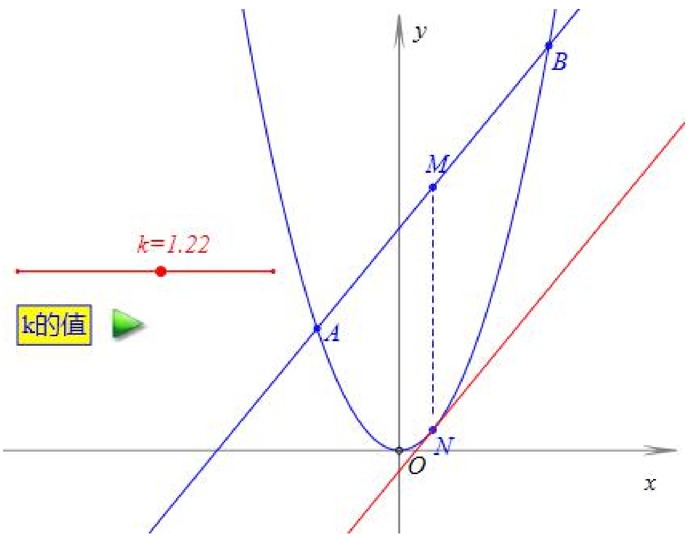


图 6.2.12

由抛物线与直线的方程可以求 M 的坐标与直线斜率的关系，然后就能求点 N 的横坐标以及过这点的抛物线的切线斜率. 具体解法如下：

设 $A(x_1,2x_1^2)$，$B(x_2,2x_2^2)$，把 $y=kx+2$ 代入 $y=2x^2$ 得 $2x^2-kx-2=0$. 由韦达定理得 $x_1+x_2=\dfrac{k}{2}$，$x_1x_2=-1$.

所以 $x_N=x_M=\dfrac{x_1+x_2}{2}=\dfrac{k}{4}$.

又因为 $y'=2x^2$，因此 $y'=4x$，所以抛物线在点 N 处的切线 l 的斜率为 $4\times\dfrac{k}{4}=k$，所以 $l // AB$.

（二）研究满足条件 $\overrightarrow{NA}\cdot\overrightarrow{NB}=0$ 的实数 k

【动感体验】

当 $\overrightarrow{NA}\cdot\overrightarrow{NB}=0$ 时，点 N 必在以 AB 为直径的圆上. 进入文件“6-2-例 4.dmr”的第二页，拖动点 K，观察以 AB 为直径的圆与点 N 的关系，研究点 N 的存在性以及当点 N 存在时，实数 k 所应满足的条件.

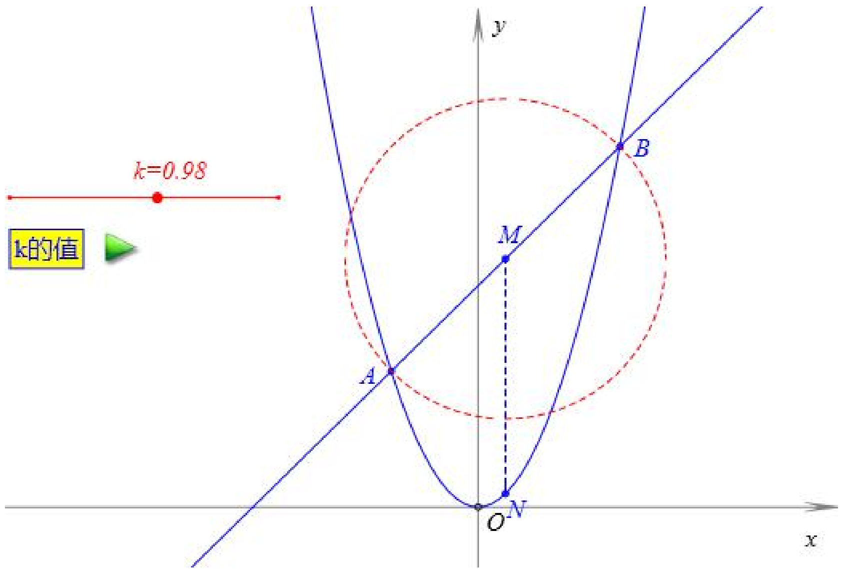


图 6.2.13

【思路点拨】

将实数 k 的存在性问题转换为点 N 是否存在于以 AB 为直径的圆上的问题.

【动态解析】

若 $\overrightarrow{NA}\cdot\overrightarrow{NB}=0$，则点 N 在以 AB 为直径的圆周上，如图 6.2.14、图 6.2.15 所示，这时 $|MN|=\dfrac{1}{2}|AB|$.

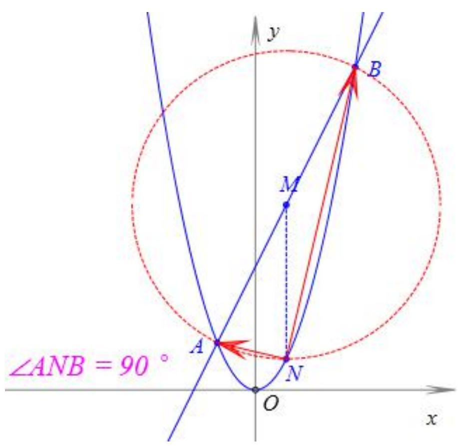


图 6.2.14

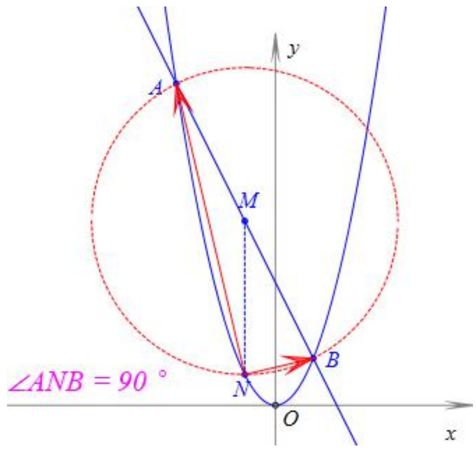


图 6.2.15

已知 $x_M = x_N = \dfrac{k}{4}$，则 $y_M = \dfrac{k^2}{4} + 2$，$y_N = \dfrac{k^2}{8}$. 所以 $|MN| = \dfrac{k^2}{8} + 2$.

而 $|AB| = \sqrt{1+k^2}\,|x_A - x_B| = \sqrt{1+k^2}\cdot\sqrt{(x_A+x_B)^2 - 4x_Ax_B}$

$$= \sqrt{1+k^2}\cdot\sqrt{(\frac{k}{2})^2 - 4\cdot(-1)} = \frac{1}{2}\sqrt{1+k^2}\cdot\sqrt{k^2+16}$$

所以 $\dfrac{k^2}{8} + 2 = \dfrac{1}{4}\sqrt{1+k^2}\cdot\sqrt{k^2+16}$，解得：$k = \pm 2$.

因此存在 $k = \pm 2$，使得 $\overrightarrow{NA}\cdot\overrightarrow{NB} = 0$.

【简要评注】

本题利用圆的性质将实数存在性问题转换为求交点的问题，而本质上还是在研究两条圆锥曲线的位置关系.

本节小结

圆与圆锥曲线属于两个二次曲线的问题，从方程的角度而言考察的内容思路超过了考试大纲，但实际考察的是理解与转化能力. 这些问题在近年来有一定的体现，也是学习过程中应注意的一个方向.

圆是平面解析几何中的一个重要元素，它既应用广泛的几何性质，又可以用简洁的二次方程表示，因而将圆作为一个解决问题的中间工具，可以大大简化解决问题的过程.

拓展练习

1，已知 F_1、F_2 是椭圆的两个焦点. 满足 $\overrightarrow{MF_1}\cdot\overrightarrow{MF_2} = 0$ 的点 M 总在椭圆内部，求椭圆离心率的取值范围.

2，双曲线 $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1\ (a>0,\ b>0)$ 的两个焦点为 F_1，F_2，若 P 为其上一点，且

$|PF_1|=2|PF_2|$，求双曲线离心率的取值范围.

第三节 求参数的取值范围

1．直线与椭圆的位置关系

例 1． 设 F_1、F_2 分别是椭圆 $\dfrac{x^2}{4}+y^2=1$ 的左、右焦点. 设过定点 $M(0,2)$ 的直线 l 与椭圆交于不同的两点 A、B，且 $\angle AOB$ 为锐角（其中 O 为坐标原点），求直线 l 的斜率 k 的取值范围.

【动感体验】

打开文件“6-3-例 1.dmr”，通过变量尺可以改变字母 k 的值或者通过按钮设置它的值，从而改变直线 l 的斜率，观察 $\angle AOB$ 为锐角时，直线 l 与椭圆的关系. 图 6.3.1-6.3.3 为其中的几种情况.

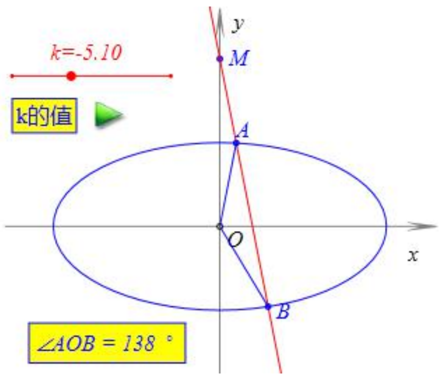


图 6.3.1

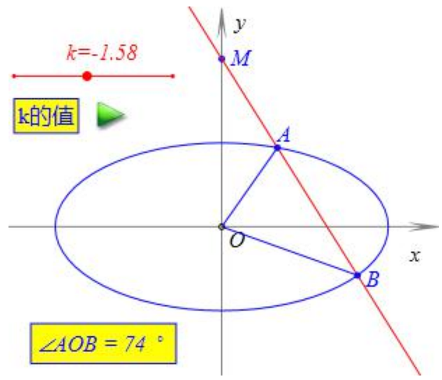


图 6.3.2

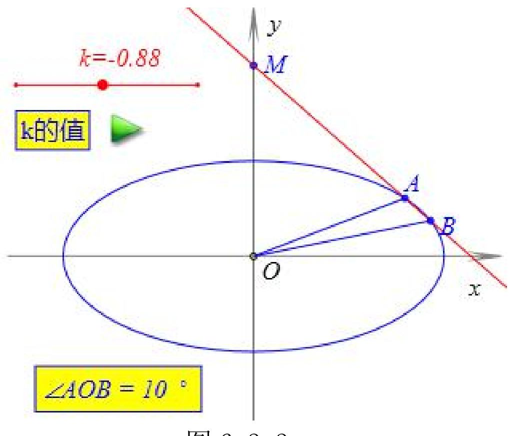


图 6.3.3

【思路点拨】

关键问题是如何找到 $\angle AOB$ 与直线斜率的关系. 自然想到通过向量 $\overrightarrow{OA}$ 和 $\overrightarrow{OB}$ 的数量

积找到这个联系，因为 A 、B 两点的坐标是与直线的斜率和 $\overrightarrow{OA}$、$\overrightarrow{OB}$ 向量的数量积密切相关的.

【动态解析】

显然直线 $x=0$ 不满足题设条件，可设直线 $l: y=kx-2, A\left(x_1, y_2\right), B\left(x_2, y_2\right)$，联立 $\begin{cases} y=kx-2 \\ \dfrac{x^2}{4}+y^2=1 \end{cases}$，消去 y，整理得：$\left(k^2+\dfrac{1}{4}\right)x^2+4kx+3=0$. 所以

$$x_1+x_2=-\frac{4k}{k^2+\frac{1}{4}}, x_1\cdot x_2=\frac{3}{k^2+\frac{1}{4}}.$$

由

$$\Delta=\left(4k\right)^2-4\left(k+\frac{1}{4}\right)\times 3=4k^2-3>0$$

得：$k<\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ 或 $k>-\dfrac{\sqrt{3}}{2}$. 又因为

$$0^0<\angle A0B<90^0 \Leftrightarrow \cos\angle A0B>0 \Leftrightarrow \overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}>0$$

所以

$$\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=x_1x_2+y_1y_2>0.$$

又因为

$$\begin{aligned} y_1y_2&=\left(kx_1+2\right)\left(kx_2+2\right) \\ &=k^2x_1x_2+2k\left(x_1+x_2\right)+4 \\ &=\frac{3k^2}{k^2+\frac{1}{4}}+\frac{-8k^2}{k^2+\frac{1}{4}}+4=\frac{-k^2+1}{k^2+\frac{1}{4}}. \end{aligned}$$

$\because \dfrac{3}{k^2+\frac{1}{4}}+\dfrac{-k^2+1}{k^2+\frac{1}{4}}>0$，即 $k^2<4$ ，$\therefore -2<k<2$.

故由①、②得 $-2<k<-\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ 或 $\dfrac{\sqrt{3}}{2}<k<2$.

【简要评注】

利用向量构造不等式，利用韦达定理整体代换都是简化计算的重要途径.

2．直线与双曲线的位置关系

例 2． 已知 m 、 n 是过点 $P(-\sqrt{2},0)$ 的两条互相垂直的直线，且 m 、 n 与双曲线 $y^2-x^2=1$ 各有两个交点，分别为 A_1、B_1 和 A_2、B_2.

（I）求 m 的斜率 k 的取值范围；

（II）若 $|A_1B_1|=\sqrt{5}|A_2B_2|$，求 m 、 n 的方程.

（一）求满足条件的直线 l_1 的斜率 k_1 的取值范围

【动感体验】

讨论直线 m 与双曲线 $y^2-x^2=1$ 有两个交点的斜率取值范围是一个常规问题，实际上只需考虑由直线方程与双曲线方程组成的方程组有两组不同的实数解的条件，问题归结为求判别式大于零的条件. 现在要求 m 、 n 与双曲线 $y^2-x^2=1$ 各有两个交点无非是解两个关于判别式的不等式组的解. 在图形方面，当两条直线都与双曲线有两个交点时，这两条直线的斜率需要满足什么条件呢？例如与双曲线渐近线的位置关系. 打开文件“6-3-例 2.dmr”，如图 6.3.4，不妨将实直线表示为 m，则虚直线表示为 n，$m\perp n$. 通过变量尺可以改变 k 的值或通过按钮设置它的值，从而改变 m 的斜率，n 的斜率也随之改变并与 m 保持垂直. 观察和研究在 m 、 n 与双曲线 $y^2-x^2=1$ 各有两个交点的情况.

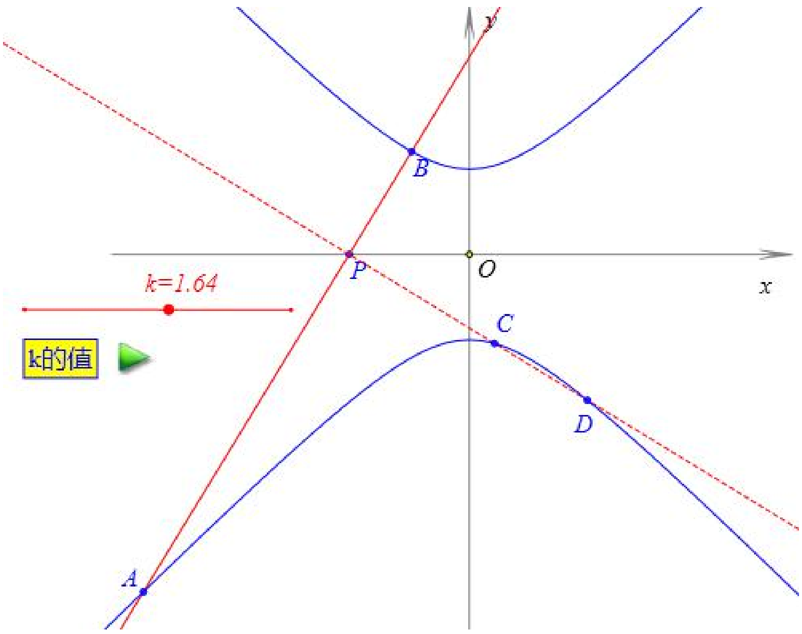


图 6.3.4

【思路点拨】

考虑直线与双曲线相切、与双曲线的渐近线平行等临界情况. 从特殊情况开始讨论问题.

【动态解析】

当 k_1 从 0 增大的过程中，可分为几种情况：

（1） m 与双曲线 $y^2-x^2=1$ 没有交点（图 6.3.5）.

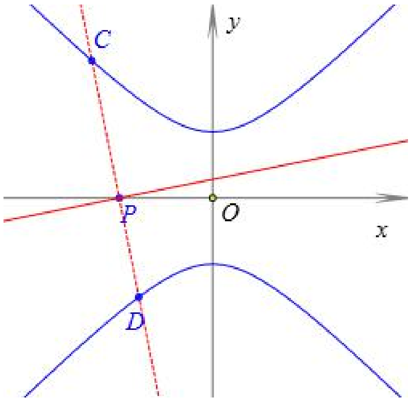


图 6.3.5

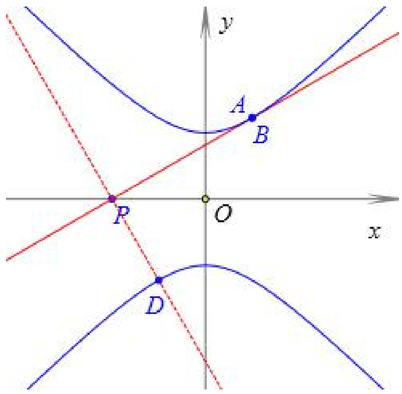


图 6.3.6

（2） m 与双曲线 $y^2-x^2=1$ 相切（图 6.3.6）、将直线 m 的方程 $y=k(x+\sqrt{2})$ 代入双曲线的方程 $y^2-x^2=1$，得：$(k^2-1)x^2+2\sqrt{2}k^2x+2k^2-1=0$. 由△=$4(3k^2-1)=0$，解得：$k=\frac{\sqrt{3}}{3}$ 或 $k=-\frac{\sqrt{3}}{3}$（舍去）.

（3） m 与双曲线 $y^2-x^2=1$ 有两个交点且 n 与双曲线 $y^2-x^2=1$ 有两个交点（图 6.3.7）.

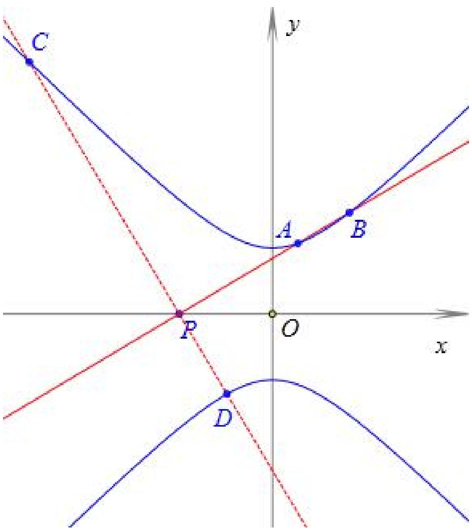


图 6.3.7

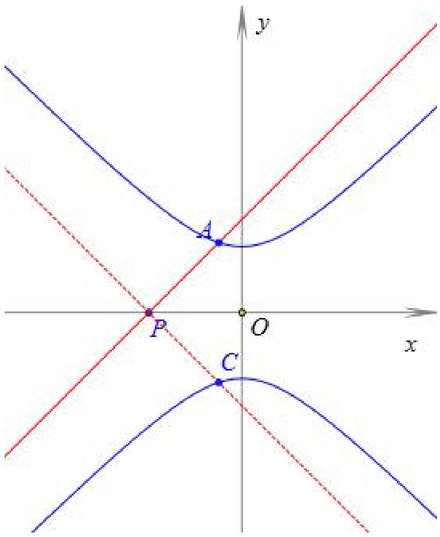


图 6.3.8

（4） m 与双曲线 $y^2-x^2=1$ 的渐近线 $y=x$ 平行（图 6.3.8），容易知道，这时 $k_1=1$.

（5） m 与双曲线 $y^2-x^2=1$ 有两个交点且 n 与双曲线 $y^2-x^2=1$ 有两个交点（图 6.3.9）.

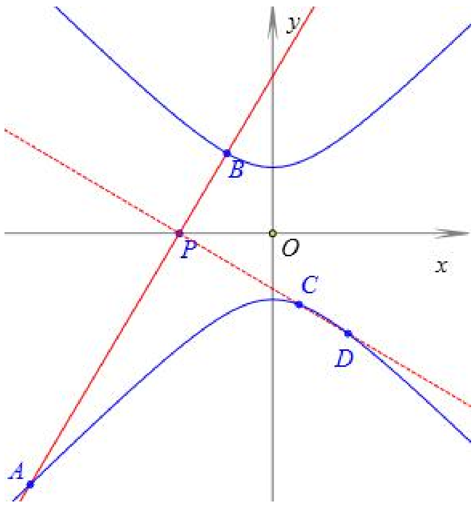


图 6.3.9

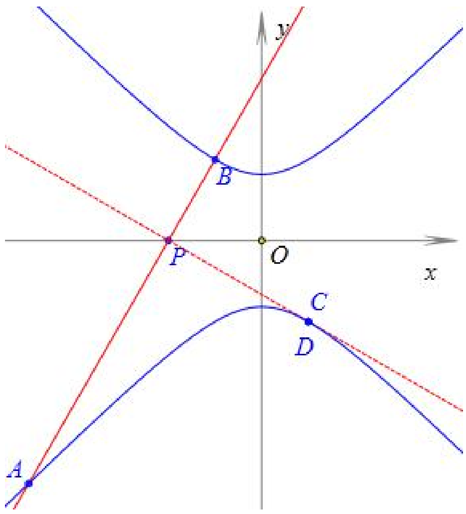


图 6.3.10

（6）m 与双曲线 $y^2-x^2=1$ 有两个交点而 n 与双曲线 $y^2-x^2=1$ 相切（图 6.3.10）.

这种情况下，可解得 $k_n=-\dfrac{\sqrt{3}}{3}$，因此 $k=\sqrt{3}$.

（7）m 与双曲线 $y^2-x^2=1$ 有两个交点而 n 与双曲线 $y^2-x^2=1$ 没有交点（图 6.3.11）.

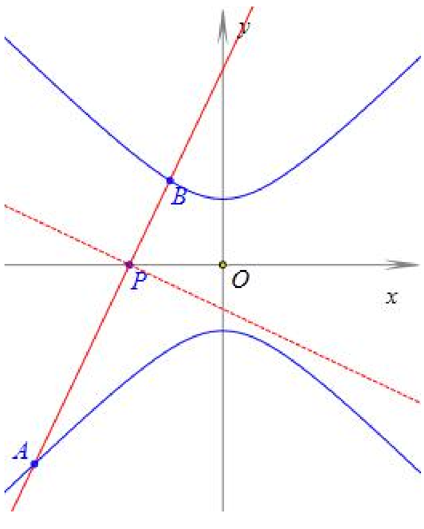


图 6.3.11

对 $k\geq 0$ 的情况进行总结如下：

当 $0\leq k<\dfrac{\sqrt{3}}{3}$ 时，m 与双曲线 $y^2-x^2=1$ 没有交点；

当 $k=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$ 时，m 与双曲线 $y^2-x^2=1$ 有一个交点；

当$\dfrac{\sqrt{3}}{3}<k<1$时，m与双曲线$y^2-x^2=1$有两个交点且n与双曲线$y^2-x^2=1$有两个交点；

当$k=1$时，m与双曲线$y^2-x^2=1$有一个交点；

当$1<k<\sqrt{3}$时，m与双曲线$y^2-x^2=1$有两个交点且n与双曲线$y^2-x^2=1$有两个交点；

当$k=\sqrt{3}$时，m与双曲线$y^2-x^2=1$有两个交点而n与双曲线$y^2-x^2=1$有一个交点；

当$k>\sqrt{3}$时，m与双曲线$y^2-x^2=1$有两个交点而n与双曲线$y^2-x^2=1$没有交点.

当$k<0$时，得到类似的情况，各种情况如下：

当$-\dfrac{\sqrt{3}}{3}<k<0$时，m与双曲线$y^2-x^2=1$没有交点（图 6.3.12）；

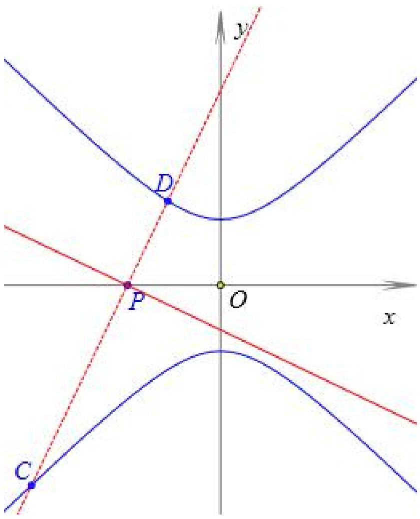


图 6.3.12

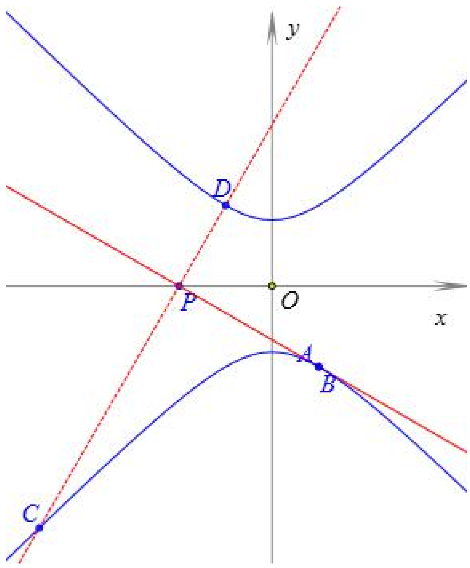


图 6.3.13

当$k=-\dfrac{\sqrt{3}}{3}$时，m与双曲线$y^2-x^2=1$有一个交点（图 6.3.13）；

当$-1<k<-\dfrac{\sqrt{3}}{3}$时，$m$与双曲线$y^2-x^2=1$有两个交点且$n$与双曲线$y^2-x^2=1$有两个交点（图 6.3.14）；

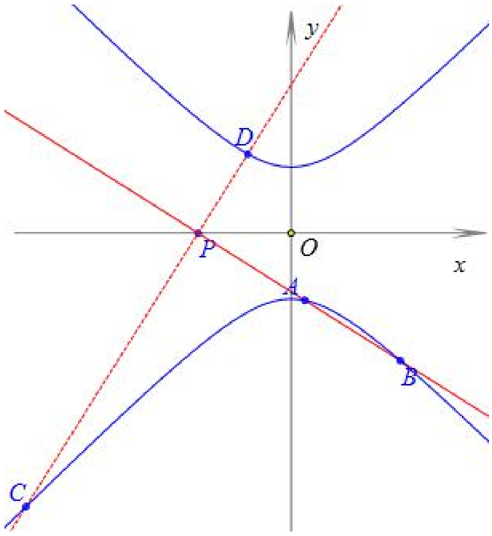


图 6.3.14

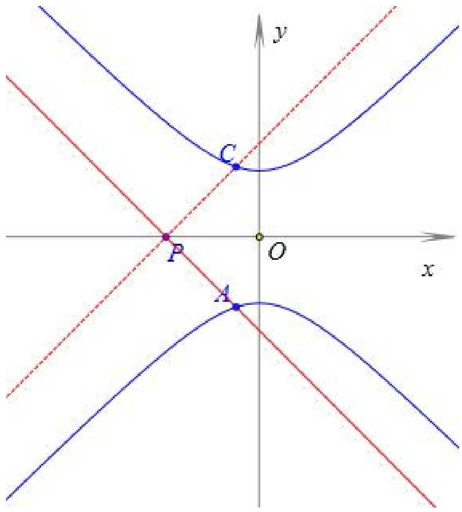


图 6.3.15

当 $k=-1$ 时，m 与双曲线 $y^2-x^2=1$ 有一个交点（图 6.3.15）；

当 $-\sqrt{3}<k<-1$ 时，m 与双曲线 $y^2-x^2=1$ 有两个交点且 n 与双曲线 $y^2-x^2=1$ 有两个交点（图 6.3.16）；

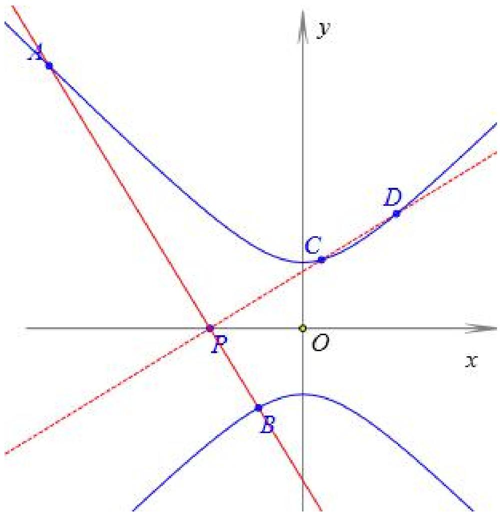


图 6.3.16

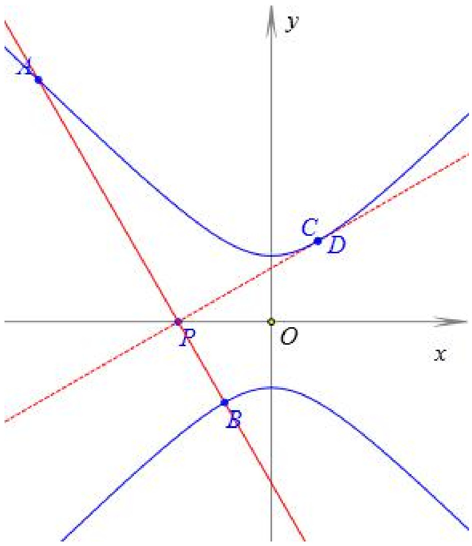


图 6.3.17

当 $k=-\sqrt{3}$ 时，m 与双曲线 $y^2-x^2=1$ 有两个交点而 n 与双曲线 $y^2-x^2=1$ 有一个交点（图 6.3.17）；

当 $k<-\sqrt{3}$ 时，m 与双曲线 $y^2-x^2=1$ 有两个交点而 n 与双曲线 $y^2-x^2=1$ 没有交点（图 6.3.18）.

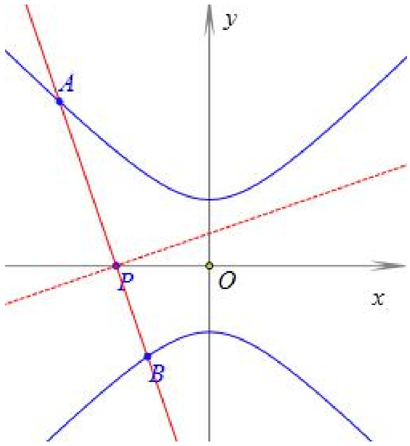


图 6.3.18

综上所述：当$-\sqrt{3}<k<-1$或$-1<k<-\frac{\sqrt{3}}{3}$或$\frac{\sqrt{3}}{3}<k<1$或$1<k<\sqrt{3}$时，m、n与双曲线$y^2-x^2=1$各有两个交点.

另解：设直线m的斜率为k，则直线m的方程为：$y=k(x+\sqrt{2})$，代入到$y^2-x^2=1$中并化简得$(k^2-1)x^2+2\sqrt{2}k^2x+2k^2-1=0$.

其判别式为$\Delta=8k^4-4(k^2-1)(2k^2-1)=12k^2-4$，解不等式$\Delta=12k^2-4>0$ 得$|k|>\frac{\sqrt{3}}{3}$但$|k|\neq 1$.

类似地可以求出n与双曲线$y^2-x^2=1$有两个交点的条件是$|k|<\sqrt{3}$但$|k|\neq 1$. 综上m、n与双曲线$y^2-x^2=1$各有两个交点的条件是：

$$-\sqrt{3}<k<-1\text{或}-1<k<-\frac{\sqrt{3}}{3}\text{或}\frac{\sqrt{3}}{3}<k<1\text{或}1<k<\sqrt{3}.$$

（二）当$|A_1B_1|=\sqrt{5}|A_2B_2|$时，求$m$、$n$的方程

这同样是一个关于直线与圆椎曲线相交所得弦长的常规问题，利用$|A_1B_1|=\sqrt{5}|A_2B_2|$的条件列出关于直线$m$的斜率$k_1$的方程. 具体解法如下：

由$|A_1B_1|=\sqrt{5}|A_2B_2|$得：$|A_1B_1|^2=5|A_2B_2|^2$.

将将直线m的方程$y=k_1(x+\sqrt{2})$代入双曲线的方程$y^2-x^2=1$，得：$(k_1{}^2-1)x^2+2\sqrt{2}k_1{}^2x+2k_1{}^2-1=0$，设$A_1(x_1, y_1)$、$B_1(x_2, y_2)$，则有：

$x_1+x_2=\dfrac{-2\sqrt{2}k_1^{\ 2}}{k_1^{\ 2}-1}$ 、 $x_1x=\dfrac{2k_1^{\ 2}-1}{k_1^{\ 2}-1}$. 又：

$|A_1B_1|^2=(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2=(1+k_1^{\ 2})(x_1-x_2)^2=(1+k_1^{\ 2})((x_1+x_2)^2-4x_1x_2)$

代入得：$|A_1B_1|^2=(1+k_1^{\ 2})(\dfrac{8k_1^{\ 4}}{(k_1^{\ 2}-1)^2}-\dfrac{4(2k_1^{\ 2}-1)}{k_1^{\ 2}-1})=4(1+k_1^{\ 2})\dfrac{3k_1^{\ 2}-1}{(k_1^{\ 2}-1)^2}$

同理可得：$|A_2B_2|^2=4(1+k_2^{\ 2})\dfrac{3k_2^{\ 2}-1}{(k_2^{\ 2}-1)^2}$.

又因为：$k_2=-\dfrac{1}{k_1}$ ，因此，

$$|A_2B_2|^2=4(1+\frac{1}{k_1^{\ 2}})\frac{\dfrac{3}{k_1^{\ 2}}-1}{(\dfrac{1}{k_1^{\ 2}}-1)^2}=4(1+k_1^{\ 2})\frac{3-k_1^{\ 2}}{(k_1^{\ 2}-1)^2}$$

由$|A_1B_1|=\sqrt{5}|A_2B_2|$得：$|A_1B_1|^2=5|A_2B_2|^2$，即：

$4(1+k_1^{\ 2})\dfrac{3k_1^{\ 2}-1}{(k_1^{\ 2}-1)^2}=5\cdot 4(1+k_1^{\ 2})\dfrac{3-k_1^{\ 2}}{(k_1^{\ 2}-1)^2}$，解得：$k_1=\sqrt{2}$ 或$k_1=-\sqrt{2}$.

当$k_1=\sqrt{2}$ 时，$k_2=-\dfrac{\sqrt{2}}{2}$，对应的直线方程分别为：

m： $y=\sqrt{2}(x+\sqrt{2})$，n： $y=-\dfrac{\sqrt{2}}{2}(x+\sqrt{2})$；

当$k_1=-\sqrt{2}$ 时，$k_2=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$，对应的直线方程分别为：

m： $y=-\sqrt{2}(x+\sqrt{2})$，n： $y=\dfrac{\sqrt{2}}{2}(x+\sqrt{2})$.

【简要评注】

在讨论直线与双曲线的位置关系时不要有遗漏的情况.

3．抛物线与双曲线位置关系的应用

例 3． 双曲线$\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$的右支上存在一点，它到右焦点及左准线的距离相等，求双曲线的离心率的取值范围.

【动感体验】

假设到右焦点（c，0）及左准线$x=-\dfrac{a^2}{c}$的距离相等的点为P，则点P在以双曲线的右焦点为焦点、双曲线的左准线为准线的抛物线上.打开文件“6-3-例 3.dmr”，如图 6.3.19 所示，抛物线用虚线表示，双曲线用实线表示，通过变量尺可以改变参数a、b的值或通过按钮设置它们的值，研究点P存在的情况下，双曲线与抛物线的关系.

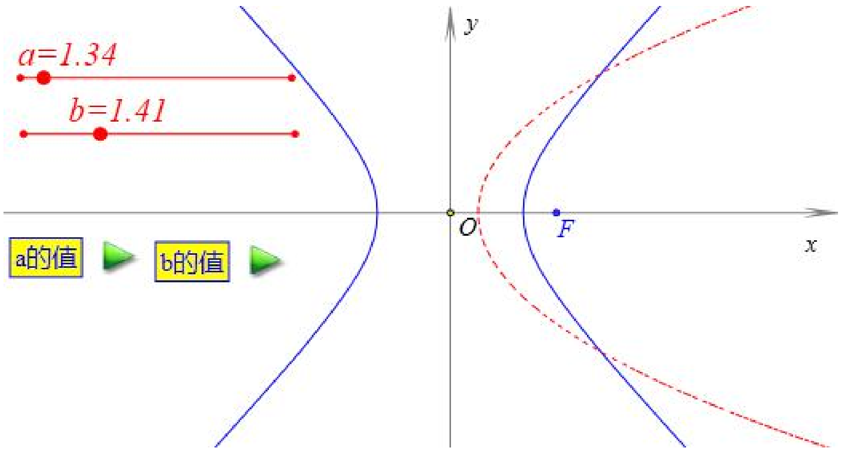


图 6.3.19

【思路点拨】

将点P的存在性问题转化为研究抛物线与双曲线有无公共点，由此应该能确定抛物线的顶点在双曲线的右顶点的左侧或与之重合.

【动态解析】

该抛物线的顶点横坐标为$\dfrac{c-\dfrac{a^2}{c}}{2}=\dfrac{c^2-a^2}{2c}=\dfrac{b^2}{2c}$，所以当点$P$存在时，$\dfrac{b^2}{2c}\le a$，整理得：$(\dfrac{c}{a})^2-2\cdot\dfrac{c}{a}-1\le 0$，解得：

$1-\sqrt{2}\le\dfrac{c}{a}\le 1+\sqrt{2}$.

又因为双曲线的离心率大于 1，因此，双曲线离心率的取值范围是（1，$1+\sqrt{2}$）.

如图 6.3.20-6.3.23 所示，为几种成立和不成立的情况：

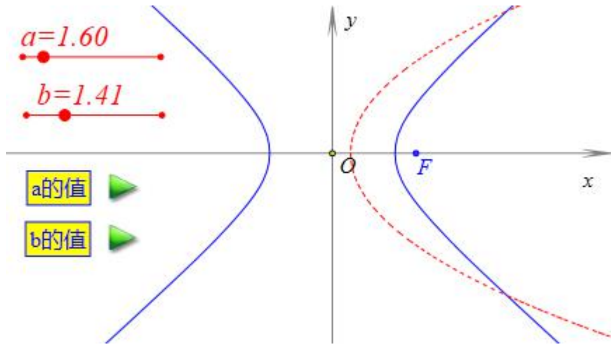


图 6. 3. 20

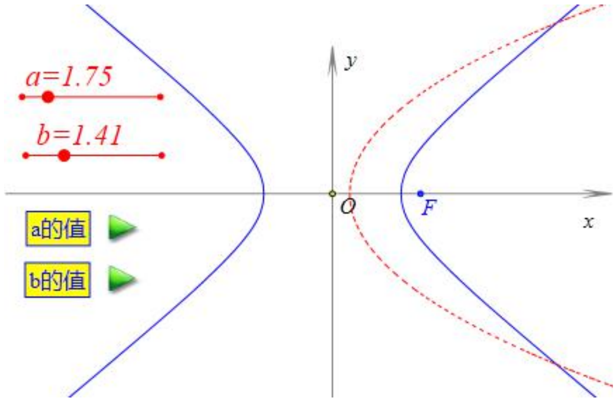


图 6. 3. 21

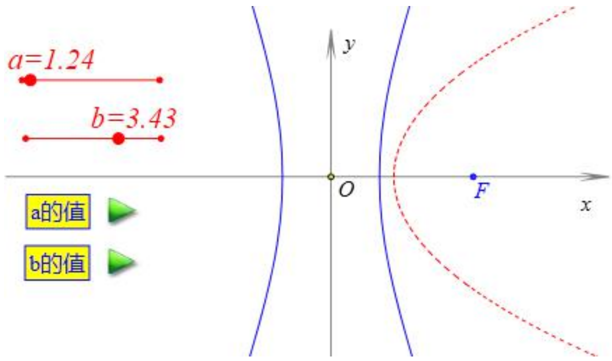


图 6. 3. 22

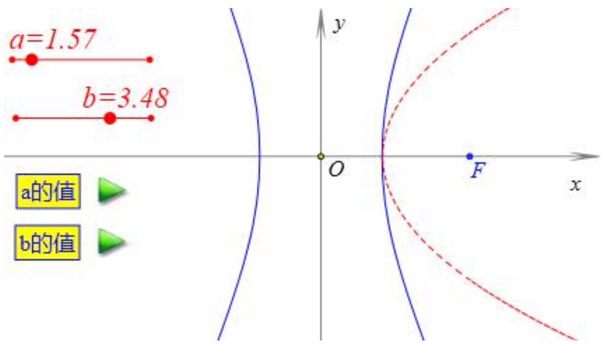


图 6. 3. 23

【简要评注】

本题利用顶点位置构造不等式，既直观又简洁.

4．与双曲线有关的非线性规划问题

例 4．在平面直角坐标系中，点 A，B，C 的坐标分别为 $(0,1),(4,2),(2,6)$．如果 $P(x，y)$ 是 $\triangle ABC$ 围成的区域（含边界）上的点，那么当 $w=xy$ 取到最大值时，点 P 的坐标是______.

【动感体验】

先退一步考虑：如果 $P(x，y)$ 是平面直角坐标系中满足 $xy=1$ 的点，这样的点显然不只一个，这样点的集合应该是怎样的图形？自然容易想到双曲线 $xy=1$．如果要求变了，改成 $xy=\frac{1}{2}$，这样的点自然在双曲线 $xy=\frac{1}{2}$ 上. 如果要求 $xy=w(w>0)$，w 是可以变化的参数，容易想到这应该是一系列双曲线组成的双曲线族. 回到本题，自然要关注双曲线族在 $\triangle ABC$ 围成的区域（含边界）内何时 w 取最大值. 这样一来问题就应刃而解了.

由 $w=xy$ 得：$y=\frac{w}{x}$．打开文件“6-3-例 4.dmr”，虚线表示方程 $y=\frac{w}{x}$ 对应的曲线，对于曲线上 $y=\frac{w}{x}$ 的点 $P(x，y)$ 对应相等的 w．而曲线 $y=\frac{w}{x}$ 可以经过 $\triangle ABC$ 区域的哪些点呢？通过变量尺改变 w 的值或通过按钮设置它的值，观察 w 所能取到最大值时曲线与 $\triangle ABC$ 的位置关系. 如图 6.3.24-6.3.27 所示为其中的几种情形.

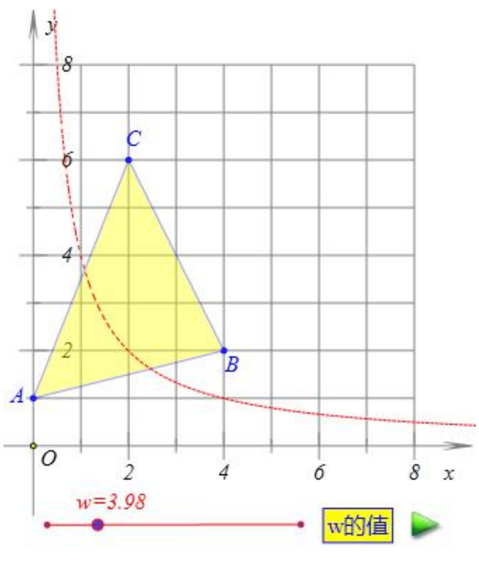


图 6.3.24

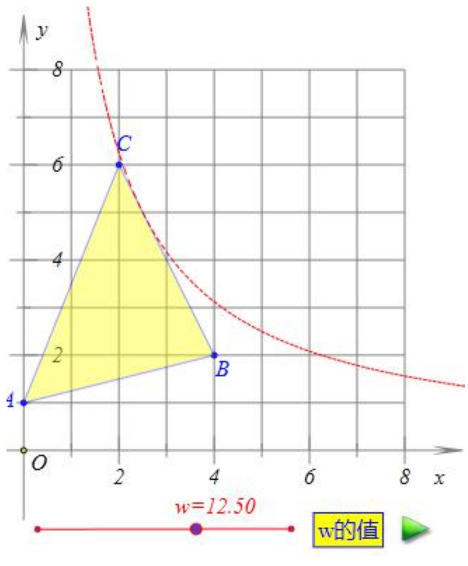
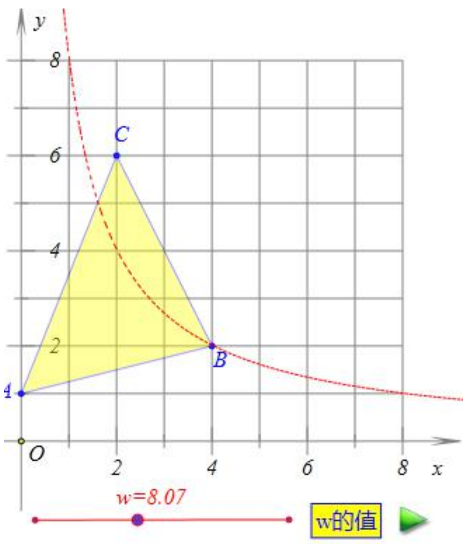


图 6.3.25



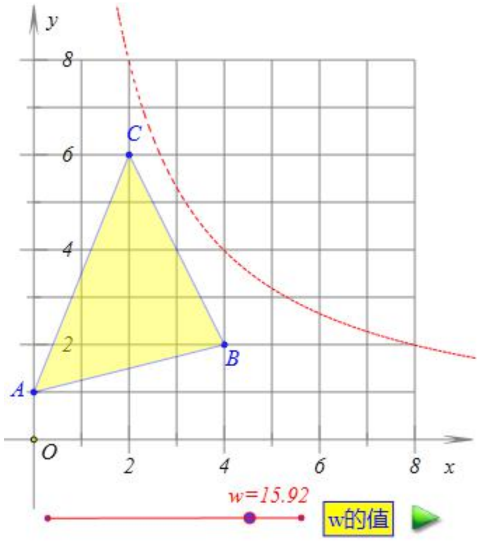


图 6. 3. 26　　　　　　　　图 6. 3. 27

【思路点拨】

当 $w>0$ 时， w 越大，函数 $y=\dfrac{w}{x}$ 的图像距离原点越远.

【动态解析】

容易知道，当函数 $y=\dfrac{w}{x}$ 经过点 $B(4,2)$ 或经过点 $C(2,6)$ 或者与直线 BC （方程 $\dfrac{y-2}{x-4}=\dfrac{6-2}{2-4}$ ）相切时， w 最大.

当函数 $y=\dfrac{w}{x}$ 经过点 $B(4,2)$ 时，求得： $w=8$；当函数 $y=\dfrac{w}{x}$ 经过点 $C(2,6)$ 时，求得： $w=12$.

当函数 $y=\dfrac{w}{x}$ 直线 BC 相切时，由 $\dfrac{y-2}{x-4}=\dfrac{6-2}{2-4}$ 得 $y=-2x+10$，代入： $y=\dfrac{w}{x}$ 得到 $2x^2-10x+w=0$，由 $\Delta=100-8w=0$ 解得： $w=\dfrac{25}{2}$. 这时解得： $x=\dfrac{5}{2}$， $y=5$.

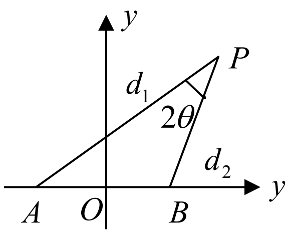
综上所述，当 $w=xy$ 取得最大值 $\dfrac{25}{2}$ ，点 P 的坐标为 $(\dfrac{5}{2},5)$.

【简要评注】

与线性规划问题不同的是，在这里最优解对应的位置不一定在区域的顶点位置.

5．与双曲线有关的向量夹角问题

例 5．设动点 P 到点 $A(-1,0)$ 和 $B(1,0)$ 的距离分别为 d_1 和 d_2 $\angle APB=2\theta$，且存在常数 $\lambda(0<\lambda<1)$，使得 $d_1d_2\sin^2\theta=\lambda$.



（I）证明：动点 P 的轨迹 C 为双曲线，并求出 C 的方程；

（II）过点 B 作直线交双曲线 C 的右支于 M， N 两点，试

确定 λ 的范围，使 $\overrightarrow{OM}\cdot\overrightarrow{ON}=0$，其中点 O 为坐标原点.

（一）证明动点 P 的轨迹 C 为双曲线

从双曲线的定义出发考虑：

在 $\triangle PAB$ 中，$|AB|=2$，即 $2^2=d_1^2+d_2^2-2d_1d_2\cos 2\theta$，$4=(d_1-d_2)^2+4d_1d_2\sin^2\theta$，

即 $|d_1-d_2|=\sqrt{4-4d_1d_2\sin^2\theta}=2\sqrt{1-\lambda}<2$（常数），点 P 的轨迹 C 是以 A，B 为焦点，

实轴长 $2a=2\sqrt{1-\lambda}$ 的双曲线.

方程为：$\dfrac{x^2}{1-\lambda}-\dfrac{y^2}{\lambda}=1$.

（二）求满足条件的 λ 的取值范围

【动感体验】

打开文件“6-3-例 5.dmr”，通过拖动点 P 可以改变经过点 B 的直线的倾斜角，通过变量尺可以改变 λ 的值或者通过按钮设置它的值，观察直线的倾斜角变化过程中 $\angle MON$ 的变化规律，如图 6.3.29-6.3.32 所示是其中的几种情形.

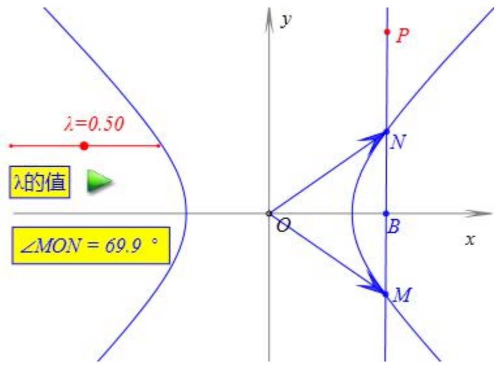


图 6.3.29

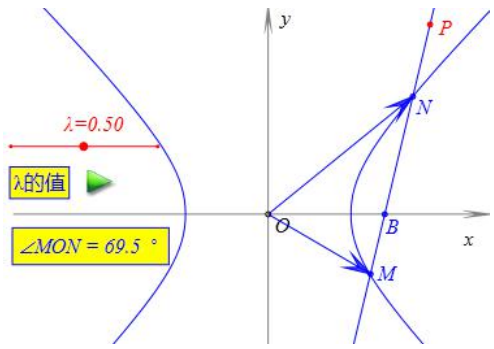


图 6.3.30

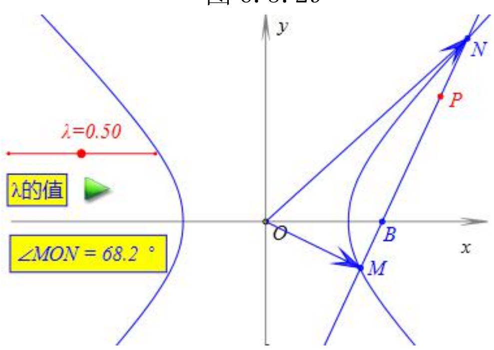


图 6.3.31

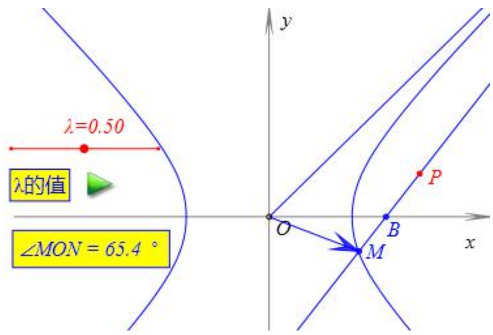


图 6.3.32

使得经过点 B 的直线垂直于 x 轴，通过变量尺改变 λ 的值或通过按钮设置它的值，观察 λ 对 $\angle MON$ 的影响. 如图 6.3.33-6.3.36 所示是几种情形.

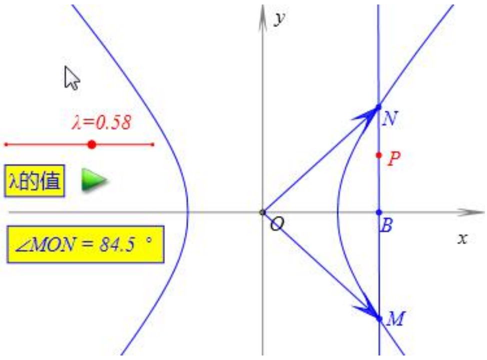


图 6.3.33

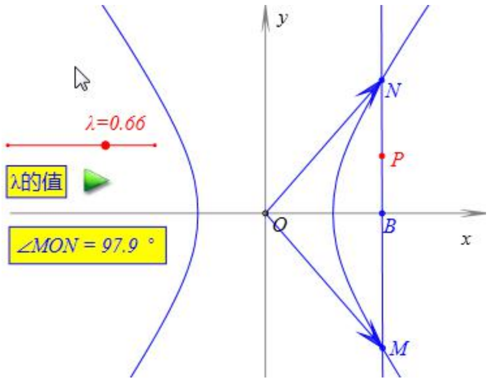


图 6.3.34

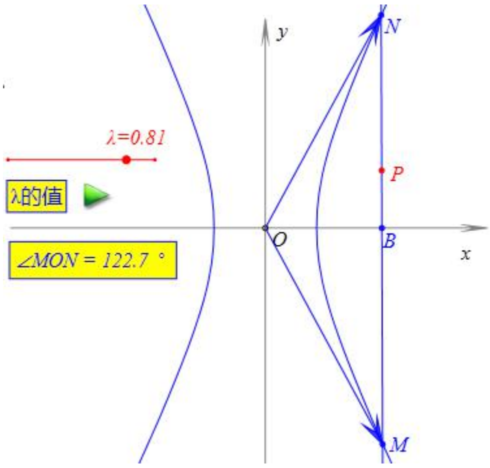


图 6.3.35

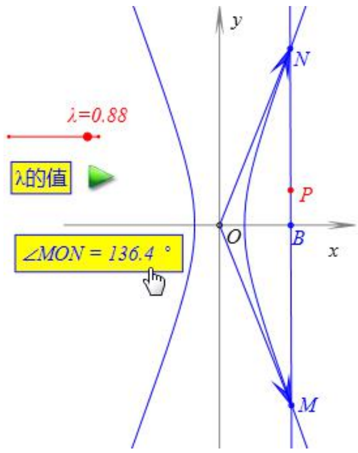


图 6.3.36

通过以上情形，请你研究当存在 $\overrightarrow{OM}\cdot\overrightarrow{ON}=0$ 时，λ 的取值范围.

【思路点拨】

考虑经过点 B 的直线的倾斜角对 $\angle MON$ 的影响.

【动态解析】

可以发现：

对于任意的 λ，当经过点 B 的直线的倾斜角为 $\dfrac{\pi}{2}$ 时，$\angle MON$ 的值最大. 因此，若存在 $\overrightarrow{OM}\cdot\overrightarrow{ON}=0$，则需要 $\angle MON \ge \dfrac{\pi}{2}$.

对于任意的 λ，当经过点 B 的直线与双曲线的渐近线（经过第一象限）平行时，$\angle MON$ 的值最小（实际上不存在）. 所以，若存在 $\overrightarrow{OM}\cdot\overrightarrow{ON}=0$ 则要求 $\angle NMO<\dfrac{\pi}{2}$.

设 $M(x_1,\ y_1)$，$N(x_2,\ y_2)$.

①当 MN 垂直于 x 轴时，MN 的方程为 $x=1$，$M(1,1)$，$N(1,-1)$ 在双曲线上.

即 $\dfrac{1}{1-\lambda}-\dfrac{1}{\lambda}=1 \Rightarrow \lambda^2+\lambda-1=0 \Rightarrow \lambda=\dfrac{-1\pm\sqrt{5}}{2}$，因为 $0<\lambda<1$，所以 $\lambda=\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}$.

②当 MN 不垂直于 x 轴时，设 MN 的方程为 $y=k(x-1)$.

由$\begin{cases}\dfrac{x^2}{1-\lambda}-\dfrac{y^2}{\lambda}=1\\ y=k(x-1)\end{cases}$得：$\left[\lambda-(1-\lambda)k^2\right]x^2+2(1-\lambda)k^2x-(1-\lambda)(k^2+\lambda)=0$，

由题意知：$\left[\lambda-(1-\lambda)k^2\right]\neq 0$，所以$x_1+x_2=\dfrac{-2k^2(1-\lambda)}{\lambda-(1-\lambda)k^2}$，$x_1x_2=\dfrac{-(1-\lambda)(k^2+\lambda)}{\lambda-(1-\lambda)k^2}$.

于是：$y_1y_2=k^2(x_1-1)(x_2-1)=\dfrac{k^2\lambda^2}{\lambda-(1-\lambda)k^2}$. 因为$\overrightarrow{OM}\cdot\overrightarrow{ON}=0$，且$M$，$N$在双曲线右支上，所以

$$\begin{cases}x_1x_2+y_1y_2=0\\ x_1+x_2>0\\ x_1x_2>0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}k^2=\dfrac{\lambda(1-\lambda)}{\lambda^2+\lambda-1}\\ k^2>\dfrac{\lambda}{1-\lambda}\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\dfrac{\lambda(1-\lambda)}{\lambda^2+\lambda-1}>\dfrac{\lambda}{1-\lambda}\\ \lambda^2+\lambda-1>0\end{cases}\Rightarrow\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}<\lambda<\dfrac{2}{3}.$$

由①②知，$\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}\leqslant\lambda<\dfrac{2}{3}$.

【简要评注】

求参数的取值范围问题是常见的综合性问题，在解析几何的相关问题中，一般还会和图形之间的几何关系结合在一起，构造满足题设条件的不等式是解答的关键.

本节小节

求参数的取值范围在各种类型的问题中都可能出现，在这里关键是通过图形之间的位置关系找到题设条件成立的临界状态.

拓展练习

1，设F_1、F_2分别是椭圆$\dfrac{x^2}{4}+y^2=1$的左、右焦点. 若P是该椭圆上的一个动点，求$PF_1\cdot PF_2$的最大值和最小值.

2，如图，椭圆$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$的一个焦点是$F(1,0)$，$O$为坐标原点.

（Ⅰ）已知椭圆短轴的两个三等分点与一个焦点构成正三角形，求椭圆的方程；

（Ⅱ）设过点F的直线l交椭圆于A，B两点．若直线l绕点F任意转动，恒有$|OA|^2+|OB|^2<|AB|^2$，求a的取值范围.

3，已知$P(2,0)$，对于抛物线$y^2=mx$上任何一点Q，$|PQ|\geq 2$，则m的取值范围是_______.

4，已知双曲线C:$\dfrac{x^2}{2}-y^2=1$．已知点M的坐标为$(0,1)$．设P是双曲线C上的点，Q

是点 P 关于原点的对称点．记 $\lambda=\overrightarrow{MP}\cdot\overrightarrow{MQ}$．求 λ 的取值范围.

第四节 动态直角三角形问题

1．与椭圆有关的动态直角三角形

例 1．设椭圆 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 的左、右焦点分别为 F_1，F_2，A 是椭圆上的一点，$AF_2\perp F_1F_2$，原点 O 到直线 AF_1 的距离为 $\dfrac{1}{3}|OF_1|$.

（Ⅰ）证明 $a=\sqrt{2}b$；

（Ⅱ）求 $t\in(0,\ b)$ 使得下述命题成立：设圆 $x^2+y^2=t^2$ 上任意点 $M(x_0,\ y_0)$ 处的切线交椭圆于 Q_1，Q_2 两点，则 $OQ_1\perp OQ_2$.

（一）证明 $a=\sqrt{2}b$

证法一：由题设 $AF_2\perp F_1F_2$ 及 $F_1(-c,0)$，$F_2(c,0)$，不妨设点 $A(c,\ y)$，其中 $y>0$，由于点 A 在椭圆上，有 $\dfrac{c^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$，$\dfrac{a^2-b^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$，解得 $y=\dfrac{b^2}{a}$，从而得到 $A\left(c,\dfrac{b^2}{a}\right)$，

直线 AF_2 的方程为 $y=\dfrac{b^2}{2ac}(x+c)$，整理得 $b^2x-2acy+b^2c=0$.

由题设，原点 O 到直线 AF_1 的距离为 $\dfrac{1}{3}|OF_1|$，即 $\dfrac{c}{3}=\dfrac{b^2c}{\sqrt{b^4+4a^2c^2}}$，将 $c^2=a^2-b^2$ 代入原式并化简得 $a^2=2b^2$，即 $a=\sqrt{2}b$.

证法二：同证法一，得到点 A 的坐标为 $\left(c,\dfrac{b^2}{a}\right)$，过点 O 作 $OB\perp AF_1$，垂足为 H，易知△ F_1BO ∽△ F_1F_2A，故 $\dfrac{|BO|}{|OF_1|}=\dfrac{|F_2A|}{|F_1A|}$.

由椭圆定义得 $|AF_1|+|AF_2|=2a$，又 $|BO|=\dfrac{1}{3}|OF_1|$，所以 $\dfrac{1}{3}=\dfrac{|F_2A|}{|F_1A|}=\dfrac{|F_2A|}{2a-|F_2A|}$，解

得$\left|F_2A\right|=\dfrac{a}{2}$，而$\left|F_2A\right|=\dfrac{b^2}{a}$，得$\dfrac{b^2}{a}=\dfrac{a}{2}$，即$a=\sqrt{2}b$.

（二）求满足条件的参数t的值

方法一：

打开文件“6-4-例 1.dmr”，如图 6.4.1-6.4.2 所示，虚线圆即为所求，拖动点M观察$\angle Q_1OQ_2$的变化规律.

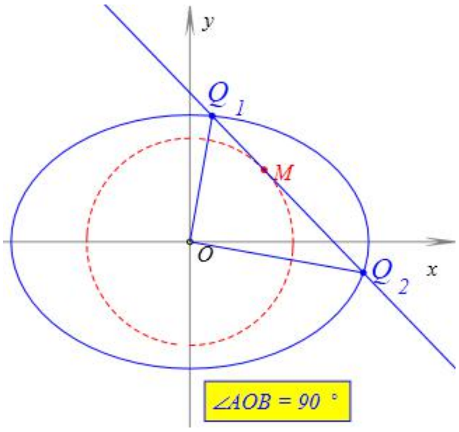


图 6.4.1

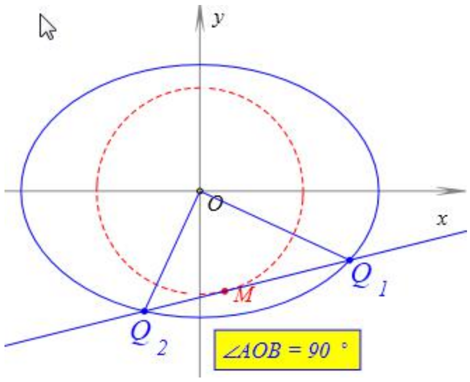


图 6.4.2

圆$x^2+y^2=t^2$上的任意点$M(x_0,\ y_0)$处的切线方程为$x_0x+y_0y=t^2$.

当$t\in(0,\ b)$时，圆$x^2+y^2=t^2$上的任意点都在椭圆内，故此圆在点A处的切线必交椭圆于两个不同的点Q_1和Q_2，因此点$Q_1(x_1,\ y_1)$，$Q_2(x_2,\ y_2)$的坐标是方程组$\begin{cases}x_0x+y_0y=t^2 & ① \\ x^2+2y^2=2b^2 & ②\end{cases}$的解. 当$y_0\neq 0$时，由①式得$y=\dfrac{t^2-x_0x}{y_0}$

代入②式，得$x^2+2\left(\dfrac{t^2-x_0x}{y_0}\right)^2=2b^2$，即$(2x_0^2+y_0^2)x^2-4t^2x_0x+2t^4-2b^2y_0^2=0$，

于是：

$$x_1+x_2=\frac{4t^2x_0}{2x_0^2+y_0^2}，\quad x_1x_2=\frac{2t^4-2b^2y_0^2}{2x_0^2+y_0^2}$$

$$y_1y_2=\frac{t^2-x_0x_1}{y_0}\cdot\frac{t^2-x_1x_2}{y_0}=\frac{1}{y_0^2}\left[t^4-x_0t^2(x_1+x_2)+x_0^2x_1x_2\right]$$

$$=\frac{1}{y_0^2}\left(t^4-x_0t^2\frac{4t^2x_0}{2x_0^2+y_0^2}+x_0^2\frac{2t^4-2b^2y_0^2}{2x_0^2+y_0^2}\right)$$

$$=\frac{t^4-2b^2x_0^2}{2x_0^2+y_0^2}.$$

若 $OQ_1 \perp OQ_2$，则：

$$x_1x_2 + y_1y_2 = \frac{2t^4 - 2b^2y_0^2}{2x_0^2 + y_0^2} + \frac{t^4 - 2b^2x_0^2}{2x_0^2 + y_0^2} = \frac{3t^4 - 2b^2(x_0^2 + y_0^2)}{2x_0^2 + y_0^2} = 0 .$$

所以，$3t^4 - 2b^2(x_0^2 + y_0^2) = 0$．由 $x_0^2 + y_0^2 = t^2$，得 $3t^4 - 2b^2t^2 = 0$．在区间 $(0，b)$ 内此方程的解为 $t = \frac{\sqrt{6}}{3}b$.

当 $y_0 = 0$ 时，必有 $x_0 \neq 0$，同理求得在区间 $(0，b)$ 内的解为 $t = \frac{\sqrt{6}}{3}b$.

另一方面，当 $t = \frac{\sqrt{6}}{3}b$ 时，可推出 $x_1x_2 + y_1y_2 = 0$，从而 $OQ_1 \perp OQ_2$.

综上所述，$t = \frac{\sqrt{6}}{3}b \in (0，b)$ 使得所述命题成立.

方法二：

考虑一个特殊情况：取圆 $x^2 + y^2 = t^2$ 与 x 轴的交点 $M(x_0，y_0)$（如图 6.4.3 所示），

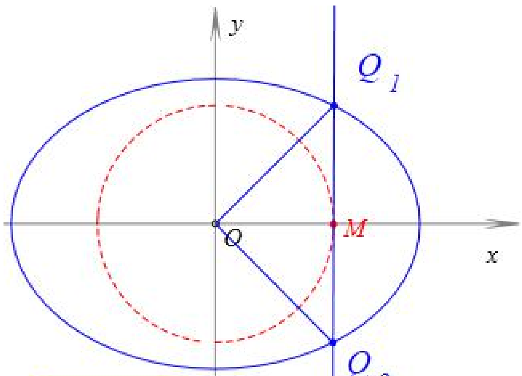


图 6.4.3

此时 $x_0 = t$，把 $x_0 = t$ 代入到方程 $\frac{x^2}{2b^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ 得 $y_{Q1}^2 = b^2(1 - \frac{t^2}{2b^2})$，因为 $|OM|^2 = y_{Q1}^2$，所以 $t^2 = b^2 - \frac{t^2}{2}$，$\frac{3}{2}t^2 = b^2$，$t = \frac{\sqrt{6}}{3}b$．下面只需证明对于圆 $x^2 + y^2 = \frac{2b^2}{3}$ 任意一点 $M(x_0，y_0)$ 的切线交椭圆于 Q_1，Q_2 两点，都满足 $OQ_1 \perp OQ_2$．不

失一般性，为计算简便计，令 $b^2=3$，现在证明圆 $x^2+y^2=2$ 上任意一点 $M(x_0,\ y_0)$ 的切线 $xx_0+yy_0=2$ 交椭圆 $x^2+2y^2=6$ 于 Q_1，Q_2 两点，都满足 $OQ_1\perp OQ_2$. 还是通过向量的数量积等于零的途径证.

设 Q_1，Q_2 两点的坐标分别为 (x_1,y_1)，(x_2,y_2)，由切线方程 $xx_0+yy_0=2$ 得 $y=\dfrac{2-xx_0}{y_0}$，代入到方程 $x^2+2y^2=6$ 中得到 $x^2+2\dfrac{(2-xx_0)^2}{y_0^2}=6$，化简得

$(y_0^2+2x_0^2)x^2-8xx_0+8-6y_0^2=0$

由于 $M(x_0,\ y_0)$ 在圆 $x^2+y^2=2$ 上，所以 $y_0^2=2-x_0^2$，于是上面的方程可化为

$(2+x_0^2)x^2-8xx_0+6x_0^2-4=0$，所以：$x_1+x_2=\dfrac{8x_0}{x_0^2+2}$，$x_1x_2=\dfrac{6x_0^2-4}{x_0^2+2}$.

$$
\begin{aligned}
y_1y_2&=\frac{2-x_0x_1}{y_0}\cdot\frac{2-x_0x_2}{y_0}\\
&=\frac{1}{y_0^2}[4-2x_0(x_1+x_2)+x_0^2x_1x_2]\\
&=\frac{1}{y_0^2}[4-\frac{16x_0^2}{x_0^2+2}+\frac{6x_0^4-4x_0^2}{x_0^2+2}]\\
&=\frac{1}{y_0^2}\cdot\frac{6x_0^4-16x_0^2+8}{x_0^2+2}
\end{aligned}
$$

$$x_1x_2+y_1y_2=\frac{1}{y_0^2}\cdot\frac{6x_0^4-16x_0^2+8+(6x_0^2-4)(2-x_0^2)}{x_0^2+2}=0$$

可见 $\overrightarrow{OQ_1}\cdot\overrightarrow{OQ_2}=0$，$OQ_1\perp OQ_2$. 综上所述，$t=\dfrac{\sqrt{6}}{3}b\in(0,\ b)$ 可使所述命题成立.

【简要评注】

由于本题所研究的是圆的任意切线与椭圆交点的问题，构成了一个动态直角三角形的问题. 求解时既要考虑一般情况，也要检查特殊情况.

对于一个任意的椭圆，结论（II）是否还成立呢？请见附后的练习 2.

2．与椭圆有关的动态三角形面积

例 2． 已知椭圆$C:\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$的离心率为$\frac{\sqrt{6}}{3}$，短轴一个端点到右焦点的距离为$\sqrt{3}$.

（Ⅰ）求椭圆C的方程;

（Ⅱ）设直线l与椭圆C交于A，B两点，坐标原点O到直线l的距离为$\frac{\sqrt{3}}{2}$，求△AOB面积的最大值.

（一）求椭圆C的方程

设椭圆的半焦距为c，依题意$\begin{cases}\frac{c}{a}=\frac{\sqrt{6}}{3},\\ a=\sqrt{3},\end{cases}$，所以$b=1$.

因此，所求椭圆方程为$\frac{x^2}{3}+y^2=1$.

（二）求△AOB面积的最大值

【动感体验】

根据坐标原点O到直线l的距离为$\frac{\sqrt{3}}{2}$想到直线l是以原点O为圆心$\frac{\sqrt{3}}{2}$为半径的圆的切线. 而以椭圆的半长轴和半短轴为直角边的直角三角形的高恰好也是$\frac{\sqrt{3}}{2}$. 可以猜想随着直线l的变化△AOB可能也是直角三角形，如果确实是这样的话，求△AOB面积的最大值就转化为求弦AB的最大值了. 凭几何直观这个最大值就是以椭圆的半长轴和半短轴为直角边的直角三角形的斜边.

打开文件“6-4-例 2. dmr”，如图 6. 4. 4 所示，点M是以原点为圆心的圆上的任意点，点A、点B是经过点M的圆的切线与椭圆$\frac{x^2}{3}+y^2=1$的两个交点. 拖动点，观察$\angle AOB$的变化规律.

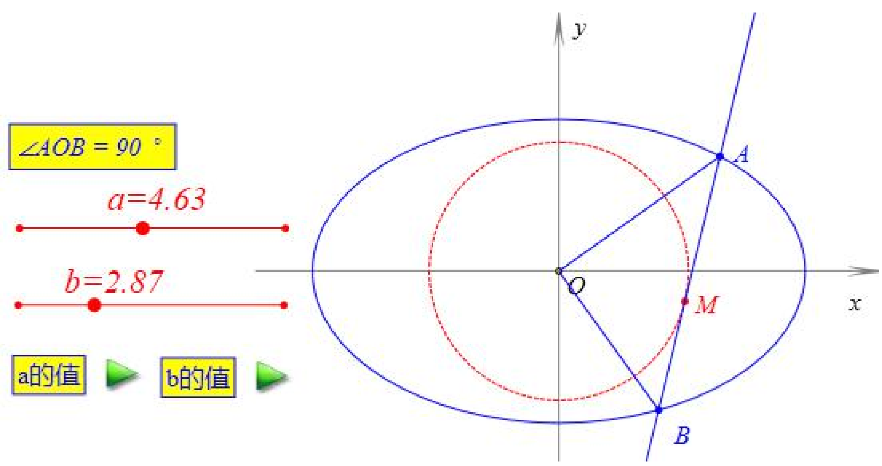


图 6.4.4

这是因为圆 O 的半径等于 $\sqrt{\dfrac{a^2b^2}{a^2+b^2}}$，即 $|OM|=\sqrt{\dfrac{a^2b^2}{a^2+b^2}}$，这就是我们在前面的练习 2 中所要证明的结论.

进入文件"6-4-例 2.dmr"的第二页，如图 6.4.5 所示，点 M 是以原点为圆心的圆上的任意点，点 A、点 B 是经过点 M 的圆的切线与椭圆 $\dfrac{x^2}{3}+y^2=1$ 的两个交点. 拖动点 M，观察 $\angle AOB$ 的变化规律.

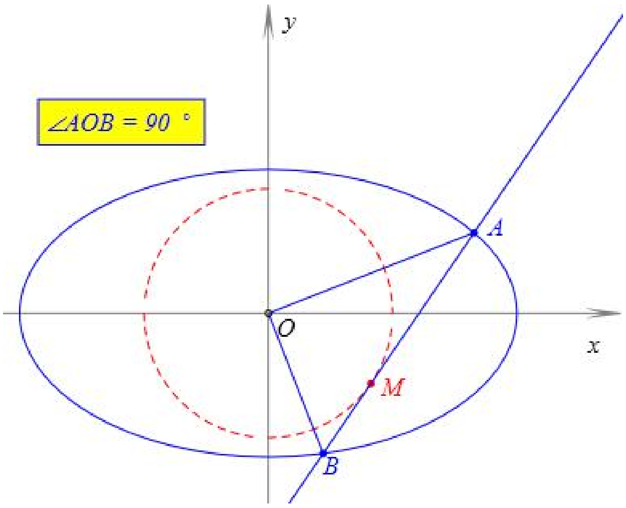


图 6.4.5

在本题中，$a^2=3$、$b^2=1$，因此 $\sqrt{\dfrac{a^2b^2}{a^2+b^2}}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$，正好就是 O 到直线 l 的距离 $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$. 所以在本题中，仍然有 $\angle AOB$ 为直角（证明过程见练习 2 的一般性结论）.

【思路点拨】

因为直角三角形 ABC 的高等于 OM，为定值. 因此，求 $Rt\Delta AOB$ 面积的最大值只需求 $|AB|$ 的最大值. 根据 $Rt\Delta AOB$ 的性质，表示 $|AB|$.

【动态解析】

设 $A(x_1, y_1)$，$B(x_2, y_2)$.

（1）当 $AB\perp x$ 轴时，$|AB|=\sqrt{3}$.

（2）当 AB 与 x 轴不垂直时，

设直线 AB 的方程为 $y=kx+m$. 由已知 $\dfrac{|m|}{\sqrt{1+k^2}}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$，得 $m^2=\dfrac{3}{4}(k^2+1)$.

把 $y=kx+m$ 代入椭圆方程，整理得 $(3k^2+1)x^2+6kmx+3m^2-3=0$，

$\therefore x_1+x_2=\dfrac{-6km}{3k^2+1}$，$x_1x_2=\dfrac{3(m^2-1)}{3k^2+1}$.

$$\therefore |AB|^2=(1+k^2)(x_2-x_1)^2=(1+k^2)\left[\frac{36k^2m^2}{(3k^2+1)^2}-\frac{12(m^2-1)}{3k^2+1}\right]$$

$$=\frac{12(k^2+1)(3k^2+1-m^2)}{(3k^2+1)^2}=\frac{3(k^2+1)(9k^2+1)}{(3k^2+1)^2}$$

$$=3+\frac{12k^2}{9k^4+6k^2+1}=3+\frac{12}{9k^2+\frac{1}{k^2}+6}(k\neq 0)\leqslant 3+\frac{12}{2\times 3+6}=4\ .$$

当且仅当$9k^2=\dfrac{1}{k^2}$，即$k=\pm\dfrac{\sqrt{3}}{3}$时等号成立．当$k=0$时，$|AB|=\sqrt{3}$，

综上所述$|AB|_{\max}=2$.

$\therefore$ 当$|AB|$最大时，$\triangle AOB$面积取最大值$S=\dfrac{1}{2}\times|AB|_{\max}\times\dfrac{\sqrt{3}}{2}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

【简要评注】

本题处理的一个技巧是将点到直线的距离为定长转化为圆的切线系，从中也可以看到与例 1 的解答过程有异曲同工之处.

若题设中，方程对应的是一个任意椭圆，那么在什么情况下$\triangle AOB$面积的最大值呢？请见附后的练习 3.

3．与双曲线有关的动态直角三角形

例 3．已知双曲线$C:\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$的离心率为$\sqrt{3}$，右准线方程为$x=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$

（I）求双曲线C的方程；

（II）设直线l是圆$O:x^2+y^2=2$上动点$P(x_0,y_0)(x_0y_0\neq 0)$处的切线，l与双曲线C交于不同的两点A,B，证明$\angle AOB$的大小为定值.

（一）求双曲线C的方程

由题意得$\begin{cases}\dfrac{a^2}{c}=\dfrac{\sqrt{3}}{3}\\ \dfrac{c}{a}=\sqrt{3}\end{cases}$，解得：$a=1$，$c=\sqrt{3}$.

所以，$b^2=c^2-a^2=2$，因此双曲线的方程为：

$$x^2 - \frac{y^2}{2} = 1.$$

（二）证明 $\angle AOB$ 的大小为定值

【动感体验】

打开文件“6-4-例 3.dmr”，点 P 是圆 $O: x^2 + y^2 = 2$ 上的动点，拖动点 P 观察 $\angle AOB$ 的变化规律，如图 6.4.6-6.4.9 所示为其中的几种情况.

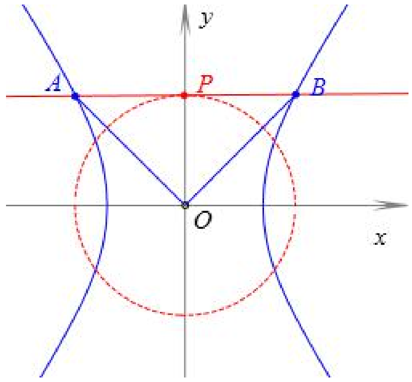


图 6.4.6

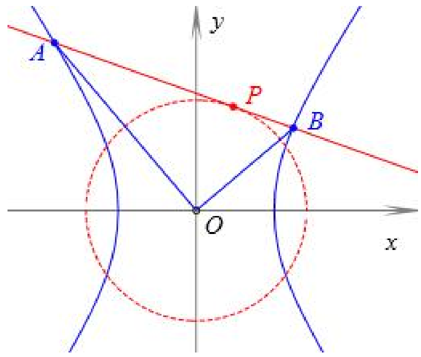


图 6.4.7

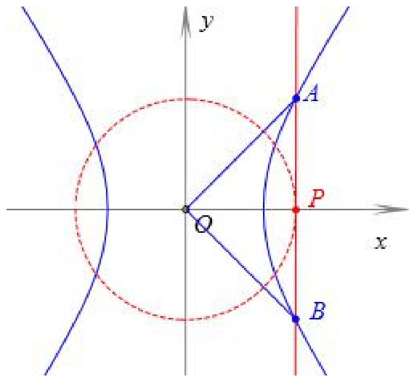


图 6.4.8

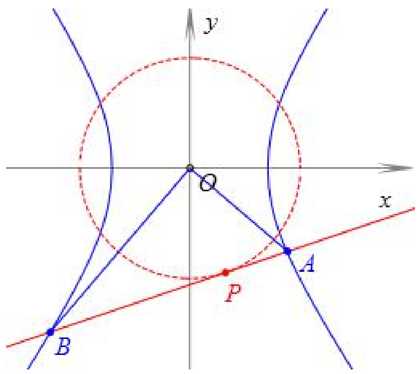


图 6.4.9

【思路点拨】

通过计算 $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} = 0$ 成立，推导 $\angle AOB$ 为定值.

【动态解析】

点 $P(x_0, y_0)$ $(x_0 y_0 \neq 0)$ 在圆 $x^2 + y^2 = 2$ 上，圆在点 $P(x_0, y_0)$ 处的切线 l 的方程为：

$y - y_0 = -\frac{x_0}{y_0}(x - x_0)$，化简得：$x_0 x + y_0 y = 2$.

由 $\begin{cases} x^2 - \frac{y^2}{2} = 1 \\ x_0 x + y_0 y = 2 \end{cases}$ 及 $x_0^2 + y_0^2 = 2$ 得 $(3x_0^2 - 4)x^2 - 4x_0 x + 8 - 2x_0^2 = 0$.

因为切线 l 与双曲线 C 交于不同的两点 A，B，且 $0 < x_0^2 < 2$，所以 $3x_0^2 - 4 \neq 0$，且

$\Delta = 16x_0^2 - 4(3x_0^2 - 4)(8 - 2x_0^2) > 0$.

设 A，B 两点的坐标分别为 (x_1,y_1)，(x_2,y_2)，则：

$$x_1+x_2=\frac{4x_0}{3x_0^2-4}，\quad x_1x_2=\frac{8-2x_0^2}{3x_0^2-4}.$$

因为 $\cos\angle AOB=\dfrac{\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}}{|\overrightarrow{OA}|\cdot|\overrightarrow{OB}|}$，

且 $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=x_1x_2+y_1y_2=x_1x_2+\dfrac{1}{y_0^2}(2-x_0x_1)(2-x_0x_2)$

$$=x_1x_2+\frac{1}{2-x_0^2}[4-2x_0(x_1+x_2)+x_0^2x_1x_2]$$

$$=\frac{8-2x_0^2}{3x_0^2-4}+\frac{1}{2-x_0^2}[4-\frac{8x_0^2}{3x_0^2-4}+\frac{x_0^2(8-2x_0^2)}{3x_0^2-4}]$$

$$=\frac{8-2x_0^2}{3x_0^2-4}+\frac{2x_0^2-8}{3x_0^2-4}=0$$

所以，$\angle AOB$ 为 90^o.

【简要评注】

与例 1、例 2 相比较，这里不过是将椭圆换成了双曲线，只是问题的环境发生了迁移，而求解的方法没有本质的改变.

对于一般的双曲线，当圆的半径为多大时能使得 $\angle AOB$ 依然为定值呢？请见附后的练习 5.

本节小结

在引入代数方法后，对圆锥曲线的研究、探索不再是各行其道，而是高度统一，这就是解析几何的成就. 本节的几个例子，虽然问题的提法不同，经过作图分析和代数化简，就可以发现它们本质上来源于同一个问题. 自己动手将某一类型的问题彻底研究清楚，不但在解题上有帮助，还能帮助你增加对数学的认识，也是一种创新性学习的过程.

拓展练习

1． 设椭圆 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 的左、右焦点分别为 F_1，F_2，A 是椭圆上的一点，$AF_2\perp F_1F_2$，原点 O 到直线 AF_1 的距离为 $\dfrac{1}{3}\left|OF_1\right|$.

（Ⅰ）证明 $a=\sqrt{2}b$；

（Ⅱ）设 Q_1，Q_2 为椭圆上的两个动点，$OQ_1\perp OQ_2$，过原点 O 作直线 Q_1Q_2 的垂线 OD，垂足为 D，求点 D 的轨迹方程.

2． 设椭圆的方程为：$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$. 求 t 使得下述命题成立：设圆 $x^2+y^2=t^2$ 上任意

点 $M(x_0, y_0)$ 处的切线交椭圆于 Q_1，Q_2 两点，则 $OQ_1 \perp OQ_2$.

3．已知椭圆 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$，点 A 和点 B 是椭圆上两点，且 $AO \perp BO$（点 O 为坐标原点），求 $\triangle AOB$ 面积的最大值和最小值.

4．设椭圆 E：$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1(a,b>0)$ 过点 $M(2,\sqrt{2})$，$N(\sqrt{6},1)$，0 为坐标原点；

（Ⅰ）求椭圆 E 的方程；

（Ⅱ）是否存在圆心在原点的圆，使得该圆的任意一条切线与椭圆 E 恒在两个交点 A，B 且 $\overrightarrow{OA} \perp \overrightarrow{OB}$？若存在，写出该圆的方程，并求 $|AB|$ 的取值范围；若不存在，说明理由.

5．设双曲线的方程为：$\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$. 求 t 使得下述命题成立：设圆 $x^2+y^2=t^2$ 上任意点 $P(x_0,y_0)$ 处的切线交双曲线于 A,B 两点，则 $OA \perp OB$.

第七章 导数

导数是研究函数性质、解决许多实际问题的有力工具. 导数的内容是热点，往往具有较高的综合性，难度在中等以上的水平，所占分值较大.

解答有关导数的试题，主要应抓住函数与它的导函数的关系，从而把握函数的变化规律.

第一节 函数的单调性

1．讨论带参数的函数单调性

例 1． 已知函数 $f(x)=x-\dfrac{2}{x}+1-a\ln x$，$a>0$.

（I）讨论 $f(x)$ 的单调性；

（II）设 $a=3$，求 $f(x)$ 在区间[1，e^2]上值域.期中 e=2.71828…是自然对数的底数.

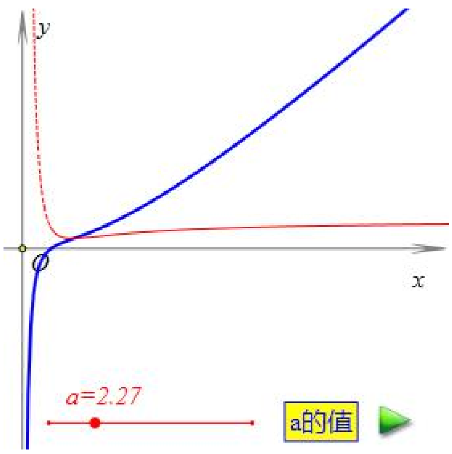
（一）讨论 $f(x)$ 的单调性

【动态解析】

需要先求函数 $f(x)$ 的导数，继而根据导数的正负判断函数的增减性.

$f'(x)=1+\dfrac{2}{x^2}-\dfrac{a}{x}=\dfrac{x^2-ax+2}{x^2}$，因为分母恒大于零，所以只需讨论分子的符号，也就是这个含有参数 a 的二次函数的符号，需要对 a 分类讨论.

打开文件“7-1-例 1.dmr”，实线为 $f(x)$ 的图像，虚线为 $f'(x)$ 的图像.通过变量尺可以改变实数 a 的值或通过按钮设置它的值，观察实数 a 对 $f(x)$ 的单调性的影响. 如图 7.1.1、7.1.2 所示为其中的两种情形.



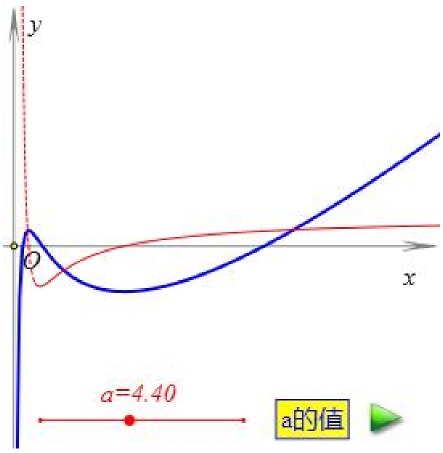


图 7.1.1　　　　　　　　　　　　图 7.1.2

当$a^2-4\times 2\le 0$，即$0<a\le 2\sqrt{2}$时，如图 7.1.1 所示，$f'(x)\ge 0$恒成立，则在定义域$\{x|x>0\}$上单调递增.

当$a^2-4\times 2<0$，即$a>2\sqrt{2}$时，如图 7.1.2 所示，令$f'(x)=0$得$x_1=\dfrac{a-\sqrt{a^2-8}}{2}$，$x_2=\dfrac{a+\sqrt{a^2-8}}{2}$. 当$x$变化时，$f'(x)$，$f(x)$的变化情况如下表：

x	$(0,\ \frac{a-\sqrt{a^2-8}}{2})$	$\frac{a-\sqrt{a^2-8}}{2}$	$(\frac{a-\sqrt{a^2-8}}{2},\ \frac{a+\sqrt{a^2-8}}{2})$	$\frac{a+\sqrt{a^2-8}}{2}$	$(\frac{a+\sqrt{a^2-8}}{2},\ +\infty)$
$f'(x)$	+	0	－	0	+
$f(x)$	↗	极大值	↘	极小值	↗

所以$f(x)$在$(0,\ \dfrac{a-\sqrt{a^2-8}}{2})$，$(\dfrac{a+\sqrt{a^2-8}}{2},\ +\infty)$内单调递增，在$(\dfrac{a-\sqrt{a^2-8}}{2},\ \dfrac{a+\sqrt{a^2-8}}{2})$内单调递减.

（二）求$a=3$时$f(x)$在区间[1，e^2]上值域

如图 7. 1. 3 所示，因为$a=3>2\sqrt{2}$，这时方程$f'(x)=0$的两个实数根为 1 和 2. 函数$f(x)$在区间（0，1）上是增函数，在$x=1$时取得极大值 0，在[1，2]是减函数，在$x=2$时取得极小值$2-3\ln 2$，在[2，e^2]上是增函数，当$x=e^2$时$f(x)$取得最大值$e^2-\dfrac{2}{e^2}-5$.

所以，$f(x)$在区间[1，e^2]上值域为$[2-3\ln 2,\ e^2-\dfrac{2}{e^2}-5]$.

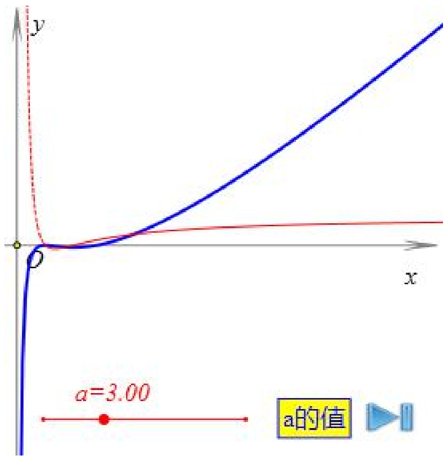


图 7.1.3

【简要评注】

对于连续可导函数，当 $f'(x)\ge 0$ 且 $f'(x)=0$ 只在一些孤立点取得时（即不在任何区间恒成立），都有 $f(x)$ 单调递增. 在对参数分类讨论时，应注意端点取值.

2. 函数在指定区间上的单调性质

例 2. 已知函数 $f(x)=\frac{1}{4}x^4+x^3-\frac{9}{2}x^2+cx$ 有三个极值点.

（I）证明：$-27<c<5$；

（II）若存在实数 c，使函数 $f(x)$ 在区间 $[a,a+2]$ 上单调递减，求 a 的取值范围.

（一）证明 $-27<c<5$

【动态解析】

由函数 $f(x)=\frac{1}{4}x^4+x^3-\frac{9}{2}x^2+cx$ 有三个极值点，想到需要研究函数 $f'(x)$ 的性质，它的图像应该与 x 轴有三个交点. 由于当 x 取足够大的正数时 $f'(x)$ 的函数值也为足够大的正数，当 x 取足够小的负数时函数值也为足够小的负数. 所以如果这个函数图像与 x 轴有三个交点的话，这个函数的一个极大值必大于零，而极小值必小于零.

为研究此函数的性质，设 $g(x)=x^3+3x^2-9x+c,$ 并求它的导数 $g'(x)=3x^2+6x-9=3(x+3)(x-1),$ 很明显：

当 $x<-3$ 时，$g'(x)>0,\ \ g(x)$ 在 $(-\infty,-3)$ 上为增函数；

当 $-3<x<1$ 时，$g'(x)<0,\ \ g(x)$ 在 $(-3,1)$ 上为减函数；

当 $x>1$ 时，$g'(x)>0,\ \ g(x)$ 在 $(1,+\infty)$ 上为增函数；

所以函数 $g(x)$ 在 $x=-3$ 处取极大值，在 $x=1$ 处取极小值且 $g(-3)>0$ 以及 $g(-1)<0$.

即：$-27+27+27+c>0$ 和 $1+3-9+c<0$ 成立，解得 $c>-27$, 且 $c<5$, 故 $-27<c<5$.

打开文件“7-1-例 2.dmr”，如图 7.1.4 所示，通过变量尺可以改变参数 c 的值或通过按钮设置它的值，研究参数 c 对函数 $f(x)$ 极值的影响.

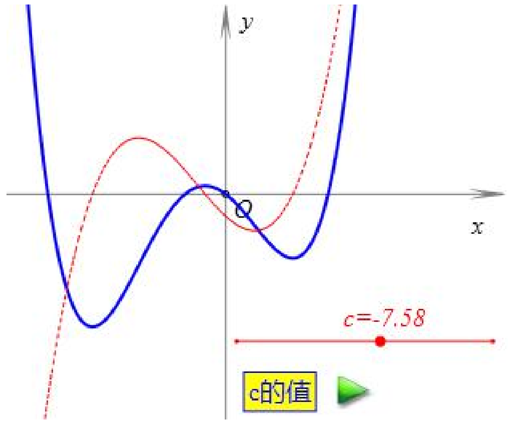


图 7.1.4

（二）求 a 的取值范围

【动态解析】

由（I）的证明可知，当 $-27<c<5$ 时，$f(x)$ 有三个极值点.

不妨设为 x_1，x_2，x_3（$x_1<x_2<x_3$），则 $f'(x)=(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)$.

所以 $f(x)$ 的单调递减区间是 $(-\infty，x_1],[x_2,x_3]$，如图 7.1.5 所示.

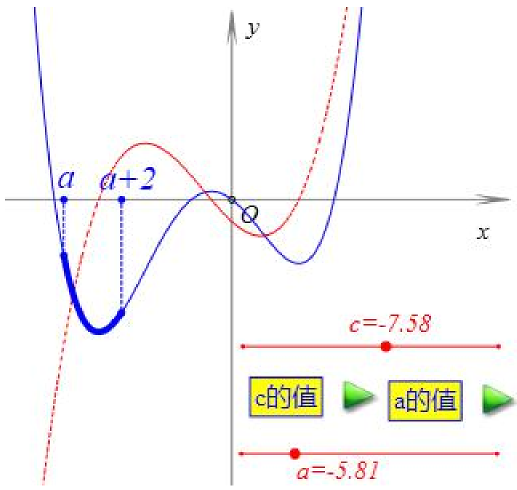


图 7.1.5

若 $f(x)$ 在区间 $[a,a+2]$ 上单调递减，则 $[a,a+2]\subset(-\infty，x_1]$，或

$\left[a,a+2\right]\subset[x_2,x_3]$.

若$\left[a,a+2\right]\subset(-\infty$，$x_1]$,则$a+2\le x_1$.由（I）知，$x_1<-3$,于是$a<-5$.

若$\left[a,a+2\right]\subset[x_2,x_3]$,则$a\ge x_2$且$a+2\le x_3$.由（I）知，$-3<x_2<1$.

又$f'(x)=x^3+3x^2-9x+c$, 当$c=-27$时，$f'(x)=(x-3)(x+3)^2$;

当$c=5$时，$f'(x)=(x+5)(x-1)^2$.

因此, 当$-27<c<5$时，$1<x_3<3$.所以$a>-3$, 且$a+2\le 3$.

即$-3<a<1$.故$a<-5$,或$-3<a<1$.反之, 当$a<-5$,或$-3<a<1$

反之， 当$a<-5$，或$-3<a<1$时，总可找到$c\in(-27,5)$，使函数$f(x)$在区间$[a,a+2]$上单调递减.

综上所述, a的取值范围是$(-\infty,-5)\bigcup(-3,1)$.

【简要评注】

根据极值和单调性可以做出函数的大致图像，这是导数的一个重要作用，对研究函数的其他性质，能够帮助我们培养良好的思维习惯.

3．分段函数的单调性问题

例3．设$k\in\mathbf{R}$，函数$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{1-x}, & x<1\\ -\sqrt{x-1}, & x\geqslant 1\end{cases}$，$F(x)=f(x)-kx$，$x\in\mathbf{R}$，试讨论函数$F(x)$的单调性.

【动感体验】

由于所给的函数是分段函数，因此看来也需要分段讨论函数的单调性.又由于函数$F(x)=f(x)-kx$中含有参数k因此还需要对k进行讨论.

打开文件“7-1-例 3.dmr”，实线为函数$F(x)$的图像，通过变量尺可以改变参数k的值或者通过按钮设置它的值，观察和研究k对函数$F(x)$单调性的影响，如图 7.1.6-7.1.7 所示为其中的两种情形.

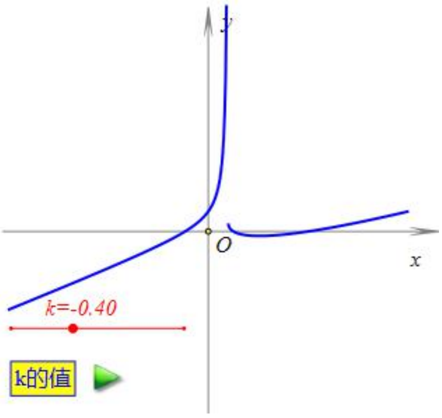


图 7.1.6

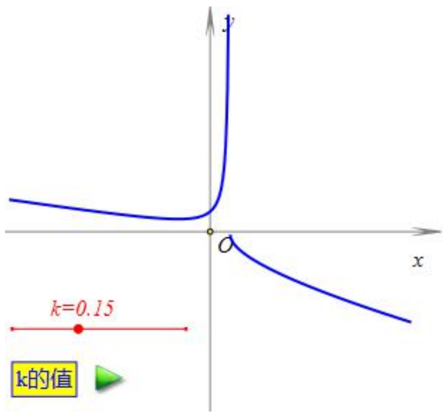


图 7.1.7

【动态解析】

$$F(x)=f(x)-kx=\begin{cases}\dfrac{1}{1-x}-kx, & x<1,\\ -\sqrt{x-1}-kx, & x\geq 1,\end{cases},$$

$$F'(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{(1-x)^2}-k, & x<1,\\ -\dfrac{1}{2\sqrt{x-1}}-k, & x\geq 1,\end{cases}$$

对于 $F(x)=\dfrac{1}{1-x}-kx(x<1)$：当 $k\leq 0$ 时，如图 7.1.6 所示，函数 $F(x)$ 在 $(-\infty,1)$ 上是增函数；当 $k>0$ 时，如图 7.1.7 所示，函数 $F(x)$ 在 $(-\infty,1-\dfrac{1}{\sqrt{k}})$ 上是减函数，在 $(1-\dfrac{1}{\sqrt{k}},1)$ 上是增函数.

对于 $F(x)=-\sqrt{x-1}-kx(x\geq 1)$：当 $k\geq 0$ 时，如图 7.1.7 所示，函数 $F(x)$ 在 $\left[1,+\infty\right)$ 上是减函数；当 $k<0$ 时，如图 7.1.6 所示，函数 $F(x)$ 在 $\left[1,1+\dfrac{1}{4k^2}\right)$ 上是减函数，在 $\left[1+\dfrac{1}{4k^2},+\infty\right)$ 上是增函数.

【简要评注】

解含参数的题必须明确两个问题:对谁讨论和如何分类讨论. 另外本题中需要进行不等式的计算，要依靠笔头训练，而计算机上的实验可以对本题的结果进行验证. 图形直观地显示出最后分类的结果，一目了然. 由于本题中的函数 $F(x)$ 在 $x=1$ 处不连续，需要分段研究它的单调性. 从图像中可以帮我们分析到：无论 k 的取值如何，在 $(-\infty,1)$ 和 $[1,+\infty)$ 两个

区间上的单调性质都是无法合并.

4．函数在动态区间上的单调性

例 4． 已知函数 $f(x)=\dfrac{1}{3}x^3+x^2-2$.

（1）设 $\{a_n\}$ 是正数组成的数列，前 n 项和为 S_n，其中 $a_1=3$．若点 $(a_n,\ a_{n+1}^2-2a_{n+1})$（$n\in\mathbf{N}^*$）在函数 $y=f'(x)$ 的图象上，求证：点 $(n,\ S_n)$ 也在 $y=f'(x)$ 的图象上；

（2）求函数 $f(x)$ 在区间 $(a-1,\ a)$ 内的极值.

（一）求证点 (n,S_n) 在 $y=f'(x)$ 的图象上

因为 $f(x)=\dfrac{1}{3}x^3+x^2-2$，所以 $f'(x)=x^2+2x$.

由点 $(a_n,\ a_{n+1}^2-2a_{n+1})(n\in\mathbf{N}^*)$ 在函数 $y=f'(x)$ 的图象上，得 $a_{n+1}^2-2a_{n+1}=a_n^2+2a_n$，即 $(a_{n+1}+a_n)(a_{n+1}-a_n-2)=0$.

又 $a_n>0(n\in\mathbf{N}^*)$，所以 $a_{n+1}-a_n=2$，又因为 $a_1=3$，所以数列 $\{a_n\}$ 是以 3 为首项，2 为公差的等差数列.

所以 $S_n=3n+\dfrac{n(n-1)}{2}\times 2=n^2+2n$，又因为 $f'(n)=n^2+2n$，所以 $S_n=f'(n)$，故点 $(n,\ S_n)$ 也在函数 $y=f'(x)$ 的图象上.

（二）求函数 $f(x)$ 在区间 $(a-1,\ a)$ 内的极值

【动感体验】

打开文件“7-1-例 4.dmr”，实线为函数 $f(x)$ 的图像，虚线为 $f'(x)$ 的图像.拖动点 a，研究函数 $f(x)$ 在区间（$a-1$，a）上的极值.如图 7.1.8—7.1.12 所示为其中的几种情形.

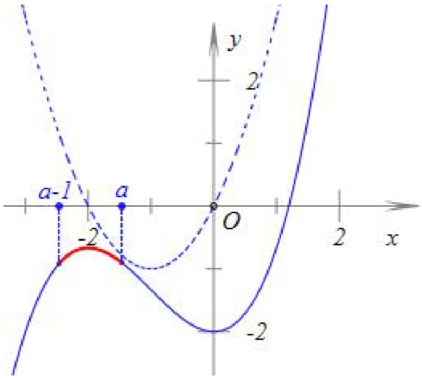


图 7.1.8

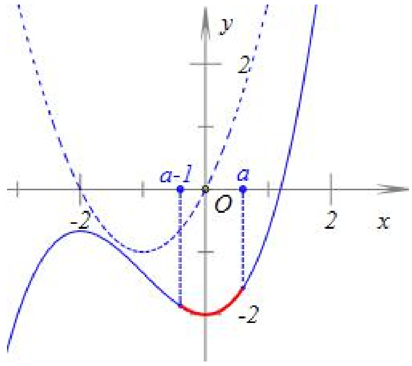


图 7.1.9

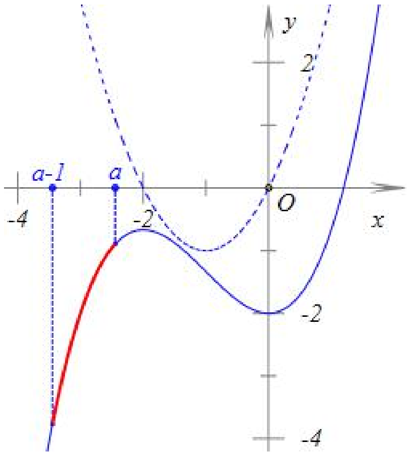


图 7.1.10

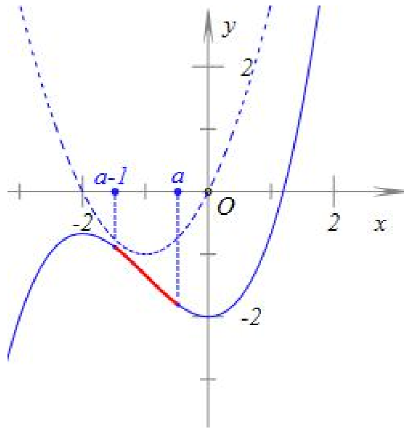


图 7.1.11

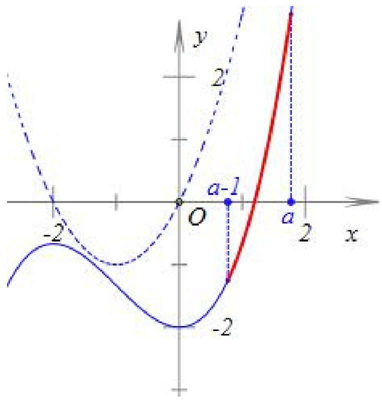


图 7.1.12

【动态解析】

$f'(x)=x^2+2x=x(x+2)$，由 $f'(x)=0$，得 $x=0$或$x=-2$.

当 x 变化时，$f'(x)$，$f(x)$ 的变化情况如下表：

x	$(-\infty,-2)$	-2	$(-2,0)$	0	$(0,+\infty)$
$f'(x)$	+	0	−	0	+
$f(x)$	↗	极大值	↘	极小值	↗

显然如果开区间 $(a-1,\ a)$ 落在某一个单调区间内，是没有极大值或极小值的，因此只需考虑 $-2\in(a-1,a)$ 以及 $0\in(a-1,a)$ 两种情况.前者函数有最大值 $f(-2)=-\dfrac{2}{3}$，后者函数有最小值 $f(0)=-2$. 所以有：

①当 $a-1<-2<a$，即 $-2<a<-1$ 时，如图 7.1.8 所示，$f(x)$ 的极大值为 $f(-2)=-\frac{2}{3}$，此时 $f(x)$ 无极小值.

②当 $a-1<0<a$，即 $0<a<1$ 时，如图 7.1.9 所示，$f(x)$ 的极小值为 $f(0)=-2$，此时 $f(x)$ 无极大值；

③当 $a\leqslant -2$ 或 $-1\leqslant a\leqslant 0$ 或 $a\geqslant 1$ 时，如图 7.1.10、图 7.1.11 和图 7.1.12 所示，$f(x)$ 既无极大值又无极小值.

【简要评注】

讨论含参数问题的方法有很多，如果能够以不变应万变，那是最简单的途径.由于本题函数确定，只需按 $(a-1,a)$ 所属区间讨论就可以得到其单调性和极值.

本节小结

函数的单调性是函数的重要性质，利用单调性可以研究函数的图像、值域等等，也可以研究函数的零点分布. 除定义外，导数是研究函数单调性的重要工具.

导数在研究函数的单调性和极值方面的应用非常广泛，近年来也常常围绕这一问题出现.其本质还是研究导函数的符号，含参数时要抓住分类依据，注意分类完整.

拓展练习

1.1． 设函数 $f(x)=\dfrac{e^x}{x^2+ax+a}$，其中 a 为实数.

（1）若 $f(x)$ 的定义域为 $\mathbf{R}$，求 a 的取值范围；

（2）当 $f(x)$ 的定义域为 $\mathbf{R}$ 时，求 $f(x)$ 的单调减区间.

1.2． 设函数 $f(x)=ax^2+b\ln x$，其中 $ab\neq 0$．证明：当 $ab>0$ 时，函数 $f(x)$ 没有极值点；当 $ab<0$ 时，函数 $f(x)$ 有且只有一个极值点，并求出极值.

1.3． 已知 $a\geq 0$，函数 $f(x)=(x^2-2ax)e^x$.

（1）当 x 为何值时，$f(x)$ 取得最小值？证明你的结论.

（2）设 $f(x)$ 在[-1，1]上是单调函数，求 a 的取值范围.

第二节 求参数的取值范围

1．不等式在指定区间上恒成立

例 1． 已知函数 $f(x)=x^3+ax^2+bx+c$ 在 $x=-\dfrac{2}{3}$ 与 $x=1$ 时都取得极值．

（1）求 a，b 的值及函数 $f(x)$ 的单调区间；

（2）若对 $x\in[-1,2]$，不等式 $f(x)<c^2$ 恒成立，求 c 的取值范围．

（一）求 a，b 的值及函数 $f(x)$ 的单调区间

【动态解析】

这是一个常规题，从已知条件出发，既然函数在 $x=-\dfrac{2}{3}$ 与 $x=1$ 时都取得极值，就应该有 $f'(-\dfrac{2}{3})=0$ 和 $f'(1)=0$．由此可得关于 a，b 的方程组进而求出 a，b．

事实上，由 $f(x)=x^3+ax^2+bx+c$，

$f'(x)=3x^2+2ax+b$．

$f'(-\dfrac{2}{3})=\dfrac{4}{3}-\dfrac{4a}{3}+b=0$，

$f'(1)=3+2a+b=0$

得 $a=-\dfrac{1}{2}$，$b=-2$．（如图 7.2.1 所示，实线为 $f(x)$ 的图像，虚线为 $f'(x)$ 的图像）

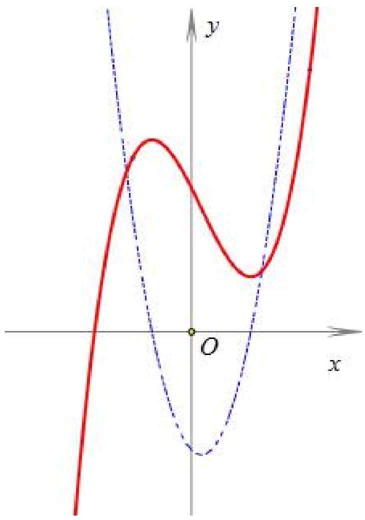


图 7.2.1

$f'(x)=3x^2-x-2=(3x+2)(x-1)$，函数 $f(x)$ 的单调区间如下表：

x	（$-\infty$，$-\dfrac{2}{3}$）	$-\dfrac{2}{3}$	（$-\dfrac{2}{3}$，1）	1	（1，$+\infty$）
$f'(x)$	＋	0	－	0	＋
$f(x)$	↗	极大值	↘	极小值	↗

所以函数 $f(x)$ 的递增区间是（$-\infty$，$-\dfrac{2}{3}$）与（1，$+\infty$）；递减区间是（$-\dfrac{2}{3}$，1）.

（二）求 c 的取值范围

打开文件 7-2-例 1.dmr”进入第二页，通过变量尺改变 c 的值或通过按钮设置它的值，观察图像，如图 7.2.2 所示，为函数 $f(x)=x^3-\dfrac{1}{2}x^2-2x+c$ 在[-1，2]上的图像.

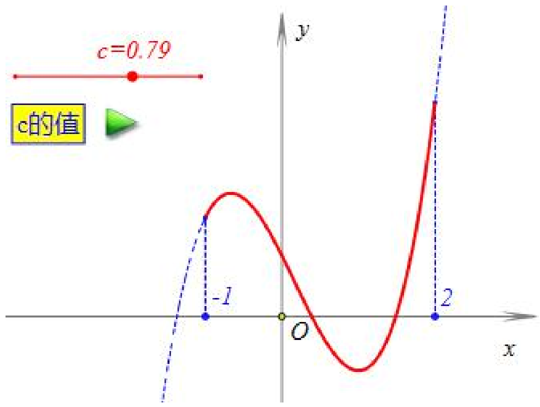


图 7.2.2

当 $x=-\dfrac{2}{3}$ 时，$f(x)=\dfrac{22}{27}+c$ 为极大值. 而 $f(2)=2+c$，则 $f(2)=2+c$ 为最大值.

要使 $f(x)<c^2$ 在[-1，2]上恒成立，只需 $f(2)=2+c<c^2$，解得

$c<-1$ 或者 $c>2$.

【简要评注】

不等式恒成立问题常常转化为最值的比较.

例 2． 设函数 $f(x)=x^4+ax^3+2x^2+b(x\in\mathbf{R})$，其中 a，$b\in\mathbf{R}$.

（1）当 $a=-\dfrac{10}{3}$ 时，讨论函数 $f(x)$ 的单调性；

（2）若函数 $f(x)$ 仅在 $x=0$ 处有极值，求 a 的取值范围；

（3）若对于任意的 $a\in[-2,2]$，不等式 $f(x)\leqslant 1$ 在 $[-1,1]$ 上恒成立，求 b 的取值范围.

（一）研究函数 $f(x)$ 的单调性.

【动感体验】

打开文件“7-2-例 2.dmr”，如图 7.2.3 所示，实线为$a=-\frac{10}{3}$时函数$y=f(x)$的图象，虚线为函数$y=f(x)$的导函数$y=f'(x)$的图象. 观察和研究函数$y=f(x)$的单调性.

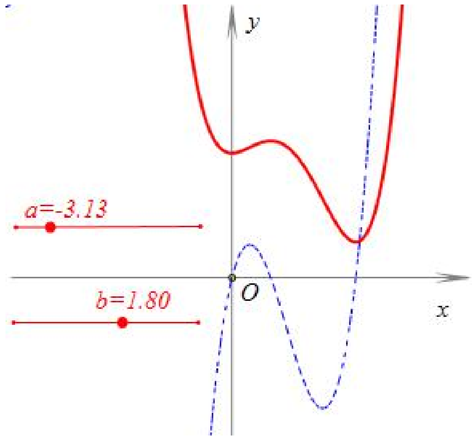


图 7.2.3

【动态解析】

$f'(x)=4x^3+3ax^2+4x=x(4x^2+3ax+4)$.

当$a=-\frac{10}{3}$时，$f'(x)=x(4x^2-10x+4)=2x(2x-1)(x-2)$.

令$f'(x)=0$，解得$x_1=0$，$x_2=\frac{1}{2}$，$x_3=2$.

当x变化时，$f'(x)$，$f(x)$的变化情况如下表：

x	$(-\infty,0)$	0	$\left(0,\frac{1}{2}\right)$	$\frac{1}{2}$	$\left(\frac{1}{2},2\right)$	2	$(2,+\infty)$
$f'(x)$	−	0	+	0	−	0	+
$f(x)$	↘	极小值	↗	极大值	↘	极小值	↗

所以$f(x)$在$\left(0,\frac{1}{2}\right)$，$(2,+\infty)$内单调递增，在$(-\infty,0)$，$\left(\frac{1}{2},2\right)$内单调递减.

（二）求a的取值范围.

【动感体验】

如图 7.2.4 所示，通过变量尺改变参数a的值或通过按钮设置它的值，研究当$f(x)$仅在$x=0$处有极值时函数$f(x)$以及其导函数$f'(x)$的性质.

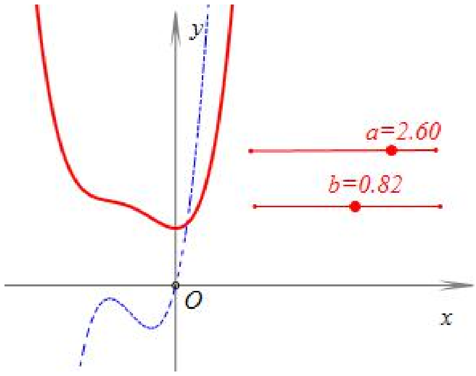


图 7.2.4

【动态解析】

$f'(x)=x(4x^2+3ax+4)$，显然 $x=0$ 不是方程 $4x^2+3ax+4=0$ 的根.

为使 $f(x)$ 仅在 $x=0$ 处有极值，必须 $4x^2+3ax+4\geqslant 0$ 恒成立，即有 $\Delta=9a^2-64\leqslant 0$.

解此不等式，得 $-\frac{8}{3}\leqslant a\leqslant\frac{8}{3}$. 这时，$f(0)=b$ 是唯一极值.

因此满足条件的 a 的取值范围是 $\left[-\frac{8}{3},\frac{8}{3}\right]$.

（三）求 b 的取值范围.

【动感体验】

由 $x^4+ax^3+2x^2+b\leq 1$ 得 $ax^3+b-2\leq -(x^4+2x^2+1)=-(x^2+1)^2$.

设 $g(x)=ax^3+b-2$，$h(x)=-(x^2+1)^2$，根据题意有：对任意的 $a\in[-2,2]$ 在区间 $[-1,1]$ 上不等式 $g(x)\leq h(x)$ 恒成立.

进入文件“7-2-例 2.dmr”的第二页，如图 7.2.5 所示，实线为函数 $g(x)=ax^3+b-2$，$x\in[-1,1]$ 的图象，虚线为函数 $h(x)=-(x^2+1)^2$ $x\in[-1,1]$ 的图象. 通过变量尺改变参数 a、b 的值或通过按钮设置它们的值，观察当 $g(x)\leq h(x)$ 恒成立时，两曲线之间的关系以及参数 b 应该满足的条件.

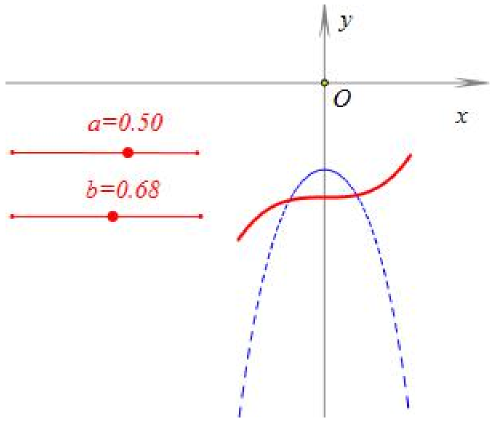


图 7.2.5

【思路点拨】

在对任意 $a\in[-2,2]$，不等式 $g(x)=ax^3+b-2\le h(x)=-(x^2+1)^2$ 在区间 $x\in[-1,1]$ 上恒成立，即要求对任意 x 均有 $g(x)\le h(x)$.

【动态解析】

因为 $x\in[-1,1]$，所以 $x^2\in[0,1]$，易知当 $x^2=1$ 时 $h(x)_{最小}=-4$.

当 $a>0$ 时，函数 $g(x)=ax^3+b-2$ 在区间 $x\in[-1,1]$ 上是增函数，因此只需要当 $x=1$ 时 $g(x)\le h(x)$ 即可，即 $a+b-2\le -4$，解得：$b\le -2-a$，因为 $a\in[-2,2]$，所以 $b\le -4$.

当 $a<0$ 时，函数 $g(x)=ax^3+b-2$ 在区间 $x\in[-1,1]$ 上是减函数，因此只需要当 $x=-1$ 时 $g(x)\le h(x)$ 即可，即 $-a+b-2\le -4$，解得 $b\le -2+a$.因为 $a\in[-2,2]$，所以 $b\le -4$.

【简要评注】

需要注意的是，本题中 $g(x)$ 取最大值和 $h(x)$ 取最小值时，x 都等于 1 或者-1. 当不等式两边都与 x 有关时，不能简单地利用两边的最值进行比较. 假如 $g(x)_{最大}=g(x_1)$、$h(x)_{最小}=h(x_2)$，若 $x_1\ne x_2$，而 $g(x)\le h(x)$ 恒成立转化为 $g(x)_{最大}\le h(x)_{最小}$ 求解，则会缩小参数 b 的取值范围.

2．不等式的解集

例 3． 设函数 $f(x)=\dfrac{\ln x}{1+x}-\ln x+\ln(x+1)$.

（I）求 $f(x)$ 的单调区间和极值；

（II）是否存在实数 a，使得关于 x 的不等式 $f(x)\ge a$ 的解集为 $(0,+\infty)$？若存在，求 a 的取值范围；若不存在，试说明理由.

（一）求 $f(x)$ 的单调区间和极值.

【动感体验】

打开文件“7-2-例 3.dmr”，如图 7.2.6 所示实线为函数 $f(x)$ 的图象，虚线为函数 $f'(x)$ 的图象，观察和研究函数 $f(x)$ 的单调区间和极值.

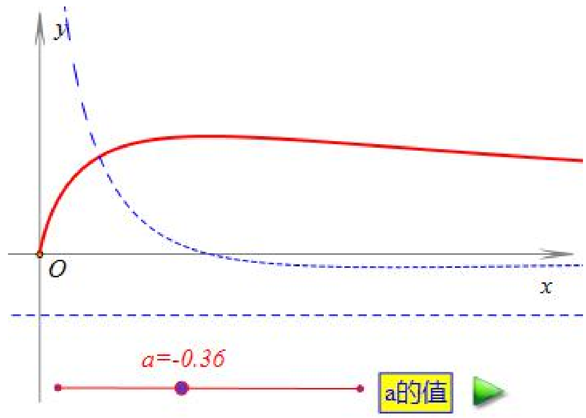


图 7.2.6

【动态解析】

这一问是常规题，需要求出此函数的导数. 需要注意的是第一项求导时需要用到分式的求导法则.

$$f'(x)=\frac{1}{x(1+x)}-\frac{\ln x}{(1+x)^2}-\frac{1}{x}+\frac{1}{x+1}=-\frac{\ln x}{(1+x)^2}.$$

故当 $x\in(0,1)$ 时，$f'(x)>0$；当 $x\in(1,+\infty)$ 时，$f'(x)<0$.

所以 $f(x)$ 在 $(0,1)$ 上单调递增，在 $(1,+\infty)$ 上单调递减. 在 $(0,+\infty)$ 的极大值为 $f(1)=\ln 2$，没有极小值.

（二）研究满足不等式 $f(x)\ge a$ 的解集为 $(0,+\infty)$ 的实数 a.

【动感体验】

进入文件“7-2-例 3.dmr”的第二页，拖动点 a 观察，不等式 $f(x)\ge a$ 成立时，实数 a 应满足的条件.

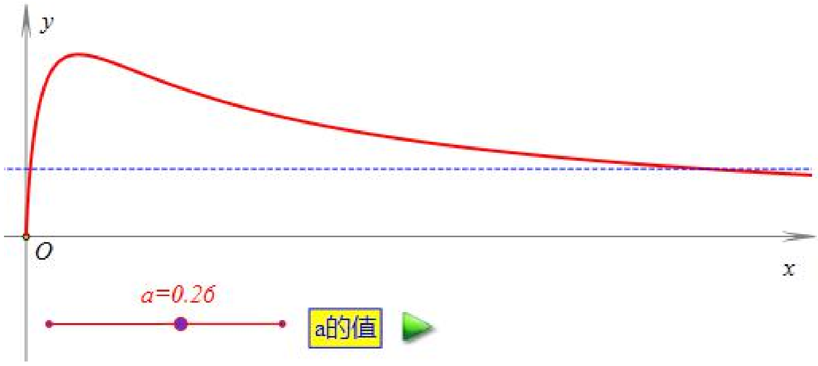


图 7.2.7

【动态解析】

（ⅰ）当$a\leqslant 0$时，如图 7.2.8 所示，由于

$$f(x)=\frac{(1+x)\ln(1+x)-x\ln x}{1+x}=\frac{\ln(1+x)+x\left[\ln(1+x)-\ln x\right]}{1+x}>0,$$

故关于x的不等式$f(x)\geqslant a$的解集为$(0,+\infty)$.

图 7.2.8

（ⅱ）当$a>0$时，如图 7.2.9 所示.

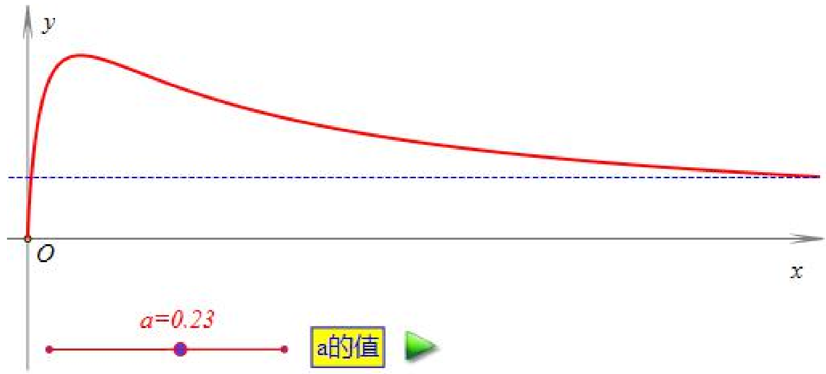


图 7.2.9

由$f(x)=\dfrac{\ln x}{1+x}+\ln\left(1+\dfrac{1}{x}\right)$，知$f(2^n)=\dfrac{\ln 2^n}{1+2^n}+\ln\left(1+\dfrac{1}{2^n}\right)$，其中$n$为正整数，且有

$$\ln\left(1+\frac{1}{2^n}\right)<\frac{a}{2}\Leftrightarrow\frac{1}{2^n}<e^{\frac{n}{2}}-1\Leftrightarrow n>-\log_2(e^{\frac{n}{2}}-1).$$

又$n \geqslant 2$时，$\dfrac{\ln 2^n}{1+2^n} = \dfrac{n\ln 2}{1+(1+1)^n} < \dfrac{n\ln 2}{\dfrac{n(n-1)}{2}} = \dfrac{2\ln 2}{n-1}$.

且$\dfrac{2\ln 2}{n-1} < \dfrac{a}{2} \Leftrightarrow n > \dfrac{4\ln 2}{n} + 1$.

取整数n_0满足$n_0 > -\log_2(e^{\frac{n}{2}} - 1)$，$n_0 > \dfrac{4\ln 2}{a} + 1$，且$n_0 \geqslant 2$，则

$$f(2^{n_0}) = \frac{n_0 \ln 2}{1+2^{n_0}} + \ln\left(1 + \frac{1}{2^{n_0}}\right) < \frac{a}{2} + \frac{a}{2} = a,$$

即当$a > 0$时，关于x的不等式$f(x) \geqslant a$的解集不是$(0, +\infty)$.

综合（ⅰ）（ⅱ）知，存在a，使得关于x的不等式$f(x) \geqslant a$的解集为$(0, +\infty)$，且a的取值范围为$\left(-\infty, 0\right]$.

【简要评注】

一般地，$f(x) \ge a$的解集为$(0, +\infty)$的问题比$f(x) \ge a$在$(0, +\infty)$上恒成立的问题的要求更高. 但本题中，当$x \to +\infty$时，$f(x) > 0$；当$0 < x < 1$时，$f(x) > 0$.所以可以将求不等式在指定区间上恒成立的问题，转化为求函数值域的下界问题.

3．不等式在指定范围内恒成立

例 4． 设函数$f(x) = (x+1)\ln(x+1)$，若对所有的$x \ge 0$，都有$f(x) \ge ax$成立，求实数a的取值范围.

【动感体验】

令$g(x) = (x+1)\ln(x+1) - ax$，$g'(x) = \ln(x+1) + 1 - a$. 打开文件“7-2-例 4.dmr”，实线为函数$g(x)$的图像，虚线为$g'(x)$的图像，通过变量尺改变a的值或通过按钮设置它的值，观察参数对函数$g(x)$以及$g'(x)$的影响，如图 7.2.10、图 7.2.11 所示为其中的两种情形.

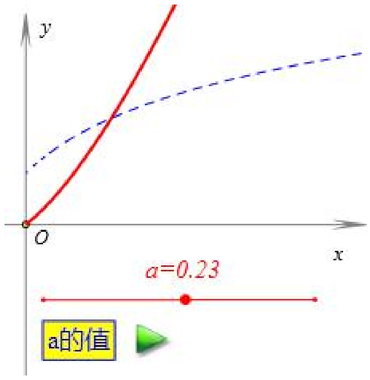


图 7.2.10

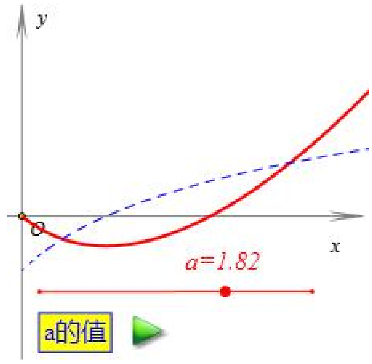


图 7.2.11

【动态解析】

令 $g'(x)=0$，解得 $x=e^{a-1}-1$.

（i）当 $a\le 1$ 时，如图 7.2.10 所示，对所有 $x>0$，$g'(x)>0$，所以 $g(x)$ 在$[0，+\infty)$ 上是增函数，又 $g(0)=0$，所以对 $x\ge 0$，都有 $g(x)\ge g(0)=0$.

即当 $a\le 1$ 时，对所有 $x\ge 0$，都有 $f(x)\ge ax$.

（ii）当 $a>1$ 时，如图 7.2.11 所示，对于 $0<x<e^{a-1}-1$，$g'(x)<0$，所以 $g(x)$ 在$[0，e^{a-1}-1)$上是减函数，又 $g(0)=0$，所以对 $0<x<e^{a-1}-1$，都有 $g(x)<g(0)=0$.即当 $a>1$ 时，不是对所有的 $x\ge 0$，都有 $f(x)\ge ax$ 成立.

综上所述，a 的取值范围是 $a\le 1$.

【简要评注】

两个函数比较大小，有时也可以转化为求函数的最值问题.将变化几种在不等式的一边更有利于问题的分类讨论.

本节小结

求参数的取值范围问题是高中数学中的综合问题，这类问题既考察分类讨论的能力，也是函数思想的良好体现，更有不等式性质的综合应用.综合性强，在解题方法上要求有一定的技巧.

在问题当中，求参数的取值范围的问题常常出现，一般属于中等偏难题，纵观各题可以看出，在讨论过程中关键是分清楚参数与自变量，抓住分类依据，分离常数或者转化为两个初等函数的关系.

拓展练习

2.1． 已知函数 $f(x)=\mathrm{e}^{x}-kx$，$x\in\mathbf{R}$

（Ⅰ）若 $k=\mathrm{e}$，试确定函数 $f(x)$ 的单调区间；

（Ⅱ）若$k>0$，且对于任意$x\in\mathbf{R}$，$f(|x|)>0$恒成立，试确定实数k的取值范围；

（Ⅲ）设函数$F(x)=f(x)+f(-x)$，求证：

$F(1)F(2)\cdots F(n)>(\mathrm{e}^{n+1}+2)^{\frac{n}{2}}(n\in\mathbf{N}^*)$.

2.2． 已知定义在正实数集上的函数$f(x)=\dfrac{1}{2}x^2+2ax$，$g(x)=3a^2\ln x+b$，其中$a>0$．设两曲线$y=f(x)$，$y=g(x)$有公共点，且在该点处的切线相同.

（I）用a表示b，并求b的最大值；

（II）求证：$f(x)\geqslant g(x)$（$x>0$）.

2.3． 设函数$f(x)=ax^3+bx^2-3a^2x+1(a，b\in\mathbf{R})$在$x=x_1$，$x=x_2$处取得极值，且$|x_1-x_2|=2$.

（Ⅰ）若$a=1$，求b的值，并求$f(x)$的单调区间；

（Ⅱ）若$a>0$，求b的取值范围.

2.4． 已知函数$f(x)=\dfrac{a}{3}x^3-\dfrac{3}{2}x^2+(a+1)x+1$，其中$a$为实数.

（Ⅰ）已知函数$f(x)$在$x=1$处取得极值，求a的值；

（Ⅱ）已知不等式$f'(x)>x^2-x-a+1$对任意$a\in(0,+\infty)$都成立，求实数x的取值范围.

2.5． 设函数$f(x)=\mathrm{e}^x-\mathrm{e}^{-x}$.

（Ⅰ）证明：$f(x)$的导数$f'(x)\geqslant 2$；

（Ⅱ）若对所有$x\geqslant 0$都有$f(x)\geqslant ax$，求a的取值范围.

第三节 函数的零点

1．不等式的成立问题

例 1．已知函数$f(x)=x^3+3ax-1$，$g(x)=f'(x)-ax-5$．其中$f'(x)$是的$f(x)$的导函数．对满足$-1\le a\le 1$的一切a的值，都有$g(x)<0$，求实数x的取值范围.

【动感体验】

由题意知 $f'(x)=3x^2+3a$， $g(x)=3x^2-ax+3a-5$.

打开文件“7-3-例 1.dmr”，通过变量尺改变实数 a 的值或通过按钮设置它的值，观察实数 a 对函数 $g(x)$ 的图象的影响，图 7.3.1-7.3.4 为其中的几种情形.

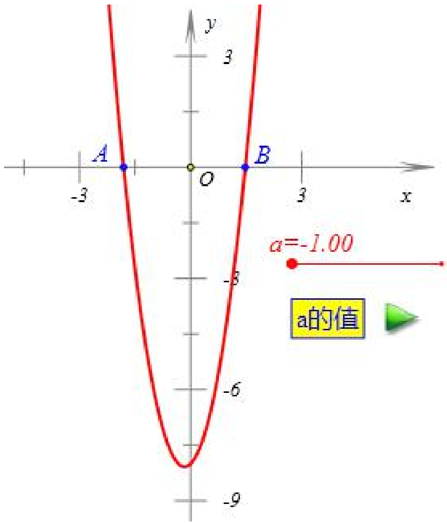


图 7.3.1

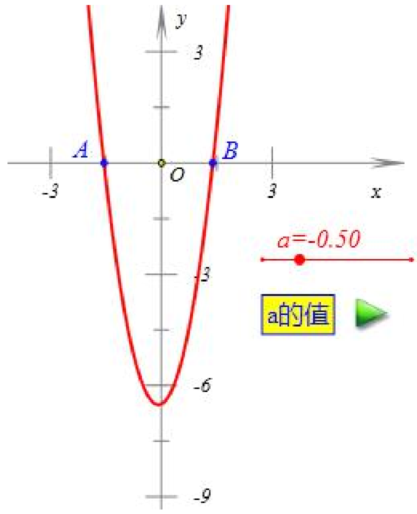


图 7.3.2

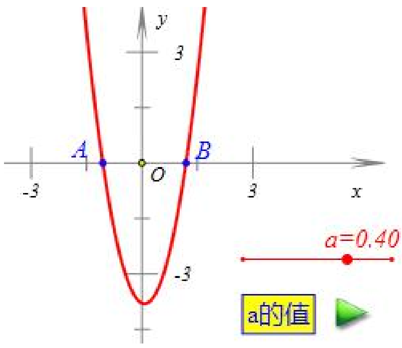


图 7.3.3

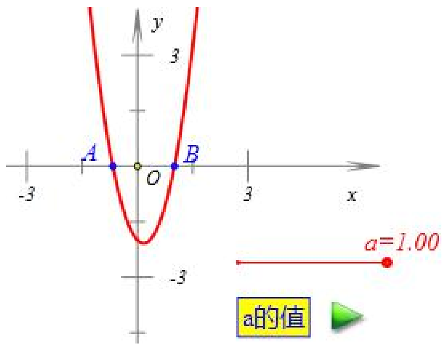


图 7.3.4

【思路点拨】

考虑实数 a 对函数 $g(x)$ 的图象与 x 轴交点的影响.

【动态解析】

设 $A(x_1,0)$、$B(x_2,0)$（$x_1<x_2$）是函数 $g(x)$ 的图象与 x 轴交点的两个交点，从图 7.3.1—7.3.4 可以看出当 a 从-1 变化到 1 的过程中，x_1 逐步变大而 x_2 逐步变小. 即满足 $g(x)<0$ 的 x 的取值范围不断缩小. 因此当 $a=1$ 时 $g(x)<0$ 成立，则对所有的 $-1\le a\le 1$ 不等式 $g(x)<0$ 都成立. 由 $3x^2-x-2<0$ 解得 $-\dfrac{2}{3}<x<1$.

【简要评注】

本题的实质是求 $g(x)<0$ 的公共解，研究实数 a 对 $g(x)$ 与 x 轴交点位置的影响，是

解决问题的关键.

2．曲线与水平直线的交点问题

例 2． 已知 $x=3$ 是函数 $f\left(x\right)=a\ln\left(1+x\right)+x^2-10x$ 的一个极值点.

（1）求 a；

（2）求函数 $f\left(x\right)$ 的单调区间；

（3）若直线 $y=b$ 与函数 $y=f\left(x\right)$ 的图象有 3 个交点，求 b 的取值范围.

（一）求 a 的值

因为 $f'\left(x\right)=\dfrac{a}{1+x}+2x-10$，$x=3$ 是 $f(x)$ 的一个极值点，所以 $f'\left(3\right)=\dfrac{a}{4}+6-10=0$，因此 $a=16$.

（二）探索函数 $f(x)$ 的单调区间

【动感体验】

打开文件“7-3-例 2.dmr”，如图 7.3.5 所示，实线为函数 $f(x)$ 的图像，虚线为 $f'(x)$ 的图像，观察和研究函数 $f(x)$ 的单调性.

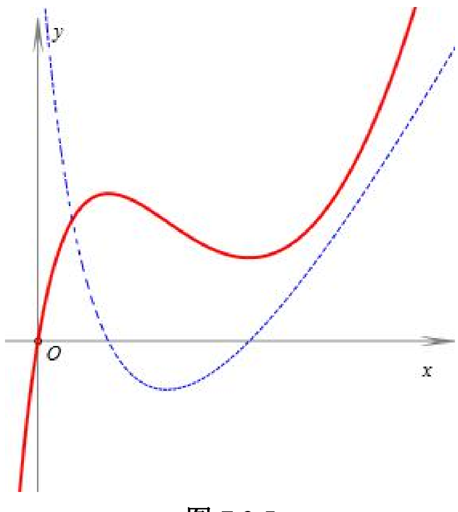


图 7.3.5

【动态解析】

由（一）知:

$f\left(x\right)=16\ln\left(1+x\right)+x^2-10x,x\in\left(-1,+\infty\right)$，$f'\left(x\right)=\dfrac{2\left(x^2-4x+3\right)}{1+x}$.

当 $x\in\left(-1,1\right)\cup\left(3,+\infty\right)$ 时，$f'\left(x\right)>0$；当 $x\in\left(1,3\right)$ 时，$f'\left(x\right)<0$.

所以 $f(x)$ 的单调增区间是 $(-1,1),(3,+\infty)$， $f(x)$ 的单调减区间是 $(1,3)$.

（三）求 b 的取值范围

【动感体验】

进入文件“7-3-例 2.dmr”的第二页，如图 7.3.6 所示，点 b 可以被拖动，观察直线 $y=b$ 与函数 $y=f(x)$ 的图像的交点情况.

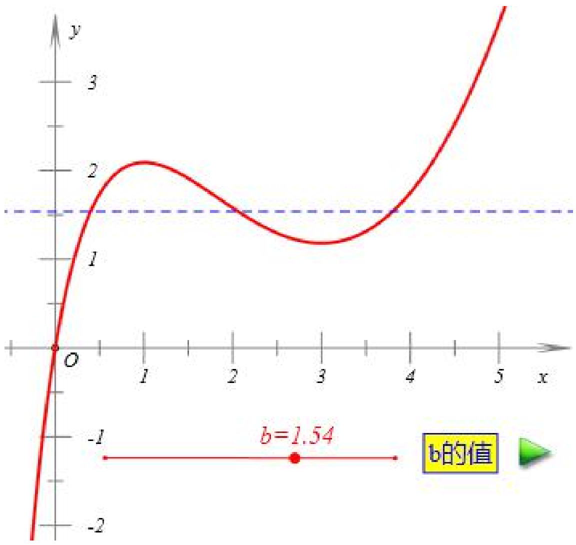


图 7.3.6

【动态解析】

由（二）知， $f(x)$ 在 $(-1,1)$ 内单调递增，在 $(1,3)$ 内单调递减，在 $(3,+\infty)$ 上单调递增，且当 $x=1$ 或 $x=3$ 时， $f'(x)=0$.

所以 $f(x)$ 的极大值为 $f(1)=16\ln 2-9$，极小值为 $f(3)=32\ln 2-21$.

又因为

$f(16)=16^2-10\times 16>16\ln 2-9=f(1)$

且 $f(e^{-2}-1)<-32+11=-21<f(3)$.

所以在 $f(x)$ 的三个单调区间 $(-1,1),(1,3),(3,+\infty)$ 直线 $y=b$ 有 $y=f(x)$ 的图象各有一个交点，当且仅当 $f(3)<b<f(1)$.

因此，b 的取值范围为 $(32\ln 2-21,16\ln 2-9)$.

【简要评注】

利用导数可得到函数的三个单调区间，若两个曲线有三个交点，则必然要求交点分布在

三个不同的区间内，这是解决本题的关键.

3．曲线的切线与函数的单调性质

例 3． 已知函数 $f(x)=x^3-x$.

（1）求曲线 $y=f(x)$ 在点 $M(t, f(t))$ 处的切线方程；

（2）设 $a>0$，如果过点（a,b）可作曲线 $y=f(x)$ 的三条切线，证明：$-a<b<f(a)$.

（一）求曲线 $f(x)$ 在点 $M(t, f(t))$ 处的切线方程

因为 $f'(x)=3x^2-1$，所以曲线 $y=f(x)$ 在 $M(t, f(t))$ 处的切线方程为：$y-f(t)=f'(t)(x-t)$，即 $y=(3t^2-1)x-2t^3$.

（二）证明 $-a<b<f(a)$

【动态解析】

如果有一条切线过点 (a,b),则存在 $b=(3t^2-1)a-2t^3$.

于是，若过点 (a,b) 可作曲线 $y=f(x)$ 的三条切线，则方程 $2t^3-3at^2+a+b=0$ 有三个相异的实数根，如图 7.3.7 所示.

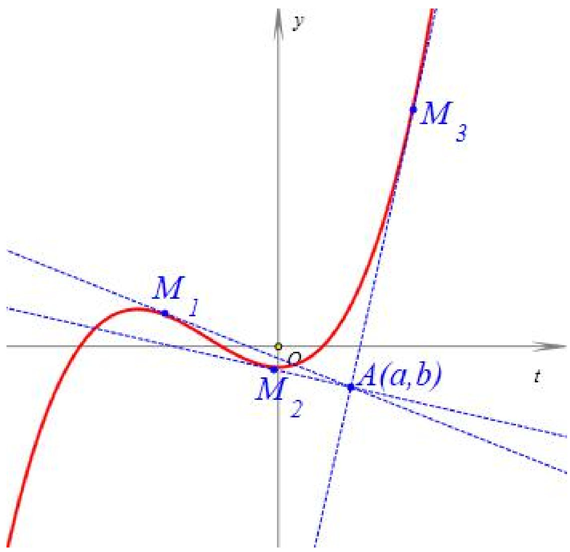


图 7.3.7

记 $g(t)=2t^3-3at^2+a+b$，则 $g'(t)=6t^2-6at=6t(t-a)$.

当 t 变化时，$g(t)$、$g'(t)$ 变化情况如下表：

t	$(-\infty,0)$	0	$(0,a)$	a	$(a,+\infty)$
$g'(t)$	+	0	−	0	+
$g(t)$	↗	极大值 $a+b$	↘	极小值 $b-f(a)$	↗

由 $g(t)$ 的单调性，当极大值 $a+b<0$ 或极小值 $b-f(a)>0$ 时，如图 7.3.8、图 7.3.9 所示，方程 $g(x)=0$ 最多有一个实数根；

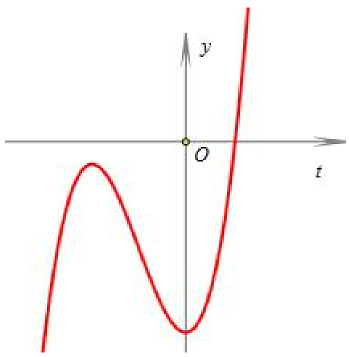


图 7.3.8

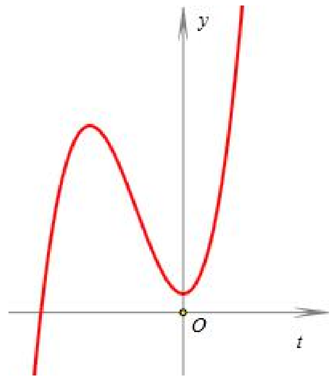


图 7.3.9

当 $a+b=0$ 时，如图 7.3.10 所示，解方程 $g(t)=0$ 得 $t=0, t=\dfrac{3a}{2}$，即方程 $g(t)=0$ 只有两个相异的实数根.

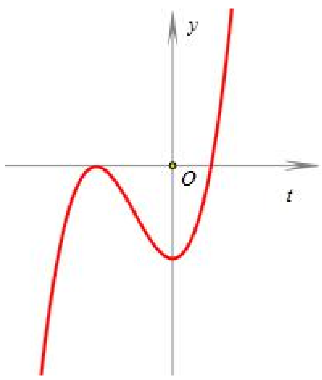


图 7.3.10

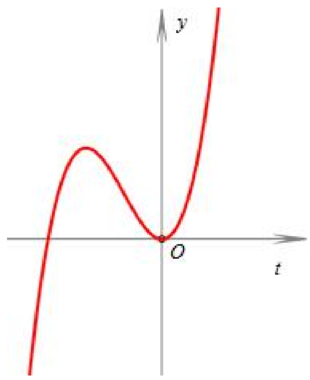


图 7.3.11

当 $b-f(a)=0$ 时，如图 7.3.11 所示，解方程 $g(t)=0$ 得 $t=-\dfrac{a}{2}, t=a$，即方程 $g(t)=0$ 只有两个相异的实数根.

综上，如果过 (a,b) 可作曲线 $y=f(x)$ 三条切线，即 $g(t)=0$ 有三个相异的实数根，则

$\begin{cases} a+b=0 \\ b-f(a)<0 \end{cases}$. 如图 7.3.12 所示，即 $-a<b<f(a)$.

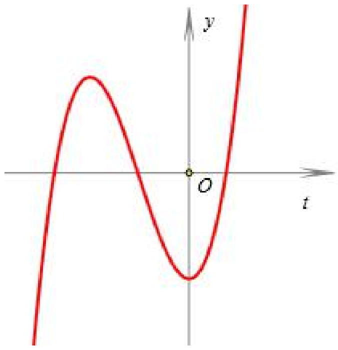


图 7.3.12

【简要评注】

如果直接求切线的方程，则问题会变得复杂.当问题转化为方程 $g(t)=0$ 有三个实数根时，思路就会变得清晰.

本节小结

在研究函数零点时，有两个性质很重要，一是对于连续函数 $f(x)$ 来说若 $f(a)f(b)<0$，则 $f(x)$ 在 (a,b) 上至少有一个零点；二是单调递增（或递减）函数最多有一个零点. 在运用这两个性质时可以适当变通，从而将零点问题转化为研究函数的值域、极值等问题.

拓展练习

3.1． 已知函数 $f(x)=x^3+3ax-1$，$g(x)=f'(x)-ax-5$. 其中 $f'(x)$ 是的 $f(x)$ 的导函数. 设 $a=-m^2$，当实数 m 在什么范围内变化时，函数 $y=f(x)$ 的图像与直线 $y=3$ 只有一个公共点.

3.2． 设 a 为实数，函数 $f(x)=x^3-x^2-x+a$.

（1）求 $f(x)$ 的极值；

（2）当 a 在什么范围内取值时，曲线 $y=f(x)$ 与 x 轴仅有一个交点.

第四节 导数综合题

1．分段函数的最值

例 1． 已知 $a\in R$, 函数 $f(x)=x^2|x-a|$.

（1）当$a=2$时，求使$f(x)=x$成立的x的集合；

（2）求函数$y=f(x)$在区间[1，2]上的最小值.

（一）求使$f(x)=x$成立的x的集合

当$a=2$时，由$f(x)-x=0$，得$x(x|x-2|-1)=0$，即

$x=0$或$x|x-2|-1=0$.

又由$x|x-2|-1=0$得$|x-2|=\dfrac{1}{x}$，设$g(x)=|x-2|$，$h(x)=\dfrac{1}{x}$.打开文件“7-4-例1.dmr”，如图7.4.1所示，实线为$g(x)$的图像，虚线为$h(x)$的图像.

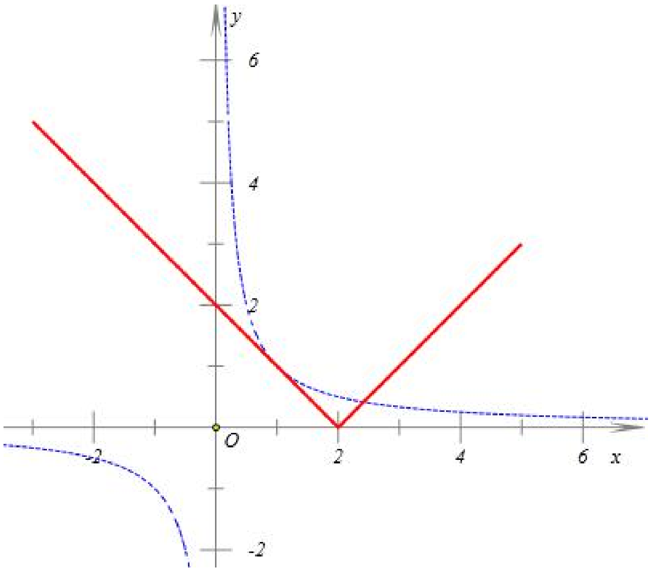


图 7.4.1

由$2-x=\dfrac{1}{x}(x<2)$解得$x=1$；由$x-2=\dfrac{1}{x}(x\geq 2)$解得$x=1+\sqrt{2}$.

所以使$f(x)=x$成立的x的集合为$\{0，1，1+\sqrt{2}\}$.

（二）求函数$y=f(x)$在区间[1，2]上的最小值

【动感体验】

进入文件“7-4-例1.dmr”的第二页，实线部分为函数$y=f(x)$在区间[1，2]上的图像，如图7.4.2—7.4.5所示为其中的几种情形.

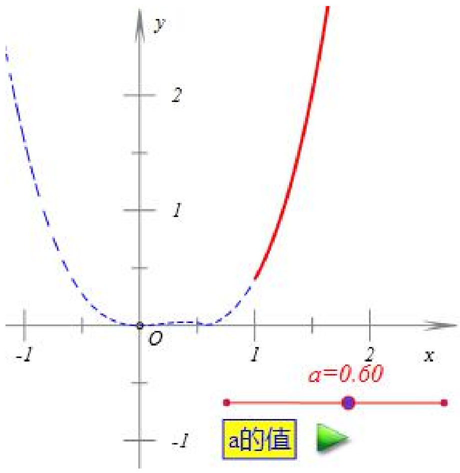


图 7.4.2

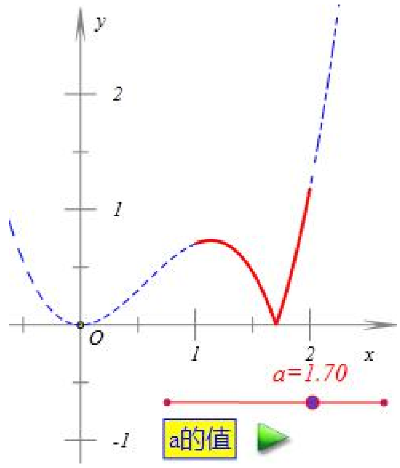


图 7.4.3

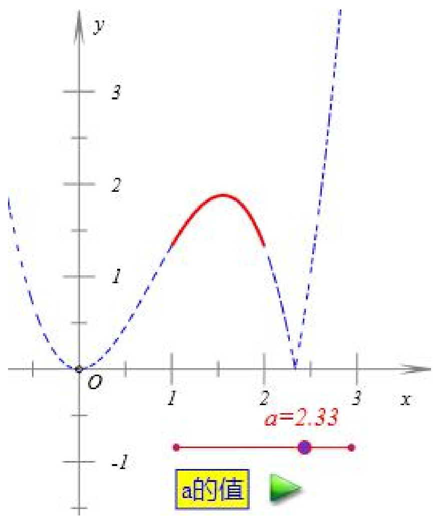


图 7.4.4

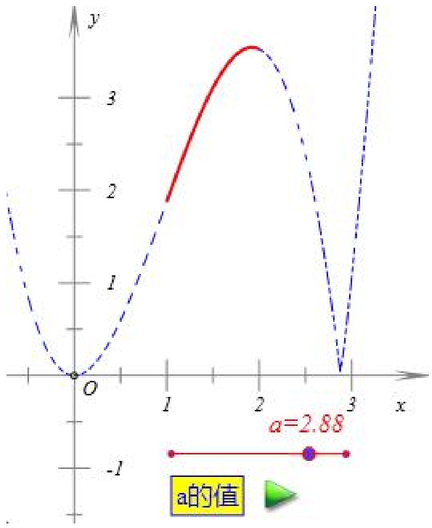


图 7.4.5

【动态解析】

设此最小值为m.

①当$a\le 1$时，如图 7.4.2 所示，在区间[1，2]上，$f(x)=x^3-ax^2$.

因为$f'(x)=3x^2-2ax=3x(x-\dfrac{2}{3}a)>0$（$x\in[1,2]$）.

则$f(x)$是区间[1，2]上的增函数,所以$m=f(1)=1-a$.

②$1<a\le 2$时，如图 7.4.3 所示，在区间[1，2]上，$f(x)=x^2|x-a|\ge 0$，由$f(a)=0$知：$m=f(a)=0$.

③当$a>2$时，如图 7.4.4、图 7.4.5 所示，在区间[1，2]上，$f(x)=ax^2-x^3$.

$f'(x)=2ax-3x^2=3x(\dfrac{2}{3}a-x)$.

若$a\ge 3$，如图 7.4.4 所示，在区间(1，2)内$f'(x)>0$,从而$f(x)$为区间[1，2]上的增函

数，由此得：$m=f(1)=a-1$.

若$2<a<3$，如图 7.4.5 所示，则$1<\frac{2}{3}a<2$.

当$1<x<\frac{2}{3}a$时，$f'(x)>0$，从而$f(x)$为区间$[1,\frac{2}{3}a]$上的增函数；当$\frac{2}{3}a<x<2$时，从而$f(x)$为区间$[\frac{2}{3}a,2]$上的减函数. 所以，$m=f(1)=a-1$或者$m=f(2)=4(a-2)$. 而当$4(a-2)\le a-1$，即$2<a\le\frac{7}{3}$时，$m=4(a-2)$；当$a-1<4(a-2)$，即$\frac{7}{3}<a<3$时，$m=a-1$.

综上所述，所求函数的最小值$m=\begin{cases}1-a，a\le 1;\\ 0,1<a\le 2;\\ 4(a-2),2<a\le\frac{7}{3};\\ a-1，a>\frac{7}{3}.\end{cases}$

【简要评注】

解方程$x|x-2|-1=0$时容易产生增根，结合图像解答问题可以有效避免.

2．曲线的切线与穿过曲线的线段

例 2． 已知函数$f(x)=\frac{1}{3}x^3+ax^2+bx$且$f'(-1)=0$.

（1）试用含a的代数式表示b,并求$f(x)$的单调区间；

（2）令$a=-1$,设函数$f(x)$在x_1、x_2 $(x_1<x_2)$处取得极值，记点$M(x_1,f(x_1))$、$N(x_2,f(x_2))$、$P(m,f(m))$ $(x_1<m<x_2)$请仔细观察曲线$f(x)$在点P处的切线与线段MP的位置变化趋势，并解答以下问题：

（i）若对任意的$m\in(t,x_2)$，线段MP与曲线$f(x)$均有异于M、P的公共点，试确定t的最小值，并证明你的结论；

（ii）若存在点$Q(n,f(n))$，$x_1\le n<m$，使得线段PQ与曲线$f(x)$有异于P、Q的公共点，请直接写出m的取值范围（不必给出求解过程）.

（一）用含a的代数式表示b，并求$f(x)$的单调区间.

【动态解析】

由$f'(-1)=0$可以得到关于a和b的一个方程，于是不难用含a的代数式表示b．事实

上，$f'(x)=x^2+2ax+b$．由 $f'(-1)=0$ 得 $(-1)^2+2\cdot a\cdot(-1)+b=0$，所以 $b=2a-1$．

因此 $f'(x)=x^2+2ax+2a-1=(x+1)(x+2a-1)$，令 $f'(x)=0$ 得 $x=-1$ 或者 $x=1-2a$．

打开文件"打开文件"7-4-例 2.dmr"．

当 $1-2a>-1$，即 $a<1$ 时，$f'(x)$ 的图象如图 7.4.7 所示，则 $(-\infty,-1)$ 和 $(1-2a,+\infty)$ 为函数 $f(x)$ 的单调递增区间，$(-1,1-2a)$ 为函数 $f(x)$ 的单调递减区间.

当 $1-2a=-1$，即 $a=1$ 时，$f'(x)$ 的图象如图 7.4.8 所示，则函数 $f(x)$ 在定义域 $(-\infty,+\infty)$ 上单调递增.

当 $1-2a<-1$，即 $a>1$ 时，$f'(x)$ 的图象如图 7.4.9 所示，则 $(-\infty,1-2a)$ 和 $(1,+\infty)$ 为函数 $f(x)$ 的单调递增区间，$(1-2a,-1)$ 为函数 $f(x)$ 的单调递减区间.

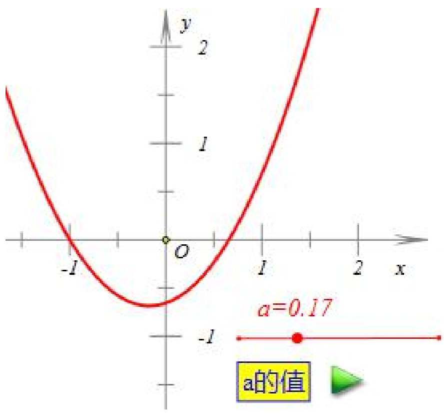


图 7.4.7

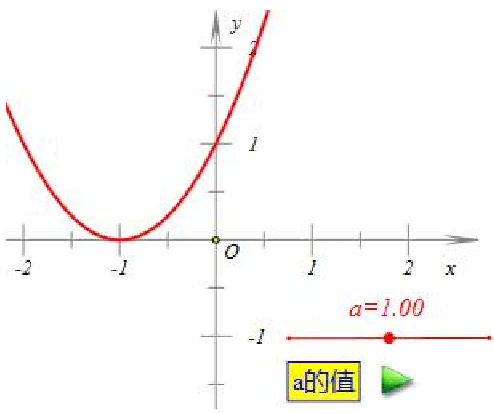


图 7.4.8

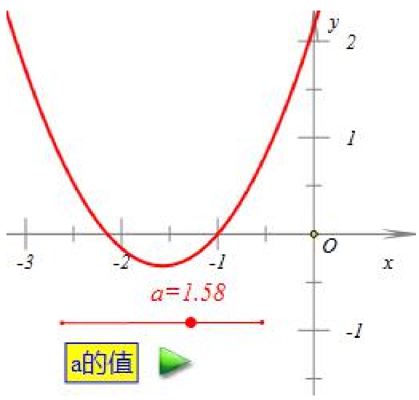


图 7.4.9

（二）确定 t 的最小值.

【动感体验】

当 $a=-1$ 时 $b=-3$．$f(x)=\dfrac{1}{3}x^3-x^2-3x$ 令 $f'(x)=x^2-2x-3=0$ 得：$x_1=-1$，

$x_2 = 3$， $f(x_1) = \dfrac{5}{3}$， $f(x_2) = -9$.

进入文件“7-4-例 2.dmr”第二页，拖动点 P 观察曲线 $f(x)$ 在点 P 处的切线与线段 MP 的位置变化趋势，如图 7.4.10、图 7.4.11 所示为其中的两种情形.

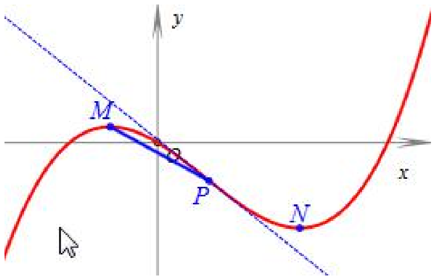


图 7.4.10

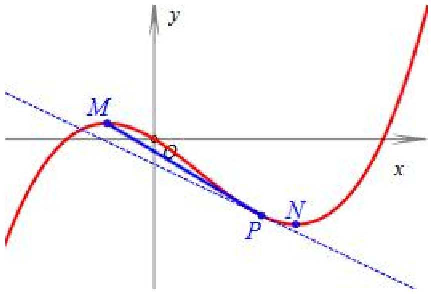


图 7.4.11

【思路点拨】

研究线段 MP 与曲线的交点个数和经过点 P 的切线与线段 MP 位置之间的关系，确定当 t 取最小值时，点 P 应满足的条件.

【动态解析】

当线段 MP 在经过点 P 的切线下方时，如图 7.4.10 所示，线段 MP 与曲线 $f(x)$ 没有异于 M 、 P 的公共点. 当线段 MP 在经过点 P 的切线上方时，如图 7.4.11 所示，线段 MP 与曲线 $f(x)$ 均有异于 M 、 P 的公共点. 因此，当线段 MP 与经过点 P 的切线重合，即线段 MP 为曲线在点 P 处的切线时，如图 7.4.12 所示， t 有最小值.

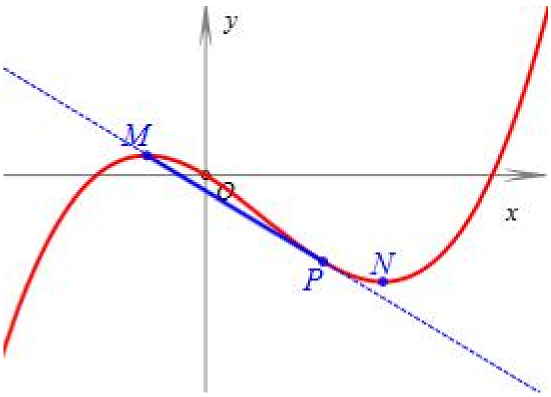


图 7.4.12

下面我们通过推理说明这一事实，并求出 t 的最小值.

线段 MP 的斜率可表示为：

$$\frac{f(m)-f(x_1)}{m-x_1} = \frac{\frac{1}{3}m^3 - m^2 - 3m - \frac{5}{3}}{m+1} = \frac{1}{3}(m+1)(m-5)$$，所以线段 MP 的方程可表示为：

$$y = \frac{1}{3}(m+1)(m-5)(x+1) + \frac{5}{3}，\quad x \in [-1, m].$$

令

$g(x)=\frac{1}{3}x^3-x^2-3x-[\frac{1}{3}(m+1)(m-5)(x+1)+\frac{5}{3}]=\frac{1}{3}x^3-x^2-\frac{1}{3}(m-2)^2x-\frac{m^2-4m}{3}$，

线段MP与曲线$f(x)$均有异于M、P的公共点则函数$g(x)$在区间$(-1,m)$上有根，即函数

$$g(x)=\frac{1}{3}x^3-x^2-\frac{1}{3}(m-2)^2x-\frac{m^2-4m}{3},$$

在$(-1,m)$上有零点，因为$g(x)$为三系函数，所以$g(x)$至多有三个零点，两个极值点，有$g(-1)=g(m)=0$，所以$g(x)$在$(-1,m)$上有零点等价于$g(x)$在$(-1,m)$内恰有一个极大值点和一个极小值点，即

$$g'(x)=x^2-2x-\frac{1}{3}(m-2)^2$$

在$(-1,m)$内有两个不相等的实数根，则有

$$\begin{cases}\Delta=4+\frac{1}{3}(m-2)^2\geq 0\\ -1<x=1<m\\ g'(-1)>0\\ g'(m)>0\end{cases}$$

解得$2<m<5$.

又因为$-1<m\leq 3$，所以m的取值范围为（2,3）,所以t的最小值为2.

（三）求m的取值范围.

【动感体验】

进入文件“7-4-例2.dmr”的第三页，点Q为曲线$f(x)$上M、P之间的点，拖动点P，观察是否存在点Q使得线段PQ与曲线$f(x)$有异于P、Q的公共点. 如图7.4.13、图7.4.14所示为其中的两种情形.

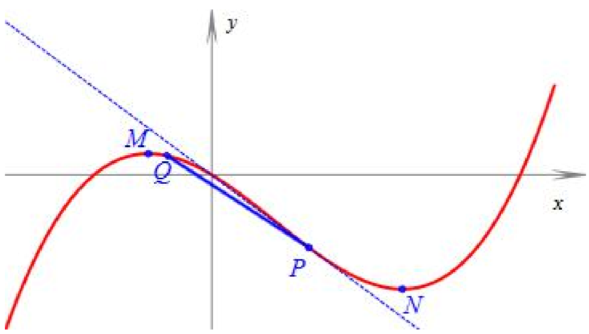


图 7.4.13

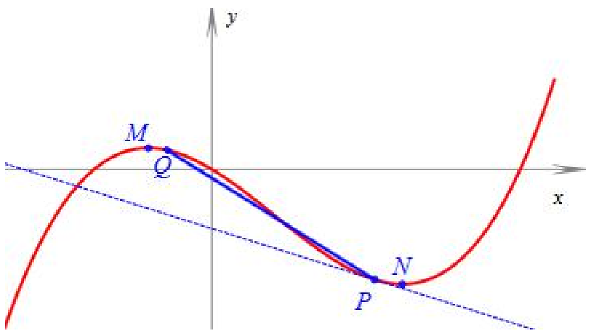


图 7.4.14

【思路点拨】

当点 P 在曲线 $f(x)$ 上 M ， N 不同位置时，研究线段 PQ 斜率的变化规律.

【动态解析】

如图 7.4.13 所示，无论点 Q 在曲线 $f(x)$ 上 M 、P 之间任何位置，线段 PQ 与曲线 $f(x)$ 之间都不存在异于 P 、的公共点. 当点 Q 从点 P 运动到点 M 的过程中，线段 PQ 的斜率由小变大.

如图 7.4.14 所示，当点 Q 从点 P 运动到点 M 的过程中，线段 PQ 的斜率先变小后变大. 因此，当点 Q 在靠近点 M 的位置或者与点 M 重合时，线段 PQ 穿过曲线 $f(x)$，即线段 PQ 与曲线 $f(x)$ 之间存在异于 P 、 Q 的公共点.

所以，当在曲线 $f(x)$ 上 M 、 N 之间，点 P 的斜率最小时，实数 m 取得最小值，如图 7.4.15 所示. 而 $f'(x)=x^2-2x-3=(x-1)^2-4$，因此当 $x=1$ 时， $f'(x)$ 有最小值.

所以，实数 m 的取值范围是：$1<m\le 3$.

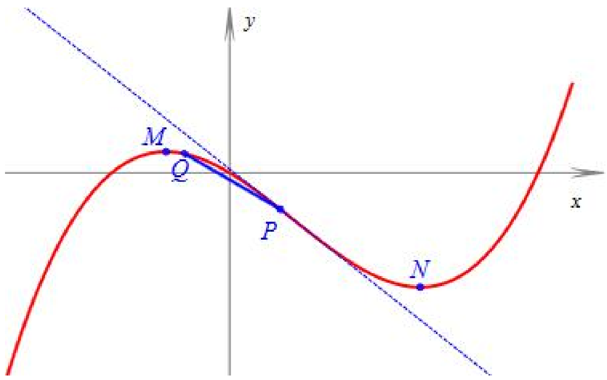


图 7.4.15

【简要评注】

计算机能精确地做出函数的图象，能够开拓我们的视野，启发我们的思路，帮助我们形成利用数形结合思想解决问题的习惯.

3．与切线有关的面积问题

例 3． 设函数 $f(x)=ax+\dfrac{1}{x+b}(a,\ b\in\mathbf{Z})$，曲线 $y=f(x)$ 在点 $(2,\ f(2))$ 处的切线方程为 $y=3$.

（1）求 $f(x)$ 的解析式；

（2）证明：函数 $y=f(x)$ 的图像是一个中心对称图形，并求其对称中心；

（3）证明：曲线 $y=f(x)$ 上任一点的切线与直线 $x=1$ 和直线 $y=x$ 所围三角形的面积为定值，并求出此定值.

（一）求 $f(x)$ 的解析式

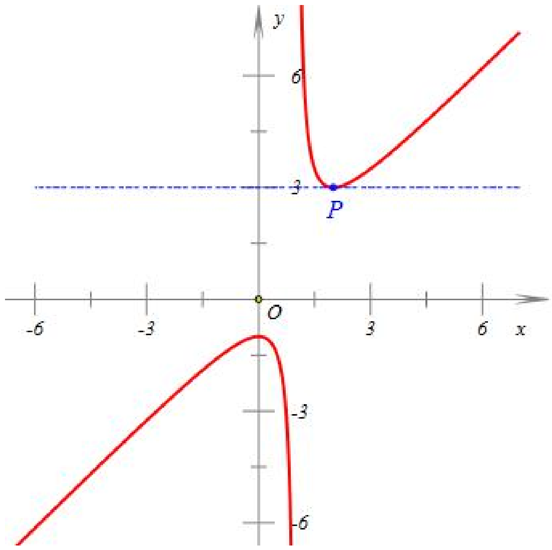


图 7.4.6

这里实际上给出了点 $(2,f(2))$ 在曲线 $y=f(x)$ 上和过这点的切线的斜率，于是容易得到关于 a、b 的两个方程. 事实上：

$$f'(x)=a-\frac{1}{(x+b)^2}，于是\begin{cases}2a+\dfrac{1}{2+b}=1,\\ a-\dfrac{1}{(2+b)^2}=0,\end{cases}解得\begin{cases}a=1,\\ b=-1,\end{cases}或\begin{cases}a=\dfrac{9}{4},\\ b=-\dfrac{8}{3}.\end{cases}$$

因 $a,\ b\in\mathbf{Z}$，故 $f(x)=x+\dfrac{1}{x-1}$.

（二）证明函数 $y=f(x)$ 的图像是一个中心对称图形

【动态解析】

函数 $y_1 = x$， $y_2 = \dfrac{1}{x}$ 都是奇函数．所以函数 $g(x) = x + \dfrac{1}{x}$ 也是奇函数，其图像是以原点为中心的中心对称图形，如图 7.4.17 所示.

而 $f(x) = x - 1 + \dfrac{1}{x-1} + 1$．可知，函数 $g(x)$ 的图像按向量 $\boldsymbol{a} = (1,1)$ 平移，即得到函数 $f(x)$ 的图像，打开文件“7-4-例 3.dmr”，如图 7.4.18 所示，故函数 $f(x)$ 的图像是以点 $(1,1)$ 为中心的中心对称图形.

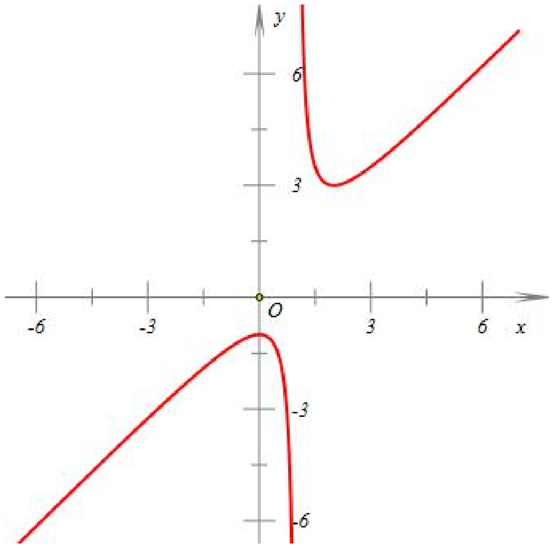


图 7.4.17

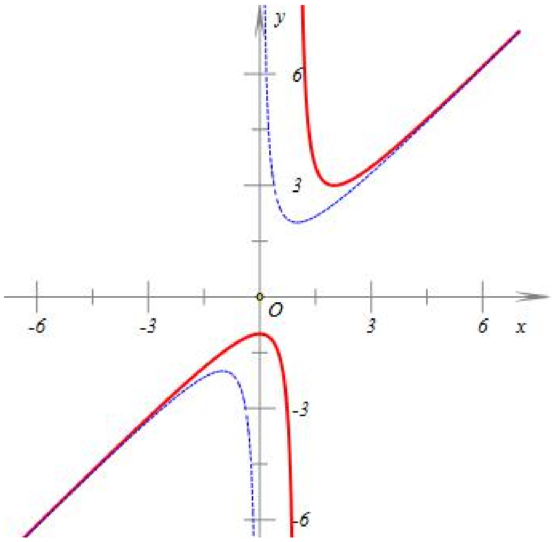


图 7.4.18

（三）**证明所围三角形的面积为定值**

【动感体验】

进入文件“7-4-例 3.dmr”的第二页，如图 7.4.19 所示，△ABC是曲线上经过点 P 的切线与直线 $x = 1$ 、$y = x$ 所围成的三角形. 点 P 可以被拖动，观察点 P 在运动过程中，三角形形状的变化规律以及面积的变化规律.

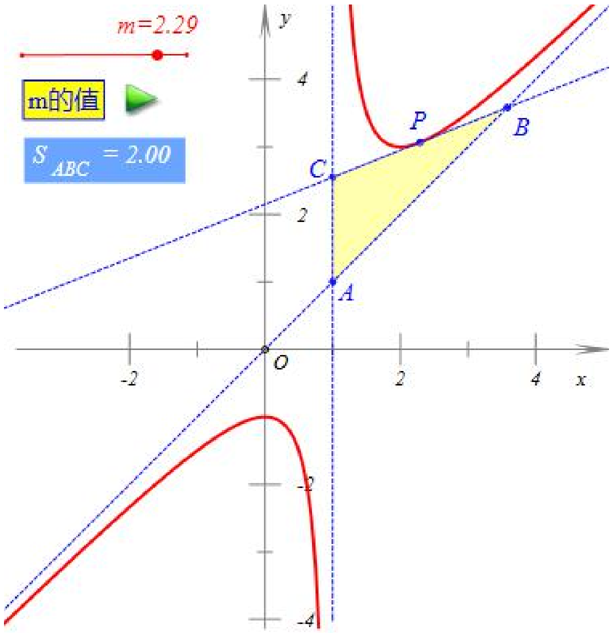


图 7.4.19

【思路点拨】

用恰当的形式表示三角形的面积.

【动态解析】

当点 P 在曲线上运动的过程中，△ ABC 也随之改变，而在△ ABC 变化过程中点 $A\,(1,1)$ 的位置（直线 $x=1$ 和 $y=x$ 的交点）和 $\angle BAC=\dfrac{\pi}{4}$（直线 $x=1$ 和 $y=x$ 的夹角）保持不变，如图 7.4.20、图 7.4.21 所示. 因此可将 $|AC|$ 为底计算△ ABC 的面积，则高 h 就等于点 B 到直线 $x=1$ 的距离.

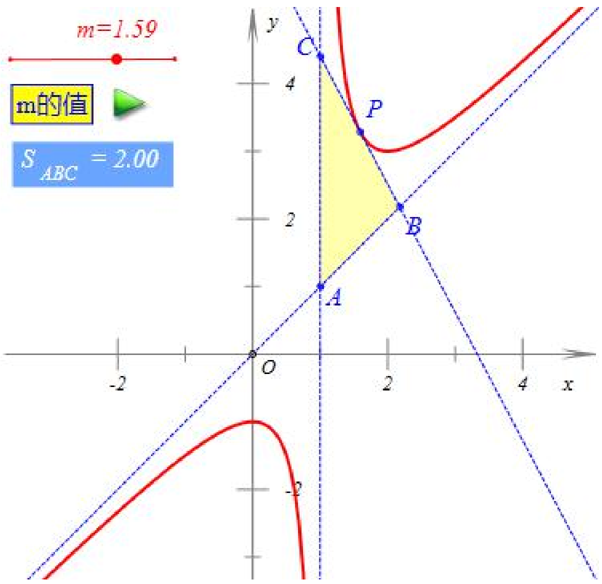


图 7.4.20

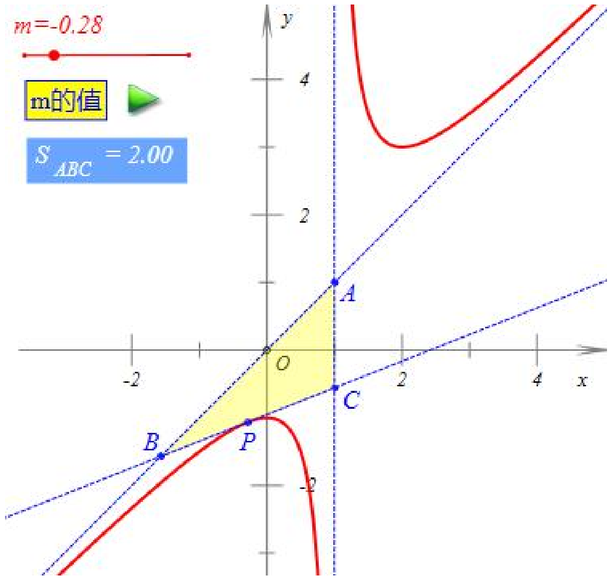


图 7.4.21

设点 P 的坐标为（x_P, $f(x_P)$）经过点 P 的切线 l 的方程可以表示为：$y-f(x_P)=f'(x_P)(x-x_P)$.

又因为 $f(x_P)=x_P+\dfrac{1}{x_P-1}$，$f'(x_P)=1-\dfrac{1}{(x_P-1)^2}$. 所以,

经过点 P 的切线 l 的方程可化简为

$$y-\frac{x_P^2-x_P+1}{x_P-1}=\frac{x_P^2-2x_P}{(x_P-1)^2}(x-x_P).$$

令 $x=y$ 得 $y=2x_P-1$，因此点 B 的坐标为 $(2x_P-1, 2x_P-1)$，所以三角形的高（点 B 到 $x=1$ 的距离）$h=|2x_P-1-1|=2|x_P-1|$.

令 $x=1$ 得 $y=\dfrac{x_P+1}{x_P-1}$，因此点 C 的坐标为：$(1,\dfrac{x_P+1}{x_P-1})$，所以 $|AC|=|\dfrac{x_P+1}{x_P-1}-1|=\dfrac{2}{|x_P-1|}$.

因此 $S_{\Delta ABC}=\dfrac{1}{2}|AC|\cdot h=\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{2}{|x_P-1|}\cdot 2|x_P-1|=2$

所以曲线 $y=f(x)$ 上任一点的切线与直线 $x=1$ 和直线 $y=x$ 所围三角形的面积为定值 2.

【简要评注】

利用图像的平移变换研究函数的对称性质是值得总结的方法. 应充分利用函数图像之间的关系研究函数之间的性质.

本节小结

导数作为研究函数的工具，应用非常广泛. 在利用导数处理问题的过程中，要结合导数的性质及其几何意义. 问题解答过程中要密切关注原函数与导函数的关系，更要理顺每个对象的研究内容.

拓展练习

4.1． 已知函数 $f(x)=\dfrac{1}{3}x^3+\dfrac{1}{2}ax^2+bx$ 在区间 $[-1,1)$ ，$(1,3]$ 内各有一个极值点.

（1）求 a^2-4b 的最大值；

（2）当 $a^2-4b=8$ 时，设函数 $y=f(x)$ 在点 $A(1，f(1))$ 处的切线为 l，若 l 在点 A 处穿过函数 $y=f(x)$ 的图象（即动点在点 A 附近沿曲线 $y=f(x)$ 运动，经过点 A 时，从 l 的一侧进入另一侧），求函数 $f(x)$ 的表达式.

4.2． 已知 $f(x)=ax^3+bx^2+cx$ 在区间 $[0,1]$ 上是增函数，在区间 $(-\infty,0),(1,+\infty)$ 上是减函数，又 $f'\left(\dfrac{1}{2}\right)=\dfrac{3}{2}$.

（1）求 $f(x)$ 的解析式；

（2）若在区间 $[0，m](m>0)$ 上恒有 $f(x)\leqslant x$ 成立，求 m 的取值范围.

4.3． 已知函数 $f(x)=4x^3-3x^2\cos\theta+\dfrac{1}{32}$, 其中 $x\in R,\theta$ 为参数，且 $0\le\theta\le 2\pi$.

（1）当 $\cos\theta=0$ 时，判断函数 $f(x)$ 是否有极值；

（2）要使函数 $f(x)$ 的极小值大于零，求参数 θ 的取值范围；

（3）若对（2）中所求的取值范围内的任意参数 θ，函数 $f(x)$ 在区间 $(2a-1,a)$ 内都是增函数，求实数 a 的取值范围.

4.4． 已知函数 $f(x)=x+\dfrac{a}{x}+b(x\neq 0)$ ，其中 $a，b\in\mathbf{R}$.

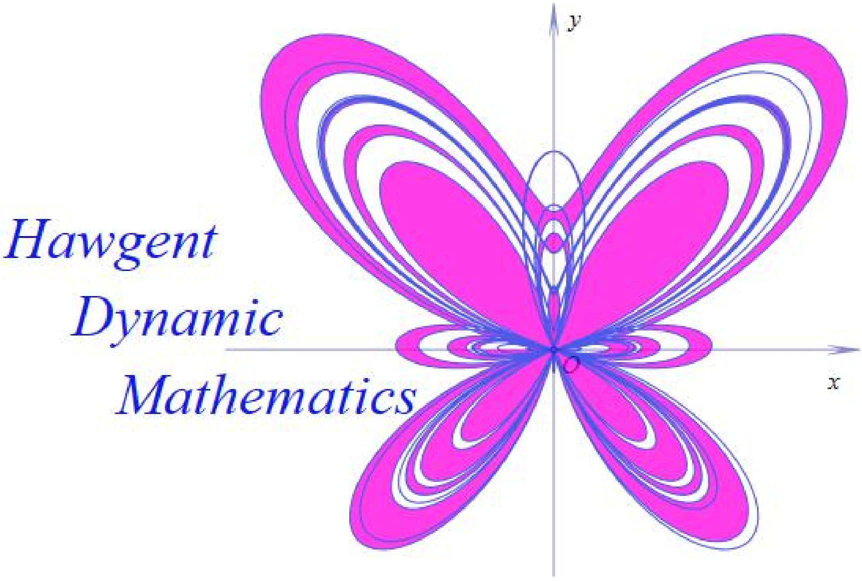
（1）若曲线 $y=f(x)$ 在点 $P(2，f(2))$ 处的切线方程为 $y=3x+1$ ，求函数 $f(x)$ 的解析式；

（2）讨论函数 $f(x)$ 的单调性；

（3）若对于任意的$a\in\left[\frac{1}{2},2\right]$，不等式$f(x)\leqslant 10$在$\left[\frac{1}{4},1\right]$上恒成立，求$b$的取值范围.

皓荡的大地，奔腾的骏马

只为向着那，最初的梦想



QQ 群：367878041

www.hawgent.com

11033149@qq.com