

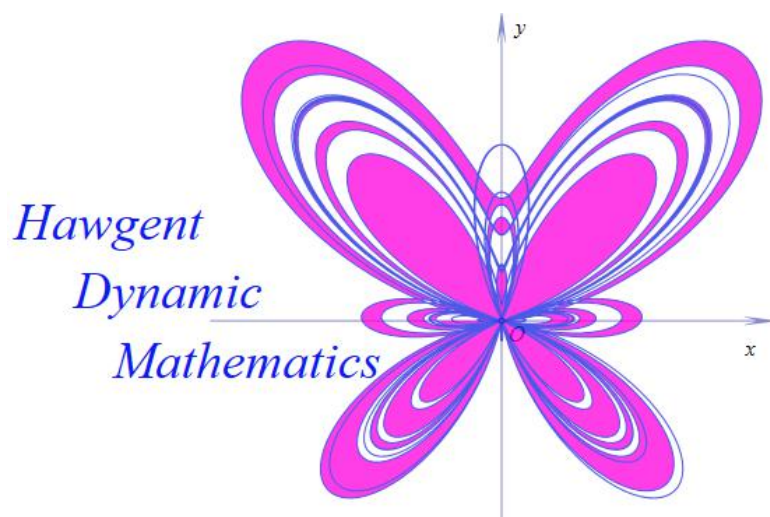


Since 1990's

Hawgent 皓骏动态数学课程系列

动态解析 高中数学综合问题 (上册)

深入学科，彻底突破数学教学和数学学习中的重点难点问题
开展数学实验、数学教学、数学学习和数学研究的必备工具



皓骏（广州）数学技术中心

Hawgent Technology Centre in Mathematics

内容介绍

在学习数学过程中,有许多问题在查看了详细的解答或听到了老师的讲解之后,很多学生仍然不得其解,即使他们在下一次遇到同一个问题也未必能够给出正确或完整的解答.

这是因为,在学习过程中,数学更加需要理解.

本课程收集并整理了一些综合性很高的数学问题,它们让老师感到难教,让学生感到难学.就是说,对于这些类似的问题许多数学老师都反应他们在花费了很大力气、很多时间的讲解之后,很多学生仍然是似懂非懂.

同样是学习,但方法有优劣之分,效率有高低之分.把看似复杂、抽象的问题变得更容易一些,抓住数学的本质使学生多一些理性思考而少一些机械记忆,让学生感悟到自然朴实的数学思想方法从而能够举一反三,这是我们追求的理念.

Hawgent 皓骏团队利用动态数学技术将这类问题呈现在学生面前,为他们提供了一个动手、观察、探索、猜想和验证的机会与平台,帮助他们利用变化的图形和数据发现问题内在的关系,并逐渐形成真正属于他们自己的解决问题的思路,这是我们追求的目标.

如果这种方式能够得到大家的认同,对我们是一种鼓励,并将激发我们更加努力工作的热情,同时希望有更多志同道合者加入我们的队伍,将这项工作持续下去,越做越好.当然也欢迎各种不同的声音,甚至是批评的意见,从而帮助我们得到提高和成长.

欢迎联系: 11033149@qq.com

目 录

第一章 基本函数.....	1
第一节 函数的定义域和值域.....	1
1. 函数的定义域与值域.....	1
2. 函数在指定区间的值域.....	3
3. 函数在指定区间的值域.....	6
4. 函数在动态区间上的最值.....	8
第二节 二次函数及其性质.....	10
1. 二次函数图像的对称性.....	10
2. 函数在指定区间的零点问题.....	14
第三节 分段函数及其性质.....	16
1. 分段函数的单调性.....	16
2. 分段函数的最值问题.....	18
第四节 函数的零点及方程的解.....	19
1. 周期函数与直线的交点.....	19
2. 指数函数与对数函数的图像交点.....	22
3. 分段函数在指定区间上的解.....	23
4. 两个函数图像的交点问题.....	27
5. 探索方程的根的个数.....	30
6. 参数与方程的零点个数.....	35
第五节 函数的性质与参数的取值范围.....	38
1. 不等式在指定区间上恒成立.....	38

2. 探索不等式恒成立的变量范围.....	40
3. 探索参数对两函数性质的影响.....	42
第二章 三角函数.....	47
第一节 三角函数图像的性质和变换.....	47
1. 正弦函数的图像性质.....	47
2. 正弦函数图像的变换.....	50
3. 三角函数图像与水平直线的交点.....	54
第二节 三角函数的值域问题.....	58
1. 正弦函数在指定区间的最值.....	58
2. 复合函数的最值问题.....	61
3. 复合函数的最值问题.....	62
4. 带有绝对值的函数值域问题.....	64
第三节 三角函数与一次函数.....	66
1. 指定区间内的函数值比较.....	66
2. 指定区间内函数值的比较.....	67
第三章 平面向量.....	70
第一节 向量的加减运算和基本定理.....	70
1. 向量的加法运算与参数范围.....	70
2. 向量间的数值关系.....	72
第二节 向量的数量积与向量的模.....	75
1. 向量运算的几何意义.....	75
2. 求向量的模的最值.....	76

3. 向量所表示的几何图形.....	77
4. 比较向量的模的大小.....	79
5. 向量之间模的关系与几何关系.....	81
第四章 不等式.....	83
第一节 比较大小.....	83
1. 比较代数式的大小.....	83
2. 由相等关系判断不等关系.....	88
第二节 解不等式.....	92
1. 解含有绝对值的不等式.....	92
2. 解有关分段函数的不等式.....	96
3. 不等式在指定区间上恒成立.....	99
第三节 线性规划.....	101
1. 目标函数在指定位置的最值问题.....	101
2. 根据目标函数的最值求参数的值.....	104
第四节 求参数的取值范围及综合问题.....	106
1. 两个区域之间的关系.....	106
2. 不等式组所表示的区域形状问题.....	108
3. 分段函数的单调性综合问题.....	110

第一章 基本函数

函数的思想和方法渗透到了数学的各个分支，因而成为各个阶段学生学习数学的重点，同时也是学生学习的难点. 函数的抽象性是它的最大特点，本章以几个典型综合问题为例，通过形象的展示与动态的变化，帮助学生深刻理解函数的概念和性质，通过建立感性认识提升抽象思维的水平，进一步帮助学生理解函数各种概念和性质的本质.

第一节 函数的定义域和值域

1. 函数的定义域与值域

例 1, 已知函数 $f(x) = \log_2[2x^2 + (m+3)x + 2m]$, 若 $f(x)$ 的值域为 R , 求实数 m 的取值范围.

【动感体验】

打开文件“1-1-例 1. dmr”，虚线为函数 $g(x) = 2x^2 + (m+3)x + 2m$ 的图像，实线为函数 $f(x) = \log_2[2x^2 + (m+3)x + 2m]$ 的图像. 通过变量尺可以改变实数 m 的值或通过按钮设置 m 的值，观察函数 $g(x)$ 的性质对函数 $f(x)$ 的值域的影响. 图 1.1.1—1.1.3 为其中的几种情形.

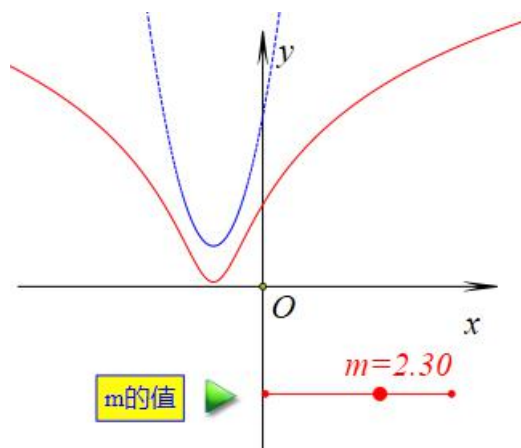


图 1.1.1

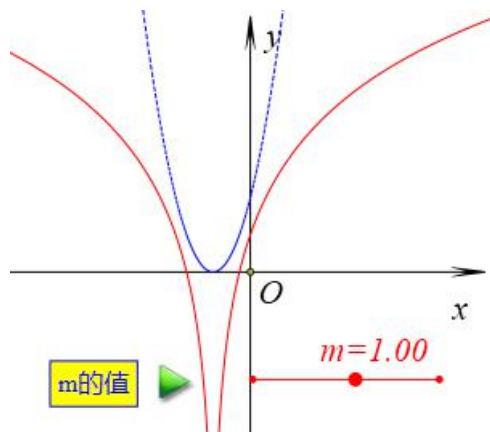


图 1.1.2

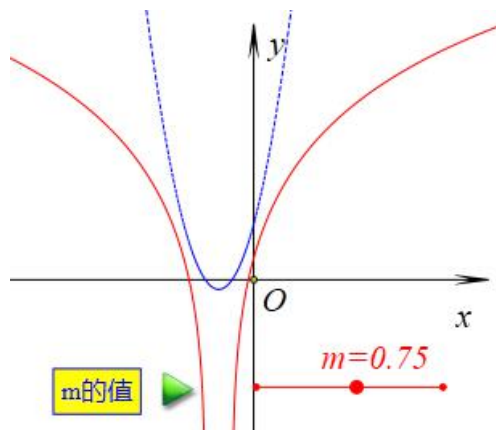


图 1.1.3

【思路点拨】

对于对数函数 $y = \log_2 x$ 来说, 当 $x \in (0, +\infty)$ 时, $y \in (-\infty, +\infty)$. 从对数函数的定义域出发考虑问题.

【动态解析】

如图 1.1.1 所示, 当函数 $g(x) = 2x^2 + (m+3)x + 2m$ 与 x 轴没有交点时, $g(x)$ 有最小正值, 设为 t_0 , 则函数 $f(x) = \log_2[2x^2 + (m+3)x + 2m]$ 有最小值 $f(t_0)$, 那么此时函数 $f(x) = \log_2[2x^2 + (m+3)x + 2m]$ 的值域不为 R , 而是 R 的一个子集.

如图 1.1.2 所示, 函数 $g(x) = 2x^2 + (m+3)x + 2m$ 与 x 轴只有一个交点时, $g(x)$ 有最小值 0, 则 $g(x)$ 可以取遍所有的正数, 因此这时函数 $f(x) = \log_2[2x^2 + (m+3)x + 2m]$ 的值域为 R .

如图 1.1.3 所示, 函数 $g(x) = 2x^2 + (m+3)x + 2m$ 与 x 轴有两个交点时, $g(x)$ 可以取遍所有的正数, 因此这时函数 $f(x) = \log_2[2x^2 + (m+3)x + 2m]$ 的值域为 R .

综上所述, 当 $g(x) = 2x^2 + (m+3)x + 2m$ 与 x 轴有交点时, 函数 $f(x) = \log_2[2x^2 + (m+3)x + 2m]$ 的值域为 R . 即要求 $\Delta = (m+3)^2 - 4 \times 2 \times 2m \geq 0$, 解得 $m \leq 1$ 或 $m \geq 9$.

【简要评注】

有的同学认为要使 $f(x)$ 的值域为 R , 首先应该使 $f(x)$ 有意义, 所以应该让 $g(x) = 2x^2 + (m+3)x + 2m$ 恒大于零, 即它的判别式恒小于零, 这种想法错在哪里?

显然要使 $f(x)$ 有意义, 不等同于 $f(x)$ 的定义域是全体实数, 实际上这时求函数的定

义域只需解不等式 $g(x) = 2x^2 + (m+3)x + 2m > 0$ 就可以了. 因此把条件转化为让 $g(x) = 2x^2 + (m+3)x + 2m$ 恒大于零是不对的. 事实上, 这时对数函数的真数 $g(x)$ 不能取遍所有的正数, 因而 $f(x)$ 的值域不能为 R , 只能是 R 的一个子集.

本题只要求函数 $f(x)$ 的值域为 R , 对函数 $f(x)$ 的定义域没有限制. 审题是关键, 同时也要求能深刻理解对数函数的定义.

2. 函数在指定区间的值域

例 2. 若函数 $f(x) = x^2 - a^x$ ($a > 0$ 且 $a \neq 1$), 当 $x \in (-1, 1)$ 时均有 $f(x) < \frac{1}{2}$, 求实数 a 的取值范围.

【动感体验】

因为函数 $f(x) = x^2 - a^x$ ($a > 0$ 且 $a \neq 1$), 所以 $f(x) < \frac{1}{2}$ 可化为 $x^2 - \frac{1}{2} < a^x$.

设 $g(x) = x^2 - \frac{1}{2}$, $h(x) = a^x$, 进入文件 “1-1-例 2. dmr”. 如图 1.1.4 所示, 两实曲线

分别为函数 $g(x)$ 和 $h(x)$ 在 $(-1, 1)$ 上的图像, 通过变量尺改变实数 a 的值或通过按钮设置 a 的值, 研究在区间 $(-1, 1)$ 上, 当 $g(x) < h(x)$ 时, 实数 a 应满足的条件.

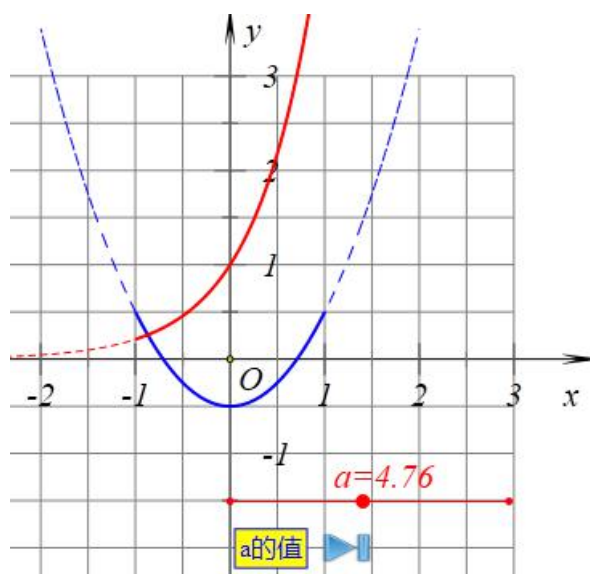


图 1.1.4

【思路点拨】

当 $a > 1$ 时, 函数 $h(x) = a^x$ 在区间 $(-1, 1)$ 上是增函数, 因此只要考虑左端点的情况即可.

当 $0 < a < 1$ 时, 函数 $h(x) = a^x$ 在区间 $(-1, 1)$ 上是减函数, 因此只要考虑右端点的情况即可.

【动态解析】

若 $a > 1$, 如图 1.1.5、图 1.1.6 所示, 分别是不等式 $x^2 - \frac{1}{2} < a^x$ 在区间 $(-1, 1)$ 上恒成立与不恒成立的情况. 因此若不等式 $x^2 - \frac{1}{2} < a^x$ 在区间 $(-1, 1)$ 上恒成立, 则需要有

$g(-1) < h(-1)$, 即 $(-1)^2 - \frac{1}{2} < a^{-1}$ 恒成立, 解得 $a < 2$. 又因为区间 $(-1, 1)$ 是开区间,

所以当 $a = 2$ 时不等式亦恒成立, 如图 1.1.7 所示. 所以满足条件的 a 的取值范围是 $1 < a \leq 2$.

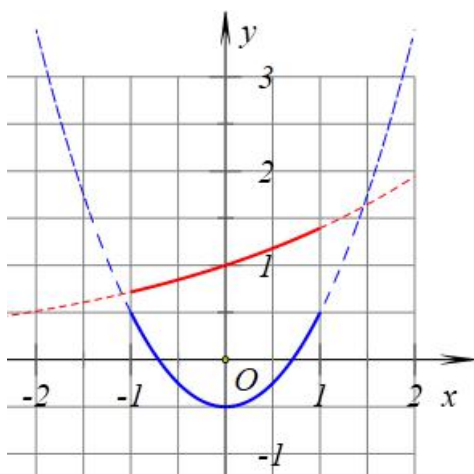


图 1.1.5

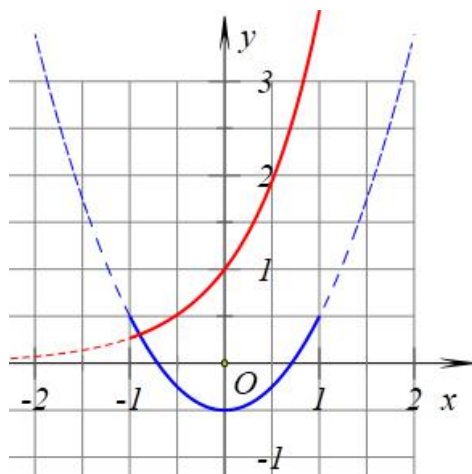


图 1.1.6

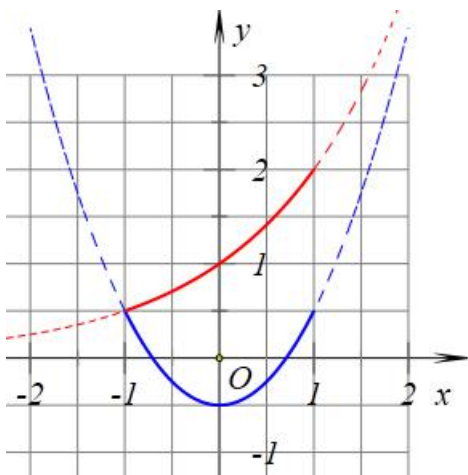


图 1.1.7

若 $0 < a < 1$, 如图 1.1.8、图 1.1.9 所示, 分别是不等式 $x^2 - \frac{1}{2} < a^x$ 在区间 $(-1, 1)$,

1) 上恒成立与不恒成立的情况. 因此若不等式 $x^2 - \frac{1}{2} < a^x$ 在区间 $(-1, 1)$ 上恒成立, 则

需要有 $g(1) < h(1)$, 即 $1^2 - \frac{1}{2} < a^1$ 恒成立, 解得: $a > \frac{1}{2}$. 又因为区间 $(-1, 1)$ 是开区间,

所以当 $a = \frac{1}{2}$ 时不等式亦恒成立, 如图 1.1.10 所示. 所以满足条件 a 的取值范围是

$$\frac{1}{2} \leq a < 1.$$

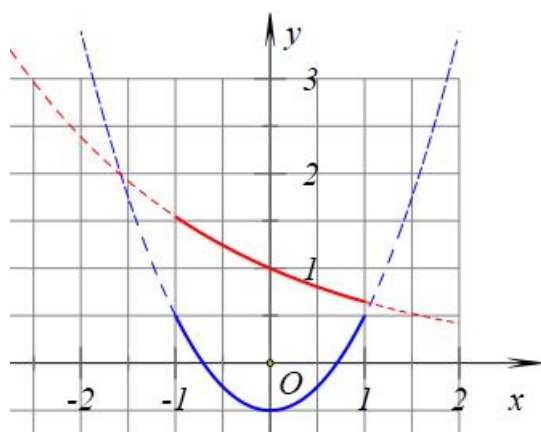


图 1.1.8

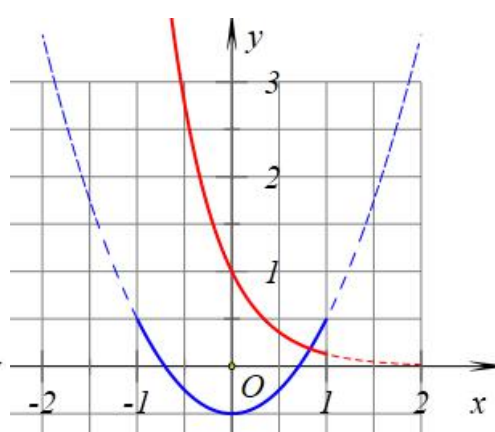


图 1.1.9

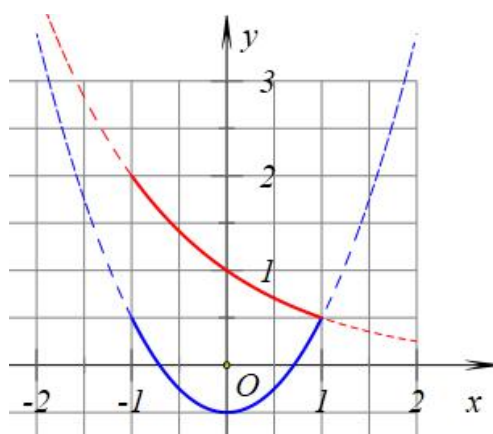


图 1.1.10

综上所述, 实数 a 的取值范围是: $1 < a \leq 2$ 或 $\frac{1}{2} \leq a < 1$.

【简要评注】

这是一个开区间的函数值域问题，问题可以转化有关“为当 $x \in (-1,1)$ 时均有

$x^2 - \frac{1}{2} < a^x$ ，求实数 a 的取值范围”的问题，我们已知 $y = x^2 - \frac{1}{2}$ 的图像，于是需要考虑

对于怎样的实数 a ， $y = a^x$ 的图像在 $y = x^2 - \frac{1}{2}$ 的图像的上方？当 $a > 1$ 时，函数 $h(x) = a^x$

在区间 $(-1,1)$ 上是增函数，因此只要考虑左端点的情况即可。当 $0 < a < 1$ 时，函数 $h(x) = a^x$

在区间 $(-1,1)$ 上是减函数，因此只要考虑右端点的情况即可。

通过适当地变换，可以将研究一个超越函数的问题转化成为研究两个初等函数之间关系的问题。相对于超越函数，我们可以轻松地手工画出初等函数的大致图像，这使得数形结合的方法变得有用武之地。

3. 函数在指定区间的值域

例 3. 设 $a > 1$ ，若对于任意的 $x \in [a, 2a]$ ，都有 $y \in [a, a^2]$ 满足方程

$\log_a x + \log_a y = 3$ ，求 a 的取值范围。

【动感体验】

方程 $\log_a x + \log_a y = 3$ 可化为 $x \cdot y = a^3$ ，打开文件“1-1-例 3. dmr”，曲线为函数

$y = \frac{a^3}{x}$ 的图像，通过变量尺可以改变实数 a 的值或通过按钮设置 a 的值，观察函数实数 a 对

函数 $y = \frac{a^3}{x}$ ($x \in [a, 2a]$) 的图像的影响，并探索满足条件的 a 的取值范围。如图 1.1.11

图 1.1.12 为其中的集中情形。

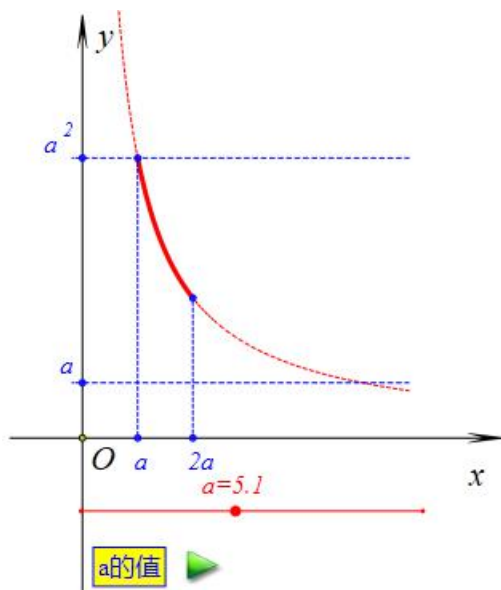


图 1.1.11

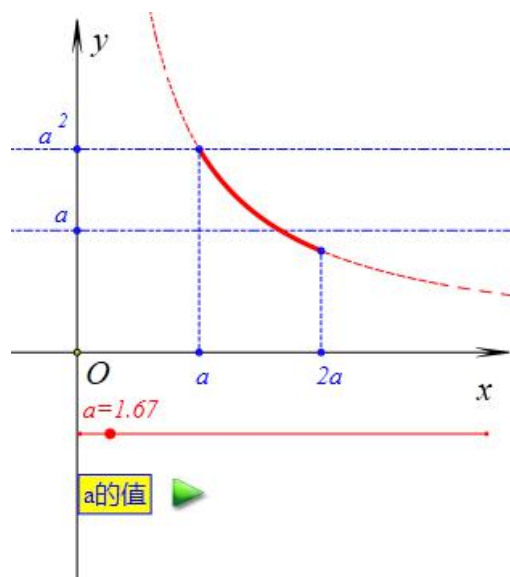


图 1.1.12

【思路点拨】

考虑函数 $y = \frac{a^3}{x}$ ($x \in [a, 2a]$) 的值域与 $[a, a^2]$ 之间的关系.

【动态解析】

因为 $a > 1$, 所以函数 $y = \frac{a^3}{x}$ 在区间 $[a, 2a]$ 上是单调递减函数.

若要求对于任意的 $x \in [a, 2a]$, 都有 $y \in [a, a^2]$ 满足方程 $\log_a x + \log_a y = 3$,

令函数 $y = f(x) = \frac{a^3}{x}$, 则需要 $[f(2a), f(a)] \subseteq [a, a^2]$, 即 $[\frac{a^3}{2}, a^2] \subseteq [a, a^2]$, 如图 1.1.11

所示. 由 $\begin{cases} \frac{a^2}{2} \geq a \\ a^2 \leq a^2 \end{cases}$, 解得 $a \geq 2$.

而当 $[\frac{a^2}{2}, a^2]$ 不是 $[a, a^2]$ 的子集时, 如图 1.1.12 所示, 对于任意的 $x \in [a, 2a]$,

不一定存在 $y \in [a, a^2]$ 满足方程 $\log_a x + \log_a y = 3$.

因此, 答案选择 B.

【简要评注】

方程 $\log_a x + \log_a y = 3$ 可化为 $x \cdot y = a^3$, 因为 $a > 1$, 函数 $y = \frac{a^3}{x}$ 在第一象限内为

减函数，于是需要考虑函数 $y = \frac{a^3}{x}$ ($x \in [a, 2a]$) 的值域与 $[a, a^2]$ 之间的关系就可以了. 值域是函数值的集合，在函数图像上的表现是函数图像在 y 轴上的投影对应 y 值的集合. 本题中 $y \in [a, a^2]$ 并不是说函数 $y = \frac{a^3}{x}$ 的值域为 $[a, a^2]$ ，这是本题需要注意的易错点.

4. 函数在动态区间上的最值

例 4. 已知函数 $f(x) = -x^2 + 2x$ ，求 $f(x)$ 在区间 $[t, t+1]$ 上的最大值 $h(t)$.

【动感体验】

打开文件“1-1-例 4. dmr”，实线为函数 $f(x) = -x^2 + 2x$ 在区间 $[t, t+1]$ 上的图像，通过变量尺改变实数 t 的值或通过按钮设置 t 的值，观察 t 对 $f(x)$ 在区间 $[t, t+1]$ 上最大值的影响. 如图 1.1.13—1.1.15 为其中的三种情形.

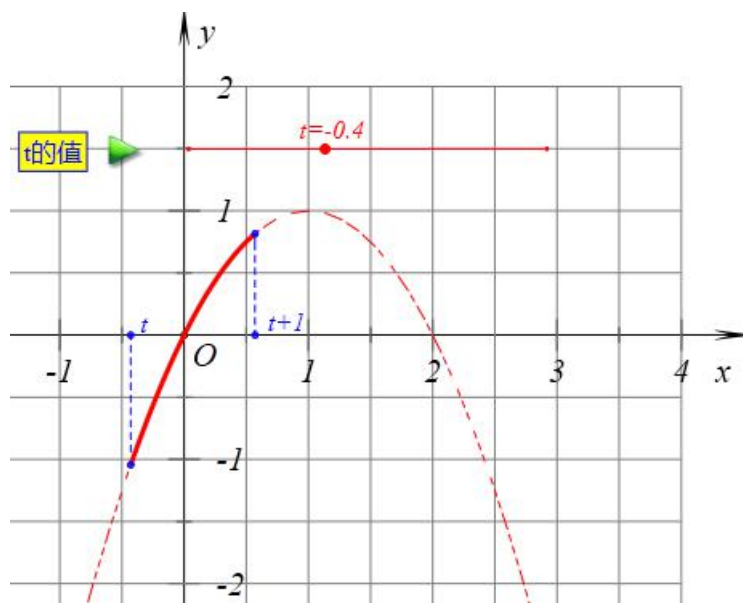


图 1.1.13

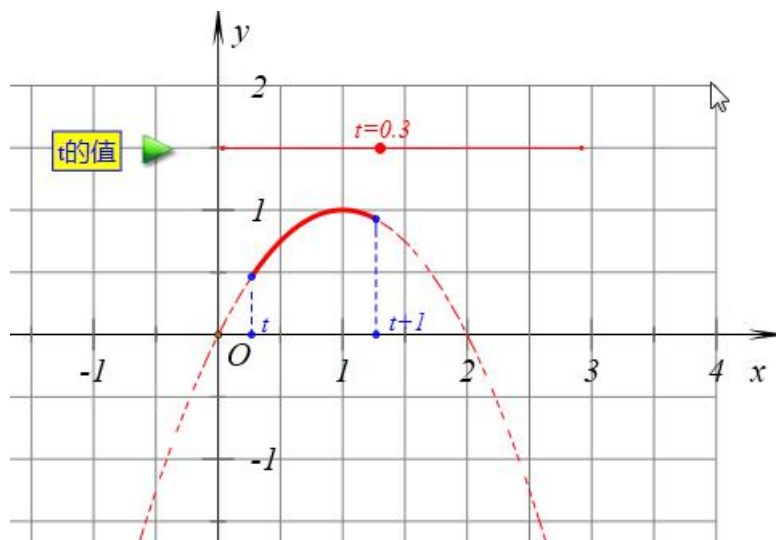


图 1.1.14

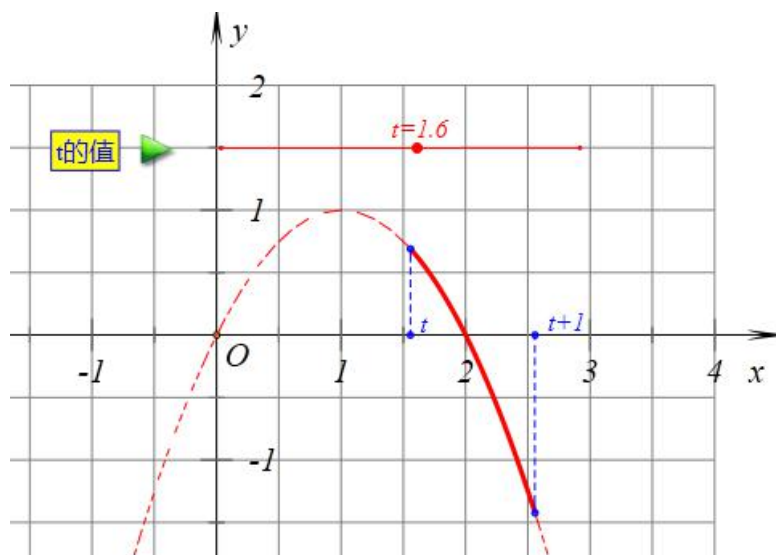


图 1.1.15

【思路点拨】

按照抛物线 $f(x) = -x^2 + 8x$ 的对称轴 $x = 4$ 在区间 $[t, t+1]$ 的右侧、内部和左侧三种情况进行分类讨论.

【动态解析】

当 $t+1 < 4$ ，即 $t < 3$ 时，如图 1.1.13 所示，当 $x = t+1$ 时， $f(x)$ 有最大值：
 $-(t+1)^2 + 8(t+1)$ ，化简得： $-t^2 + 6t + 7$.

当 $t \leq 4 \leq t+1$ ，即 $3 \leq t \leq 4$ 时，如图 1（2）所示，当 $x = 4$ 时， $f(x)$ 有最大值：
 $-4^2 + 8(4+1)$ ，化简得：16.

当 $t > 4$ 时，如图 1（3）所示，当 $x = t$ 时， $f(x)$ 有最大值： $-t^2 + 8t$.

$$\text{综上所述: } h(t) = \begin{cases} -t^2 + 6t + 7, & t < 3 \\ 16, & 3 \leq t \leq 4 \\ -t^2 + 8t, & t > 4 \end{cases}$$

【简要评注】

二次函数 $f(x) = -x^2 + 8x$ 区间 $[t, t+1]$ 的图像是开口朝下的抛物线弧段, 在这个闭区间上总有最大值, 或是抛物线的顶点的纵坐标, 或是抛物线在闭区间边界的端点的纵坐标, 究竟是哪种情况需要进行分类讨论. 求函数在动态区间上的最值问题, 一定要抓住区间变化对函数性质的影响, 从而准确把握分类依据.

本节小结

求函数在指定区间上的最值问题, 关键要认清函数在指定区间上的单调性. 含参数时往往需要讨论, 找出分类依据和分类标准是解决问题的关键. 本节各个例题的【动感体验】部分在帮助我们形成感性的认识, 培养严谨的思维习惯等方面能起到重要的作用.

定义域、值域和对应法则是函数的三要素. 研究函数的性质不能忽略函数的定义域. 定义域不同, 函数也不同. 值域是函数的整体性质, 也是学习中的重要内容. 这部分试题的问题类型繁杂, 解答的方法也很多, 但都不容易掌握. 本节给出的几个例题具有一定的代表性, 通过它们帮助你深刻理解函数的基本概念, 掌握处理函数问题的朴实思想.

拓展练习

1.1. 已知函数 $f(x) = \frac{1}{x^2 - 2x + m}$ 的定义域为 R , 求实数 m 的取值范围.

1.2. 设 $a > 1$, 若仅有一个常数 c 使得对于任意的 $x \in [a, 2a]$, 都有 $y \in [a, a^2]$ 满足方程 $\log_a x + \log_a y = c$, 这时 a 的取值的集合为_____.

1.3. 已知函数 $f(x) = -x^2 + 8x$, 求 $f(x)$ 在区间 $[t, t+1]$ 上的最小值 $k(t)$.

1.4. 已知 a 是实数, 求 $f(x) = x^2(x-a)$ 在区间 $[0, 2]$ 上的最大值.

第二节 二次函数及其性质

1. 二次函数图像的对称性

例 1. 函数 $f(x) = ax^2 + bx + c$ ($a \neq 0$) 的图象关于直线 $x = -\frac{b}{2a}$ 对称. 据此可推测,

对任意的非零实数 a, b, c, m, n, p ，关于 x 的方程 $m[f(x)]^2 + nf(x) + p = 0$ 的解集都不可能是 ()

- A. $\{1, 2\}$ B. $\{1, 4\}$ C. $\{1, 2, 3, 4\}$ D. $\{1, 4, 16, 64\}$

【动感体验】

打开文件“1-2-例 1. dmr”，如图 1.2.1 所示，虚线为函数 $f(x) = ax^2 + bx + c$ 的图像，实线为函数 $g(x) = m[f(x)]^2 + nf(x) + p$ 的图像，通过变量尺改变实数 a, b, c, m, n, p 的值或通过按钮设置它们的值，观察函数 $g(x)$ 的图像与 x 轴交点的变化规律.

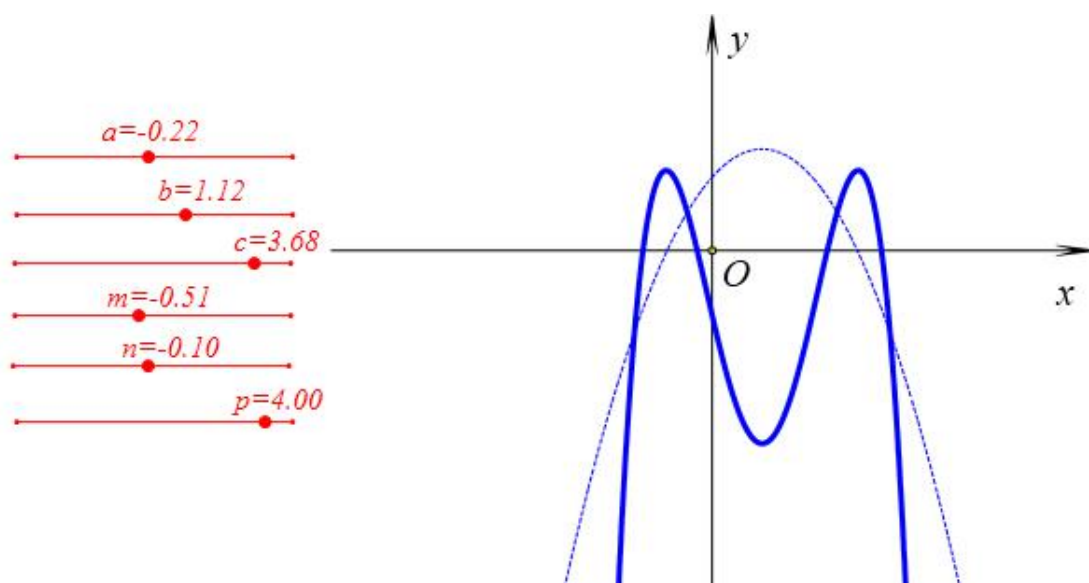


图 1.2.1

【思路点拨】

设 $t = f(x)$ ，假设 α, β 是方程 $mt^2 + nt + p = 0$ 的两个实根.

若方程 $f(x) = \alpha$ 存在两个根 x_1, x_2 ，则 x_1, x_2 是方程 $m[f(x)]^2 + nf(x) + p = 0$ 的根；同理若方程 $f(x) = \beta$ 存在两个根 x_3, x_4 ，则 x_3, x_4 是方程 $m[f(x)]^2 + nf(x) + p = 0$ 的根.

【动态解析】

由根与系数之间的关系知： $x_1 + x_2 = x_3 + x_4 = -\frac{b}{a}$ ，即 x_1 与 x_2 和 x_3 与 x_4 均关于直

线 $x = -\frac{b}{2a}$ 对称. 如图 1.2.2—1.2.4 所示.

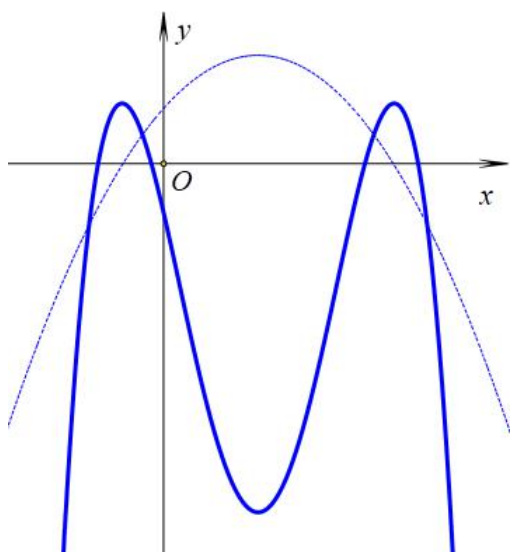


图 1.2.2

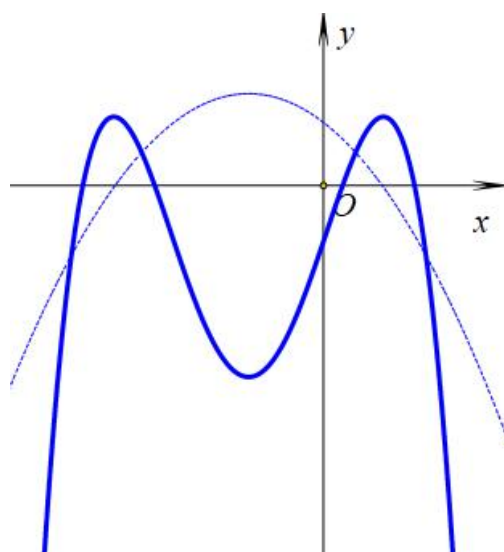


图 1.2.3

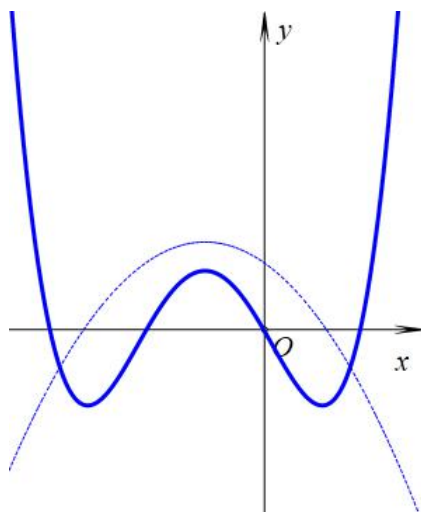


图 1.2.4

当然，方程 $m[f(x)]^2 + nf(x) + p = 0$ 也可能只有两个根 x_1 与 x_2 ，如图 1.2.5 所示，

这两个根也关于直线 $x = -\frac{b}{2a}$ 对称.

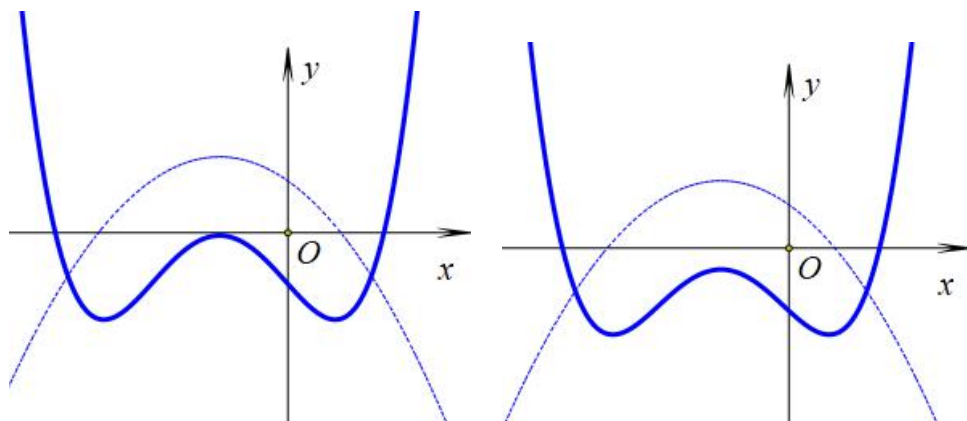


图 1.2.5

图 1.2.6

方程 $m[f(x)]^2 + nf(x) + p = 0$ 也可能只有三个根 x_1, x_2, x_3 , 如图 1.2.6 所示, 不

妨设 $x_1 < x_2 < x_3$, 则有 x_1 与 x_3 关于直线 $x = -\frac{b}{2a}$ 对称, 而 $x_2 = -\frac{b}{2a}$.

方程 $m[f(x)]^2 + nf(x) + p = 0$ 也可能只有一个根 x_0 , 如图 1.2.7 所示, 则 $x_0 = -\frac{b}{2a}$.

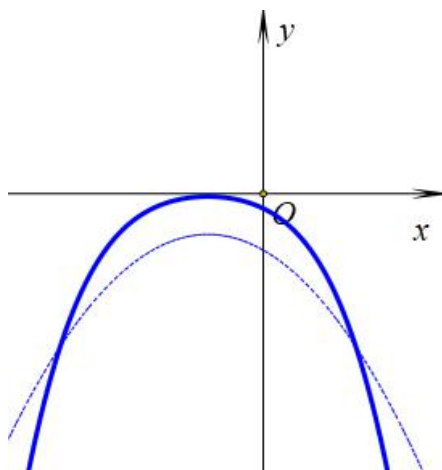


图 1.2.7

因此选择答案 D.

【简要评注】

设 $t = f(x)$, 考虑关于 t 的方程 $mt^2 + nt + p = 0$ 有两个不等的实数根 α, β 的情况, 这时若方程 $f(x) = \alpha$ 存在两个根 x_1, x_2 , 而 x_1, x_2 就是方程 $m[f(x)]^2 + nf(x) + p = 0$ 的根; 因为:

$$m[f(x_{1,2})]^2 + nf(x_{1,2}) + p = m\alpha^2 + n\alpha + p = 0.$$

同理方程 $f(x) = \beta$ 的两个根 x_3, x_4 , 也是方程 $m[f(x)]^2 + nf(x) + p = 0$ 的根. 此时

原方程有四个根, 且根据函数 $f(x) = ax^2 + bx + c$ ($a \neq 0$) 的图象关于直线 $x = -\frac{b}{2a}$ 对

称. 可推测 $x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$, $x_3 + x_4 = -\frac{b}{a}$, 所以 $x_1 + x_2 = x_3 + x_4 = -\frac{b}{a}$. 本节主要考察二次函数

图像的对称性质: 二次函数经过复合后, 其零点依然保持了二次函数原有的对称性. 动态解析部分对另外三个选项的可能性做了详细的解释.

2. 函数在指定区间的零点问题

例 2. 已知 a 是实数, 函数 $f(x) = 2ax^2 + 2x - 3 - a$, 如果函数 $y = f(x)$ 在区间 $[-1, 1]$ 上有零点, 求 a 的取值范围.

【动感体验】

打开文件 “1-2-例 2. dmr”, 实线是函数 $f(x) = 2ax^2 + 2x - 3 - a$ 在区间 $[-1, 1]$ 上的图象, 通过变量尺或者通过按钮设置 a 的值, 研究 $y = f(x)$ 在区间 $[-1, 1]$ 上有零点时函数 $y = f(x)$ 的性质, 以及对实数 a 的要求, 如图 1.2.8-1.2.13 所示为其中的几种情形.

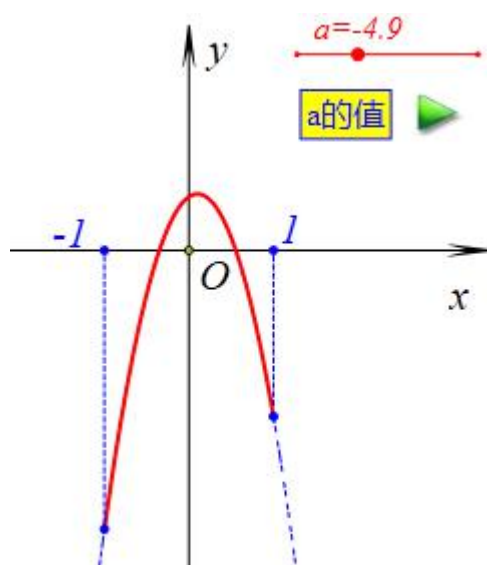


图 1.2.8

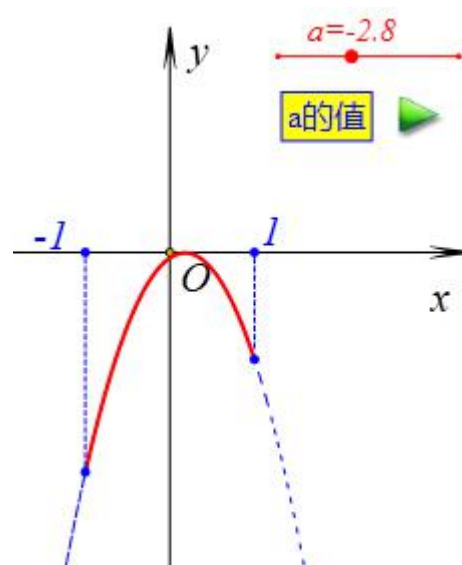


图 1.2.9

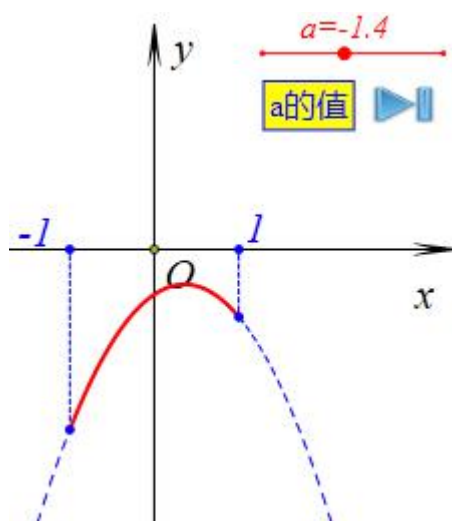


图 1.2.10

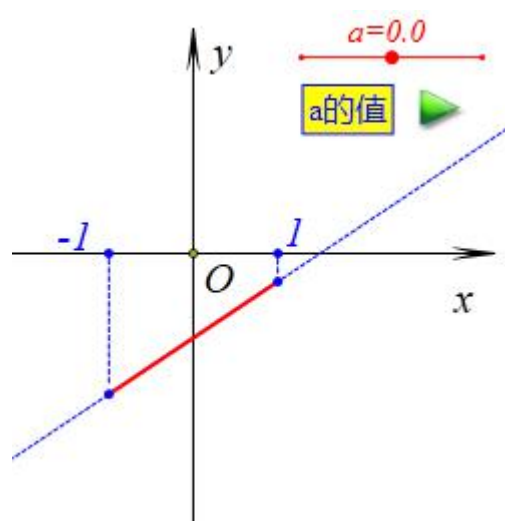


图 1.2.11

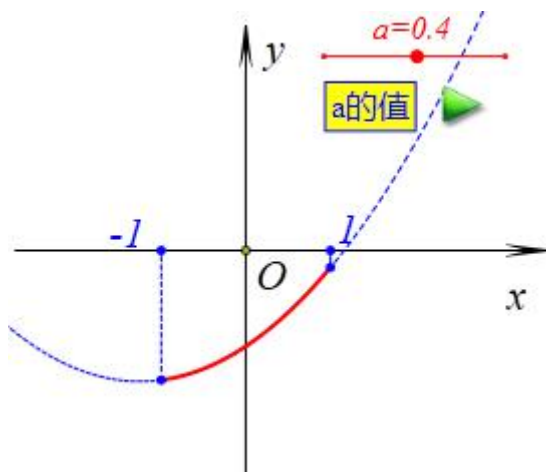


图 1.2.12

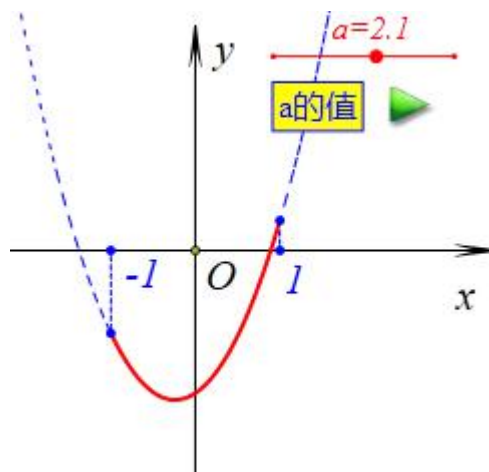


图 1.2.13

【思路点拨】

分别对当 $a < 0$, $a = 0$ 和 $a > 0$ 三种情况进行讨论. 同时注意实数 a 对二次函数对称轴 $x = -\frac{1}{a}$ 的影响.

【动态解析】

当 $a < 0$ 时, 令 $\Delta = 4 - 4 \cdot 2a \cdot (-3 - a) = 0$, 解得: $a = -\frac{\sqrt{7}+3}{2}$ 或 $a = \frac{\sqrt{7}-3}{2}$ (舍去). 当 $a \leq -\frac{3+\sqrt{7}}{2}$ 时, 如图 1.2.8 所示, $f(1) \cdot f(-1) = (a-1)(a-5) > 0$ 并且对称轴 $x = -\frac{1}{2a}$ 满足 $0 < -\frac{1}{2a} \leq \frac{3+\sqrt{7}}{2} < 1$. 因此当 $a \leq -\frac{3+\sqrt{7}}{2}$ 时, 函数 $f(x)$ 在区间 $[-1, 1]$ 上一定有零点.

当 $a = 0$ 时, $f(x) = 2x - 3$, 如图 1.2.11 所示, 显然在区间 $[-1, 1]$ 上没有零点.

当 $a > 0$ 时, 由前面 $\Delta = 0$ 解得 $a = -\frac{\sqrt{7}+3}{2}$ 或 $a = \frac{\sqrt{7}-3}{2}$ (均小于 0) 知道 $f(x)$ 与 x

轴恒有交点, 因为对称轴 $x = -\frac{1}{a} < 0$ 所以, 若 $f(x)$ 在区间 $[-1, 1]$ 上有零点, 如图 1.2.13

所示, 则要求 $f(1) \geq 0$, 解得: $a \geq 1$.

综上所述, a 的取值范围是: $a \leq -\frac{3+\sqrt{7}}{2}$ 或 $a \geq 1$.

【简要评注】

在讨论参数的取值范围时, 一般首先从熟悉的分类标准进行讨论, 例如在这里的 $a < 0$,

$a=0$ 和 $a>0$ ，然后对每一种情况下结论成立的条件进行进一步讨论.

本节小结

利用二次函数的图像性质解题过程中，图像的对称性及其函数的零点往往是解答的关键. 对于指定区间上的问题，区间的两个端点是否满足条件需要重视和认真分析.

二次函数、二次方程和二次不等式历来都是热点问题和重点问题，这三个形式关系密切，又各有特点，也容易与实际问题的结合. 命题时可塑性强，难度可深可浅，所考察的中学阶段的相关知识也比较系统. 例如求根公式，函数图像的特征，不等式的解法等许多问题最终也会转化成为二次问题的求解. 三个二次问题中二次函数是解决问题的桥梁.

拓展练习

2.1. 已知 $f(x) = (x-a)(x-b) - 1$ ， m 和 n 是方程 $f(x) = 0$ 的两根，且 $a < b$ ， $m < n$ ，则实数 m ， n ， a ， b 的大小关系是 ()

- A. $m < a < b < n$
- B. $a < m < n < b$
- C. $a < m < b < n$
- D. $m < a < n < b$

2.2. 若方程 $2ax^2 - x - 1 = 0$ 在 $(0, 1)$ 内恰有一解，求 a 的取值范围.

第三节 分段函数及其性质

1. 分段函数的单调性

例 1. 已知 $f(x) = \begin{cases} (3a-1)x + 4a, & x < 1 \\ \log_a x, & x \geq 1 \end{cases}$ 是 $(-\infty, +\infty)$ 上的减函数，求 a 的取值范围是.

【动感体验】

打开文件“1-3-例 1. dmr”，可以看到函数 $f(x)$ 的图像，通过变量尺可以改变实数 a 的值或通过按钮设置 a 的值，从而改变函数的性质. 图 1.3.1-1.3.4 所示为其中的几种情形. 观察和研究满足题设条件的情况，并考虑对应的条件.

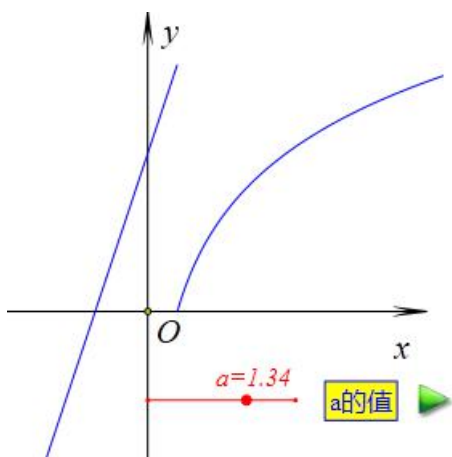


图 1.3.1

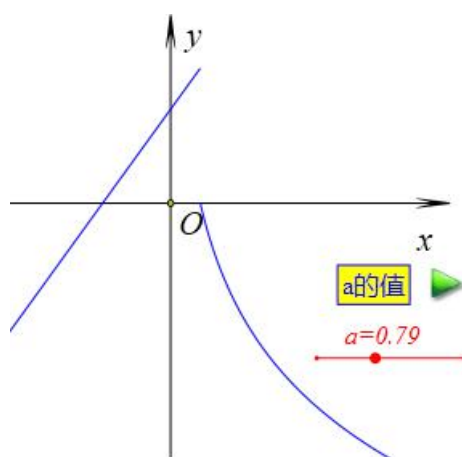


图 1.3.2

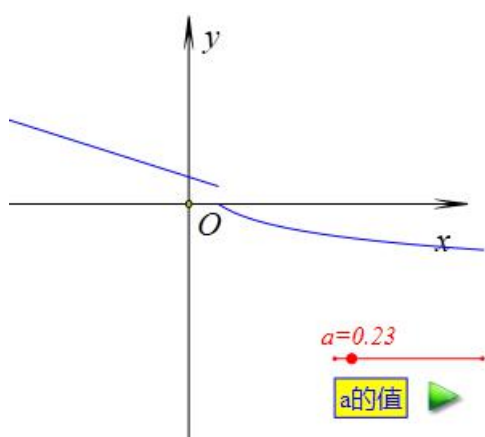


图 1.3.3.

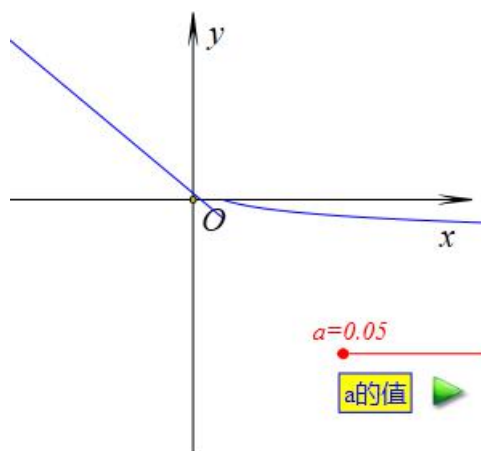


图 1.3.4

【思路点拨】

根据函数单调性的概念确定分段函数每一段应满足的条件, 还应该考虑两段函数之间的关系.

【动态解析】

因为函数 $f(x) = \begin{cases} (3a-1)x+4a, & x < 1 \\ \log_a x, & x \geq 1 \end{cases}$ 是 $(-\infty, +\infty)$ 上的减函数.

$$\text{所以, } \begin{cases} 3a-1 \leq 0 \\ 0 < a < 1 \\ (3a-1) \cdot 1 + 4a \geq \log_a 1 \end{cases}$$

解得: $\frac{1}{7} \leq a \leq \frac{1}{3}$. 容易知道只有图 1.3.3 满足题设条件.

【简要评注】

这是一个分段函数, 一段是对数函数, 一段是一次函数. 根据函数单调性的概念不仅应该考虑这两个函数各自是减函数, 还应该考虑在整个定义域 $(-\infty, +\infty)$ 上满足减函数的条件.

通常情况下, 两个单调增区间或者两个单调减区间是不能合并在一起的, 因而 $f(x)$ 若在

$(-\infty, +\infty)$ 是减函数必须从整体上考虑. 容易发生的错误是选择图 1.3.4.

2. 分段函数的最值问题

例 2. 用 $\min\{a, b, c\}$ 表示 a, b, c 三个数中的最小值. 设 $f(x) = \min\{2^x, x+2, 10-x\}$ ($x \geq 0$), 求 $f(x)$ 的最大值.

【思路点拨】

画出函数 $y = 2^x$, $y = x+2$ 和 $y = 10-x$ 的图像.

【动态解析】

打开文件“1-3-例 2. dmr”, 如图 1.3.5 所示, 实线为函数 $f(x) = \min\{2^x, x+2, 10-x\}$ ($x \geq 0$) 的图像, 可知在函数 $y = x+2$ 与 $y = 10-x$ 的图像交点处, $f(x)$ 取最大值.

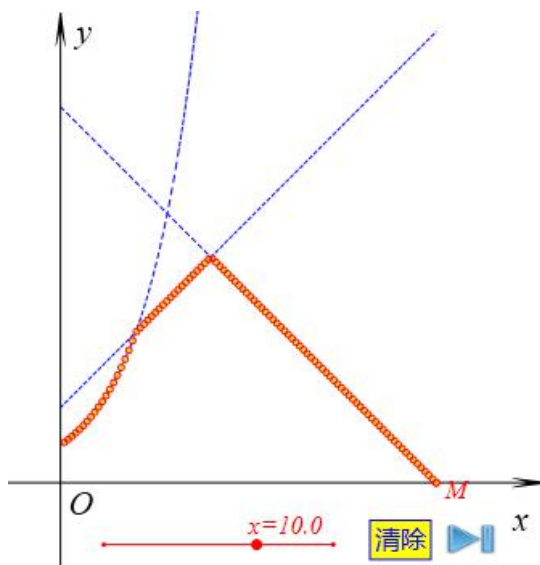


图 1.3.5

易知 $f(x)$ 的最大值为 6.

【简要评注】

对于分段函数 $H(x) = \begin{cases} f(x), & f(x) < g(x) \\ g(x), & f(x) \geq g(x) \end{cases}$ 我们是熟悉的,

$f(x) = \min\{2^x, x+2, 10-x\}$ 不过是分段函数 $H(x)$ 的拓展, 由两端变成了三段. 解答分段函数的问题是, 画出它的大致图像能够帮助我们准确、高效地解决问题. 而画分段函数图形的关键是准确找到相邻两端交点的位置.

本节小结

分段函数的问题分段处理, 整体求解. 通过画出分段函数的大致图像, 可以帮助更迅速、

更直接得到问题解答的结果. 因此, 通过研究分段函数的表达式, 准确地画出它的图像对解决问题能起到事半功倍的作用.

拓展练习

3.1. 设 $f(x) = 1 - 2x^2$, $g(x) = x^2 - 2x$.

$$\text{若 } F(x) = \begin{cases} g(x), & f(x) \geq g(x) \\ f(x), & f(x) < g(x) \end{cases},$$

则 $F(x)$ 的最大值为_____.

3.2. 设函数 $y = f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 内有定义, 对于给定的正数 k , 定义函数

$$f_k(x) = \begin{cases} f(x), & f(x) \leq k \\ k, & f(x) > k \end{cases}, \text{ 取函数 } f(x) = 2^{-|x|}. \text{ 当 } k = \frac{1}{2} \text{ 时, 求函数 } f_k(x) \text{ 的单调递增区间.}$$

第四节 函数的零点及方程的解

1. 周期函数与直线的交点

例 1. 已知以 $T = 4$ 为周期的函数 $f(x) = \begin{cases} m\sqrt{1-x^2}, & x \in (-1, 1] \\ 1-|x-2|, & x \in (1, 3] \end{cases}$, 其中 $m > 0$. 若方程

$3f(x) = x$ 恰有 5 个实数解, 求实数 m 的取值范围为.

【动感体验】

可将方程 $3f(x) = x$ 化为 $f(x) = \frac{x}{3}$, 问题转化为直线 $y = \frac{x}{3}$ 与 $f(x)$ 的图像恰有 5 个交

点, 求 m 的取值范围.

首先画出一个周期内函数 $f(x) = \begin{cases} m\sqrt{1-x^2}, & x \in (-1, 1] \\ 1-|x-2|, & x \in (1, 3] \end{cases}$ (其中 $m > 0$) 的图像, 这是由两

部分组成的: 椭圆 $x^2 + \frac{y^2}{m^2} = 1$, $x \in (-1, 1]$ 的上半部分和 $y = -|x-2| + 1$, $x \in (1, 3]$.

打开文件“1-4-例 1. dmr”, 实线为函数 $f(x)$ 的图像, 虚线为 $y = \frac{x}{3}$ 的图像. 通过变量

尺改变实数 m 的值或通过按钮设置 m 的值，观察函数 $y = f(x)$ 与 $y = \frac{x}{3}$ 的图像交点变化情况。

如图 1.4.1—1.4.5 所示为其中的几种情形。

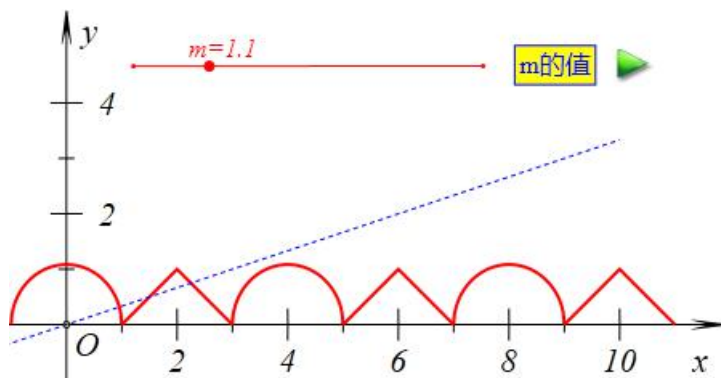


图 1.4.1

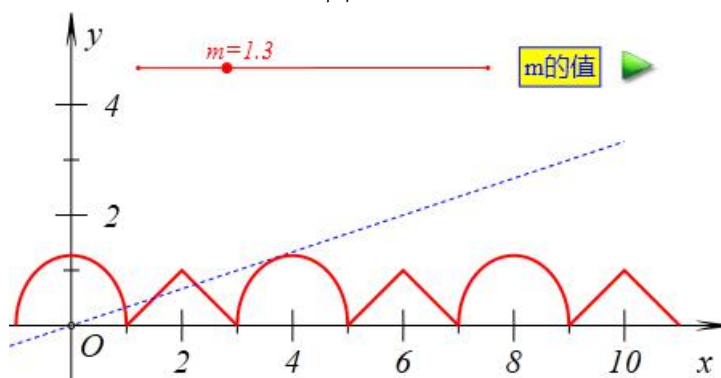


图 1.4.2

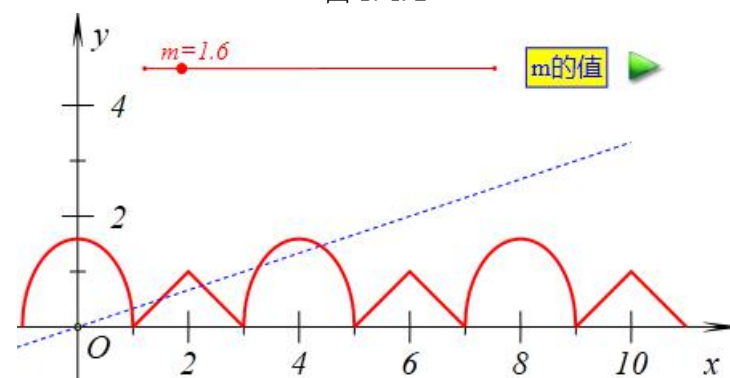


图 1.4.3

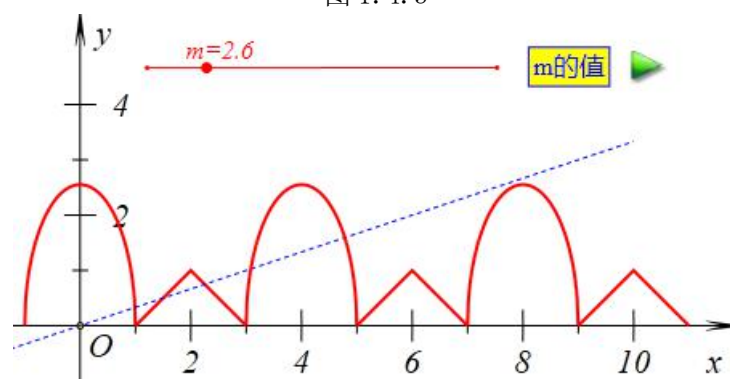


图 1.4.4

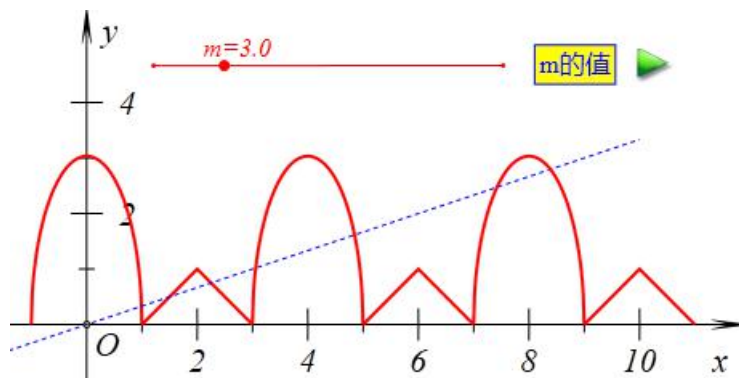


图 1.4.5

【思路点拨】

找出直线 $y = \frac{x}{3}$ 与函数 $f(x)$ 的图像有 5 个交点的临界状态. 根据题目要求, 需要直线

$y = \frac{x}{3}$ 与下一个椭圆有两个交点, 与再一个椭圆无交点, 由此可以确定 m 的取值范围.

【动态解析】

考虑两个极端的情况:

(1) $y = \frac{x}{3}$ 与半椭圆 $y = m\sqrt{1-(x-4)^2}$ 相切, 如图 1.4.2 所示. 将 $y = \frac{x}{3}$ 代入

$$y = m\sqrt{1-(x-4)^2} \text{ 整理得 } (1 + \frac{1}{9m^2})x^2 - 8x + 15 = 0.$$

$$\text{由 } \Delta = 8^2 - 4 \cdot 15 \cdot (1 + \frac{1}{9m^2}) = 0, \text{ 解得: } m = \frac{\sqrt{15}}{3}.$$

(2) $y = \frac{x}{3}$ 与半椭圆 $y = m\sqrt{1-(x-8)^2}$ 相切, 如图 1.4.4 所示. 将 $y = \frac{x}{3}$ 代入

$$y = m\sqrt{1-(x-8)^2}, \text{ 整理得 } (1 + \frac{1}{9m^2})x^2 - 16x + 63 = 0.$$

$$\text{由 } \Delta = 16^2 - 4 \cdot 63 \cdot (1 + \frac{1}{9m^2}) = 0, \text{ 解得: } m = \sqrt{7}.$$

综上所述, 当 $\frac{\sqrt{15}}{3} < m < \sqrt{7}$ 时, 如图 1.4.3 所示, 函数 $y = f(x)$ 与 $y = \frac{x}{3}$ 的图像有

5 个点, 即方程 $3f(x) = x$ 恰有 5 个实数解. 所以答案选择 B.

【简要评注】

对于周期函数来说，除了要了解函数的整体性质，还需要抓住每个周期内的性质特征. 在解决周期函数与非周期函数的综合问题时，研究两个函数关系发生改变的某个周期是解决问题的关键，可以避免大量繁琐的计算.

2. 指数函数与对数函数的图像交点

例 2. 设 a, b, c 均为正数，且 $2^a = \log_{\frac{1}{2}} a$, $\left(\frac{1}{2}\right)^b = \log_{\frac{1}{2}} b$, $\left(\frac{1}{2}\right)^c = \log_2 c$. 比较

a, b, c 之间的大小.

【动感体验】

打开文件“1-4-例 2. dmr”，如图 1.4.6 所示，各曲线分别为函数 $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$, $y = 2^x$,

$y = \log_2 x$, $y = \log_{\frac{1}{2}} x$ 的图像. 观察函数图像之间的交点，比较 a, b, c 之间的大小.

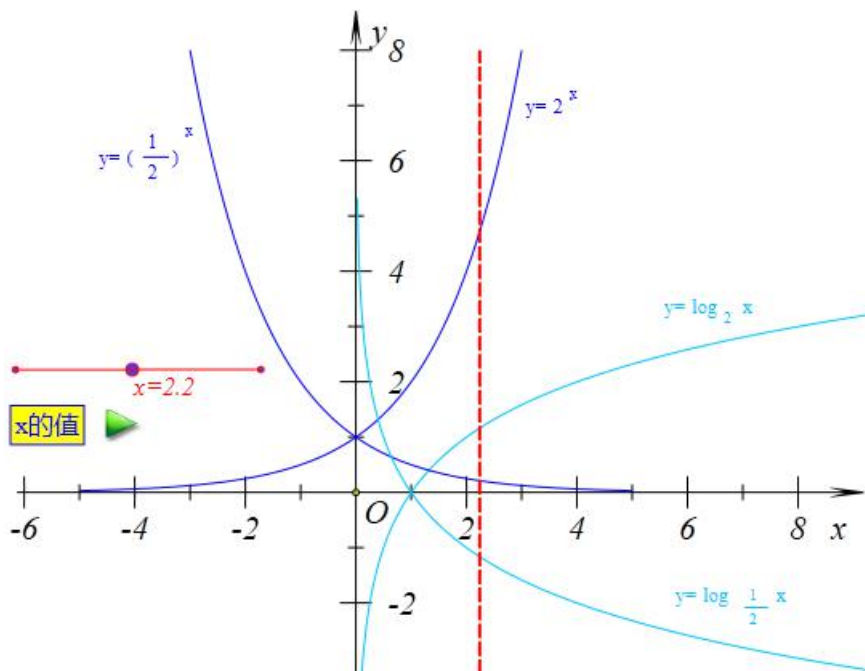


图 1.4.6

【思路点拨】

因为 $2^a = \log_{\frac{1}{2}} a$, 所以 a 表示函数 $y = 2^x$ 与 $y = \log_{\frac{1}{2}} x$ 的图像之间交点的横坐标. 同

理, b 表示函数 $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$ 与 $y = \log_{\frac{1}{2}} x$ 的图像之间交点的横坐标, c 表示函数 $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$ 与

$y = \log_2 x$ 的图像之间交点的横坐标. 因此, 可以借助函数 $y = 2^x$, $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$, $y = \log_2 x$ 与

$y = \log_{\frac{1}{2}} x$ 的图像比较这三个数的大小.

【动态解析】

进入文件的第二页，如图 1.4.7 所示，容易知道 a 、 b 、 c 之间的大小满足： $a < b < c$ 。

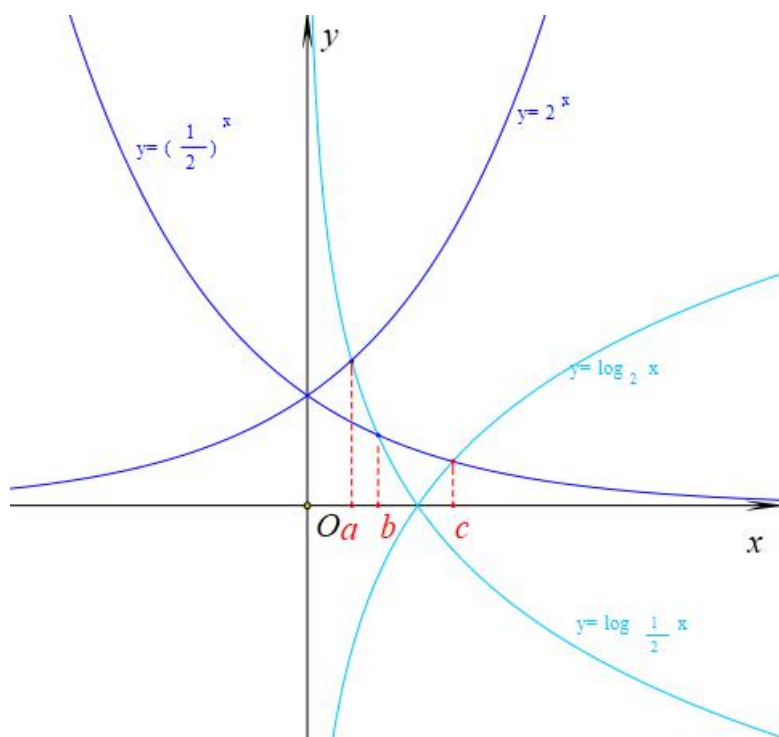


图 1.4.7

【简要评注】

在本题中直接求出 a 、 b 、 c 的值是不现实的。把已知等式当做方程，从而转化为两个函数图像交点的问题，根据函数图像的性质就能轻松解决问题。

3. 分段函数在指定区间上的解

例 3. 已知 $f(x) = |x^2 - 1| + x^2 + kx$ 。若关于 x 的方程 $f(x) = 0$ 在 $(0, 2)$ 上有两个解

x_1, x_2 ，求 k 的取值范围，并证明 $\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} < 4$ 。

【动感体验】

打开文件“1-4-例 3.dmr”，实线为函数 $g(x) = -|x^2 - 1| - x^2$ 的图像，虚线为函数 $h(x) = kx$ 的图像。通过变量尺改变 k 的值或通过按钮设置 k 的值，观察和研究函数 $g(x)$ 与 $h(x)$ 在 $(0, 2)$ 上交点的情况，即函数 $f(x) = |x^2 - 1| + x^2 + kx$ 的零点的情况，如图 1.4.8 和图 1.4.9 所示为其中的两种情况。

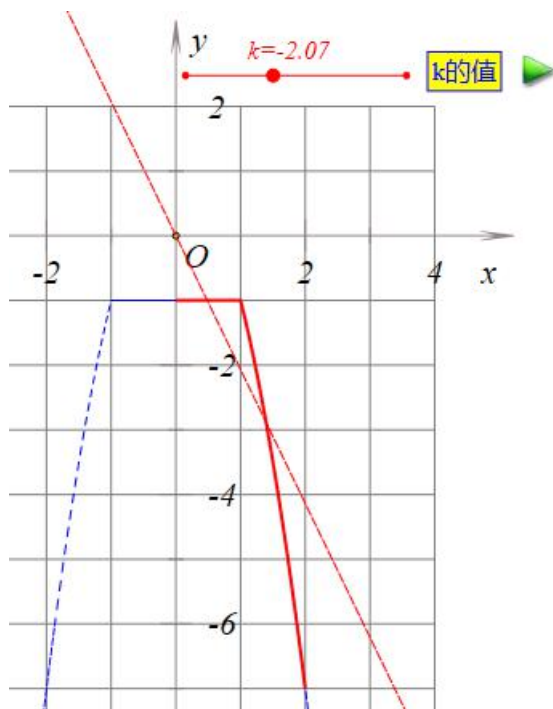


图 1.4.8

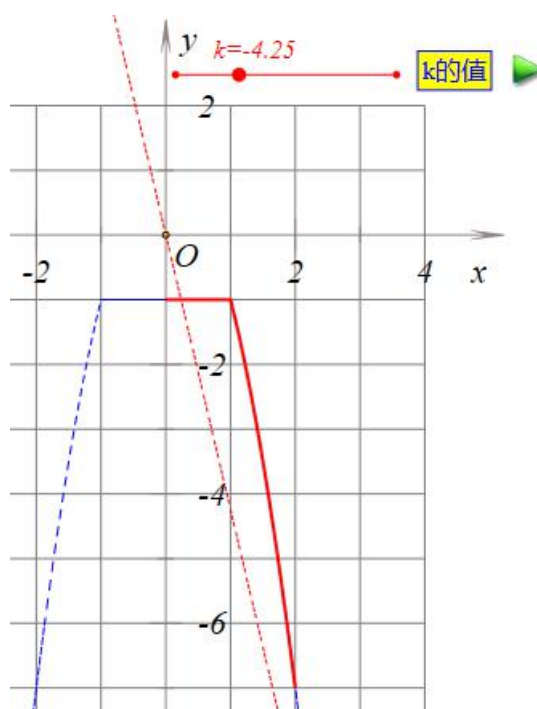


图 1.4.9

【思路点拨】

准确判断 $g(x)$ 与 $h(x)$ 在 $(0,2)$ 上有一个交点的情况.

【动态解析】

当直线段 $h(x) = kx$ 经过点 $(1, -1)$ 时, 函数 $g(x)$ 与 $h(x)$ 在 $(0,2)$ 上有一个交点, 如图 1.4.10 所示, 这时解得: $k = -1$.

当直线段 $h(x) = kx$ 经过点 $(2, g(2))$ 时, 函数 $g(x)$ 与 $h(x)$ 在 $(0,2)$ 上有一个交点,

如图 1.4.11 所示, 这时由 $2k = g(2) = -7$ 解得: $k = -\frac{7}{2}$.

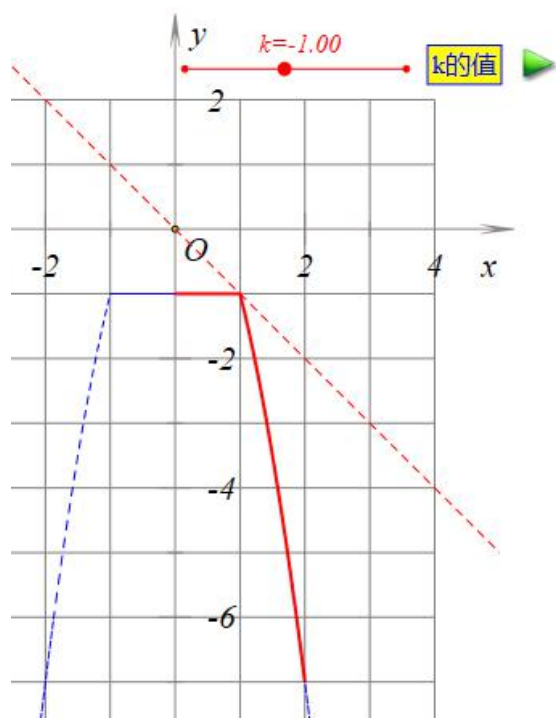


图 1.4.10

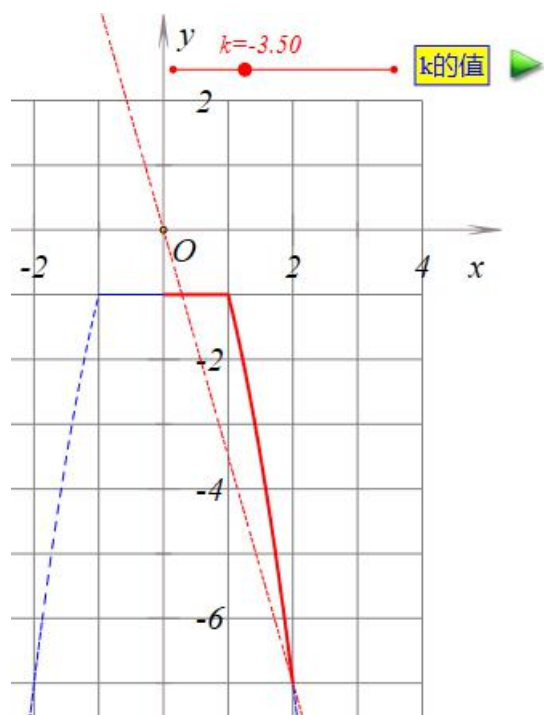


图 1.4.11

因此当 $-\frac{7}{2} < k < -1$ 时，函数 $g(x)$ 与 $h(x)$ 在 $(0,2)$ 上有两个交点，如图 1.4.12 所示.

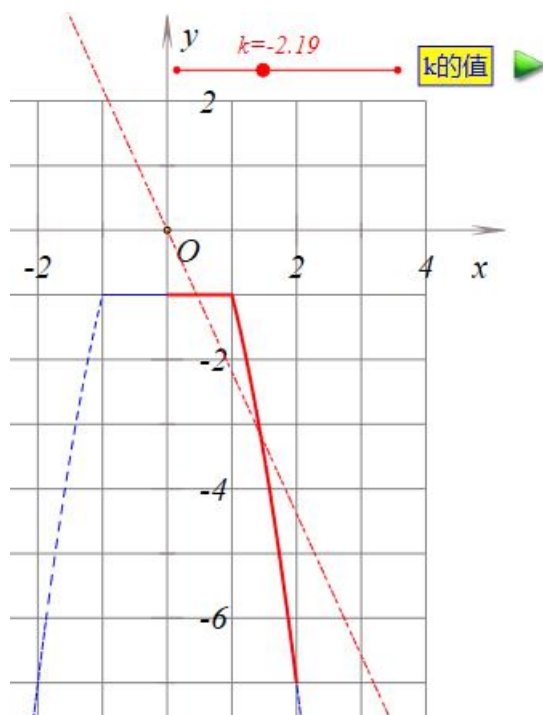


图 1.4.12

而当函数 $k \geq -1$ 或 $k \leq -\frac{7}{2}$ 时, $g(x)$ 与 $h(x)$ 在 $(0,2)$ 上少于两个交点, 如图 1.4.13、

图 1.4.14 所示.

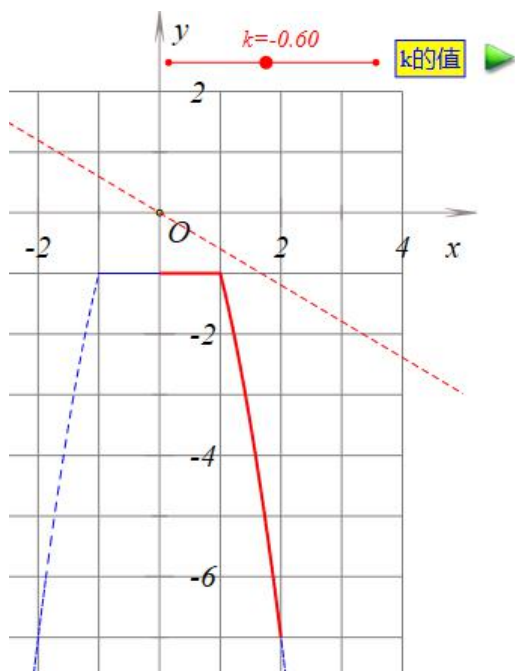


图 1.4.13

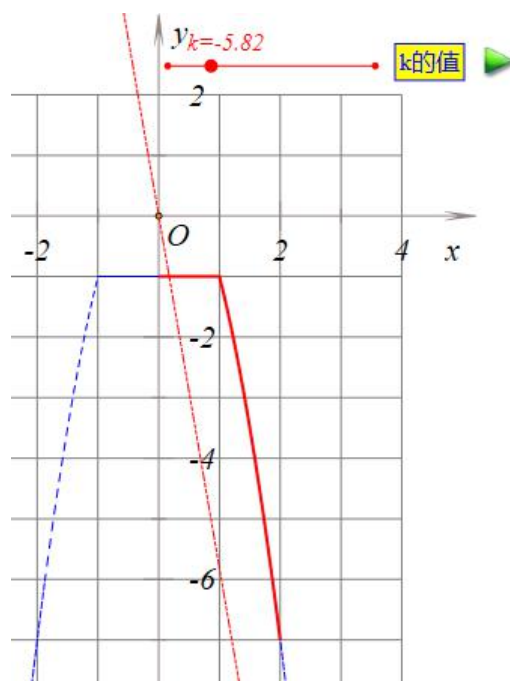


图 1.4.14

因为 $0 < x_1 \leq 1 < x_2 < 2$, 所以 $k = -\frac{1}{x_1}$, $2x_2^2 + kx_2 - 1 = 0$. 消去 k 得

$$2x_1x_2^2 - x_1 - x_2 = 0, \text{ 即 } \frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} = 2x_2, \text{ 因为 } x_2 < 2, \text{ 所以 } \frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} < 4.$$

【简要评注】

对于那些我们不容易绘制其图像的函数来说，在求函数零点的过程中，可以将该函数分解成为我们熟悉的、容易作图的两个初等函数．通过求这两个初等函数的交点得到题设中非初等函数的零点．

4. 两个函数图像的交点问题

例 4. 已知函数 $f(x) = -x^2 + 8x$ ， $g(x) = 6\ln x + m$ ．是否存在实数 m ，使得 $y = f(x)$ 的图象与 $y = g(x)$ 的图象有且只有三个不同的交点？若存在，求出 m 的取值范围；若不存在，说明理由．

【动感体验】

打开文件“1-4-例 4. dmr”，如图 1.4.15 所示，虚线为函数 $f(x) = -x^2 + 8x$ 的图象，实线为函数 $g(x) = 6\ln x + m$ 的图象．改变实数 m 的值，研究 $y = f(x)$ 的图象与 $y = g(x)$ 的图象的交点情况．

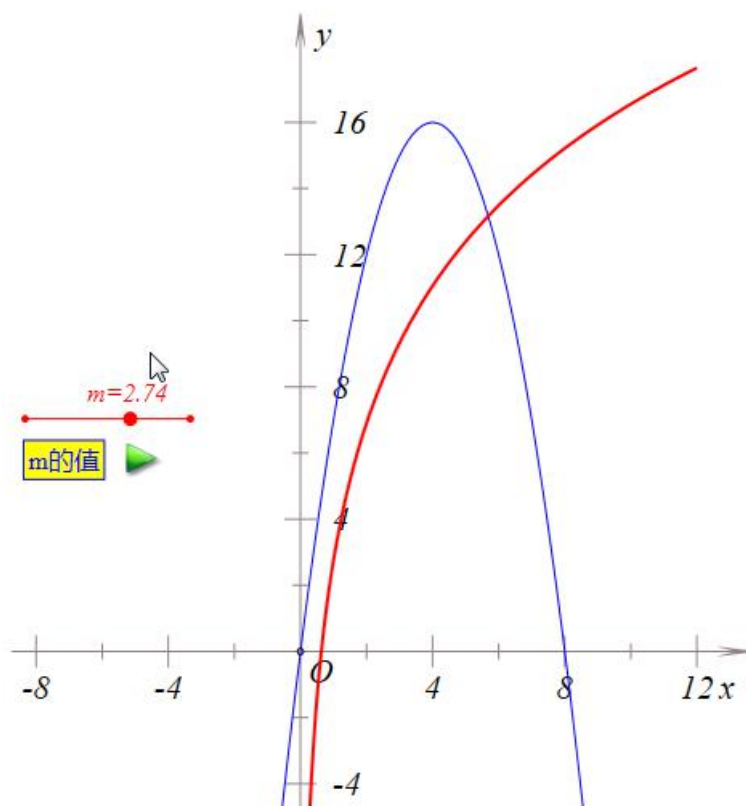


图 1.4.15

【思路点拨】

当两条曲线在某个位置相切时，此时为他们之间交点个数变化的临界位置．因此问题

转化为求两条曲线相切时实数 m 的值.

【动态解析】

$$f'(x) = -2x + 8, \quad g'(x) = \frac{6}{x}. \quad \text{由 } f'(x) = g'(x), \text{ 解得 } x = 1 \text{ 或者 } x = 3.$$

当 $x = 1$ 时, 由 $f(x)$ 与 $g(x)$ 相切, 如图 1.4.16 所示, 由 $f(1) = g(1)$, 解得 $m = 7$.

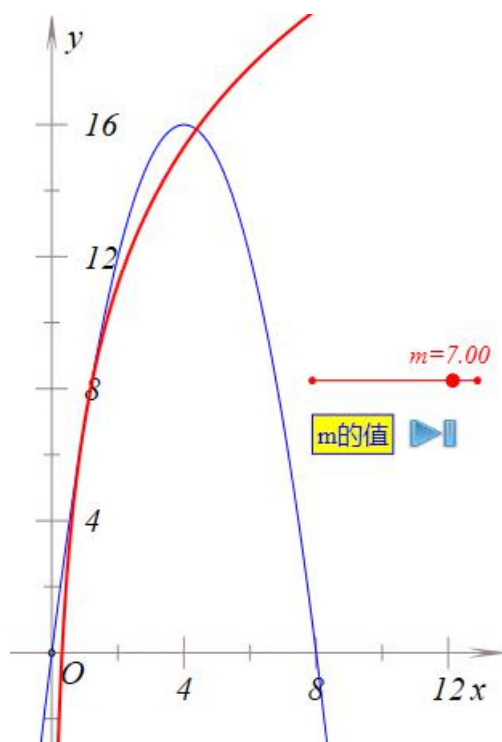


图 1.4.16

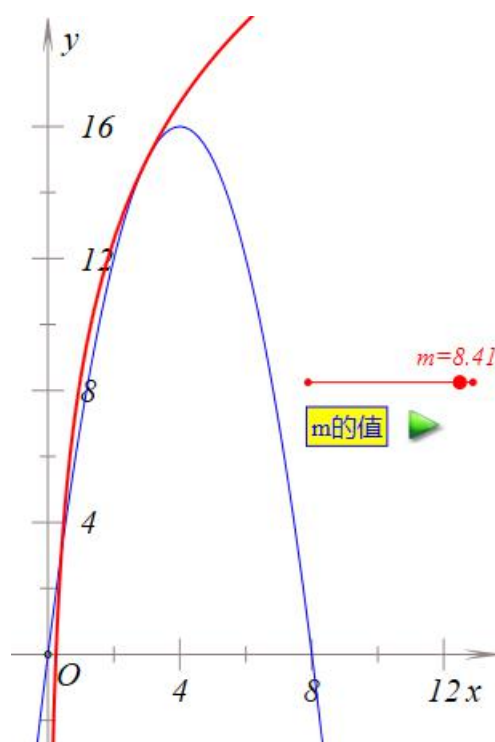


图 1.4.17

当 $x = 3$ 时, 由 $f(x)$ 与 $g(x)$ 相切, 如图 1.4.17 所示, 可知: $f(3) = g(3)$ 解得 $m = 15 - 6\ln 3$.

可知当 $7 < m < 15 - 6\ln 3$ 时, 函数 $f(x)$ 的图象与函数 $g(x)$ 的图象有三个交点, 如图 1.4.18 所示.

而当 $m = 7$ 或者 $m = 15 - 6\ln 3$ 时, $f(x)$ 的图象与函数 $g(x)$ 的图象有两个交点, 如图 1.4.16 和图 1.4.18 所示.

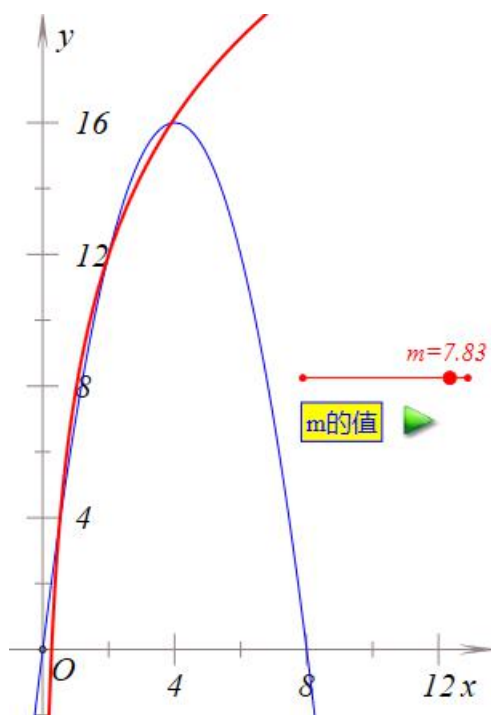


图 1.4.18

而当 $m < 7$ 或者 $m > 15 - 6\ln 3$ 时, $f(x)$ 的图象与函数 $g(x)$ 的图象有一个交点, 如图 1.4.19 和图 1.4.20 所示.

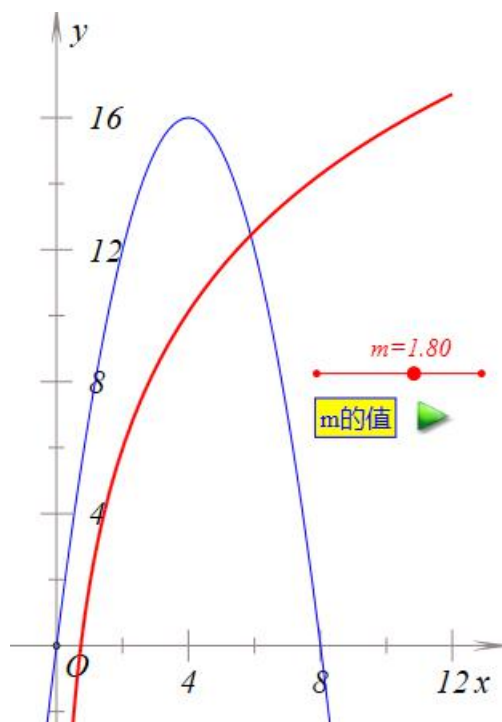


图 1.4.19

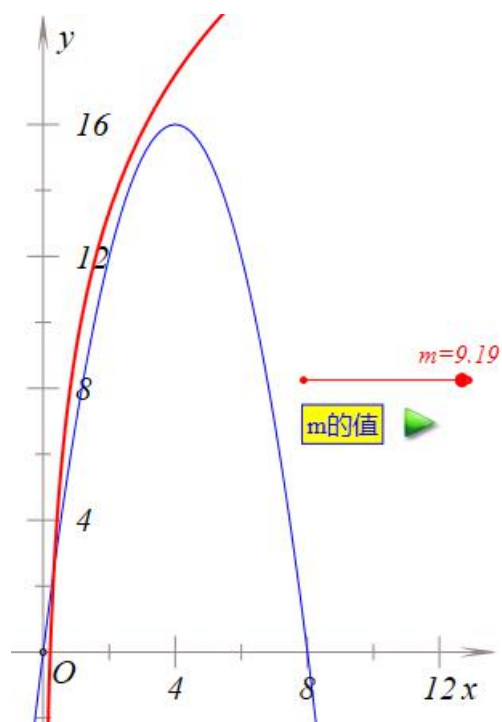


图 1.4.20

综上所述, 当 $7 < m < 15 - 6\ln 3$ 时 $f(x)$ 的图象与函数 $g(x)$ 的图象有三个交点.

【简要评注】

本题对作图的要求很高, 利用计算机可以帮助我们观察函数图象变化的过程以及两个函

数图象交点变化的规律,反过来帮助我们深刻理解对数函数和二次函数的性质以及它们之间的关系. 这就是我们在前言中所说的那句话: 用计算机是为了不用计算机.

5. 探索方程的根的个数

例 5. 关于 x 的方程 $(x^2 - 1)^2 - |x^2 - 1| + k = 0$, 给出下列四个命题:

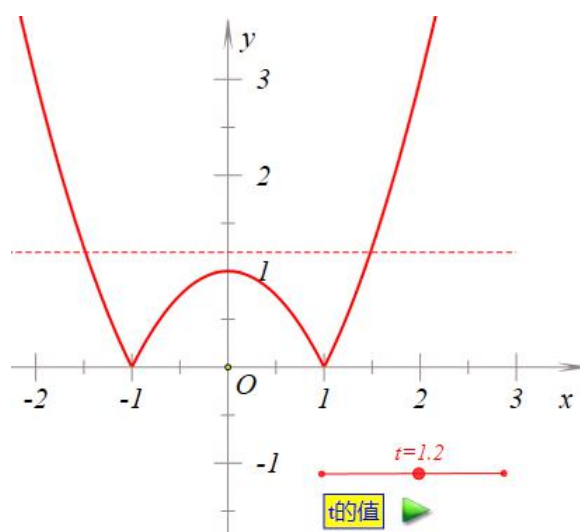
- ①存在实数 k , 使得方程恰有 2 个不同的实根;
- ②存在实数 k , 使得方程恰有 4 个不同的实根;
- ③存在实数 k , 使得方程恰有 5 个不同的实根;
- ④存在实数 k , 使得方程恰有 8 个不同的实根.

其中假命题的个数是 ()

- A. 0 B. 1 C. 2 D. 3

【动感体验】

设 $t = |x^2 - 1|$, 则 t 是方程 $x^2 - x + k = 0$ 的根. 探索 t 取不同的值时, 方程 $t = |x^2 - 1|$ 的解的情况. 打开文件 “1-4-例 5.dmr”, 如图 1.2.21 所示, 曲线为函数 $y = |x^2 - 1|$ 的图象, 水平直线对应的方程为 $y = t$, 拖动点 t 改变 t 的值, 观察两个图象交点的个数.



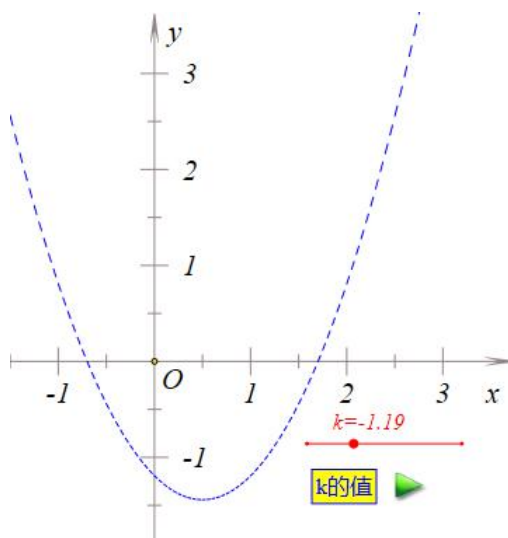


图 1.4.21

图 1.4.22

而 t 作为方程 $x^2 - x + k = 0$ 的根，又可以取哪些值呢？进入文件的第二页，如图 1.4.22 所示为函数 $y = x^2 - x + k$ 的图象，通过变量尺或者动画按钮改变实数 k 的值，观察图象与 x 轴交点的情况。

【思路点拨】

首先观察 $y = |x^2 - 1|$ 图象与 $y = t$ 图象的交点，研究当 t 取不同的值时方程 $t = |x^2 - 1|$ 的解的情况。然后通过方程 $x^2 - x + k = 0$ 研究 t 究竟可以取得哪些数值？从而确定方程 $(x^2 - 1)^2 - |x^2 - 1| + k = 0$ 的实根情况。

【动态解析】

容易知道，对于方程 $t = |x^2 - 1|$ 来说：

如图 1.4.23 所示，当 $t > 1$ 时，方程有 2 个实根；

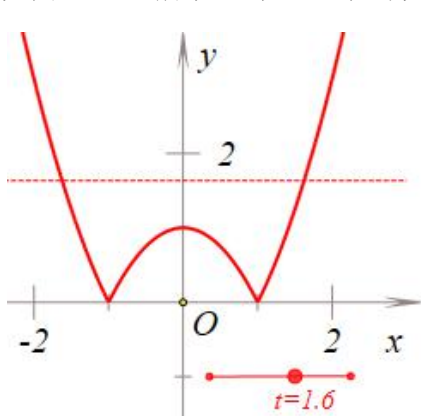


图 1.4.23

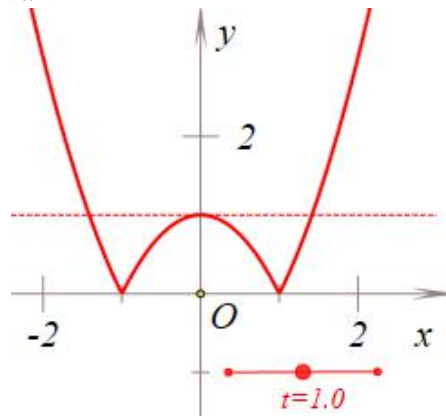


图 1.4.24

如图 1.4.24 所示，当 $t = 1$ 时，方程有 3 个实根；

如图 1.4.25 所示，当 $0 < t < 1$ 时，方程有 4 个实根；

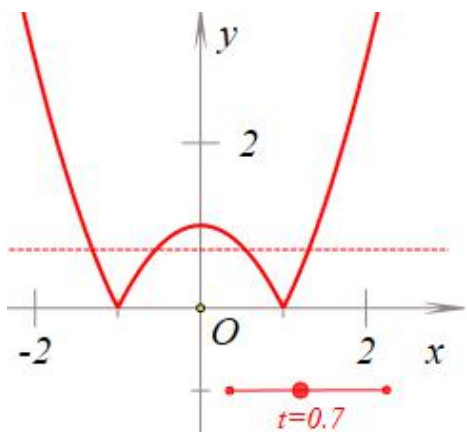


图 1.4.25

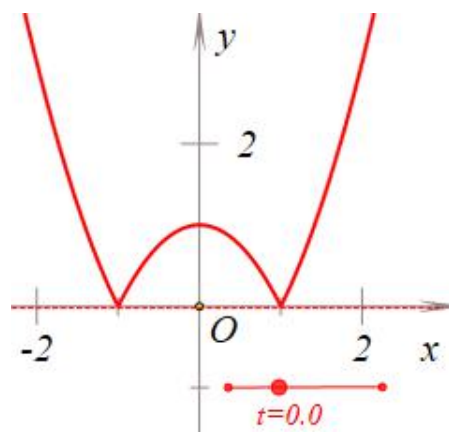


图 1.4.26

如图 1.4.26 所示，当 $t = 0$ 时，方程有 2 个实根；

如图 1.4.27 所示，当 $t < 0$ ，方程没有实根。

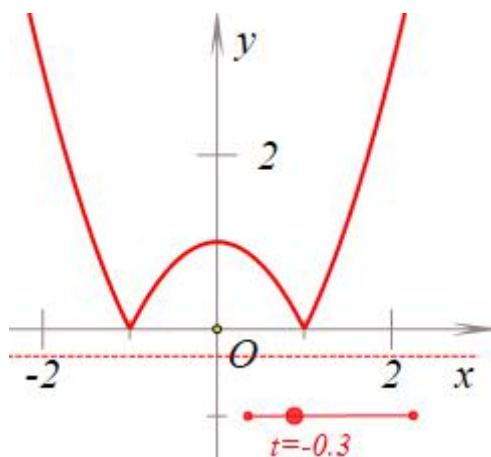


图 1.4.27

而对于函数 $y = x^2 - x + k$ 来说（注意到它的对称轴为 $x = \frac{1}{2}$ ）：

当 $\Delta < 0$ 时，没有实根，如图 1.4.28 所示，这时对应 $(x^2 - 1)^2 - |x^2 - 1| + k = 0$ 没有实根；

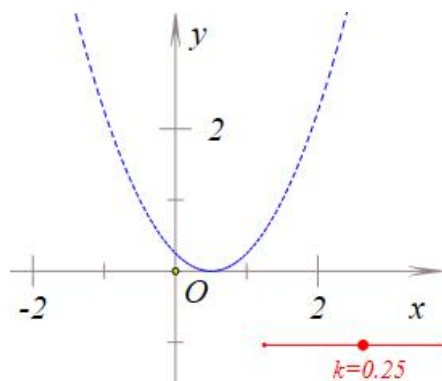
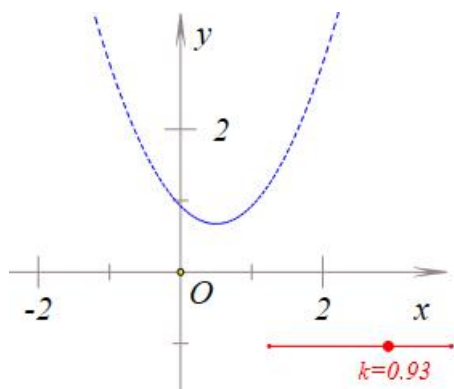


图 1.4.28

图 1.4.29

当 $\Delta=0$ 时, 有两个相等实根: $t_1=t_2=\frac{1}{2}$, 如图 1.4.29 所示, 对照图 1.4.25 这时方

程 $(x^2-1)^2-|x^2-1|+k=0$ 有 4 个实根;

当 $\Delta>0$ 时, 若两实根满足 $0<t_1<t_2<1$, 如图 1.4.30 所示, 对照图 1.4.25 这时方程

$(x^2-1)^2-|x^2-1|+k=0$ 有 8 个实根;

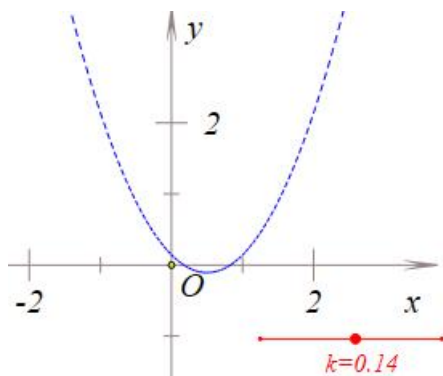


图 1.4.30

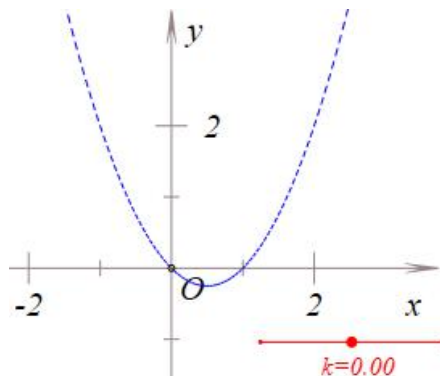


图 1.4.31

当 $\Delta>0$ 时, 若两实根满足 $0=t_1<t_2=1$, 如图 1.4.31 所示, 对照图 1.4.24 和图 1.4.26

这时方程 $(x^2-1)^2-|x^2-1|+k=0$ 有 5 个实根;

当 $\Delta>0$ 时, 若两实根满足 $t_1<0<1<t_2$, 如图 1.4.32 所示, 对照图 1.4.23 和图 1.4.27

这时方程 $(x^2-1)^2-|x^2-1|+k=0$ 有 2 个实根.

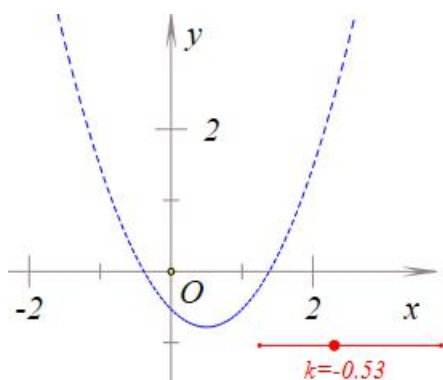


图 1.4.32

因此选择 A.

我们还是看看庐山真面目吧. 进入文件的第三页, 曲线表示函数 $y=(x^2-1)^2-|x^2-1|+k$ 的图像, 通过变量尺改变实数 k 的值或通过按钮设置 k 的值, 如

图 1.4.33-1.4.37 所示，为其中的几种情形.

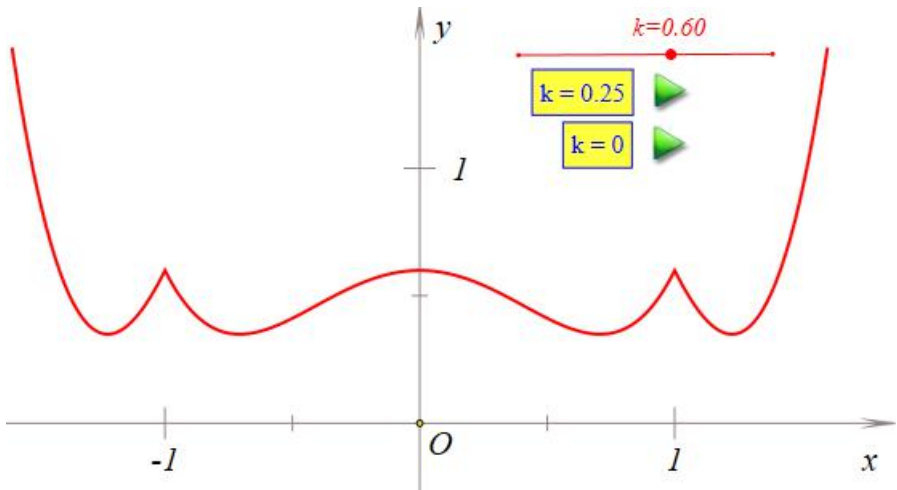


图 1.4.33

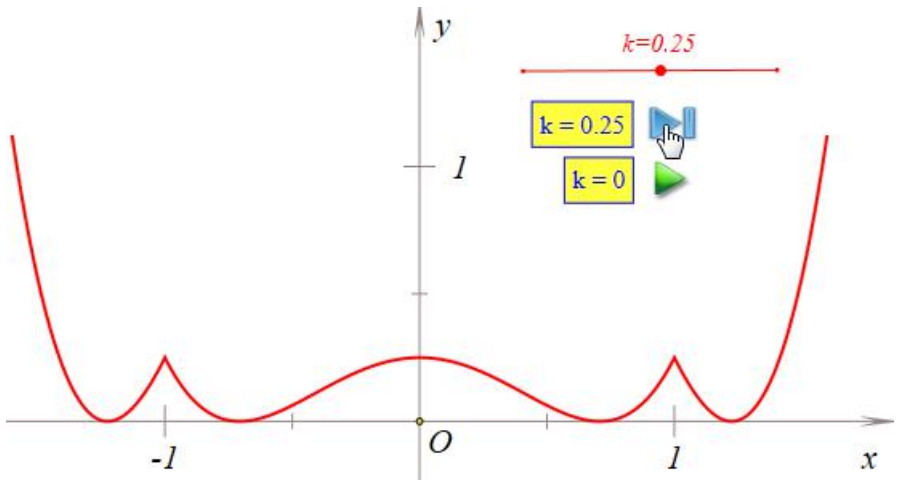


图 1.4.34

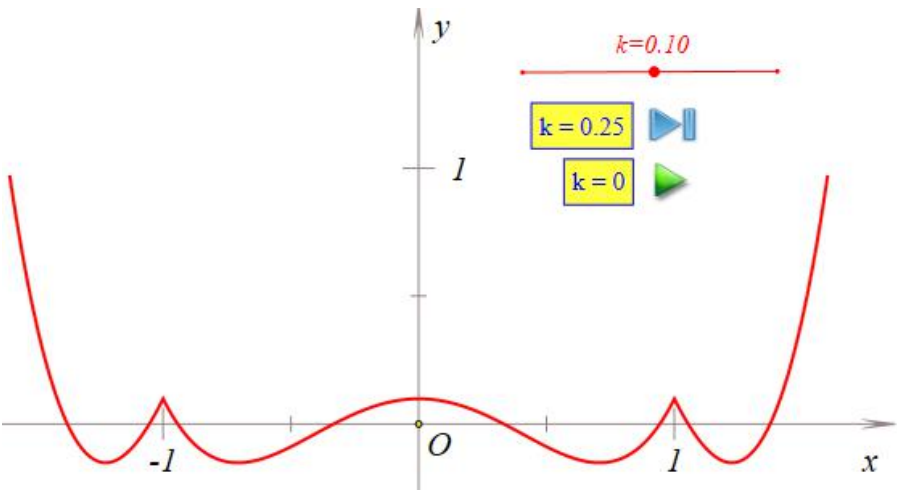


图 1.4.35

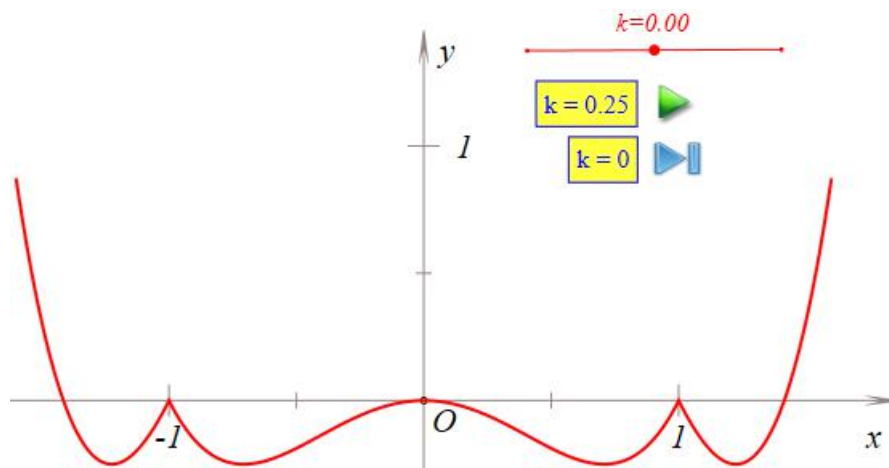


图 1.4.36

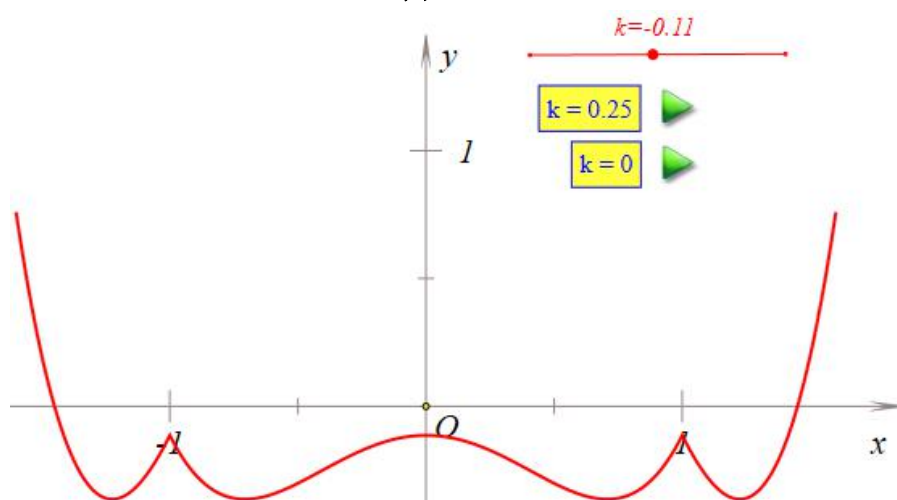


图 1.4.37

【简要评注】

设 $t = |x^2 - 1|$ ，则关于 x 的方程 $(x^2 - 1)^2 - |x^2 - 1| + k = 0$ 化为 $t^2 - t + k = 0$. 若此二次方程有两实数根 t_1, t_2 ，则 $t_1 + t_2 = 1$ ，可根据 $y = t_{1,2}$ 与 $y = |x^2 - 1|$ 图象交点的个数判断方程 $(x^2 - 1)^2 - |x^2 - 1| + k = 0$ 的个数. 例如， $t_1 = 0, t_2 = 1$ 方程恰有 5 个不同的实数根；当 $t_1 = t_2 = \frac{1}{2}$ 时方程恰有 4 个根；当 $t_1 = \frac{1}{4}, t_2 = \frac{3}{4}$ 时方程有 8 个根；当 $t_1 = 2, t_2 = -1$ 时方程恰有 2 个根.

6. 参数与方程的零点个数

例 6. 设定义域为 R 的函数 $f(x) = \begin{cases} |\lg |x - 1||, & x \neq 1 \\ 0, & x = 1 \end{cases}$ ，则关于 x 的方程

$f^2(x) + bf(x) + c = 0$ 有 7 个不同实数解的充要条件是 ().

- A. $b < 0$ 且 $c > 0$ B. $b > 0$ 且 $c < 0$
C. $b < 0$ 且 $c = 0$ D. $b \geq 0$ 且 $c = 0$

【动感体验】

设 $t = f(x)$, 则 t 是方程 $x^2 + bx + c = 0$ 的根. 探索 t 取不同的值时, 关于 x 的方程 $t = f(x)$ 解的情况. 打开文件 “1-4-例 6.dmr”, 如图 1.4.38 所示, 曲线为函数 $y = |\lg|x-1||$ 的图象, 水平直线对应的方程为 $y = t$, 拖动点 t 改变 t 的值或通过按钮设置 t 的值, 观察两个函数图象交点的个数.

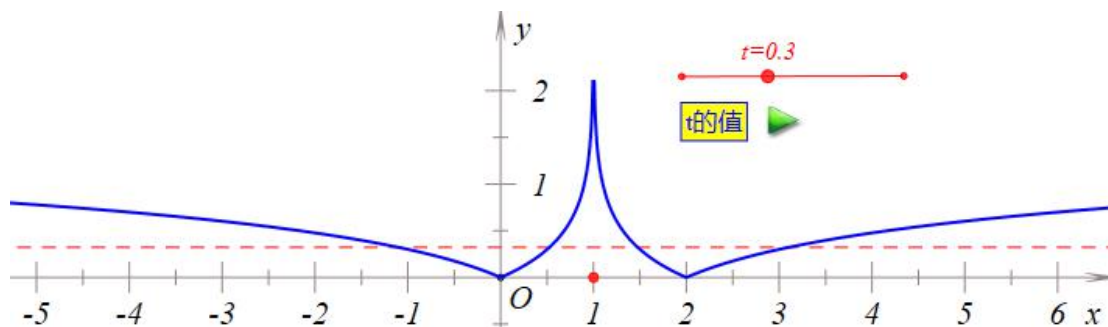


图 1

当关于 x 的方程 $f^2(x) + bf(x) + c = 0$ 有 7 个不同实数解时, 研究 t 所应满足的条件.

【思路点拨】

首先观察 $t = f(x)$ 图象与 $y = t$ 图象的交点, 研究当 t 取不同的值时方程 $t = f(x)$ 解的情况. 然后通过方程 $x^2 + bx + c = 0$ 的解的情况, 研究 t 的取值范围, 从而确定方程 $t^2 + bt + c = 0$ 的系数 b 、 c 应满足的条件.

【动态解析】

容易知道: 对于方程 $t = f(x)$ 来说:

如图 1.4.39 所示, 当 $t > 0$ 时, 方程有 4 个实根;

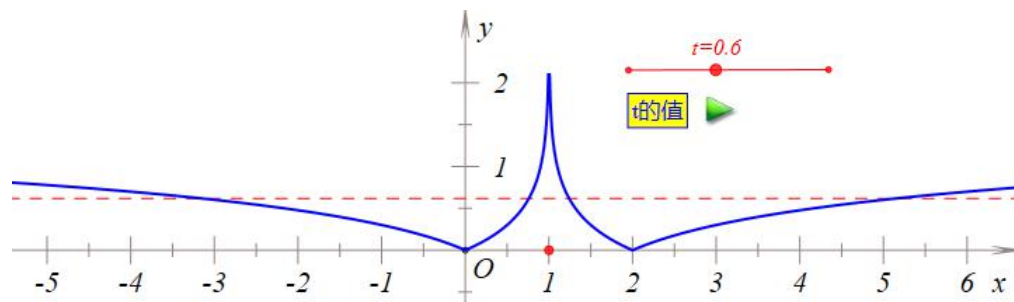


图 1.4.39

如图 1.4.40 所示, 当 $t = 0$ 时, 方程有 3 个实根;

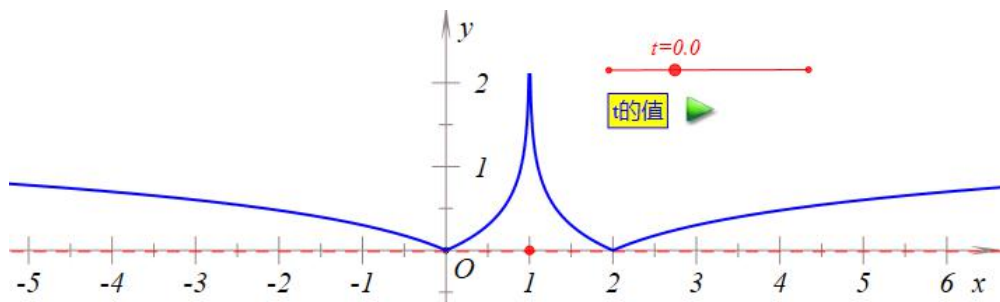


图 1.4.40

如图 1.4.41 所示, 当 $t < 0$ 时, 方程没有实根;

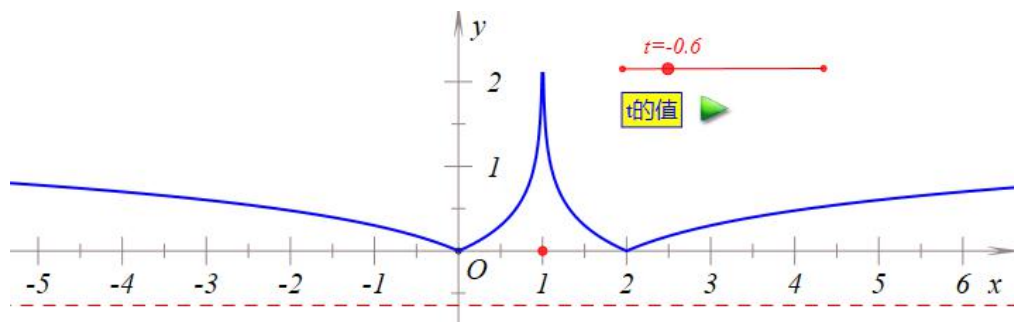


图 1.4.41

若关于 x 的方程 $f^2(x) + bf(x) + c = 0$ 有 7 个实根, 则需要关于 t 的方程 $t^2 + bt + c = 0$

有两个实根 t_1 、 t_2 , 并且 $t_1 > 0$ 、 $t_2 = 0$.

由 $t_2 = 0$ 得到 $c = 0$, 则方程 $t^2 + bt + c = 0$ 化简为 $t(t + b) = 0$, 则由 $t_1 = -b > 0$ 得 $b < 0$.

因此选择 C.

【简要评注】

设 $t = f(x)$, 则 t 是方程 $x^2 + bx + c = 0$ 的根. 若答案 A 成立, 即 $b < 0$ 且 $c > 0$ 时, 此方程或无实根, 或有两个正根(可以相同), 显然不符合条件; 若答案 B 成立, 即 $b > 0$ 且 $c < 0$ 时, 此方程有以一正根一负根, 显然也不符合条件; 若答案 C 成立, 即 $b < 0$ 且 $c = 0$ 时, 此方程有以一正根一零根, 观察 $t = f(x)$ 图象与 $y = t$ 图象的交点, 知此时刚好有 7 个交点;

若答案 D 成立, 即 $b \geq 0$ 且 $c = 0$ 时, 此方程有两零根或一零根一负根, 显然也不符合条件.

通过函数的性质掌握函数图像的特点, 对解题大有帮助. 对于复合函数来说, 往往需要通过换元将问题分解, 需要注意的是函数换元后中间变量的取值范围.

本节小结

方程的根或者函数的零点问题, 本质上是两个函数图像交点的横坐标问题. 函数图像能够帮助我们直观地分析交点的个数和大致位置, 计算机能够准确地画出一般函数的图像, 有助于我们研究和理解函数图像的交点问题. 然而, 在没有计算机帮助的情况下, 也能够准确

地画出函数的大致图像是解决问题的关键. 对于图像较为复杂的函数来说, 通过函数表达式透彻研究函数的各种性质, 有助于我们在绘制函数的大致图像时不会出现较大偏差.

拓展练习

4.1. 设 $a = \log_{\frac{1}{2}} 3$, $b = \left(\frac{1}{3}\right)^{0.2}$, $c = 2^{\frac{1}{3}}$, 则 ()

- A. $a < b < c$ B. $c < b < a$
C. $c < a < b$ D. $b < a < c$

4.2. 已知 $f(x)$ 是二次函数, 不等式 $f(x) < 0$ 的解集是 $(0, 5)$, 且 $f(x)$ 在区间 $[-1, 4]$ 上的最大值是 12.

(1) 求 $f(x)$ 的解析式;

(2) 是否存在自然数 m , 使得方程 $f(x) + \frac{37}{x} = 0$ 在区间 $(m, m+1)$ 内有且只有两个不等的实数根? 若存在, 求出 m 的取值范围; 若不存在, 说明理由.

第五节 函数的性质与参数的取值范围

1. 不等式在指定区间上恒成立

例 1. 若不等式 $x^2 + ax + 1 \geq 0$ 对于一切 $x \in (0, \frac{1}{2})$ 成立, 求实数 a 的最小值.

【动感体验】

打开文件“1-5-例 1. dmr”, 实线为函数 $f(x) = x^2 + ax + 1$ 在区间 $(0, \frac{1}{2})$ 上的图象, 通过变量尺可以改变实数 a 的值或通过按钮设置 a 的值, 图 1.5.1—1.5.5 为其中的几种情形.

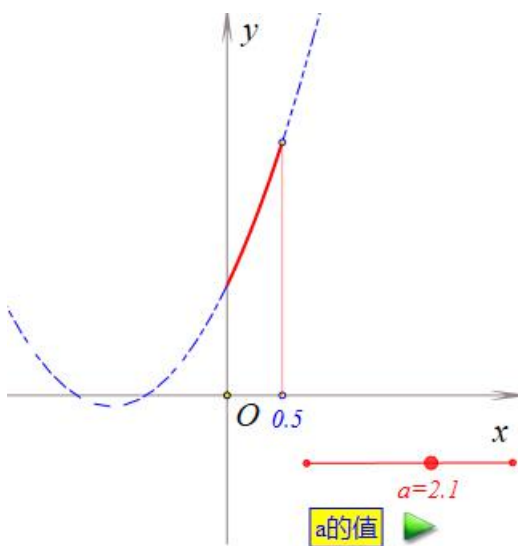


图 1.5.1

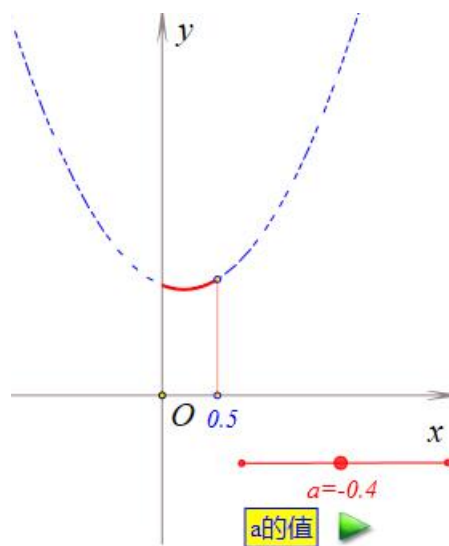


图 1.5.2

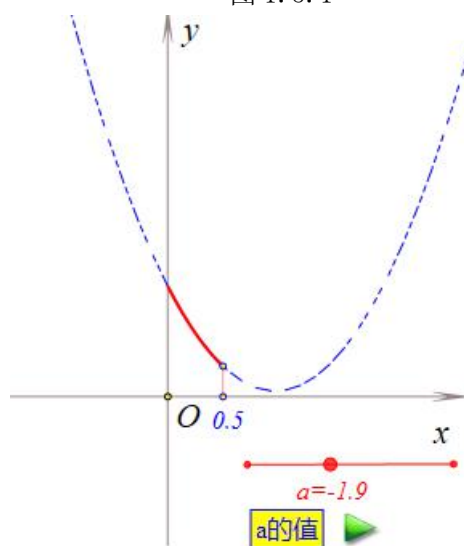


图 1.5.3

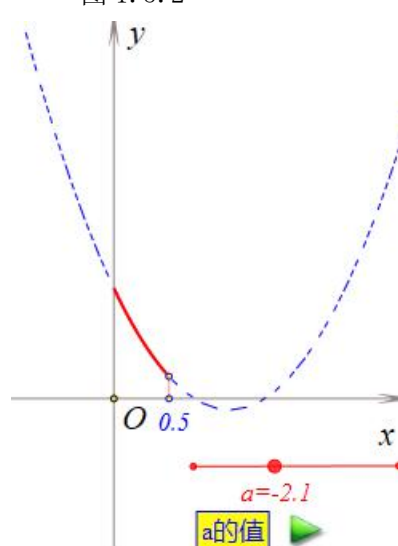


图 1.5.4

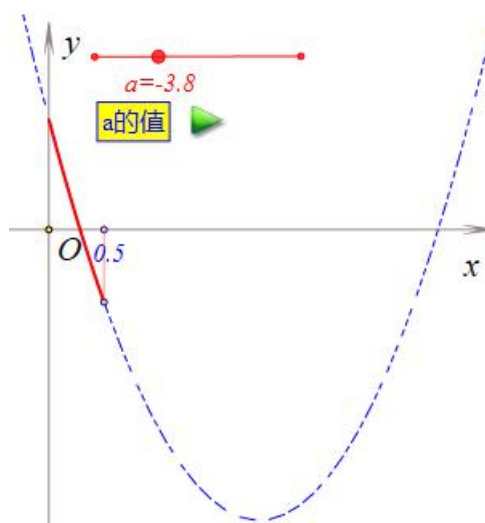


图 1.5.5

【思路点拨】

考虑函数的连续性以及条件成立的临界情况.

【动态解析】

因为抛物线 $y = f(x)$ 的开口向上, 并且 $f(0) = 1 > 0$, 所以, 当对称轴 $x = -\frac{a}{2} \leq 0$,

即 $a \geq 0$ 时, 在区间 $(0, \frac{1}{2})$ 上 $f(x) \geq 0$ 显然成立.

当对称轴 $x = -\frac{a}{2} > 0$, 即 $a < 0$ 时: 若 $\Delta = a^2 - 4 \leq 0$, 即 $-2 \leq a < 0$, 如图 1.5.2、

图 1.5.3 所示, 显然在区间 $(0, \frac{1}{2})$ 上 $f(x) \geq 0$ 成立; 若 $\Delta = a^2 - 4 > 0$, 即 $a < -2$, 如图

1.5.4、图 1.5.5 所示, 因为这时对应的函数对称轴 $x = -\frac{a}{2} > 1$, 即 $f(x)$ 在区间 $(0, \frac{1}{2})$ 上

单调递减, 所以只需要 $f(\frac{1}{2}) \geq 0$, 即 $\frac{1}{4} + \frac{a}{2} + 1 \geq 0$, 解得 $a \geq -\frac{5}{2}$.

综上所述, a 的取值范围是 $a \geq -\frac{5}{2}$. 所以 a 的最小值为 $-\frac{5}{2}$.

【简要评注】

讨论不等式恒成立时求参数的取值范围问题, 一般来说比较复杂, 需要认真考虑分类的原则. 仔细研究原函数的本身的特点以及参数在函数表达式中的特征, 就可以找到参数分类讨论的依据.

2. 探索不等式恒成立的变量范围

例 2. 已知函数 $f(x) = x^3 - 9x^2 + 24x$, 若对任意的 $m \in [-26, 6]$, 恒有 $f(x) \geq x^3 - mx - 11$, 求 x 的取值范围.

【动感体验】

由 $f(x) \geq x^3 - mx - 11$ 得 $9x^2 - 24x - 11 \leq mx$, 设 $h(x) = 9x^2 - 24x - 11$, $k(x) = mx$.

打开文件“1-5-例 2. dmr”, 点 A 和点 B 是曲线 $h(x)$ 和直线 $k(x)$ 的交点, 那么在区间 $[x_A, x_B]$

上满足 $h(x) \leq k(x)$. 通过变量尺改变实数 m 的值或通过按钮设置 m 的值, 观察 m 对 x_A 和

x_B 的影响. 如图 1.5.6—1.5.8 为其中的几种情形.

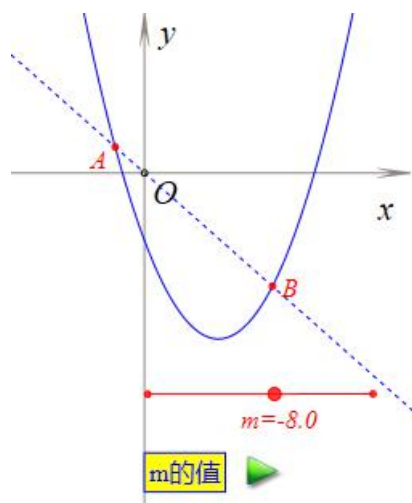


图 1.5.6

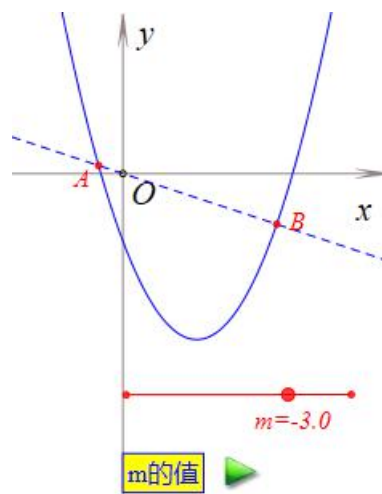


图 1.5.7

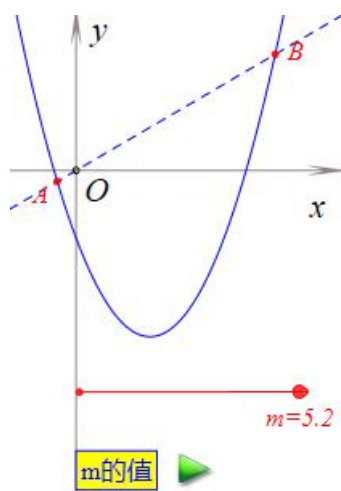


图 1.5.8

【思路点拨】

求 x_A 的最大值和求 x_B 的最小值.

【动态解析】

容易知道, 当 m 最大时, x_A 最大, 由
$$\begin{cases} y = 9x^2 - 24x - 11 \\ y = 6x \end{cases} \quad \text{解得 } x = -\frac{1}{3} \text{ 或 } x = \frac{11}{3} \text{ (舍去);}$$
 当 m 最小时, x_B 最小, 由
$$\begin{cases} y = 9x^2 - 24x - 11 \\ y = -26x \end{cases} \quad \text{解得 } x = -1 \text{ (舍去) 或 } x = \frac{11}{9}.$$

所以当 $x \in [-\frac{1}{3}, \frac{11}{9}]$ 时, 对于任意的 $m \in [-26, 6]$, 恒有 $f(x) \geq x^3 - mx - 11$ 成立.

进入文件“1-5-例 2. dmr”的第二页, 单击动画按钮, 如图 1.5.9 所示, 直线 $y = mx$ 下方点 A 和点 B 没有经过的区域即为 x 的取值范围.

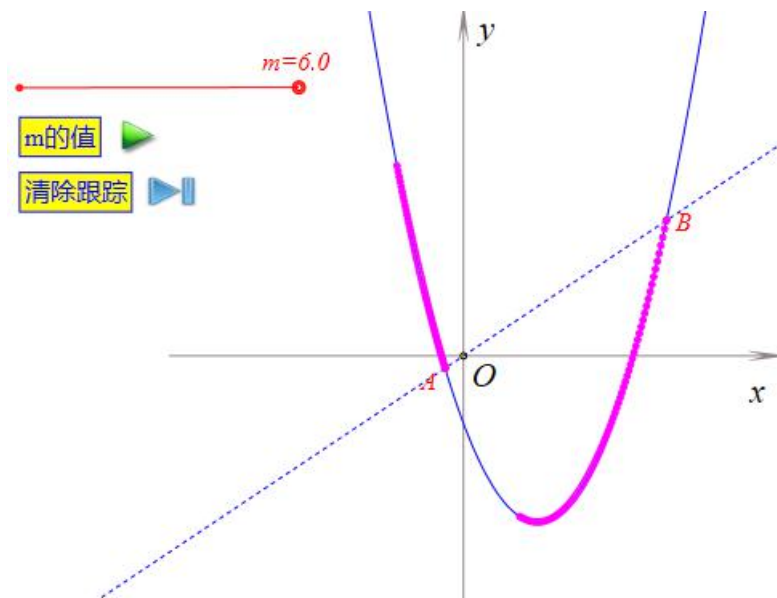


图 1.5.9

【简要评注】

本题中, 若分离常数, 则必须对 x 分别求解. 但当我们分别观察两个函数图像时, 由于 $h(x)$ 是确定的. 只要研究 m 的变化对 $k(x)$ 及两个函数图像交点的影响, 便能抓住解决问题的关键和本质.

3. 探索参数对两函数性质的影响

例 3. 已知函数 $f(x) = 2mx^2 - 2(4-m)x + 1$, $g(x) = mx$, 若对于任一实数 x , $f(x)$ 与 $g(x)$ 的值至少有一个为正数, 求实数 m 的取值范围.

【动感体验】

打开文件“1-5-例 3. dmr”, 如图 1.5.10 所示, 曲线为函数 $y = f(x)$ 的图像, 直线为函数 $y = g(x)$ 的图像, 通过变量尺改变实数 m 的值或通过按钮设置 m 的值, 研究当 $f(x)$

与 $g(x)$ 的值至少有一个为正数时，实数 m 应满足的条件.

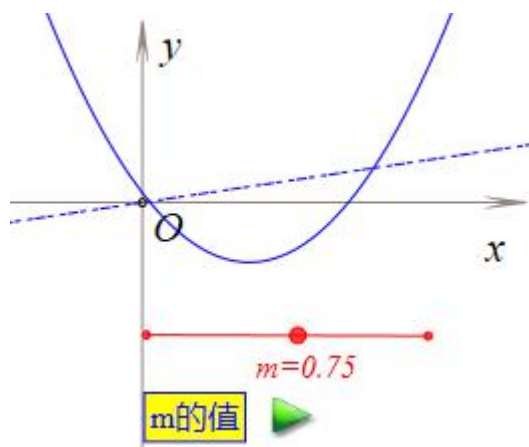


图 1.5.10

【思路点拨】

从函数 $g(x) = mx$ 的图像入手，分别对 $m < 0$ 、 $m = 0$ 和 $m > 0$ 的情况进行分类讨论.

请注意抛物线始终经过点 $(0, 1)$.

【动态解析】

(1) 当 $m < 0$ 时，如图 1.5.11 所示，这时不满足题设的条件.

(2) 当 $m = 0$ 时， $f(x) = -8x + 1$ ， $g(x) = 0$ ，如图 1.5.12 所示，这时不满足题设条件.

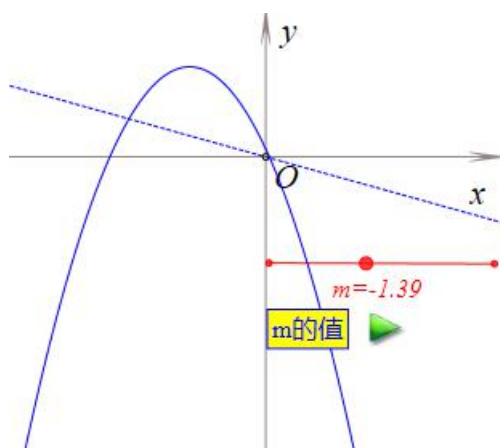


图 1.5.11

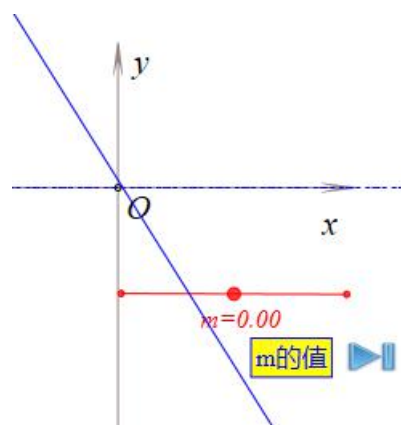


图 1.5.12

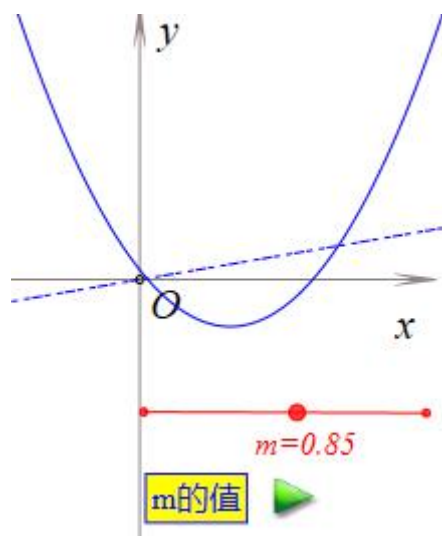


图 1.5.13

(3) 当 $m > 0$ 时, 若抛物线 $y = f(x)$ 的对称轴在 y 轴右侧, 即 $x = \frac{4-m}{2m} > 0$, 如图

1.5.13 所示, 则 $f(x)$ 与 $g(x)$ 的值至少有一个为正数. 由 $\begin{cases} m > 0 \\ \frac{4-m}{2m} > 0 \end{cases}$ 解得: $0 < m < 4$.

当 $m > 0$ 时, 若抛物线 $y = f(x)$ 的对称轴在 y 轴左侧, 即 $x = \frac{4-m}{2m} < 0$, 分两种情

况: 抛物线 $y = f(x)$ 与 x 轴没有交点和有交点. 当抛物线 $y = f(x)$ 与 x 轴没有交点时, 如

图 1.5.14 所示, $f(x)$ 与 $g(x)$ 的值至少有一个为正数; 当抛物线 $y = f(x)$ 与 x 轴没有交

点时, 如图 1.5.15 所示, 这时不满足题设条件. 因此由 $\begin{cases} m > 0, \\ 4(4-m)^2 - 4 \cdot 2m < 0, \\ \frac{4-m}{2m} < 0, \end{cases}$ 解得:

$4 < m < 8$.

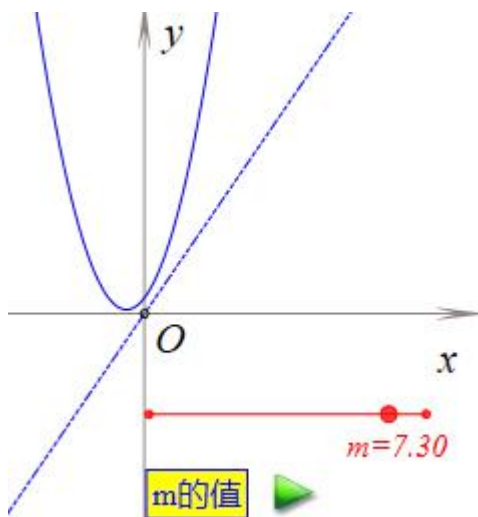


图 1.5.14

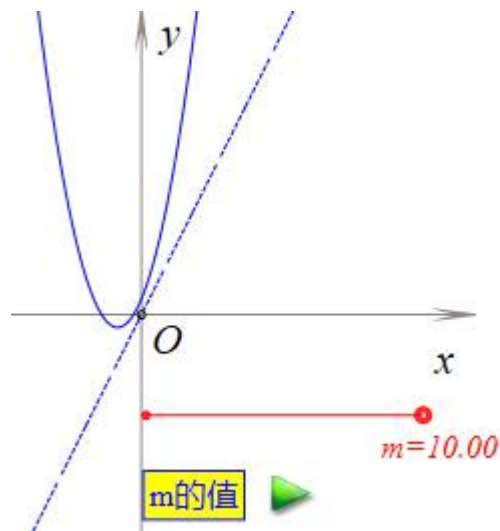


图 1.5.15

当 $m > 0$ 时，若抛物线 $y = f(x)$ 的对称轴为 y 轴时，即 $x = \frac{4-m}{2m} > 0$ ，解得 $m = 4$ ，

如图 1.5.16 所示，此时 $f(x)$ 与 $g(x)$ 的值至少有一个正数。

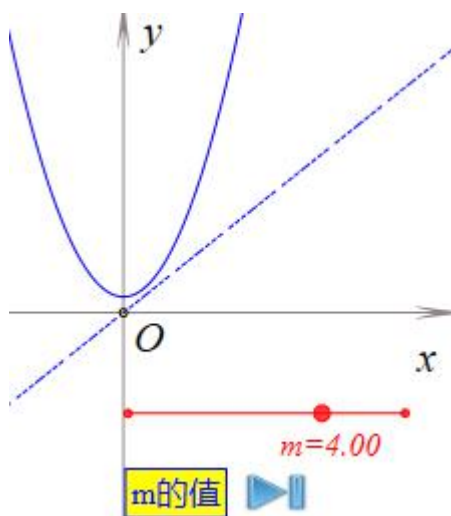


图 1.5.16

综上所述，若对于任一实数 x ， $f(x)$ 与 $g(x)$ 的值至少有一个为正数，则实数 m 的取值范围是： $0 < m < 8$ 。

换一种角度，我们可以通过以下分类方式进行讨论：

当抛物线 $y = f(x)$ 的开口向下时，无论 m 取任何数值都不可能满足条件。

当抛物线 $y = f(x)$ 的开口向上且判别式小于零时，即 $4(4-m)^2 - 4 \cdot 2m < 0$ ，一定满足题设条件，解得： $2 < m < 8$ 。

当抛物线 $y = f(x)$ 的开口向上且判别式不小于零时，若抛物线的对称轴 $x = \frac{4-m}{2m} < 0$ ，

也一定满足题设条件，解得： $0 < m < 4$ 。

综上所述，实数 m 的解集为： $0 < m < 8$ 。

【简要评注】

首先要弄清楚“若对于任一实数 x ， $f(x)$ 与 $g(x)$ 的值至少有一个为正数”是什么意思？当实数 m 变化时，两个函数的性质都在改变，那么首先可以分别对他们进行研究。例如在本题中，从函数 $g(x) = mx$ 的图像入手，分别对 $m < 0$ 和 $m > 0$ 的情况进行分类讨论问题，则 $g(x)$ 的图像必有一半在 x 轴下方，而另一半在 x 轴上方。当 $g(x)$ 的一半在 x 轴下方时，就要求 $f(x)$ 的图像在 x 轴的上方，这就缩小了讨论的范围，而且问题也变得更加清晰，并最终转化为 $f(x)$ 的判断问题。

本节小结

在含有参数的不等式恒成立问题中，弄清楚参数与函数自变量是问题解决的关键，弄清楚参数的变化或者变量的范围对不等式两边表达式的影响是解答问题的切入点。

拓展练习

5.1. 已知函数 $f(x) = 2^x - \frac{1}{2^{|x|}}$ 。

(1) 若 $f(x) = 2$ ，求 x 的值；

(2) 若 $2^t f(2t) + mf(t) \geq 0$ 对于 $t \in [1, 2]$ 恒成立，求实数 m 的取值范围。

5.2. 已知函数 $f(x) = 2x^2 + (4 - m)x + 4 - m$ ， $g(x) = mx$ ，若对于任一实数 x ， $f(x)$

与 $g(x)$ 的值至少有一个为正数，求实数 m 的取值范围。

第二章 三角函数

三角函数是基本初等函数,是描述周期现象的重要数学模型,是周期函数的典型和代表,有非常广泛的应用背景.近几年来,对三角函数的考查主要在其图像与性质两方面的内容.利用数形结合能够帮助我们快速有效地获得三角函数的性质,从而获得解题的清晰思路.因此能够准确、迅速地绘制三角函数的大致图像是非常重要的,而这需要对基本三角函数的概念和性质有深刻的认识和理解.

第一节 三角函数图像的性质和变换

1. 正弦函数的图像性质

例 1. 函数 $f(x) = 3\sin\left(2x - \frac{\pi}{3}\right)$ 的图象为 C , 如下结论中正确的是_____ (写出所有正确结论的编号).

①图象 C 关于直线 $x = \frac{11}{12}\pi$ 对称;

②图象 C 关于点 $\left(\frac{2\pi}{3}, 0\right)$ 对称;

③函数 $f(x)$ 在区间 $\left(-\frac{\pi}{12}, \frac{5\pi}{12}\right)$ 内是增函数;

④由 $y = 3\sin 2x$ 的图像向右平移 $\frac{\pi}{3}$ 个单位长度可以得到图象 C .

方法一:

【动感体验】

打开文件“2-1-例 1. dmr”, 如图 2.1.1 所示, 是我们所熟悉的函数 $y = 3\sin x$ 的图像, 请你分别说出它的对称轴、对称中心和递增区间.

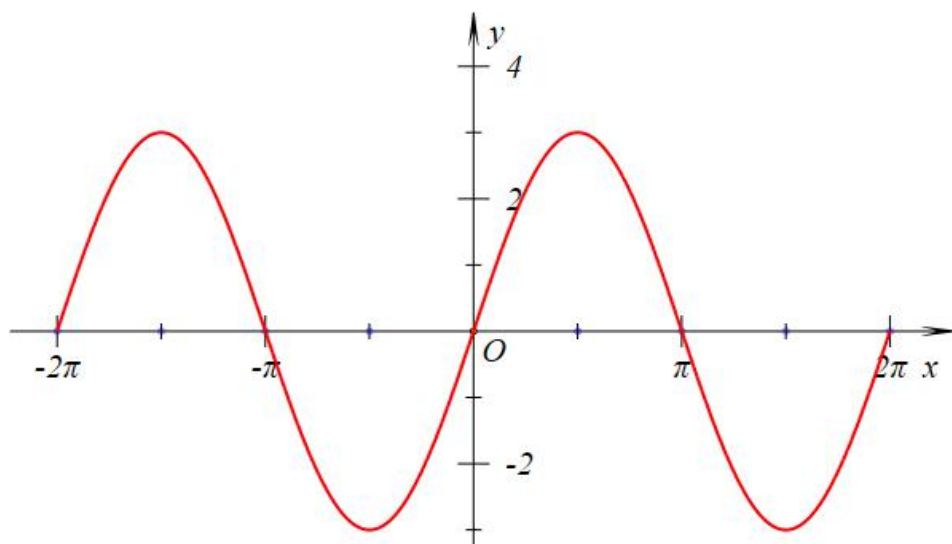


图 2.1.1

进入文件“2-1-例 1. dmr”的第二页，如图 2.1.2 所示，实细线为函数 $y = 3\sin 2x$ 的

图像，实粗线为函数 $y = 3\sin(2x - \frac{\pi}{3})$ 的图像，左边显示的是虚细线的方程，通过变量尺

可以改变 k 的值或通过按钮设置 k 的值，从而实现使得虚线在水平方向上移动。通过曲线的位置和它的表达式，判断结论③的正确性。

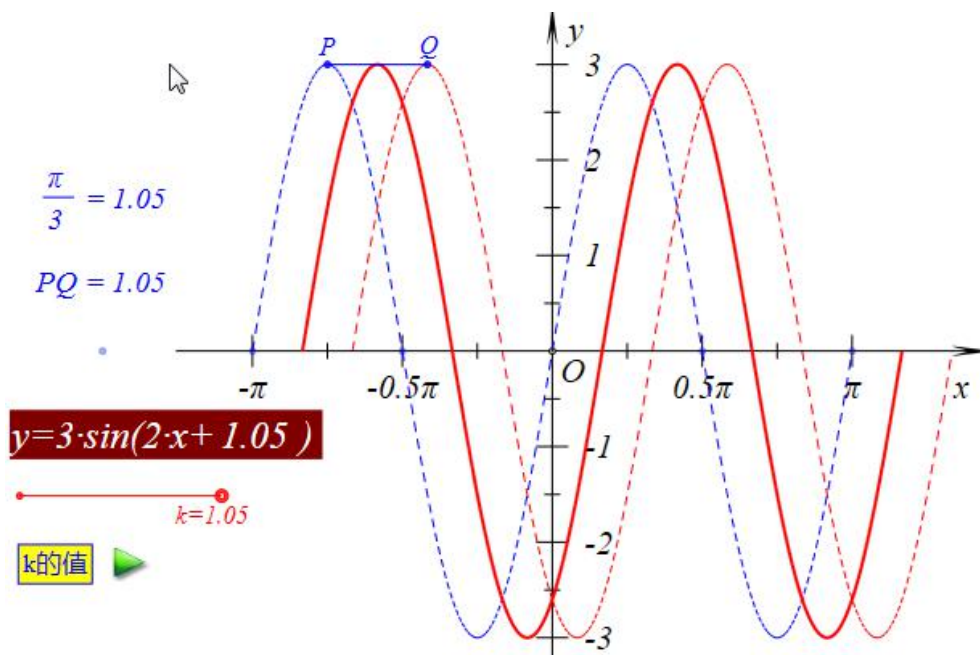


图 2.1.2

【思路点拨】

函数 $y = 3\sin(2x - \frac{\pi}{3})$ 是函数 $g(x) = 3\sin x$ 与函数 $h(x) = 2x - \frac{\pi}{3}$ 的复合函数，即

$f(x) = g(h(x))$ ，那么函数 $y = g(x)$ 中自变量 x 的性质，就对应于 $h(x)$ 中值域的性质。依

次可以快速、准确推导函数 $y = 3\sin(2x - \frac{\pi}{3})$ 的性质.

【动态解析】

根据图 2.1.1, 容易知道函数 $y = 3\sin x$ 关于直线 $x = -\frac{1}{2}\pi + k\pi$ ($k \in Z$) 对称, 因此

函数 $f(x) = 3\sin(2x - \frac{\pi}{3})$ 的图像关于直线 $2x - \frac{\pi}{3} = -\frac{1}{2}\pi + k\pi$, 即

$x = -\frac{1}{12}\pi + \frac{k}{2}\pi$ ($k \in Z$) 对称.

根据图 2.1.1, 函数 $y = 3\sin x$ 的对称中心为 $(k\pi, 0)$, $k \in Z$. 因此函数

$f(x) = 3\sin(2x - \frac{\pi}{3})$ 的对称中心横坐标 x 满足 $2x - \frac{\pi}{3} = k\pi$, 解得: $x = \frac{k\pi}{2} + \frac{\pi}{6}$.

根据图 2.1.1, 当 $-\frac{\pi}{2} + 2k\pi \leq x \leq \frac{\pi}{2} + 2k\pi$, ($k \in Z$) 上函数 $y = 3\sin x$ 是增函数, 因

此当 $-\frac{\pi}{2} + 2k\pi \leq 2x - \frac{\pi}{3} \leq \frac{\pi}{2} + 2k\pi$, 即 $-\frac{\pi}{12} + k\pi \leq x \leq \frac{5\pi}{12} + k\pi$ 时, 函数

$f(x) = 3\sin(2x - \frac{\pi}{3})$ 为增函数.

图像的平移是对变量 x 的改变, 因为 $f(x) = 3\sin(2x - \frac{\pi}{3}) = 3\sin 2(x - \frac{\pi}{6})$, 因此由

函数 $y = 3\sin 2x$ 的图像向右平移 $\frac{\pi}{6}$ 个单位可以得到图像 C .

所以①、②、③正确, ④错误.

方法二

(1) 把 $x = \frac{11}{12}\pi$ 代入 $f(x) = 3\sin\left(2x - \frac{\pi}{3}\right)$ 中得 $f(\frac{11}{12}\pi) = 3\sin\frac{3}{2}\pi = -3$, 所以图象

C 关于直线 $x = \frac{11}{12}\pi$ 对称.

(2) 计算 $f(\frac{2}{3}\pi) = 3\sin\pi = 0$, 所以图象 C 关于点 $(\frac{2\pi}{3}, 0)$ 对称.

(3) 函数 $f(x)$ 的单调增区间: 由 $2k\pi - \frac{\pi}{2} \leq 2x - \frac{\pi}{3} \leq 2k\pi + \frac{\pi}{2}$ 得到

$k\pi - \frac{\pi}{12} \leq x \leq k\pi + \frac{5\pi}{12}$, 所以函数 $f(x)$ 在区间 $\left(-\frac{\pi}{12}, \frac{5\pi}{12}\right)$ 内是增函数.

(4) 令 $g(x) = 3\sin 2x$, 把 $y = 3\sin 2x$ 的图像向右平移 $\frac{\pi}{3}$ 个单位得到

$g\left(x - \frac{\pi}{3}\right) = 3\sin 2\left(x - \frac{\pi}{3}\right)$ 的图像, 即 $y = 3\sin\left(2x - \frac{2\pi}{3}\right)$ 的图像, 与函数

$f(x) = 3\sin\left(2x - \frac{\pi}{3}\right)$ 不符. 所以得不到函数 $f(x) = 3\sin\left(2x - \frac{\pi}{3}\right)$ 的图像. 事实上, 因为

$f(x) = 3\sin\left(2x - \frac{\pi}{3}\right) = 3\sin 2\left(x - \frac{\pi}{6}\right)$, 因此由函数 $y = 3\sin 2x$ 的图像向右平移 $\frac{\pi}{6}$ 个单位

才可以得到图像 C .

【简要评注】

不同于其他函数, 三角函数具有周期性, 因而具有多个对称中心和对称轴. 对称中心和对称轴也是周期性地出现, 但相对于函数的周期, 它们的周期减半.

2. 正弦函数图像的变换

例 2. 为了得到函数 $y = 2\sin\left(\frac{x}{3} + \frac{\pi}{6}\right)$, $x \in R$ 的图像, 只需要把函数 $y = 2\sin x$, $x \in R$

的图像上的所有点_____ (填写: 向左或向右) 平移_____ 个单位长度, 再把所得各点的横坐标_____ (填写: 伸长或缩短) 到原来的_____ 倍 (纵坐标不变).

【动感体验】

打开文件 “2-1-例 2. dmr”, 如图 2.1.3 所示, 虚线为函数 $y = 2\sin x$ 的图像, 实线为

函数 $y = 2\sin(ax + b)$ 的图像. 通过变量尺改变 a 或 b 的值或者通过按钮设置 a 或 b 的值,

观察函数 $y = 2\sin(ax + b)$ 对应图像的变化规律, 以及其对应的方程表达式.

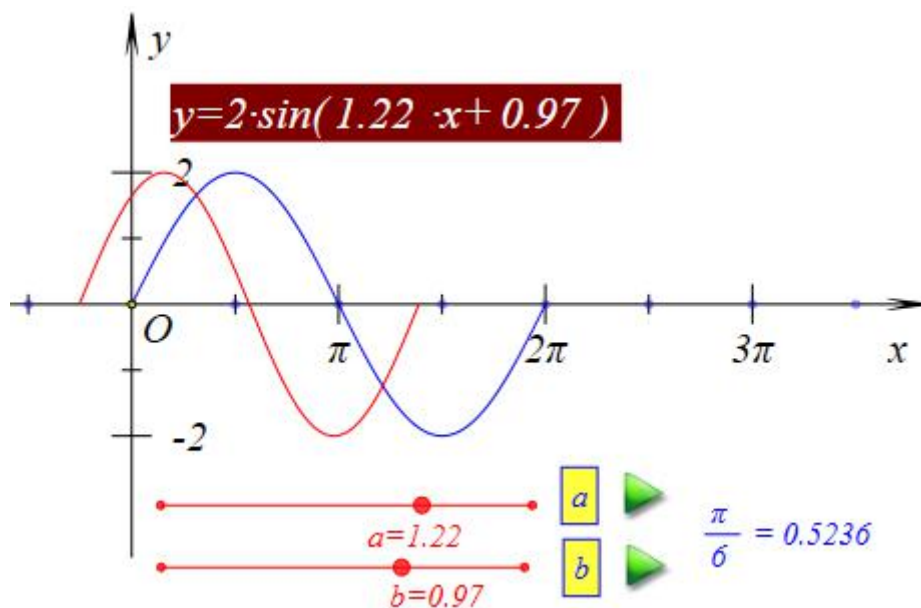


图 2.1.3

【思路点拨】

对函数 $y = 2 \sin x$ 与函数 $y = 2 \sin(\frac{x}{3} + \frac{\pi}{6})$ 图像上对应点的坐标关系进行比较和研究.

【动态解析】

进入文件“2-1-例 2. dmr”的第二页. 将函数 $f(x) = 2 \sin x$ 的图像（虚线）向左平移 $\frac{\pi}{6}$ 个单位长度，得到如图 2 所示曲线（实线），假设表示为 $y = g(x)$ （表达式未知）.

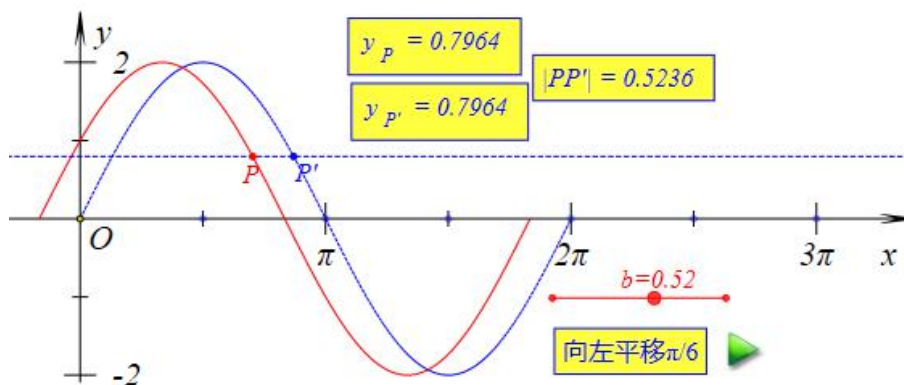


图 2.1.4

假如函数 $y = g(x)$ 上的点 $P(x, g(x))$ 是通过将函数 $y = f(x)$ 图像上的点 $P'(x', f(x'))$ 向左平移 $\frac{\pi}{6}$ 个单位而得到，则有 $x = x' - \frac{\pi}{6}$ 、 $g(x) = f(x')$. 拖动点 P ，可以观察点 P 与点 P' 之间的坐标关系.

所以， $g(x) = f(x') = f(x + \frac{\pi}{6}) = 2 \sin(x + \frac{\pi}{6})$.

进入文件“2-1-例 2. dmr”的第三页.

将函数 $g(x) = 2\sin(x + \frac{\pi}{6})$ 的图像上各点的纵坐标不变而将横坐标伸长到原来的 3 倍

得到如图 3 所示虚线, 设为 $y = h(x)$ (表达式未知).

假如函数 $y = h(x)$ 上的点 $Q(x, g(x))$ 是通过将函数 $y = f(x)$ 图像上的点 $Q'(x', f(x'))$ 纵坐标不变而将横坐标伸长到原来的 3 倍所得到, 则有 $x = 3x'$ 、 $h(x) = f(x')$.
拖动点 Q , 可以观察点 Q 与点 Q' 之间的坐标关系.

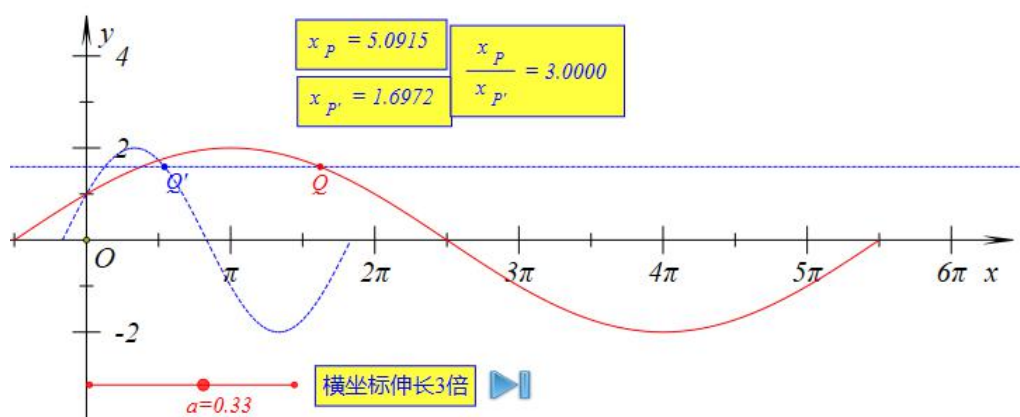


图 2.1.5

所以, $h(x) = f(x') = f(\frac{x}{3}) = 2\sin(\frac{x}{3} + \frac{\pi}{6})$.

综上所述, 为了得到函数 $y = 2\sin(\frac{x}{3} + \frac{\pi}{6})$, ($x \in R$) 的图像, 只需要把函数 $y = 2\sin x$,

($x \in R$) 的图像上的所有点向左平移 $\frac{\pi}{6}$ 个单位长度, 再把所得各点的横坐标伸长到原来的 3 倍, 而纵坐标不变.

【简要评注】

函数图像变换时绘制函数图像的一种重要方法. 恰当地利用图像变换可以方便地将已知函数的图像变换成为所求函数的图像. 由于图像变换的过程不满足交换律, 因此变换的顺序不同, 所得到的结果往往也不相同, 因此需要明确变换的顺序以及每一次变换的内容, 才能得到正确的结果.

若单从函数表达式出发, 则有函数 $y = 2\sin x$ 的周期是 2π , 而函数 $y = 2\sin(\frac{x}{3} + \frac{\pi}{6})$

的周期是 6π (令 $\frac{x}{3} + \frac{\pi}{6} = 0$, 得 $x = -\frac{\pi}{2}$, 令 $\frac{x}{3} + \frac{\pi}{6} = 2\pi$, 得 $x = \frac{11\pi}{2}$), 从函数的周期

性可以否定前两个选项. 对比函数 $y = 2\sin x$ 和 $y = 2\sin(\frac{x}{3} + \frac{\pi}{6})$ 的两个零点, 得知应该选择 C.

下面介绍对于 x 方向的对应变换公式的求解思路.

如图 2.1.6 所示, 实线表示将虚线向左平移 φ 个单位后得到的图像. 若用 $y = f(x)$ 表示平移前的函数表达式 (已知), 用 $y = g(x)$ 表示平移后的函数表达式 (待求). 对于函数 $y = g(x)$ 的图像上的任意点 $P(x, g(x))$, 在 $x = x_0$ 时, 点 P 的纵坐标 y 取到的是 $x = x_0 + \varphi$ 时 $y = f(x)$ 对应的值, 因此点 P 的坐标可以表示为 $P(x, f(x + \varphi))$, 所以函数图像 $y = f(x)$ 向左平移 φ 个单位后的表达式为 $y = f(x + \varphi)$.

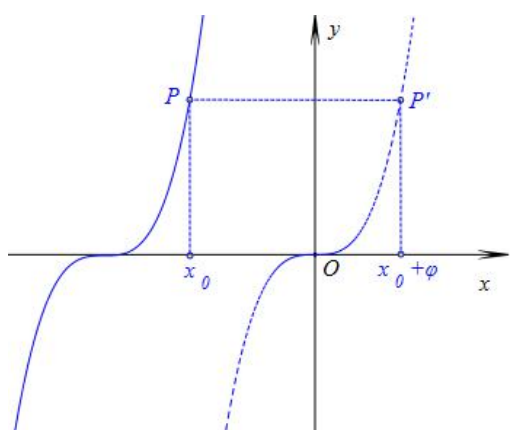


图 2.1.6

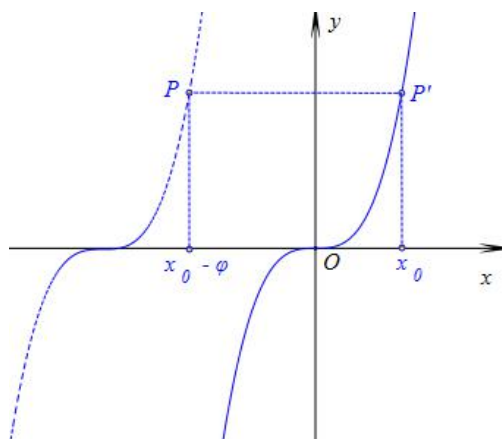


图 2.1.7

如图 2.1.7 所示, 实线表示将虚线向右平移 φ 个单位后得到的图像. 若用 $y = f(x)$ 表示平移前的函数表达式 (已知), 用 $y = g(x)$ 表示平移后的函数表达式 (待求). 对于函数 $y = g(x)$ 的图像上的任意点 $P(x, g(x))$, 在 $x = x_0$ 时, 点 P 的纵坐标 y 取到的是 $x = x_0 - \varphi$ 时 $y = f(x)$ 对应的值, 因此点 P 的坐标可以表示为 $P(x, f(x - \varphi))$, 所以函数图像 $y = f(x)$ 向右平移 φ 个单位后的表达式为 $y = f(x - \varphi)$.

如图 2.1.8 所示, 实线 $y = g(x)$ (待求) 表示由虚线 $y = f(x)$ (已知) 上的各点纵坐标不变而横坐标缩短为原来的 $\frac{1}{k}$ 倍所变换得到. 对于函数 $y = g(x)$ 的图像上的任意点 $P(x, g(x))$, 在 $x = x_0$ 时, 点 P 的纵坐标 y 取到的是 $x = kx_0$ 时 $y = f(x)$ 对应的值, 因此

点 P 的坐标可以表示为 $P(x, f(kx))$ ，所以将函数 $y = f(x)$ 图像上的所有点在纵坐标不变

而横坐标缩短为原来的 $\frac{1}{k}$ 倍后变换得到的曲线可表示为 $y = f(kx)$ 。

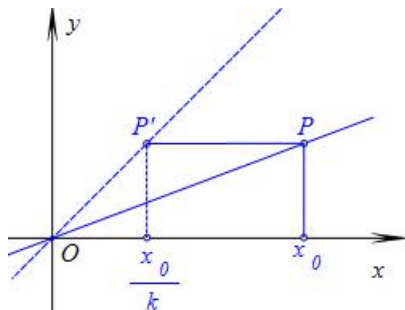


图 2.1.8

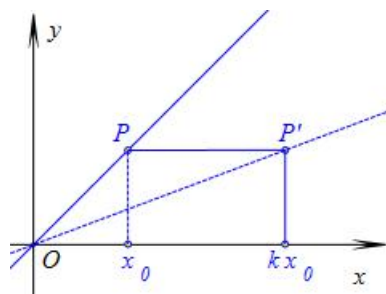


图 2.1.9

如图 2.1.9 所示，实线 $y = g(x)$ （待求）表示由虚线 $y = f(x)$ （已知）上的各点纵坐标不变而横坐标伸长为原来的 k 倍所变换得到. 对于函数 $y = g(x)$ 的图像上的任意点

$P(x, g(x))$ ，在 $x = x_0$ 时，点 P 的纵坐标 y 取到的是 $x = \frac{x_0}{k}$ 时 $y = f(x)$ 对应的值，因此

点 P 的坐标可以表示为 $P(x, f(\frac{x}{k}))$ ，所以将函数 $y = f(x)$ 图像上的所有点在纵坐标不变而

横坐标伸长为原来的 k 倍后变换得到的曲线可表示为 $y = f(\frac{x}{k})$ 。

3. 三角函数图像与水平直线的交点

例 3. 已知函数 $f(x) = \sin\left(\omega x + \frac{\pi}{6}\right) + \sin\left(\omega x - \frac{\pi}{6}\right) - 2\cos^2 \frac{\omega x}{2}$ ， $x \in \mathbf{R}$ （其中 $\omega > 0$ ）。

(I) 求函数 $f(x)$ 的值域；

(II) 若对任意的 $a \in \mathbf{R}$ ，函数 $y = f(x)$ ， $x \in (a, a + \pi]$ 的图象与直线 $y = -1$ 有且仅有两个不同的交点，试确定 ω 的值（不必证明），并求函数 $y = f(x)$ ， $x \in \mathbf{R}$ 的单调增区间。

(一) 求 $f(x)$ 的值域

$$\begin{aligned}
 f(x) &= \frac{\sqrt{3}}{2} \sin \omega x + \frac{1}{2} \cos \omega x + \frac{\sqrt{3}}{2} \sin \omega x - \frac{1}{2} \cos \omega x - (\cos \omega x + 1) \\
 &= 2 \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \sin \omega x - \frac{1}{2} \cos \omega x \right) - 1 = 2 \sin \left(\omega x - \frac{\pi}{6} \right) - 1.
 \end{aligned}$$

由 $-1 \leq \sin \left(\omega x - \frac{\pi}{6} \right) \leq 1$ ，得 $-3 \leq 2 \sin \left(\omega x - \frac{\pi}{6} \right) - 1 \leq 1$ ，可知函数 $f(x)$ 的值域为 $[-3, 1]$ 。

(二) 求 ω 的值及 $f(x)$ 的单调增区间

【动感体验】

打开文件“2-1-例 3. dmr”，如图 2.1.10 所示曲线为函数 $f(x) = 2 \sin(\omega x - \frac{\pi}{6}) - 1$ 的图像，直线表示的直线为 $y = -1$ 。通过变量尺可以改变 a 的值或通过按钮设置 a 的值，从而改变区间 $(a, a + \pi]$ 的位置，通过变量尺可以改变实数 ω 的值或通过按钮设置 ω 的值，从而改变函数的周期。观察在区间 $(a, a + \pi]$ 上，函数 $y = f(x)$ ， $x \in (a, a + \pi]$ 的图象与直线 $y = -1$ 有且只有两个交点时，函数 $f(x)$ 的性质。

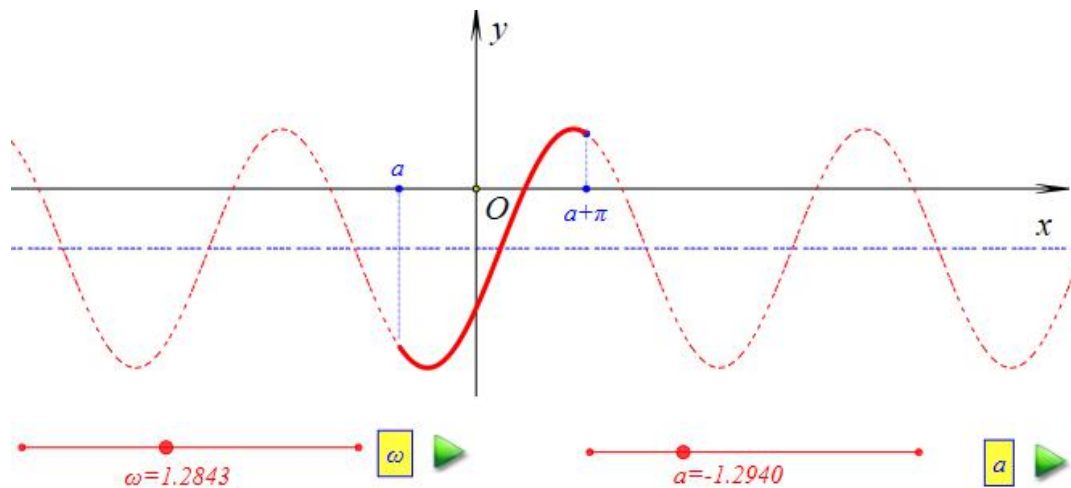


图 2.1.10

【思路点拨】

若对任意的 $a \in \mathbf{R}$ ，函数 $y = f(x)$ ， $x \in (a, a + \pi]$ 的图象与直线 $y = -1$ 有且仅有两个不同的交点，等价于函数 $y = f(x)$ 的周期等于 π 。

【动态解析】

当函数 $y = f(x)$ 的周期等于 π ，即 $\omega = 2$ 时，如图 2.1.11、图 2.1.12 所示，函数

$y = f(x)$, $x \in (a, a + \pi]$ 的图象与直线 $y = -1$ 有且仅有两个不同的交点.

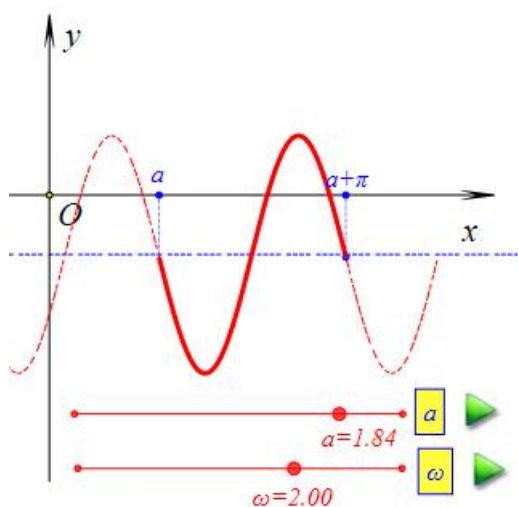


图 2.1.11

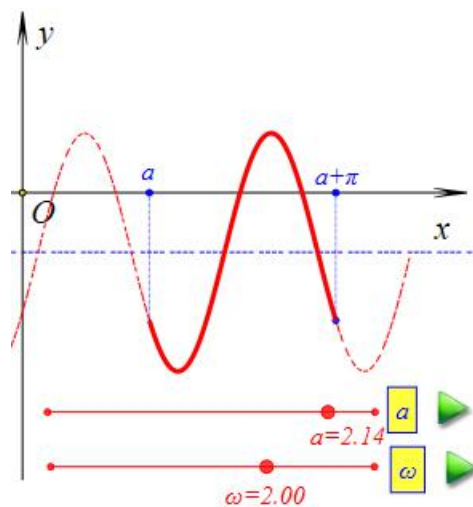


图 2.1.12

当函数 $y = f(x)$ 的周期大于 π , 即 $\omega < 2$ 时, 如图 2.1.13 所示, 函数 $y = f(x)$, $x \in (a, a + \pi]$ 的图象与直线 $y = -1$ 可能只存在一个交点. 当函数 $y = f(x)$ 的周期小于 π , 即 $\omega > 2$ 时, 如图 2.1.14 所示, 函数 $y = f(x)$, $x \in (a, a + \pi]$ 的图象与直线 $y = -1$ 可能存在三个不同的交点.

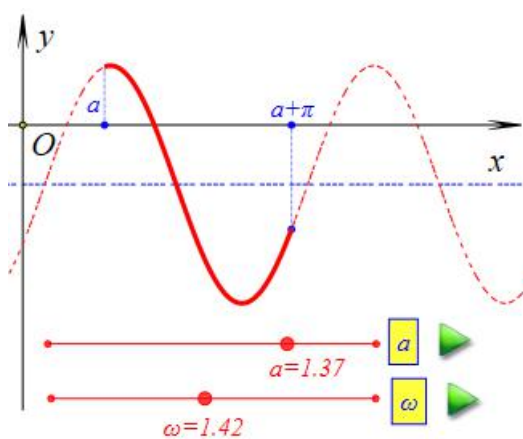


图 2.1.13

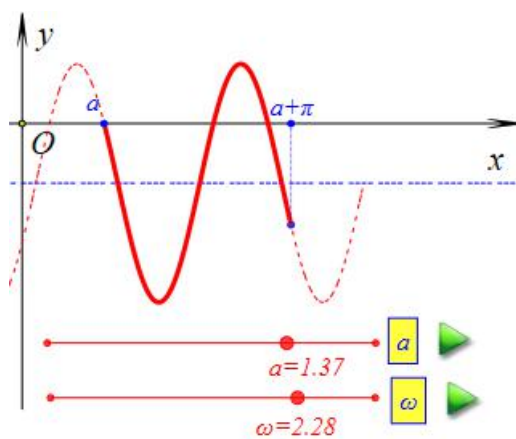


图 2.1.14

于是有 $\omega = 2$, 所以 $f(x) = 2 \sin\left(2x - \frac{\pi}{6}\right) - 1$,

再由 $2k\pi - \frac{\pi}{2} \leq 2x - \frac{\pi}{6} \leq 2k\pi + \frac{\pi}{2} (k \in \mathbf{Z})$,

解得: $k\pi - \frac{\pi}{6} \leq x \leq k\pi + \frac{\pi}{3} (k \in \mathbf{Z})$.

所以 $y = f(x)$ 的单调增区间为 $\left[k\pi - \frac{\pi}{6}, k\pi + \frac{\pi}{3}\right] (k \in \mathbf{Z})$.

【简要评注】

研究两函数图像交点的问题时, 要以图像为依据. 本题中, 主要考察周期的变化对交点个数的影响, 从而确定周期的变化大小.

本节小结

三角函数的图像是研究三角函数的重要工具, 通常情况下作三角函数的图像有两种方法: 一是五点法, 抓住函数图像在一个周期中的五个点 (三个零点和两个最值点), 而这五个点也是研究函数性质中的最要因素; 二是利用图像变换, 这样可以明确函数的性质随参数的变化而产生的变化.

拓展练习

1.1. 下面有五个命题:

①函数 $y = \sin^4 x - \cos^4 x$ 的最小正周期是 π .

②终边在 y 轴上的角的集合是 $\{\alpha \mid \alpha = \frac{k\pi}{2}, k \in \mathbf{Z}\}$.

③在同一坐标系中, 函数 $y = \sin x$ 的图象和函数 $y = x$ 的图象有三个公共点.

④把函数 $y = 3\sin(2x + \frac{\pi}{3})$ 的图象向右平移 $\frac{\pi}{6}$ 得到 $y = 3\sin 2x$ 的图象.

⑤函数 $y = \sin(x - \frac{\pi}{2})$ 在 $[0, \pi]$ 上是减函数.

其中真命题的序号是_____ (写出所有正确结论)

1.2. 为得到函数 $y = \cos\left(x + \frac{\pi}{3}\right)$ 的图象, 只需将函数 $y = \sin x$ 的图象 ().

A. 向左平移 $\frac{\pi}{6}$ 个长度单位

B. 向右平移 $\frac{\pi}{6}$ 个长度单位

C. 向左平移 $\frac{5\pi}{6}$ 个长度单位

D. 向右平移 $\frac{5\pi}{6}$ 个长度单位

1.3. 为得到函数 $y = \cos\left(2x + \frac{\pi}{3}\right)$ 的图象, 只需将函数 $y = \sin 2x$ 的图象 ().

A. 向左平移 $\frac{5\pi}{12}$ 个长度单位

B. 向右平移 $\frac{5\pi}{12}$ 个长度单位

C. 向左平移 $\frac{5\pi}{6}$ 个长度单位

D. 向右平移 $\frac{5\pi}{6}$ 个长度单位

1.4 . 把函数 $y = \sin x (x \in \mathbf{R})$ 的图象上所有的点向左平行移动 $\frac{\pi}{3}$ 个单位长度, 再把所得图象上所有点的横坐标缩短到原来的 $\frac{1}{2}$ 倍 (纵坐标不变), 得到的图象所表示的函数是 ().

- A. $y = \sin\left(2x - \frac{\pi}{3}\right), x \in \mathbf{R}$ B. $y = \sin\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{6}\right), x \in \mathbf{R}$
- C. $y = \sin\left(2x + \frac{\pi}{3}\right), x \in \mathbf{R}$ D. $y = \sin\left(2x + \frac{2\pi}{3}\right), x \in \mathbf{R}$

1.5. 为了得到函数 $y = \lg \frac{x+3}{10}$ 的图像, 只需把函数 $y = \lg x$ 的图像上所有的点 ().

- A. 向左平移 3 个单位长度, 再向上平移 1 个单位长度
 B. 向右平移 3 个单位长度, 再向上平移 1 个单位长度
 C. 向左平移 3 个单位长度, 再向下平移 1 个单位长度
 D. 向右平移 3 个单位长度, 再向下平移 1 个单位长度

第二节 三角函数的值域问题

1. 正弦函数在指定区间的最值

例 1. 已知函数 $f(x) = 2 \sin \omega x (\omega > 0)$ 在区间 $\left[-\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{4}\right]$ 上的最小值是 -2 , 则 ω 的最小值是_____.

【动感体验】

打开文件“2-2-例 1. dmr”, 如图 2.2.1 所示, 实线为 $f(x) = 2 \sin \omega x (\omega > 0)$ 在区间 $\left[-\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{4}\right]$ 上的图像. 通过变量尺拖动实数 ω 的值或通过按钮设置 ω 的值, 研究当

$f(x) = 2 \sin \omega x (\omega > 0)$ 在区间 $\left[-\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{4}\right]$ 上最小值为 -2 时, ω 取最小值时函数 $y = f(x)$

图像的性质.

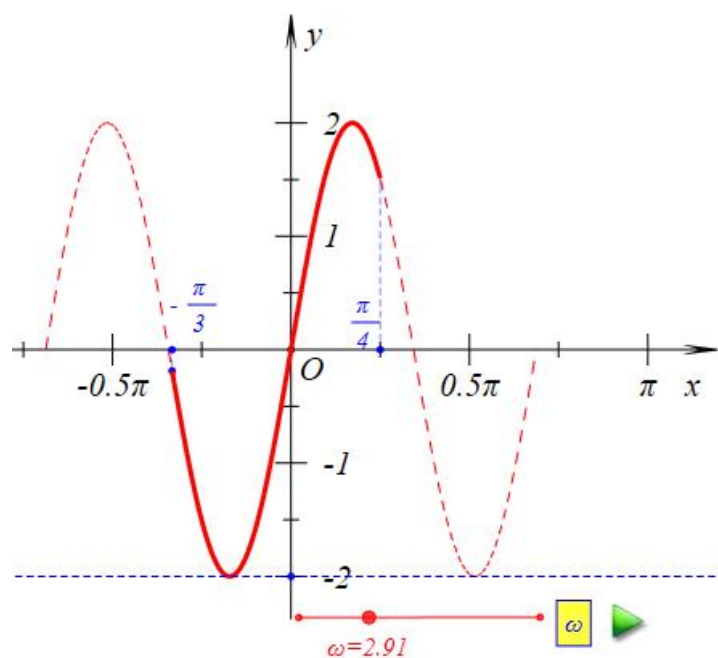


图 2.2.1

【思路点拨】

考虑正弦波靠近原点的最低点与区间 $[-\frac{\pi}{3}, 0]$ 的关系.

【动态解析】

如图 2.2.2 所示, 当正弦波的最低点在区间 $[-\frac{\pi}{3}, 0]$ 之内时, 函数 $y = f(x)$ 具有最小值 -2 . 通过图像, 容易理解, 此时当函数 $f(x) = 2 \sin \omega x (\omega > 0)$ 的四分之一的一个周期不大于 $\frac{\pi}{3}$, 即 $\frac{2\pi}{\omega} \times \frac{1}{4} \leq \frac{\pi}{3}$, 解得 $\omega \geq \frac{3}{2}$.

如图 2.2.3 所示, 当正弦波的最低点不在区间 $[-\frac{\pi}{3}, 0]$ 之内时, 函数 $y = f(x)$ 的最小值大于 -2 . 通过图像, 容易理解, 此时当函数 $f(x) = 2 \sin \omega x (\omega > 0)$ 的四分之一的一个周期大于 $\frac{\pi}{3}$, 即 $\frac{2\pi}{\omega} \times \frac{1}{4} > \frac{\pi}{3}$, 解得 $\omega < \frac{3}{2}$.

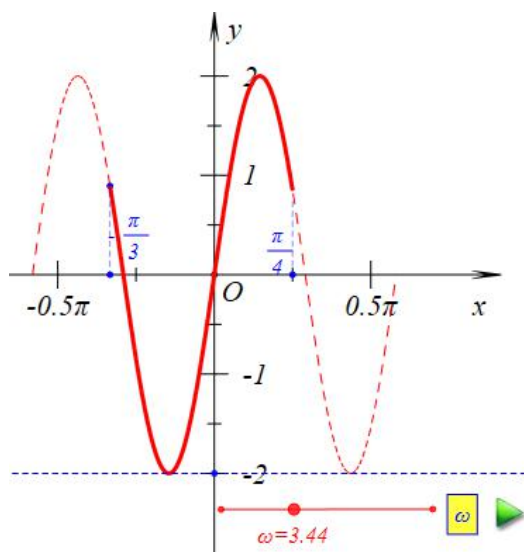


图 2.2.2

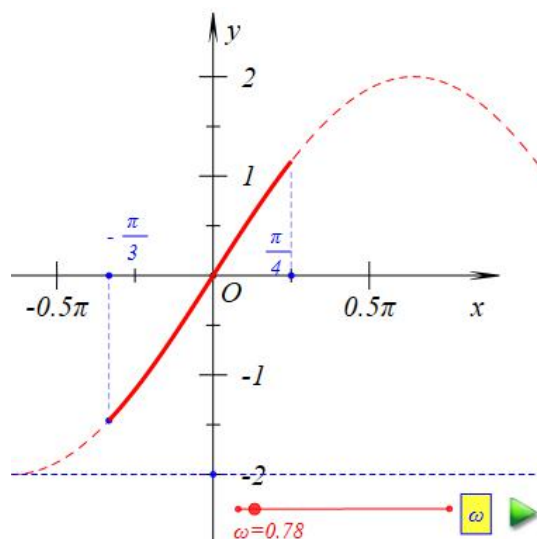


图 2.2.3

综上所述,若要求函数 $f(x) = 2 \sin \omega x (\omega > 0)$ 在区间 $[-\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{4}]$ 上的最小值是 -2 , ω 能取到的最小值是 $\frac{3}{2}$, 如图 2.2.4 所示, 这时对应为点 $(-\frac{\pi}{3}, f(-\frac{\pi}{3}))$ 是正弦波上最靠近原点 0 的最低点.

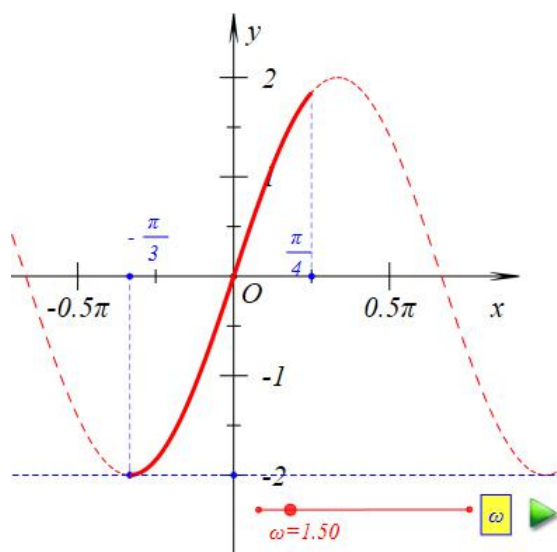


图 2.2.4

【简要评注】

本题所给出的区间并不关于原点对称, 求解时要结合图像的性质特点以避免出错.

函数 $f(x) = 2 \sin \omega x (\omega > 0)$ 当 $\omega x = 2k\pi - \frac{\pi}{2} (k \in \mathbb{Z})$ 时取最小值, 在最靠近原点的周

期应该是在 $x = -\frac{\pi}{2\omega}$ 时取最小值 -2 . 考虑这个值在区间 $[-\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{4}]$ 内(或边界) ω 的最小

值. 由此 $x = -\frac{\pi}{2\omega} = -\frac{\pi}{3}$, $\omega = \frac{3}{2}$.

2. 复合函数的最值问题

例 2. 求函数 $y = 7 - 4\sin x \cos x + 4\cos^2 x - 4\cos^4 x$ 的最大值与最小值.

【动感体验】

首先化简函数:

$$\begin{aligned}y &= 7 - 4\sin x \cos x + 4\cos^2 x - 4\cos^4 x \\&= 7 - 2\sin 2x + 4\cos^2 x(1 - \cos^2 x) \\&= 7 - 2\sin 2x + 4\cos^2 x \sin^2 x \\&= 7 - 2\sin 2x + \sin^2 2x \\&= (\sin 2x - 1)^2 + 6.\end{aligned}$$

设 $t = \sin 2x$, 则 $y = (t - 1)^2 + 6$. 打开文件 “2-2-例 2. dmr”, 如图 2.2.5 所示,

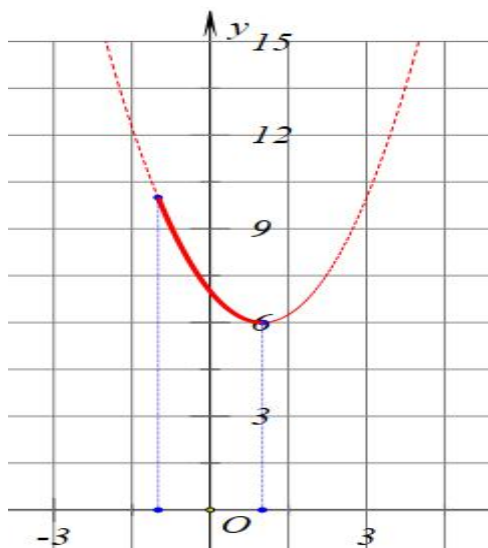


图 2.2.5

【思路点拨】

通过 $t = \sin 2x$ 得到 t 的取值范围, 从而得到 y 的取值范围.

【动态解析】

因为 $t = \sin 2x$, 所以 $t \in [-1, 1]$, 可知:

当 $t=1$ ， y 有最小值： $(1-1)^2 + 6 = 6$ ；

当 $t=-1$ ， y 有最大值： $(-1-1)^2 + 6 = 10$ 。

进入文件“2-2-例 2. dmr”的第二页，如图 2.2.6 所示，更加一目了然。

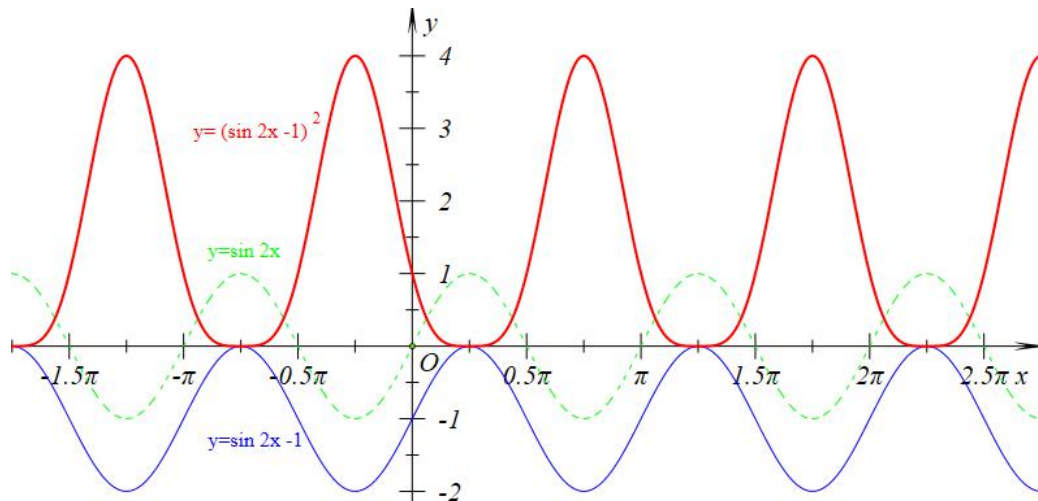


图 2.2.6

【简要评注】

求复合函数的最值问题，常常会引入中间变量，此时一定要注意中间变量的取值限制。正弦函数的有界性往往是解题过程中容易疏忽的地方。

3. 复合函数的最值问题

例 3. 已知 $k < -4$ ，则函数 $y = \cos 2x + k(\cos x - 1)$ 的最小值是_____。

【动感体验】

函数 $y = \cos 2x + k(\cos x - 1)$ 可化为 $y = 2\cos^2 x + k\cos x - (k+1)$ ，令 $t = \cos x$ ，则有 $y = 2t^2 - kt - (k+1)$ ， $t \in [-1, 1]$ ，打开文件“2-2-例 3. dmr”，如图 2.2.7 所示，实线为函数 $y = 2t^2 - kt - (k+1)$ ， $t \in [-1, 1]$ 的图像，通过变量尺改变 k 的值或通过按钮设置 k 的值，研究 k 对函数 $y = 2t^2 - kt - (k+1)$ ， $t \in [-1, 1]$ 最小值的影响。

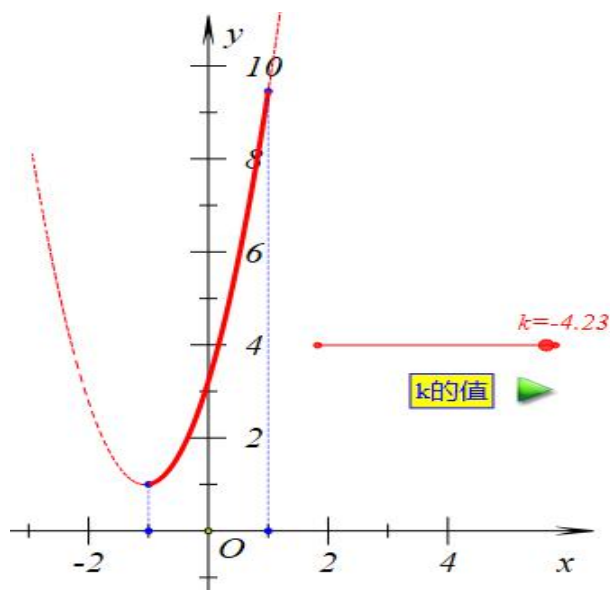


图 2.2.7

【思路点拨】

考虑实数 k 对二次函数 $y = 2t^2 - kt - (k+1)$ 对称轴的影响.

【动态解析】

因为 $k < -4$, 因此二次函数的对称轴 $t = -\frac{-k}{2 \cdot 2} < -1$, 所以当 $t = -1$ 时, 函数有最小

值: $2 \cdot 1^2 - k \cdot (-1) - (k+1) = 1$, 如图 2.2.8、图 2.2.9 所示.

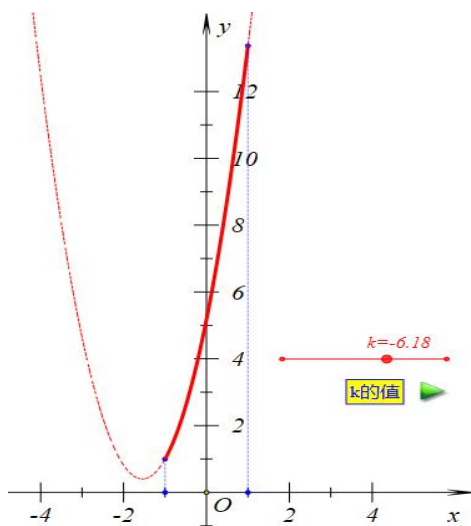


图 2.2.8

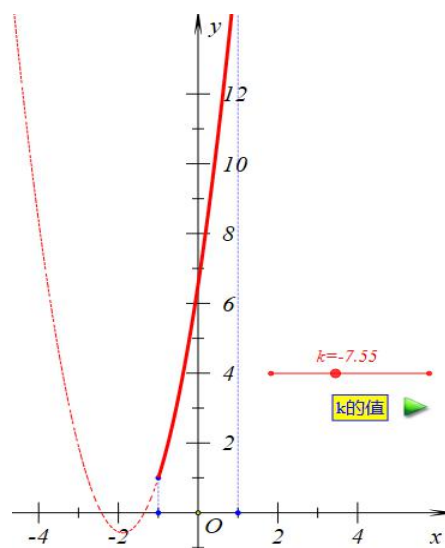


图 2.2.9

因此函数的最小值为: 1.

【简要评注】

对于三角函数与二次函数复合后的函数问题, 通常需要注意两点: 三角函数的取值范围和二次函数的对称轴, 当函数含有参数时尤其要认真检查.

4. 带有绝对值的函数值域问题

例 4. 已知函数 $f(x) = \frac{1}{2}(\sin x + \cos x) - \frac{1}{2}|\sin x - \cos x|$, 求 $f(x)$ 的值域.

【动感体验】

打开文件“2-2-例 4. dmr”, 如图 2.2.10 所示, 实线为函数 $y = \sin x$ 的图像, 虚线为函数 $y = \cos x$ 的图像. 观察函数的图像, 研究函数

$f(x) = \frac{1}{2}(\sin x + \cos x) - \frac{1}{2}|\sin x - \cos x|$ 的图像.

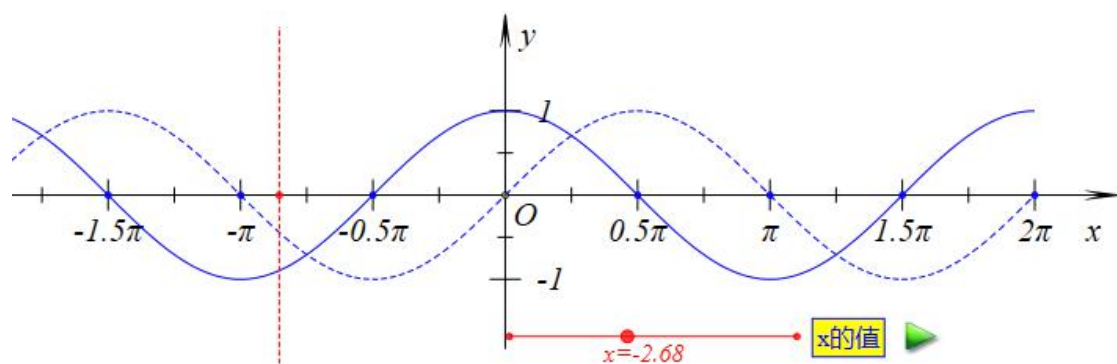


图 2.2.10

【思路点拨】

在一个周期, 例如区间 $[-\frac{3}{4}\pi, \frac{5}{4}\pi]$ 上讨论问题, 将函数 $f(x)$ 化简, 利用三角函数线比较 $\sin x$ 和 $\cos x$ 的大小.

【动态解析】

容易知道: 当 $x \in [-\frac{3\pi}{4}, \frac{\pi}{4}]$ 时, $\cos x \geq \sin x$, 这时

$f(x) = \frac{1}{2}(\sin x + \cos x) - \frac{1}{2}(\cos x - \sin x) = \sin x$, 因此当 $x \in [-\frac{3\pi}{4}, \frac{\pi}{4}]$ 时,

$$f(x) \in [-1, \frac{\sqrt{2}}{2}].$$

当 $x \in (\frac{\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}]$ 时, $\cos x \leq \sin x$, 这时

$f(x) = \frac{1}{2}(\sin x + \cos x) - \frac{1}{2}(\sin x - \cos x) = \cos x$, 因此, 当 $x \in (\frac{\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}]$ 时, $f(x) \in [-1, \frac{\sqrt{2}}{2}]$.

$$\frac{\sqrt{2}}{2}].$$

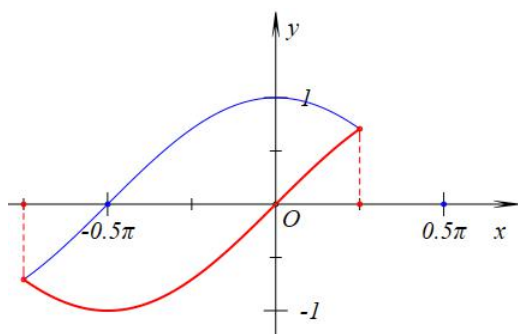


图 2.2.11

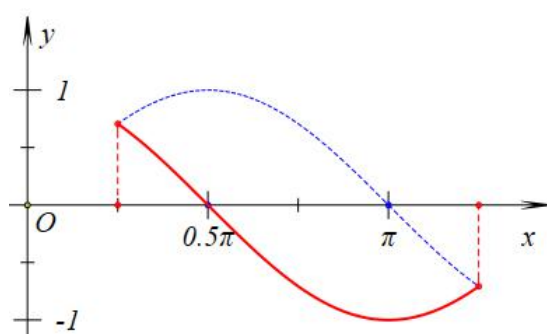


图 2.2.12

综上所述，在区间 $[-\frac{3}{4}\pi, \frac{5}{4}\pi]$ 对应的一个周期上，函数

$$f(x) = \frac{1}{2}(\sin x + \cos x) - \frac{1}{2}|\sin x - \cos x| \text{ 的值域为 } [-1, \frac{\sqrt{2}}{2}], \text{ 它的图像如图 2.2.13.}$$

所示（见文件第四页）。

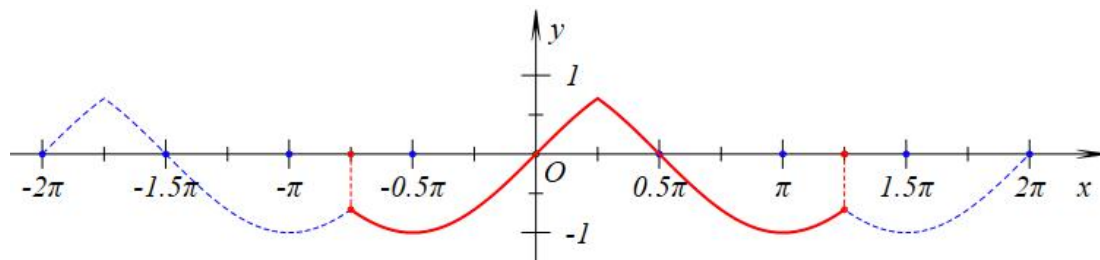


图 2.2.13

【简要评注】

本题中的函数是周期函数，求函数的值域问题可以在一个完整的周期内考虑问题。周期的选择以熟悉和常用的区间为原则，如 $[0, 2\pi]$ ， $[-\pi, \pi]$ ，也可以根据特点和函数的

性质确定一个周期对应的区间，例如本题中的 $[-\frac{3}{4}\pi, \frac{5}{4}\pi]$ 或 $[\frac{\pi}{4}, \frac{9}{4}\pi]$ 。

本节小结

三角函数求值域的问题本质上是求复合函数的值域问题。通常需要换元，但一定要注意正弦函数、余弦函数的有界性。与三角函数有关的值域问题，通常需要进行三角函数的化简，然后根据函数的图像和性质求解。也经常是与二次函数的复合函数，问题的难度不大，思路与方法明确。

拓展练习

2.1. 已知函数 $f(x) = 2\sin \omega x (\omega > 0)$ 在区间 $[-\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{4}]$ 上的最大值是 2，则 ω 的最

小值是_____.

2.2. 绘制函数 $y = \tan x + \sin x - |\tan x - \sin x|$ 在区间 $(\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2})$ 内的大致图象.

2.3. 定义运算 $\otimes$: $a \otimes b = \begin{cases} a, & a \leq b \\ b, & a > b \end{cases}$, 设 $F(x) = f(x) \otimes g(x)$, 若 $f(x) = \sin x$,

$g(x) = \cos x$, $x \in \mathbb{R}$, 则 $F(x)$ 的值域为 ()

- A. $[-1, 1]$ B. $[-\frac{\sqrt{2}}{2}, 1]$ C. $[-1, \frac{\sqrt{2}}{2}]$ D. $[-1, -\frac{\sqrt{2}}{2}]$

2.4. 已知函数 $f(x) = 2 \sin \frac{x}{4} \cos \frac{x}{4} + \sqrt{3} \cos \frac{x}{2}$.

(I) 求函数 $f(x)$ 的最小正周期及最值;

(II) 令 $g(x) = f\left(x + \frac{\pi}{3}\right)$, 判断函数 $g(x)$ 的奇偶性, 并说明理由.

2.5. 最小正周期及最值;

(II) 令 $g(x) = f\left(x + \frac{\pi}{3}\right)$, 判断函数 $g(x)$ 的奇偶性, 并说明理由.

2.6. 求函数 $y = \cos 2x + k(\cos x - 1)$ 的最小值.

第三节 三角函数与一次函数

1. 指定区间内的函数值比较

例 1. 若 $0 < x < \frac{\pi}{2}$, 则 $2x$ 与 $3 \sin x$ 的大小关系 ()

- A. $2x > 3 \sin x$ B. $2x < 3 \sin x$
C. $2x = 3 \sin x$ D. 与 x 的取值有关

【动态解析】

打开文件“2-3-例 1. dmr”, 如图 1 所示, 实线为函数 $y = 3 \sin x$ 在 $(0, \frac{\pi}{2})$ 上的图像,

虚线为函数 $y = 2x$ 在 $(0, \frac{\pi}{2})$ 上的图像.

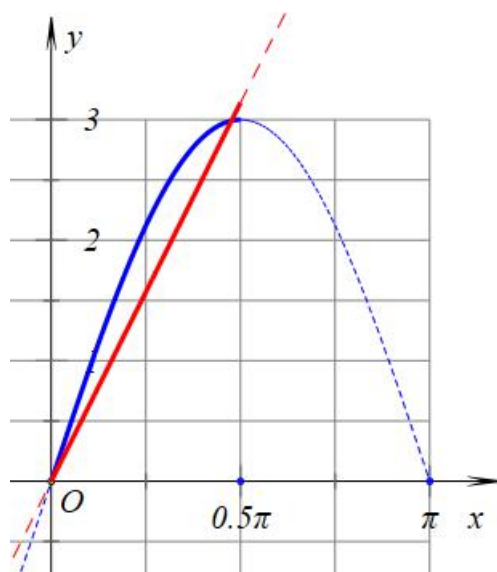


图 2.3.1

当 $x = \frac{\pi}{6}$ 时, $3\sin x = 1.5$, $2x = \frac{\pi}{3}$, 此时 $2x < 3\sin x$;

当 $x = \frac{\pi}{2}$ 时, $3\sin x = 3$, $2x = \pi$, 此时 $2x > 3\sin x$;

因为在区间 $(0, \frac{\pi}{2})$ 上, 函数 $y = 2x$ 与 $y = 3\sin x$ 均是连续的, 因此存在某个值 x_0 , 满足 $2x = 3\sin x$.

因此选择 D.

【简要评注】

比较函数值大小的问题, 用特殊值求解问题时要注意选择恰当的点, 还应结合图像的性质来从整体上思考问题, 例如连续性, 单调性, 凸凹性等等.

2. 指定区间内函数值的比较

例 2. 若 $0 < x < \frac{\pi}{2}$, 则下列命题中正确的是 ()

A. $\sin x < \frac{3}{\pi}x$

B. $\sin x > \frac{3}{\pi}x$

C. $\sin x < \frac{4}{\pi^2}x^2$

D. $\sin x > \frac{4}{\pi^2}x^2$

【动感体验】

打开文件“2-3-例 2. dmr”，如图 2.3.2 所示，实曲线为函数 $y = f(x) = \sin x$ 的图像，

直线为函数 $y = g(x) = \frac{3}{\pi}x$ 的图像，虚曲线为函数 $y = h(x) = \frac{4}{\pi^2}x^2$ 的图像. 观察函数的图

像，对上述命题进行判断.

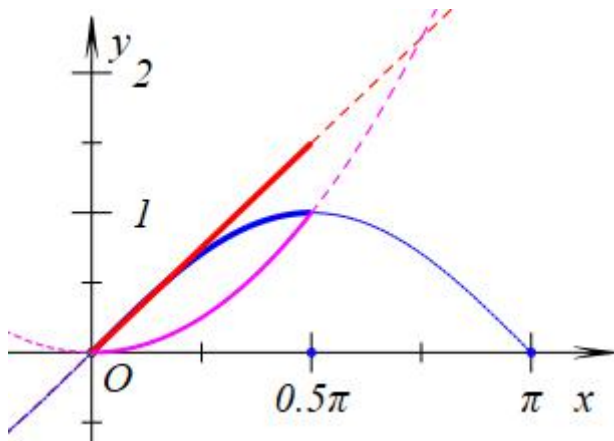


图 2.3.2

【思路点拨】

先研究两个端点处 ($x=0$ 和 $x=\frac{\pi}{2}$) 的情况，再研究中间 ($0 < x < \frac{\pi}{2}$) 的情况.

【动态解析】

从图 2.3.2 容易看出当 $x = \frac{\pi}{2}$ 时, $\sin x = \frac{4}{\pi^2}x^2 = 1$, 而当 $x=0$ 时, $\sin x = \frac{4}{\pi^2}x^2 = 0$.

所以当 $0 < x < \frac{\pi}{2}$, 正弦函数 $y = \sin x$ 与二次函数 $y = \frac{4}{\pi^2}x^2$ 的图像有相同的端点. 这时正弦

函数 $y = \sin x$ 的图像整个位于二次函数 $y = \frac{4}{\pi^2}x^2$ 的图像之上，因此选择 D.

从图 2.3.2 可以看出, $y = \frac{3}{\pi}x$ 对应的直线则穿过 $y = f(x) = \sin x$ 对应的曲线. 可以通

过求 $f(x) = \sin x - \frac{3}{\pi}x$ 的导数 $f'(x) = \cos x - \frac{3}{\pi}$, 参考图 2.3.3 可知, 当 $x=0$ 时导数

$F'(x)$ 为正, 当 $x = \frac{\pi}{2}$ 时导数 $F'(x)$ 为负, 可知 $f(x)$ 是先增后减, 而 $F(0) = 0, F(\frac{\pi}{2}) < 0$ 因

此在区间 $(0, \frac{\pi}{2})$ 上, $f(x) = \sin x - \frac{3}{\pi}x$ 可以能取正值也可能取负值, 所以在某一点处

为零.

【简要评注】

在我们对某些问题的认识模糊不清时,利用直观的图像和动态的变换可以帮助我们形象地理解问题.然而有时候,利用现有的技术并不能帮助我们分辨微小的变化或者细微的区别,这时候就要从数学的角度考虑问题.因此,数学需要形象,更需要抽象.

本题给了我们另外一个启发是,在绘图过程中通过描出几个特殊位置的点然后进行连线并不能保证正确绘制函数的图像,尤其是在同一个坐标系上需要绘制多个函数的图像且需要进行对比的情况下.因此绘制函数的图像时一定要研究函数的性质,包括整体性质和局部性质.

本节小结

在研究三角函数与一次函数关系的过程中,重点要关注三角函数本身的性质,特别值得注意的是其值域和周期性,其次还要注意三角函数增长速度的变化.

拓展练习

3.1. 函数 $f(x) = \sin x + 2|\sin x|$ ($x \in [0, 2\pi]$) 的图象与直线 $y = k$ 有且仅有两个不同的交点, 则 k 的取值范围是: _____.

3.2. 若 $0 < x < \frac{\pi}{2}$, 则下列命题正确的是 ().

A. $\sin x < \frac{2}{\pi}x$ B. $\sin x > \frac{2}{\pi}x$ C. $\sin x < \frac{3}{\pi}x$ D. $\sin x > \frac{3}{\pi}x$

3.3. 已知函数 $f(x) = \sin\left(\omega x + \frac{\pi}{6}\right) + \sin\left(\omega x - \frac{\pi}{6}\right) - 2\cos^2 \frac{\omega x}{2}$, $x \in \mathbf{R}$ (其中 $\omega > 0$).

(I) 求函数 $f(x)$ 的值域;

(II) 若函数 $y = f(x)$ 的图象与直线 $y = -1$ 的两个相邻交点间的距离为 $\frac{\pi}{2}$, 求函数 $y = f(x)$ 的单调增区间.

第三章 平面向量

平面向量属于结合代数与几何知识的内容. 相对于一般的数量, 向量可以用图形来表示, 但它又不同于一般的图形, 它有方向, 还可以参与运算. 因此, 解决向量问题的过程中, 要把握其双重特征. 理解向量运算所表示的几何意义, 反过来根据向量之间的图形关系解释向量的运算.

平面向量在属于基础知识, 难度不大, 以选择题、填空题为主. 重点考察向量的加减法、向量的数量积、向量的模等各种运算, 也常与平面解析几何、三角、代数相结合, 考察对向量基本概念和性质的理解与掌握程度.

第一节 向量的加减运算和基本定理

1. 向量的加法运算与参数范围

例 1. 已知 $OM \parallel AB$, 点 P 在由射线 OM , 线段 OB 及 AB 的延长线围成的区域内

(不含边界) 运动, 且 $\overrightarrow{OP} = x\overrightarrow{OA} + y\overrightarrow{OB}$, 则 x 的取值范围是_____ ; 当 $x = -\frac{1}{2}$ 时, y 的取值范围是_____.

(一) 研究 x 的取值范围

【动感体验】

打开文件 “3-1-例 1. dmr”, 如图 3.1.2 所示, 点 E 、 O 、 A 共线, 点 F 、 B 、 O 共线, 四边形 $OEFP$ 为平行四边形. 拖动点 P , 观察 $\overrightarrow{OE}$ 的性质.

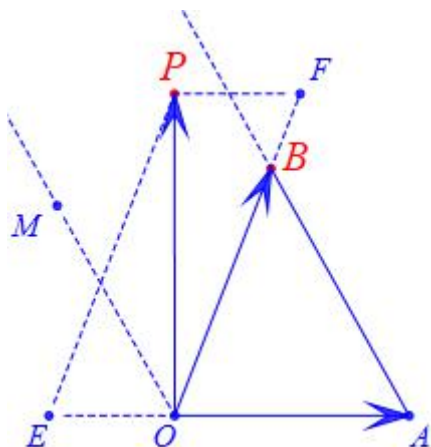


图 3.1.2

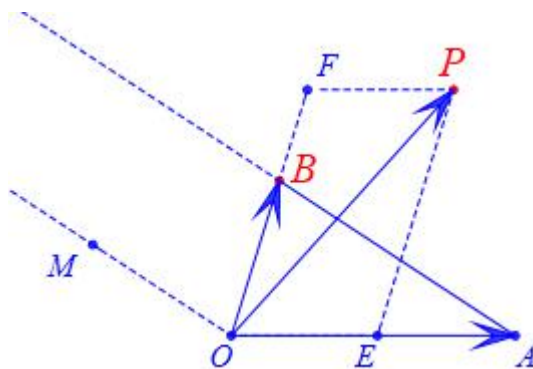


图 3.1.3

【思路点拨】

此题考查对平面向量基本定理的理解. 根据平面向量基本定理, 向量 $\overrightarrow{OP}$ 可以分解为 $\overrightarrow{OA}$

与 $\overrightarrow{OB}$ 线性组合 $\overrightarrow{OP} = x\overrightarrow{OA} + y\overrightarrow{OB}$, 这里 x 与 y 有怎样的意义?

结合本题就是要考虑当 P 点落在在由射线 OM , 线段 OB 及 AB 的延长线围成的区域内时向量 $\overrightarrow{OP}$ 分解到 $\overrightarrow{OA}$ 方向的向量的位置, 于是不难确定这种情况下 x 的取值范围.

【动态解析】

因为点 P 总是在线段 OB 的左侧, 则点 E 始终在点 O 的左侧, 所以总有 $x < 0$.

打开文件“3-1-例 1. dmr”, 点 F 、 O 、 B 共线, 点 E 、 O 、 A 共线, 四边形 $OEPF$ 为平行四边形, 拖动点 P , 观察 $\overrightarrow{OF}$ 与 $\overrightarrow{OA}$ 的关系. 容易看出 P 点落在在由射线 OM , 线段 OB 及 AB 的延长线围成的区域内时 $\overrightarrow{OE}$ 与 $\overrightarrow{OA}$ 的方向相反, 如图 3.1.2 所示, 这时总有 $x < 0$. 而 P 点落在 $\angle AOB$ 内部时 $\overrightarrow{OE}$ 与 $\overrightarrow{OA}$ 的方向相同, 如图 3.1.3 所示, 这时 $x > 0$.

(二) 研究 y 的取值范围

【动感体验】

进入文件“3-1-例 1. dmr”第二页, 如 3.1.4 所示, 始终有 $\overrightarrow{OE} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{OA}$, 即 $x = -\frac{1}{2}$,

拖动点 P 研究 $\overrightarrow{OF}$ 的变化规律.

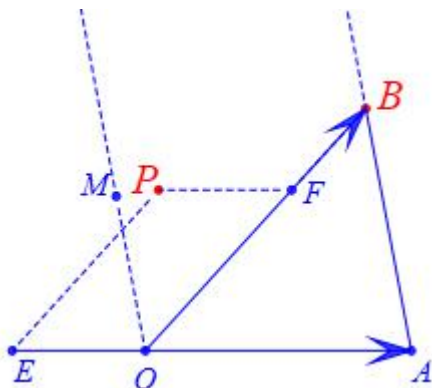


图 3.1.4

【思路点拨】

注意条件 $x = -\frac{1}{2}$ 确定了向量 $\overrightarrow{OP}$ 分解到 $\overrightarrow{OA}$ 方向上的向量的大小和方向, 在这个约束条件下, 考虑点 P 在由射线 OM , 线段 OB 及 AB 的延长线围成的区域内 (不含边界) 运动时 $\overrightarrow{OP}$ 分解到 $\overrightarrow{OB}$ 方向的向量和 $\overrightarrow{OB}$ 的关系, 利用相似三角形的知识就不难求出 y 的取值范围.

【动态解析】

可以知道, 当点 P 在射线 OM 上时 y 取得最小值, 如图 3.1.5, 由 $\triangle OPE \sim \triangle ABO$

$$\text{得 } y = \frac{|OF|}{|OB|} = \frac{|EP|}{|OB|} = \frac{|OE|}{|OA|} = \frac{1}{2}.$$

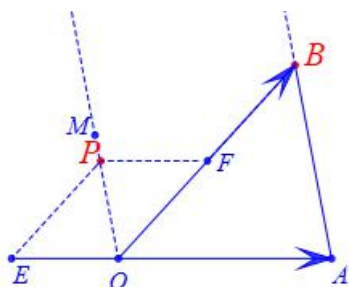


图 3.1.5

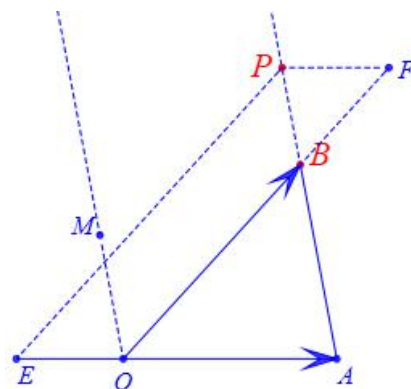


图 3.1.6

当点 P 在射线 AB 上时 y 取得最大值, 如图 3.1.6, 由 $\triangle APE \sim \triangle ABO$ 得

$$y = \frac{|OF|}{|OB|} = \frac{|EP|}{|OB|} = \frac{|AE|}{|OA|} = \frac{3}{2}.$$

所以当 $x = -\frac{1}{2}$ 时, y 的取值范围是: $\frac{1}{2} < y < \frac{3}{2}$.

【简要评注】

善于利用图形抓住向量运算的几何特征, 可以轻松解决许多与向量运算有关的问题.

2. 向量间的数值关系

例 2. 设两个向量 $\mathbf{a} = (\lambda + 2, \lambda^2 - \cos^2 \alpha)$ 和 $\mathbf{b} = \left(m, \frac{m}{2} + \sin \alpha\right)$, 其中 λ, m, α 为

实数. 若 $\mathbf{a} = 2\mathbf{b}$, 求 $\frac{\lambda}{m}$ 的取值范围.

【动感体验】

由 $\mathbf{a} = 2\mathbf{b}$ 知道

$$\begin{cases} \lambda + 2 = 2 \cdot m \\ \lambda^2 - \cos^2 \alpha = 2 \cdot \left(\frac{m}{2} + \sin \alpha\right) \end{cases},$$

化简后得:

$$\begin{cases} \lambda + 2 - 2m = 0 \\ \lambda^2 - m + \sin^2 \alpha - 2\sin \alpha - 1 = 0 \end{cases}.$$

由第一个方程联想到 λ 和 m 存在线性的关系, 如果把 m 看成自变量, 那么 λ 是 m 的一

次函数，其图像是一条直线. 而第二个方程中多了个参数 α ，为简单起见设 $t = -\sin^2 \alpha + 2\sin \alpha + 1$ ，于是可以把第二个方程改写为 $\lambda^2 = m + t$. 这可以看成以 t 为参数的抛物线族，由 α 的不同取值抛物线的顶点随之变化. 设直线与抛物线的交点为 $A(m_1, \lambda_1)$ 和 $B(m_2, \lambda_2)$ ，于是 $\frac{\lambda}{m}$ 就可以理解为 OA 或 OB 的斜率了. 求 $\frac{\lambda}{m}$ 的取值范围转化为求抛物线的顶点位置变化时 OA 或 OB 的斜率的变化范围

设上述方程组的解为 (m, λ) ，假设有有序数对 (λ, m) 对应的点为 P ，则 $\frac{\lambda}{m}$ 表示直线 OP 的斜率.

设 $k = \sin^2 \alpha - 2\sin \alpha - 1 = (\sin \alpha - 1)^2 - 2$ ，则有： $-2 \leq k \leq 2$.

打开文件“3-1-例 2. dmr”，如图 3. 1. 7 所示，直线和抛物线分别表示方程 $\lambda + 2 - 2m = 0$ 、 $\lambda^2 - m + \sin^2 \alpha - 2\sin \alpha - 1 = 0$ 对应的曲线. 通过变量尺改变参数 k 的值或通过按钮设置它的值，观察直线 OP_1 、 OP_2 的斜率的变化范围.

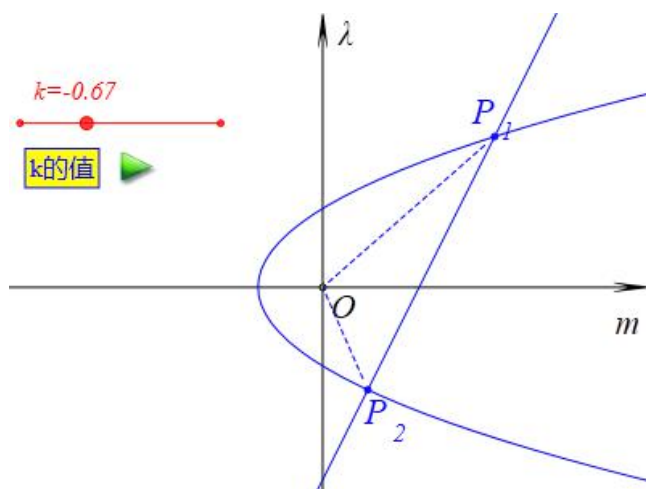


图 3. 1. 7

【思路点拨】

观察和研究线段 OP_1 和线段 OP_2 所扫描过的区域.

【动态解析】

不难发现当抛物线的顶点向左移动时， OA 的斜率变大而 OB 的斜率变小，当 $k = 2$ 时 OP_1 的斜率最大， OP_2 的斜率最小，如图 3. 1. 8 所示.

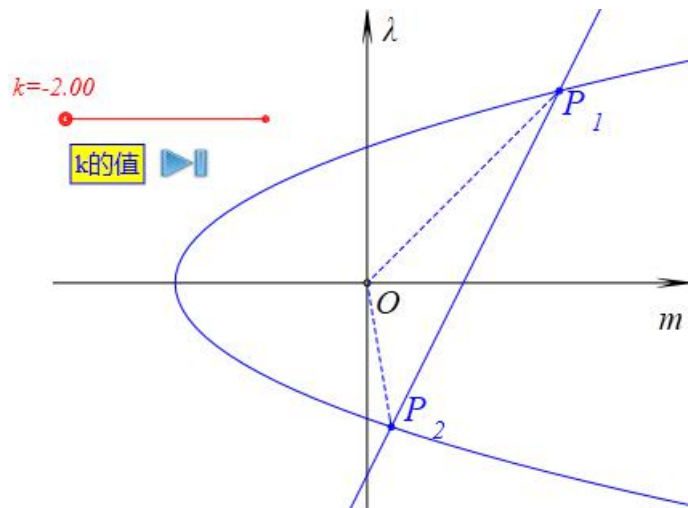


图 3.1.8

由 $\begin{cases} \lambda + 2 - 2m = 0 \\ \lambda^2 - m - 2 = 0 \end{cases}$ 解得: $P_1(2, 2)$ 、 $P_2(\frac{1}{4}, -\frac{3}{2})$.

因此 OP_1 的斜率为 1, OP_2 的斜率为 -6.

所以: $-6 \leq \frac{\lambda}{m} \leq 1$.

【简要评注】

对于坐标系形式下的向量, 应理解和明确其几何意义, 并能够快速准确地作出其对应的图形. 本题中对参数的处理方法是一种重要的解题思路.

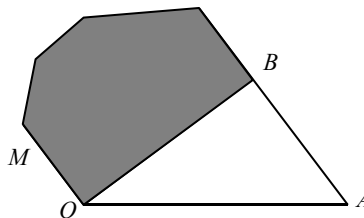
本节小结

解答向量问题, 应多从几何意义的角度思考问题, 因为向量本身就是图形.

向量的加减法运算具有明确的几何意义, 而平面向量基本定理是向量坐标表示的理论依据. 本节内容是向量研究的基础, 也充分体现了向量的性质特点.

拓展练习

1.1. 如右图: $OM \parallel AB$, 点 P 由射线 OM 、线段 OB 及 AB 的延长线围成的阴影区域内 (不含边界), 且 $\overrightarrow{OP} = x\overrightarrow{OA} + y\overrightarrow{OB}$, 则实数对 (x, y) 可以是 ().



- A. $(\frac{1}{4}, \frac{3}{4})$ B. $(-\frac{2}{3}, \frac{2}{3})$
C. $(-\frac{1}{4}, \frac{3}{4})$ D. $(-\frac{1}{5}, \frac{7}{5})$

第二节 向量的数量积与向量的模

1. 向量运算的几何意义

例 1. 设 $\boldsymbol{a}$ 、 $\boldsymbol{b}$ 、 $\boldsymbol{c}$ 为同一平面内具有相同起点的任意三个非零向量，且满足 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{c}$ 不共线， $\boldsymbol{a} \perp \boldsymbol{c}$ ， $|\boldsymbol{a}| = |\boldsymbol{c}|$ ，则 $|\boldsymbol{b} \cdot \boldsymbol{c}|$ 的值一定等于（ ）。

- A. 以 $\boldsymbol{a}$ ， $\boldsymbol{b}$ 为两边的三角形面积
- B. 以 $\boldsymbol{b}$ ， $\boldsymbol{c}$ 为两边的三角形面积
- C. 以 $\boldsymbol{a}$ ， $\boldsymbol{b}$ 为邻边的平行四边形的面积
- D. 以 $\boldsymbol{b}$ ， $\boldsymbol{c}$ 为邻边的平行四边形的面积

【思路点拨】

此题考查对向量的数量积的概念的理解。 $|\boldsymbol{b} \cdot \boldsymbol{c}| = |\boldsymbol{b}| |\boldsymbol{c}| \cos \langle \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c} \rangle$ ，根据条件 $|\boldsymbol{a}| = |\boldsymbol{c}|$ ， $|\boldsymbol{b} \cdot \boldsymbol{c}|$ 可改写为 $|\boldsymbol{b} \cdot \boldsymbol{c}| = |\boldsymbol{b}| |\boldsymbol{a}| \cos \langle \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c} \rangle$ 。又根据 $\boldsymbol{a} \perp \boldsymbol{c}$ ，考虑 $|\cos \langle \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c} \rangle|$ 可以改写成什么？

【动态解析】

打开文件“3-2-例 1. dmr”，如图 3.2.1 所示，可以用 $\overrightarrow{OA}$ 、 $\overrightarrow{OB}$ 、 $\overrightarrow{OC}$ 分别表示 $\boldsymbol{a}$ ， $\boldsymbol{b}$ ， $\boldsymbol{c}$ 。

设点 D 是点 B 在上 $\boldsymbol{c}$ 的射影。则 $|\boldsymbol{b} \cdot \boldsymbol{c}| = |\overrightarrow{OD}| \cdot |\overrightarrow{OC}|$ ，又因为 $|\boldsymbol{a}| = |\boldsymbol{c}|$ ，所以有 $|\boldsymbol{b} \cdot \boldsymbol{c}| = |\overrightarrow{OD}| \cdot |\overrightarrow{OA}|$ 。

又因为 $BD \parallel OA$ ，所以 $|\overrightarrow{OD}| \cdot |\overrightarrow{OA}|$ 表示以 OA 、 OD 为邻边的长方形的面积，即是以 OA 、 OB 为邻边的平行四边形的面积，如图 3.2.2 所示。

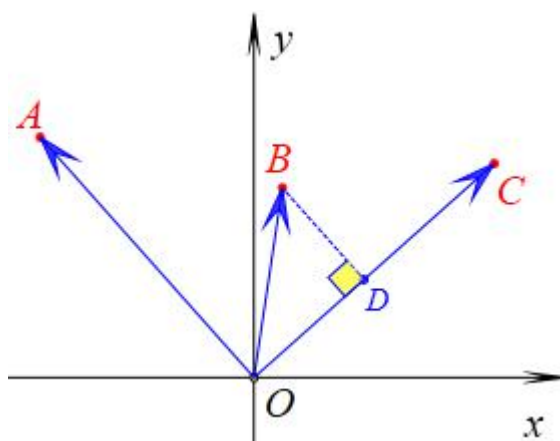


图 3.2.1

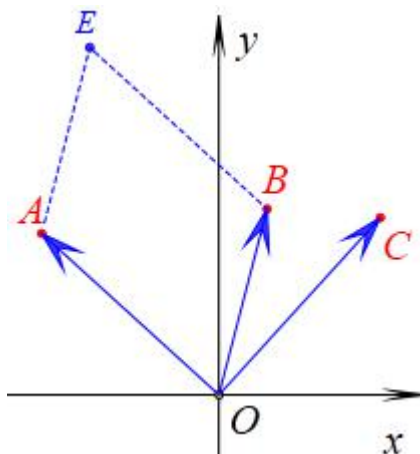


图 3.2.2

所以答案选择 C。

也可以这样考虑，由于 $\mathbf{a} \perp \mathbf{c}$ ，不难得出 $|\cos \langle \mathbf{b}, \mathbf{c} \rangle| = |\sin \langle \mathbf{b}, \mathbf{a} \rangle|$ ，于是 $|\mathbf{b} \cdot \mathbf{c}| = |\mathbf{b}| |\mathbf{c}| |\cos \langle \mathbf{b}, \mathbf{c} \rangle|$ 可以改写为 $|\mathbf{b} \cdot \mathbf{c}| = |\mathbf{b}| |\mathbf{a}| |\sin \langle \mathbf{b}, \mathbf{a} \rangle|$ ，这表示以 $\mathbf{a}$ ， $\mathbf{b}$ 为邻边的平行四边形的面积。

【简要评注】

本题的结论是建立在 $\mathbf{a} \perp \mathbf{c}$ 的条件下，这从动态解析的图像中很容易发现，而在一般情况下 $|\mathbf{a} \cdot \mathbf{c}|$ 并不表示平行四边形的面积。

2. 求向量的模的最值

例 2. 已知 $\mathbf{a}$ ， $\mathbf{b}$ 是平面内两个互相垂直的单位向量，若向量 $\mathbf{c}$ 满足 $(\mathbf{a} - \mathbf{c}) \cdot (\mathbf{b} - \mathbf{c}) = 0$ ，求 $|\mathbf{c}|$ 的最大值。

【动感体验】

这里 $\mathbf{a}$ ， $\mathbf{b}$ 是平面内两个互相垂直的单位向量，而向量 $\mathbf{c}$ 是满足约束条件 $(\mathbf{a} - \mathbf{c}) \cdot (\mathbf{b} - \mathbf{c}) = 0$ 的向量，如何理解条件 $(\mathbf{a} - \mathbf{c}) \cdot (\mathbf{b} - \mathbf{c}) = 0$ 是解决问题的突破口。可以把 $(\mathbf{a} - \mathbf{c}) \cdot (\mathbf{b} - \mathbf{c})$ 看成向量 $\mathbf{a} - \mathbf{c}$ 和 $\mathbf{b} - \mathbf{c}$ 的数量积，该数量积等于零意味着这两个向量垂直。不妨设向量 $\mathbf{a}$ ， $\mathbf{b}$ ， $\mathbf{c}$ 的始点为坐标原点 O ，根据题意则有 $\mathbf{a}$ ， $\mathbf{b}$ 的终点 A ， B 都在单位圆上，而 $\mathbf{a} - \mathbf{c}$ 作为向量 $\mathbf{a}$ 与 $\mathbf{c}$ 的差是以 $\mathbf{c}$ 的终点为起点指向 $\mathbf{a}$ 的终点的向量， $\mathbf{b} - \mathbf{c}$ 作为向量 $\mathbf{b}$ 与 $\mathbf{c}$ 的差是以 $\mathbf{c}$ 的终点为起点指向 $\mathbf{b}$ 的终点的向量，于是 $\mathbf{c}$ 的终点 C 应该在以 AB 为直径的圆周上，这样求向量 $\mathbf{c}$ 的模的最大值就成为求不难解决了。

打开文件“3-2-例 2. dmr”，如图 3.2.3 所示，拖动点 C 观察 $|\mathbf{c}|$ 的变化情况。

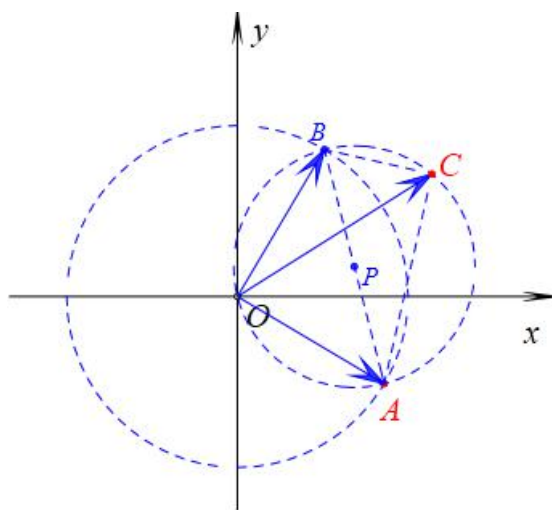


图 3.2.3

【思路点拨】

求 $|c|$ 的最大值问题转化为求最长的弦的问题.

【动态解析】

如图 3.2.4 所示, 当 OC 为圆的直径时, $|c|$ 的值最大等于 $|AB|$, 为 $\sqrt{2}$.

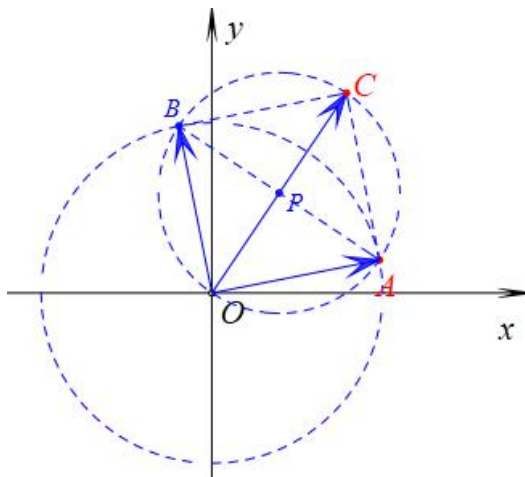


图 3.2.4

【简要评注】

解决本题的关键是找出 c 的位置特征: 由 $(a-c) \cdot (b-c) = 0$ 可知 $(a-c) \perp (b-c)$, 从而有 $BC \perp AC$, 进一步得到点 C 在以 AB 为直径的圆上.

3. 向量所表示的几何图形

例 3. 设向量 a, b 满足: $|a|=3, |b|=4, a \cdot b=0$. 以 $a, b, a-b$ 的模为边长构成三角形, 则它的边与半径为 1 的圆的公共点个数最多为 ().

- A. 3 B. 4 C. 5 D. 6

【动感体验】

打开文件“3-2-例 3. dmr”, $\overrightarrow{OA}$ 、 $\overrightarrow{OB}$ 分别表示 a 、 b . 圆 P 的半径为 1, 拖动点 P , 观察圆 P 与 $\triangle ABC$ 之间的关系. 如图 3.2.5—3.2.8 所示为其中的几种情形.

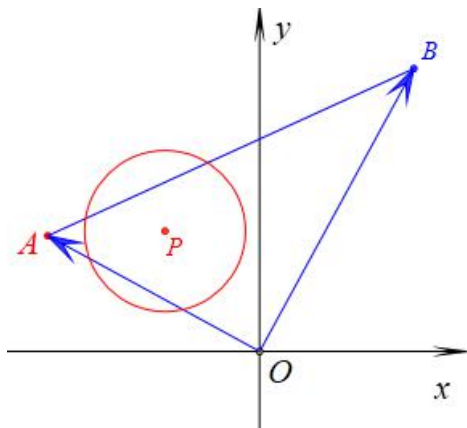


图 3.2.5

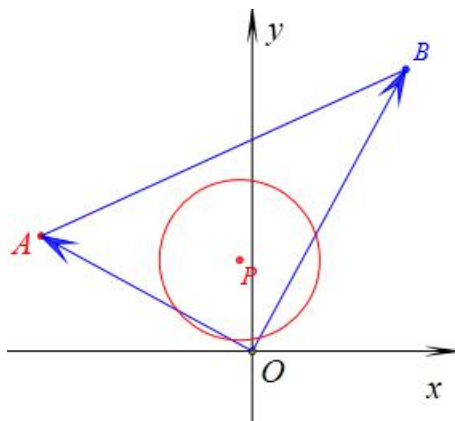


图 3.2.5

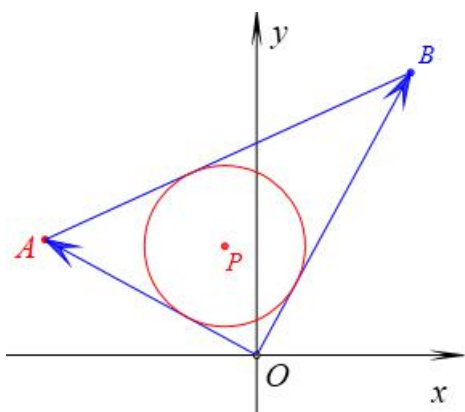


图 3.2.7

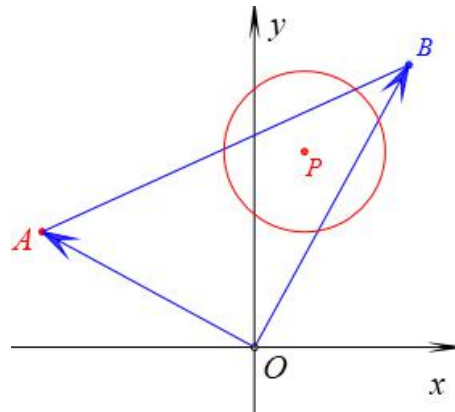


图 3.2.8

【思路点拨】

本题考查向量的模、向量的数量积、向量的减法运算的几何意义等概念. 从以上概念出发应该容易发现本题中的以 a 、 b 、 $a-b$ 的模为边长构成三角形的特点, 计算三角形 ABC 内切圆的半径, 再与圆 P 的半径进行比较, 进而考虑三角形的边与圆的公共点的个数.

【动态解析】

因为 $|a|=3$, $|b|=4$, $a \cdot b=0$, 所以三角形 ABO 是直角三角形, 斜边 $AB=5$.

设 r 为直角三角形 ABC 内切圆的半径, 则由

$$S_{ABC} = \frac{1}{2}r \cdot (OA + AB + BO) = \frac{1}{2}OA \cdot OB \text{ 解得: } r=1.$$

图 3.2.7 所示, 此时圆 P 为 $\triangle ABO$ 的内切圆, 这是圆 P 与 $\triangle ABO$ 的边有三个公共点, 不难想象如果稍微移动一下这个圆, 公共点的个数可以增加四个且最多为 4 个, 如图 3.2.5、图 3.2.6、图 3.2.8 所示.

【简要评注】

解决本题的关键是判断三角形的形状并计算出内切圆的半径, 从而在整体上把握住图形的特征以及它们之间的关系.

4. 比较向量的模的大小

例 4. 若非零向量 $\mathbf{a}$ 、 $\mathbf{b}$ 满足 $|\mathbf{a} + \mathbf{b}| = |\mathbf{b}|$ ，则 () .

- A. $|2\mathbf{a}| > |2\mathbf{a} + \mathbf{b}|$ B. $|2\mathbf{a}| < |2\mathbf{a} + \mathbf{b}|$
C. $|2\mathbf{b}| > |\mathbf{a} + 2\mathbf{b}|$ D. $|2\mathbf{b}| < |\mathbf{a} + 2\mathbf{b}|$

【动感体验】

首先，从条件 $|\mathbf{a} + \mathbf{b}| = |\mathbf{b}|$ 想到构造一个等腰三角形其两腰分别为 $|\mathbf{b}|$ 和 $|\mathbf{a} + \mathbf{b}|$ ，根据向量加法的几何意义想到这个等腰三角形的底边是向量 $\mathbf{a}$ 的模；而当 $\mathbf{a} = -2\mathbf{b}$ 时这种情况比较简单.

打开文件“3-2-例 4. dmr”，如图 3.2.9 所示，设 $\overrightarrow{BA} = \mathbf{a}$ ， $\overrightarrow{OB} = \mathbf{b}$ ，拖动点 A 或点 B 可以发现始终有 $|\mathbf{a} + \mathbf{b}| = |\mathbf{b}|$ 成立. 考虑四个选项所表示的意义，并研究它们是否成立.

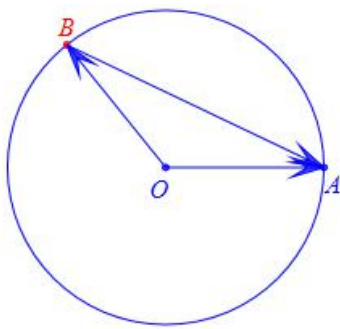


图 3.2.9

【思路点拨】

通过向量之间夹角大小比较向量模的大小.

【动态解析】

(一) 首先判断 $|2\mathbf{a} + \mathbf{b}|$ 与 $|2\mathbf{a}|$ 的关系

进入文件“3-2-例 4. dmr”的第二页，如图 3.2.10 所示， $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{BA}$ ，因此 $\overrightarrow{BC} = 2\mathbf{a}$ ， $\overrightarrow{OC} = 2\mathbf{a} + \mathbf{b}$.

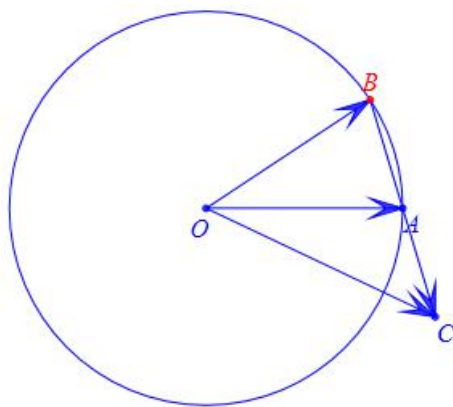


图 3.2.10

易知：

当 $\angle BOC > \angle OBC$ 时，如图 3.2.11 所示， $\overrightarrow{BC} > \overrightarrow{OC}$ ，即 $|2a| > |2a + b|$ ；当 $\angle BOC = \angle OBC$ 时，如图 3.2.10 所示， $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{OC}$ ，即 $|2a| = |2a + b|$ ；当 $\angle BOC < \angle OBC$ 时，如图 3.2.12 所示， $\overrightarrow{BC} < \overrightarrow{OC}$ ，即 $|2a| < |2a + b|$ 。

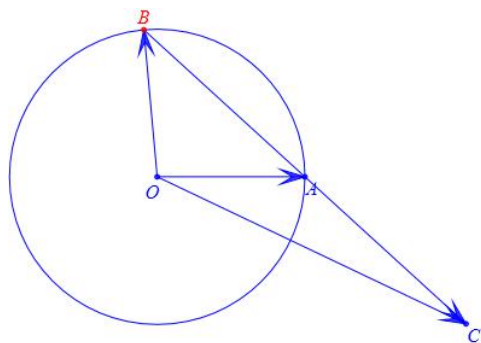


图 3.2.11

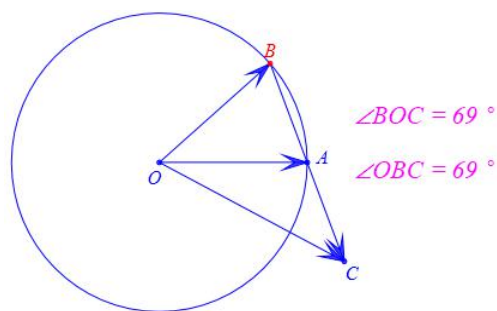


图 3.2.12

所以 $|2a + b|$ 与 $|2a|$ 之间的大小关系不确定。

(二) 其次判断 $|2b|$ 与 $|2b + a|$ 的关系

进入文件“3-2-例 4. dmr”的第三页，如图 3.2.13 所示，点 B' 是点 B 关于点 O 的对称点，则有 $B'B = 2b$ ，为圆的直径，因此， $B'A = a + 2b$ 。而无论 a 为任意不为零的向量时，在直角三角形 BBA 中总有斜边 $B'B$ 大于直角边 $B'A$ ，即 $|2b| > |a + 2b|$ 。

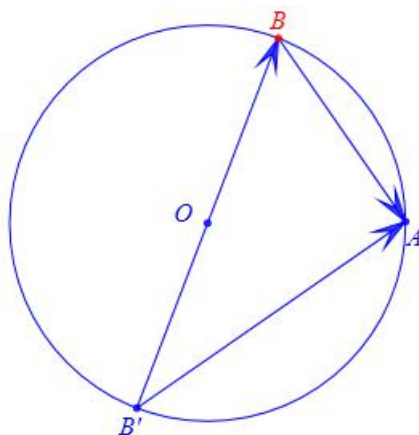


图 3.2.13

因此答案选择 C.

【简要评注】

根据向量运算对应的式子构造向量，建立图形，然后探索几何对象之间的几何关系，研究选项中各式子所表示的几何意义，最后作出判断.

5. 向量之间模的关系与几何关系

例 5. 已知向量 $a \neq e$ ， $|e|=1$ 满足：对任意 $t \in R$ ，恒有 $|a - te| \geq |a - e|$ ，则（ ）.

- A. $a \perp e$ B. $a \perp (a - e)$
- C. $e \perp (a - e)$ D. $(a + e) \perp (a - e)$

【思路点拨】

本题需要考虑向量的数乘与向量加法的意义，画出向量 e 、 te 、 a 、 $a - e$ 和 $a - te$. 再考虑对任意 $t \in R$ 不等式 $|a - te| \geq |a - e|$ 的几何意义是什么，剩下的问题就迎刃而解了.

【动态解析】

打开文件“3-2-例 5. dmr”，如图 3.2.14、图 3.2.15 所示， $\overrightarrow{OA}$ 、 $\overrightarrow{OE}$ 、 $\overrightarrow{OT}$ 分别表示向量 a 、 te 、 e ，那么 $\overrightarrow{EA}$ 、 $\overrightarrow{TA}$ 分别表示向量 $a - e$ 和 $a - te$.

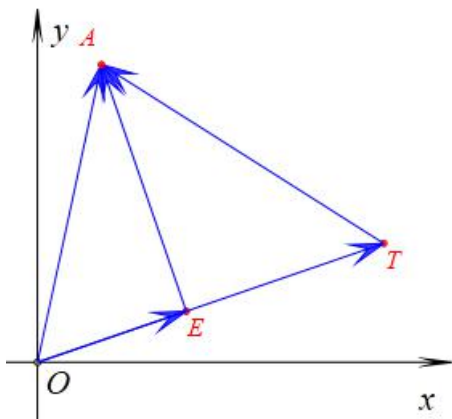


图 3.2.14

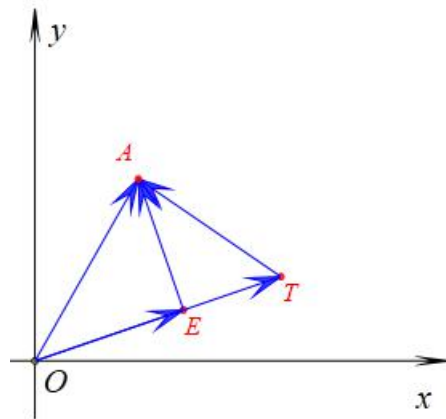


图 3.2.15

拖动红色的点或者改变 t 的值, 可以发现始终有 $|a - te| \geq |a - e|$ 成立. 拖动向量 te 的终点可以改变 $|te|$ 的值, 可以发现这时总有 $|a - te| \geq |a - e|$ 成立.

由 $|a - te| \geq |a - e|$ 对于任意 $t \in \mathbb{R}$ 恒成立知道 $e \perp (a - e)$.

所以选择 C.

【简要评注】

在本题中构造出 $a - e$ 所表示的几何图形, 并明确 $|a - e|$ 的最小值的几何意义, 就可以节省很多繁琐的代数计算.

本节小结

处理向量问题的过程中一定要结合图形, 并抓住图形的几何特征. 在本节中, 几种构造向量所对应图形的方法值得总结和借鉴.

向量的数量积运算不仅将向量与代数运算很好地结合起来, 它还有许多实际的背景. 在学习时应注意与多项式运算相比较.

拓展练习

2.1. 已知 $\vec{a}$ 是平面内的单位向量, 若向量 $\vec{b}$ 满足 $\vec{b} \cdot (\vec{a} - \vec{b}) = 0$, 则 $|\vec{b}|$ 的取值范围是_____.

2.2. 若非零向量 a, b 满足 $|a - b| = |b|$, 则 ()

A. $|2b| > |a - 2b|$ B. $|2b| < |a - 2b|$

C. $|2a| > |2a - b|$ D. $|2a| < |2a - b|$

第四章 不等式

不等式是中学数学中的重要内容,与其他各章节联系密切,应用广泛.不等式的考题综合性强,不仅考察基础知识和基本概念,更加考察知识的运用能力和方法的使用技巧.对于这部分考题,选择恰当的方法常常可以事半功倍,快速而准确地得到问题的解答途径.本章内容所选择的题目在解法上更突出数形几何的思想,因此问题的解答过程显得水到渠成.

第一节 比较大小

1. 比较代数式的大小

例 1. 若 $0 < a_1 < a_2, 0 < b_1 < b_2$, 且 $a_1 + a_2 = b_1 + b_2 = 1$, 则下列代数式中值最大的是 ()

- A. $a_1b_1 + a_2b_2$ B. $a_1a_2 + b_1b_2$ C. $a_1b_2 + a_2b_1$ D. $\frac{1}{2}$

方法一

【动感体验】

打开文件“4-1-例 1. dmr”, 如图 4. 1. 1 所示, $OPKQ$ 为边长为 1 的正方形, 点 P' 在 OP 上, 点 Q' 在 OQ 上, $P'N \parallel OQ$, $Q'M \parallel OP$, 点 M 在 PK 上, 点 N 在 QK 上, $P'N$ 与 $Q'M$ 交于点 T .

其中 $a_1 = OP'$, $a_2 = P'P$, $b_1 = OQ'$, $b_2 = Q'Q$. 考虑 $a_1b_1 + a_2b_2$, $a_1a_2 + b_1b_2$, $a_1b_2 + a_2b_1$ 在图形中所能表示的几何意义, 并比较四个选项对应数值的大小, 点 P' 和 Q' 可以被拖动.

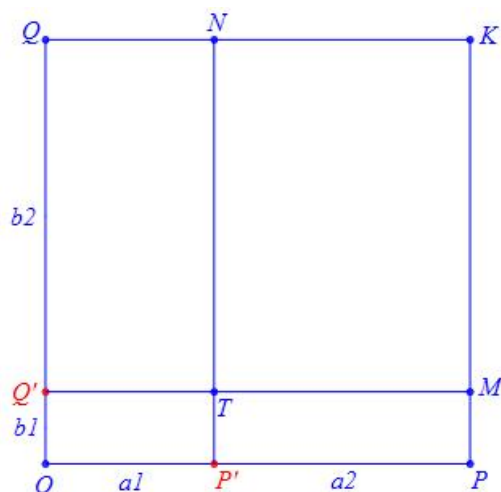


图 4.1.1

【思路点拨】

由 $a_1 + a_2 = b_1 + b_2 = 1$ 及 $0 < a_1 < a_2, 0 < b_1 < b_2$ ，则容易得到：

$$a_1 a_2 + b_1 b_2 < \left(\frac{a_1 + a_2}{2}\right)^2 + \left(\frac{b_1 + b_2}{2}\right)^2 = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2}.$$

因此，关键在于考虑 $a_1 b_1 + a_2 b_2$ ， $a_1 b_2 + a_2 b_1$ 所表示的几何意义.

【动态解析】

进入文件“4-1-例 1. dmr”的第二页，如图 4.1.2、图 4.1.3 所示，阴影部分的面积表示代数式 $a_1 b_1 + a_2 b_2$ 的大小，则剩余的空白部分表示 $a_1 b_2 + a_2 b_1$ 的值.

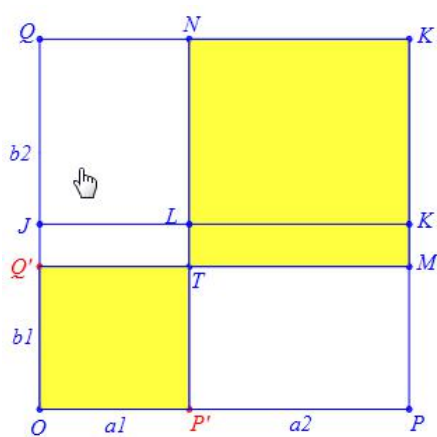


图 4.1.2

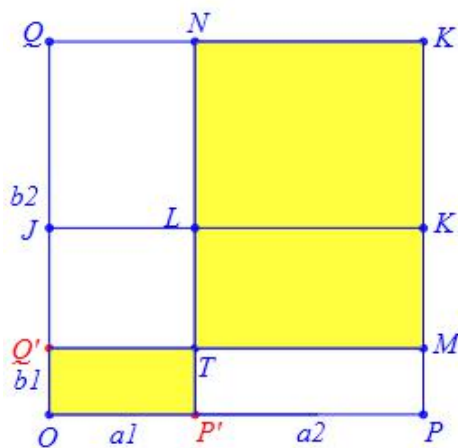


图 4.1.3

点 J 、点 K 分别是 OQ 、 PK 的中点，则矩形 $OPKJ$ 的面积为 $\frac{1}{2}$. 相对于矩形 $OPKJ$

的面积， $a_1 b_1 + a_2 b_2$ 表示的图形割去了一块 $Q'TLJ$ 同时补上了一块 $TMKL$. 因为补的部分

大于割的部分, 所以有 $a_1b_2 + a_2b_1 < \frac{1}{2} < a_1b_1 + a_2b_2$.

因此答案选择: A.

方法二

不妨设 $a_1 = \frac{1}{3}$, $a_2 = \frac{2}{3}$, $b_1 = \frac{1}{4}$, $b_2 = \frac{3}{4}$. 则

$$a_1b_1 + a_2b_2 = \frac{1}{12} + \frac{6}{12} = \frac{7}{12},$$

$$a_1a_2 + b_1b_2 = \frac{2}{9} + \frac{3}{16} = \frac{32+27}{144} = \frac{59}{144} < \frac{1}{2},$$

$$a_1b_2 + a_2b_1 = \frac{3}{12} + \frac{2}{12} = \frac{5}{12}.$$

可见应该选择 A.

方法三

由 $a_1 + a_2 = b_1 + b_2 = 1$ 及 $0 < a_1 < a_2, 0 < b_1 < b_2$, 则容易得到:

$$a_1a_2 + b_1b_2 < \left(\frac{a_1+a_2}{2}\right)^2 + \left(\frac{b_1+b_2}{2}\right)^2 = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2}.$$

因此, 剩下的问题是比较 $a_1b_1 + a_2b_2$ 与 $a_1b_2 + a_2b_1$ 的大小, 考虑到已知条件, 考察 $(a_2 - a_1)(b_2 - b_1)$ 的符号, 很明显这个乘积大于零. 由 $(a_2 - a_1)(b_2 - b_1) > 0$, 展开整理就得到 $a_1b_1 + a_2b_2 > a_1b_2 + a_2b_1$. 又因为

$$a_1b_1 + a_2b_2 + a_1b_2 + a_2b_1 = a_1(b_1 + b_2) + a_2(b_1 + b_2) = a_1 + a_2 = 1$$

$$\text{所以 } a_1b_1 + a_2b_2 > \frac{1}{2}, \quad a_1b_2 + a_2b_1 < \frac{1}{2}.$$

可见应该选择 A.

【简要评注】

本题实际上是给出了两项的排序不等式的几何证明问题, 实际上在教科书上也给出过均值不等式的几何证明过程, 大家可以对这两种方式进行比较, 归纳并加以推广和应用.

从不同的思路下手都得到了问题的解答, 体现了解法的多样性. 方法二用几个具体的数字代入计算代数式的值, 用的基础知识最少, 对于处理四选一的选择題不失为一种有效的方法, 但这不是证明而仅作为发现数学事实的实验方法. 方法一借助构造与需要判断的代数式有关的图形, 用到了割补法, 渗透一些证明的因素, 这种借助图形直观的方法不需要计算,

显得比较便捷. 计算机的动态演示实际上是一种更灵活的数学实验, 更利于发现数学事实. 方法三则是在分析了已知条件和题目要求的内在联系后的构造式的证明, 逻辑性强. 本题实际上是排序不等式的最简单的情况. 一般情况是: 对于两个 n 元数组 $\{a_1, a_2, \dots, a_n\}$,

$\{b_1, b_2, \dots, b_n\}$, 如果满足下列条件

$$a_1 \leq a_2 \leq \dots \leq a_n, \quad b_1 \leq b_2 \leq \dots \leq b_n,$$

我们把 $a_1b_1 + a_2b_2 + \dots + a_nb_n$ 称为同序和, $a_1b_n + a_2b_{n-1} + \dots + a_nb_1$ 为反序和, 可以证

明: $a_1b_n + a_2b_{n-1} + \dots + a_nb_1 \leq a_1b_1 + a_2b_2 + \dots + a_nb_n$, 即反序和 $\leq$ 同叙序和.

对于两项的情况用下面的例子很好说明: 有单价分别是 1 元和 100 元的两种书, 现在要买这两种书共 3 本, 每种至少买一本, 问怎样的方案花钱少? 谁都知道方案是 100 元的买 1 本, 1 元的买 2 本, 共花费 $1 \times 100 + 2 \times 1 = 102$ 元, 而不是 $1 \times 1 + 2 \times 100 = 201$ 元. 实际上这里 $1 \times 1 + 2 \times 100$ 为同序和, $1 \times 100 + 2 \times 1$ 为反序和.

例 2. 如果正数 a, b, c, d 满足 $a+b=cd=4$, 那么 ()

- A. $ab \leq c+d$, 且等号成立时 a, b, c, d 的取值唯一
- B. $ab \geq c+d$, 且等号成立时 a, b, c, d 的取值唯一
- C. $ab \leq c+d$, 且等号成立时 a, b, c, d 的取值不唯一
- D. $ab \geq c+d$, 且等号成立时 a, b, c, d 的取值不唯一

方法一:

【动感体验】

根据 $a+b=4$, 可以考虑满足此条件的数组 (a, b) 为直线 $x+y=4$ 上的点的坐标. 同样

根据 $cd=4$ 可以考虑满足此条件的数组 (c, d) 为反比例函数 $y = \frac{4}{x}$ 上的点的坐标. 考虑这

两条曲线的位置关系可能有助于这个问题的解答.

可设 $P(a, b)$ 为直线 $x+y=4$ 上的点, 点 $Q(c, d)$ 为曲线 $xy=4$ 上的点, 打开文件

“4-1-例 2. dmr”, 如图 4.1.4 所示, 点 P 和点 Q 可以被拖动, 观察两点之间的位置关系.

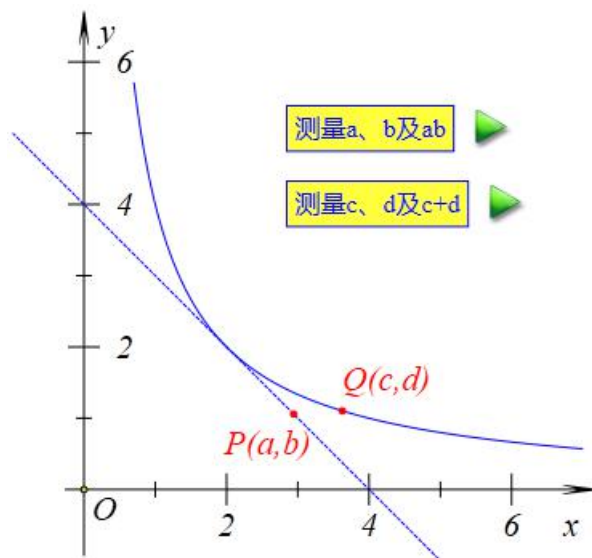


图 4.1.4

选择点 P，单击[测量 a、b 及 ab]按钮即可测量测量 a、b 及 ab 的值；选择点 Q，单击[测量 c、d 及 c+d]按钮即可测量测量 c、d 及 c+d 的值.

【思路点拨】

将代数式 ab 、 $c+b$ 之间的关系转换为直线 $x+y=4$ 与曲线 $xy=4$ 之间的位置关系.

【动态解析】

在第一象限内，因为直线 $x+y=4$ 在曲线 $xy=4$ 的下方，因此对于直线上的点 $P(a,b)$ 都有 $ab \leq 4$. 同时，因为曲线 $xy=4$ 在直线 $x+y=4$ 的上方，因此对于曲线上的点 $Q(c,d)$ 都有 $c+d \geq 4$. 所以有 $ab \leq 4 \leq c+d$ ，当且仅当点 P 与点 Q 重合，即在直线 $x+y=4$ 与曲线 $xy=4$ 的切点位置时，如图 4.1.5 所示，等号成立，此时 $a=b=c=d=2$.

因此答案选择 A.

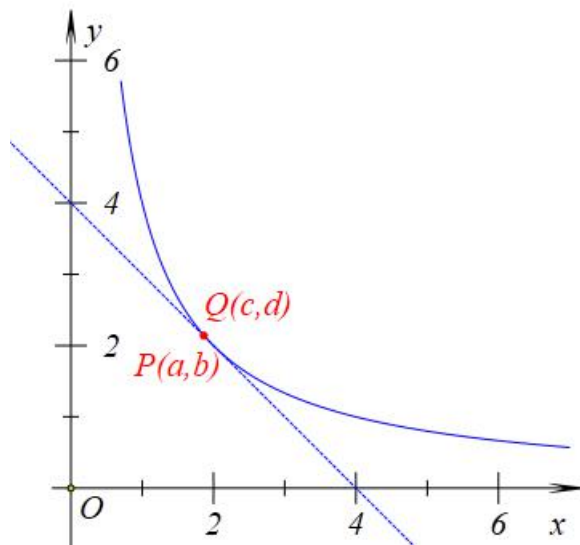


图 4.1.5

方法二

首先需要判断的是 $ab \leq c+d$ 还是 $ab \geq c+d$ ，然后再考虑等号成立时 a, b, c, d 的取值是否唯一. 自然联想到平均值不等式 $\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$ 和 $\frac{c+d}{2} \geq \sqrt{cd}$ ，由于正数

a, b, c, d 满足 $a+b=cd=4$ ，所以有 $2 \geq \sqrt{ab}$ 和 $\frac{c+d}{2} \geq 2$ ，即 $ab \leq 4$ 和 $c+d \geq 4$.

由此当然有 $ab \leq c+d$ 成立，且等号成立时 a, b, c, d 都等于 2. 故选择 A.

【简要评注】

平均值不等式是比较代数式的大小最常用的工具，务必要能熟练地应用. 用函数的观点处理不等式有时也很方便，特别是函数图像可以使抽象的代数式的不等关系变得直观而易于理解.

本题通过比较两个函数图像的位置比较代数式的大小，将 ab 、 $c+d$ 作为一个整体进行处理，使问题变得更加明确也更加简洁. 您也可以修改题设中的条件，研究其他情况下的结论.

2. 由相等关系判断不等关系

例 3. 已知 $a \geq 0$ ， $b \geq 0$ 且 $a+b=2$ ，则 ().

- A. $ab \leq \frac{1}{2}$ B. $ab \geq \frac{1}{2}$ C. $a^2+b^2 \geq 2$ D. $a^2+b^2 \leq 3$

方法一

【动感体验】

把 (a, b) 看成一个动点的坐标，那么该点在直线 $x+y=2$ 上.

a^2+b^2 则看成是该点与坐标原点距离的平方. 至于 ab 可以看成是直径为 2 的半

圆上的动点到直径距离的平方. 这样一来, 本题可以通过形数结合的办法解决.

打开文件“4-1-例 3. dmr”, 如图 4.1.6 所示. 拖动点 H 观察 QH 即 $\sqrt{ab}$ 变化对选项 A 和选项 B 作出判断. 拖动点 P 观察 OP 即 $\sqrt{a^2+b^2}$ 的变化对选项 C 和选项 D 做出判断.

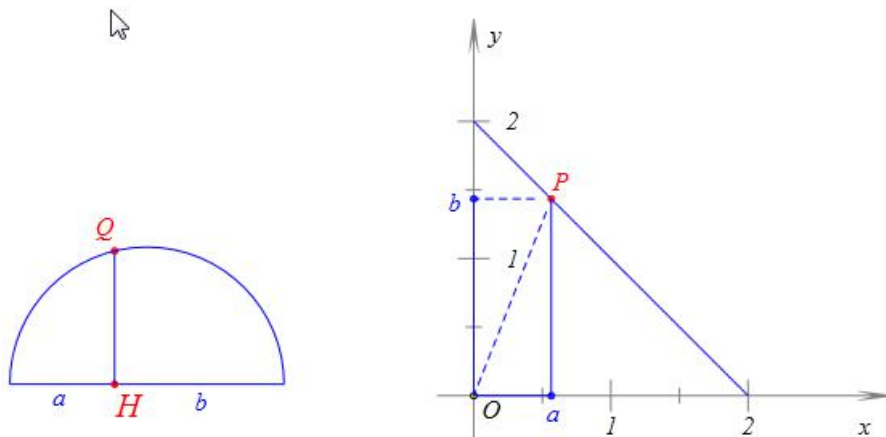


图 4.1.6

【思路点拨】

找到 $|OP|$ 和 $|QH|$ 的最值.

【动态解析】

容易知道 $|QH| \leq 1$, $|OP| \geq \sqrt{2}$.

所以选项 C 正确.

方法二

【动态解析】

ab 可以考虑为函数 $y = x(2-x), x \in (0,2)$ 的函数值, a^2+b^2 可以考虑为函数 $y = x^2 + (2-x)^2, x \in (0,2)$ 的函数值. 进入文件“4-1-例 3. dmr”的第二页, 如图 4.1.7 所示, 画出这两个函数的图像就能帮助我们快速进行判断了.

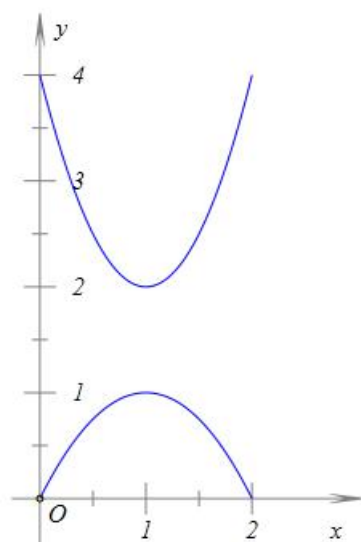


图 4.1.7

则有 $0 < ab \leq 1$, $2 \leq a^2 + b^2 \leq 4$. 所以选项 C 正确.

方法三

【动感体验】

可以考虑方程 $a+b=2$ 对应的直线段和方程 $ab=\frac{1}{2}$ 对应的曲线的位置关系对选项 A

和选项 B 作出判断. 通过圆心在坐标原点的半径为 r 的动圆与直线 $a+b=2$ 的位置关系对选项 C 和选项 D 做出判断.

进入文件“4-1-例 3. dmr”的第三页, 如图 4.1.8 所示, 实线表示方程 $a+b=2$ 对应的直线段, 虚线表示方程 $ab=\frac{1}{2}$ 对应的曲线. 观察两个方程对应图像之间的关系对选项 A 和选项 B 作出判断.

通过变量尺可以改变 r 的值或通过按钮设置 r 的值, 从而改变圆的半径, 通过圆与直线的关系, 对选项 C 和选项 D 做出判断.

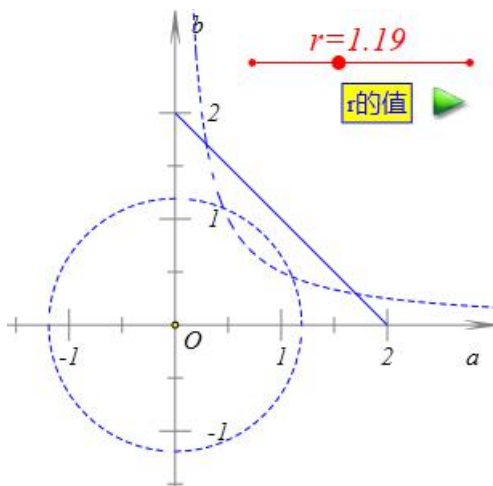


图 4.1.8

【思路点拨】

在第一象限内, 考虑曲线 $ab = \frac{1}{2}$ 右上侧的点所对应的不等关系, 左下侧的点所对应的不等关系.

【动态解析】

因为曲线 $ab = \frac{1}{2}$ 与直线 $a+b=2$ 相交, 因此选项 A 和选项 B 都不成立.

如图 4.1.9 所示, 当圆 O 与直线 $a+b=2$ 相切时, 通过计算可知圆 O 的半径为 $\sqrt{2}$, 因此直线上所有的点到圆心 O 的距离都不小于 $\sqrt{2}$, 即 $a^2+b^2 \geq 2$.

如图 4.1.10 所示, 当圆 O 的半径为 2 时, 直线 $a+b=2$ 在圆 O 的内部, 因此直线上所有的点到圆心 O 的距离都不大于 2, 即 $a^2+b^2 \leq 4$.

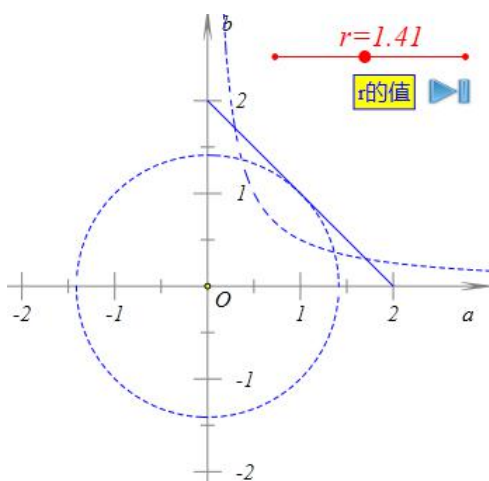


图 4.1.9

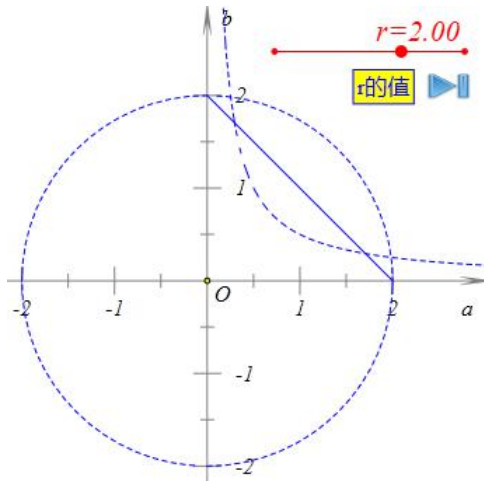


图 4.1.10

因此选择 C.

方法四

由平均值不等式 $\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$ 只能得到 $1 \geq \sqrt{ab}$, 或 $ab \leq 1$. 这个范围太大了,

$ab \leq \frac{1}{2}$ 还是 $ab \geq \frac{1}{2}$ 不能确定. 可以设 $a=b=1$, 得 $ab=1$ 于是可以否定 A; 设

$a=\frac{1}{5}, b=\frac{9}{5}$, 得 $ab=\frac{9}{25}$ 可以否定 B. 由不等式 $(\frac{a+b}{2})^2 \leq \frac{1}{2}(a^2+b^2)$ 得到 $a^2+b^2 \geq 2$.

取 $a=2, b=0$, 则 $a^2+b^2=4>3$, 可以否定 D, 所以选择 C.

【简要评注】

通常情况下, $a^2 + b^2$ 对应的几何模型是圆周或者到原点的距离, 一次函数 (或方程) 则对应于直线. 通过几何对象之间的关系判断代数式的大小关系能够把处理问题的过程变得更简洁.

本题给出了几种解法. 有基于基本不等式的方法四, 有借助平面几何与解析几何知识借助数形结合的方法一和方法三, 还有从用函数观点借助于研究相应函数图像特点的方法二. 从不等式的常规解法看, 基本不等式用得最多, 要把基本不等式连成串记忆, 才能灵活运用. 方法二从函数角度解决问题还是比较有效的方法, 也比较节省时间. 则需要把代数对象赋予几何意义. 总之, 头脑中要有系统的知识储备和灵活的处理问题的策略.

本节小结

比较大小的问题往往可以借助代数式的几何意义去观察和研究, 如面积、距离、斜率、截距等等, 关键是能够构造出相应的几何图形或图形关系, 通常用到的图形有直线、圆或其他常见曲线.

若关于不等式知识进行单独命题时, 常有比较大小的问题, 题型以选择、填空题为主. 通常属于中、低等难度, 解法很多, 有一定的开放性. 本节所介绍的解答过程以通过几何方法比较为主, 关于代数的方法可看到第一章及第七章的内容.

拓展练习

1, 已知 $0 < a < 1$, $x = \log_a \sqrt{2} + \log_a \sqrt{3}$, $y = \frac{1}{2} \log_a 5$, $z = \log_a \sqrt{21} - \log_a \sqrt{3}$,

则 ().

A. $x > y > z$ B. $z > y > x$ C. $y > x > z$ D. $z > x > y$

2, 设 $a, b \in R$, 若 $a - |b| > 0$, 则下列不等式中正确的是 ()

A. $b - a > 0$ B. $a^3 + b^3 < 0$ C. $a^2 - b^2 < 0$ D. $b + a > 0$

3, 设 a 、 b 、 c 是互不相等的正数, 则下列等式中不恒成立的是 ()

A. $|a - b| \leq |a - c| + |b - c|$ B. $a^2 + \frac{1}{a^2} \geq a + \frac{1}{a}$

C. $|a - b| + \frac{1}{a - b} \geq 2$ D. $\sqrt{a + 3} - \sqrt{a + 1} \leq \sqrt{a + 2} - \sqrt{a}$

第二节 解不等式

1. 解含有绝对值的不等式

例 1. 设函数 $f(x) = |2x + 1| - |x - 4|$.

(I) 解不等式 $f(x) > 2$;

(II) 求函数 $y = f(x)$ 的最小值.

(一) 解不等式 $f(x) > 2$

方法一

【动感体验】

可以通过分段讨论把绝对值的符号去掉, 于是函数 $f(x) = |2x+1| - |x-4|$ 在每一段都是一次函数. 这就不难想象出函数的图像是由折线组成的. 事实上令 $x = -\frac{1}{2}$ 和 $x = 4$ 计算出相应的函数值不难得到图像中间一段端点的坐标, 从而画出这条线段. 令 $x = -1$ 计算相应的函数值画出左面一段函数图像, 令 $x = 5$ 计算相应的函数值画出右面一段函数图像. 有了这个函数图像的略图, 题目中的两问就都不难解决了.

打开文件“4-2-例 1. dmr”, 函数 $f(x) = |2x+1| - |x-4|$ 图像如图 4.2.1 所示, 拖动点 x 观察对应的函数值的变化, 要得到第一小题的准确答案还需要计算点 C 和点 D 的横坐标.

当 $x \in [-\frac{1}{2}, 4]$ 时, $f(x) = 2x+1 - (4-x) = 3x-3$, 所以当 $\frac{5}{3} < x \leq 4$ 时 $f(x) > 2$;

又当 $x \in (-\infty, -\frac{1}{2}]$ 时, $f(x) = -(2x+1) - (4-x) = -x-5$, 所以当 $x < -7$

时, $f(x) > 2$.

当 $x \in [4, +\infty)$ 时, $f(x) = x+5$, 显然 $f(x) > 2$.

所以, 当 $x < -7$ 或者 $x > \frac{5}{3}$ 时, 即 $f(x) > 2$.

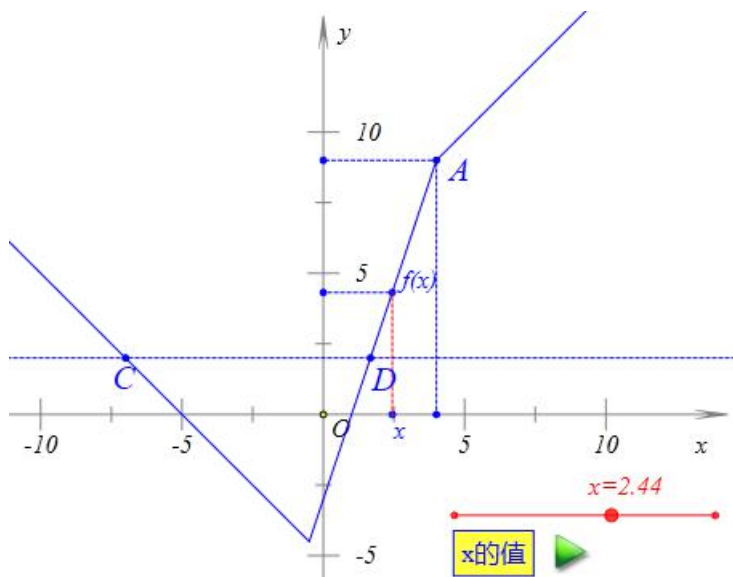


图 4.2.1.

方法二

$f(x) > 2$ 可化为 $|2x+1| > |x-4|+2$. 设 $g(x) = |2x+1|$, $h(x) = |x-4|+2$. 进入文件“4-2-例 1.dmr”的第二页, 如图 4.2.2 所示, 实线为函数 $g(x)$ 的图像, 虚线为函数 $h(x)$ 的图像. 观察两个函数图像之间的关系, 研究当 $g(x) > h(x)$ 时, x 对应的范围.

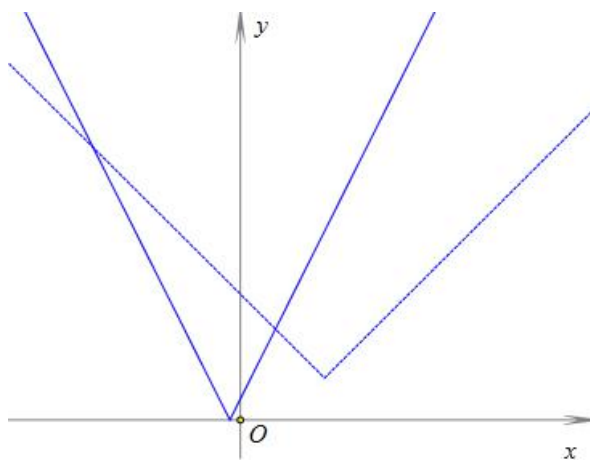


图 4.2.2

【思路点拨】

求曲线之间的交点对应的临界位置.

【动态解析】

容易求得直线 $y = |x-4|+2$ ($x < 4$) 与 $y = |2x+1|$ 的两个交点 $A(-7, 13)$ 、

$B(\frac{5}{3}, \frac{13}{3})$, 如图 4.2.2 所示.

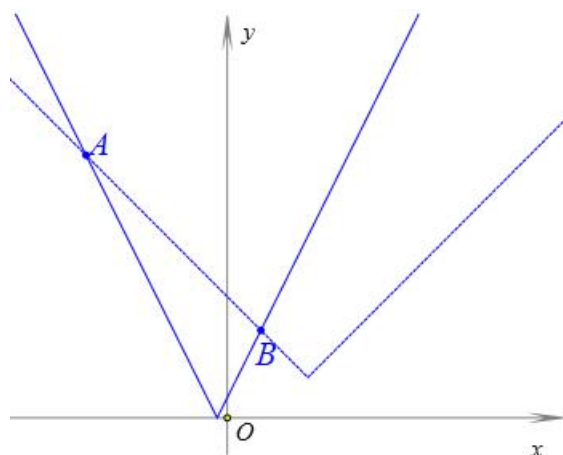


图 4.2.2

所以，当 $x < -7$ 或者 $x > \frac{5}{3}$ 时， $g(x) > h(x)$ ，即 $f(x) > 2$ 。

(二) 求函数 $y = f(x)$ 的最小值

【动感体验】

设 $g(x) = |2x + 1|$ ， $s(x) = |x - 4|$ 。进入文件“4-2-例 1. dmr”的第三页，如图 4.2.3

所示，实线为函数 $g(x)$ 的图像，虚线为函数 $s(x)$ 的图像。观察两个函数图像之间的关系，

研究 $f(x) = g(x) - s(x)$ 的最小值。

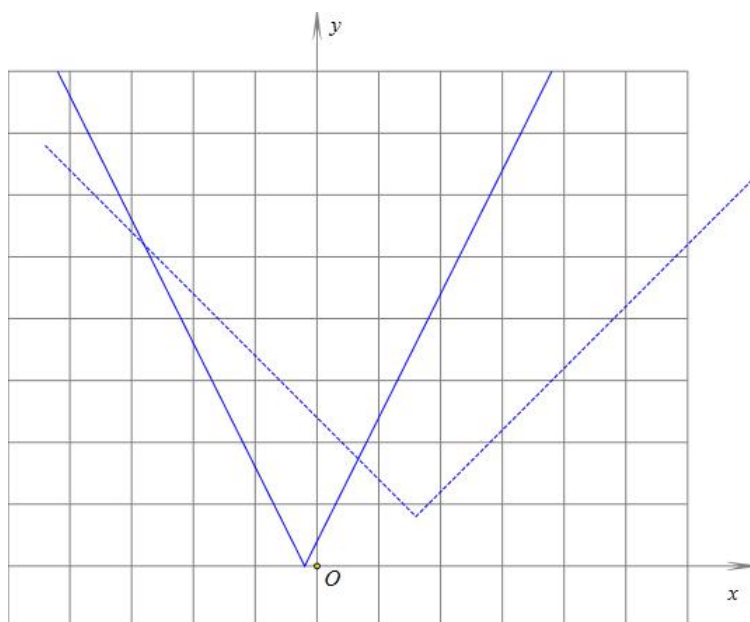


图 4.2.3

【动态解析】

通过图 4.2.3 可知，当 $g(x) = 0$ ，即 $x = -\frac{1}{2}$ 时 $g(x) - s(x)$ 最小，等于

$$0 - s(-\frac{1}{2}) = -\frac{9}{2}.$$

【简要评注】

含绝对值的不等式的求解问题，关键是去绝对值的符号，需要准确找出分界点，而利用图像则可以帮助我们更好地判断符号，快速求解.

2. 解有关分段函数的不等式

例 2. 已知 a 是实数，函数 $f(x) = \sqrt{x}(x-a)$.

(1) 求函数 $f(x)$ 的单调区间；

(2) 设 $g(a)$ 为 $f(x)$ 在区间 $[0,2]$ 上的最小值

(i) 写出 $g(a)$ 的表达式；

(ii) 求 a 的取值范围，使得 $-6 \leq g(a) \leq -2$.

(一) 求函数 $f(x)$ 的单调区间

【动感体验】

打开文件“4-2-例 2. dmr”，实线为函数 $f(x)$ 的图像，通过变量尺可以改变实数 a 的值或通过按钮设置 a 的值，观察 a 对函数 $f(x)$ 单调性的影响. 如图 4.2.4 所示，为其中的两种情形.

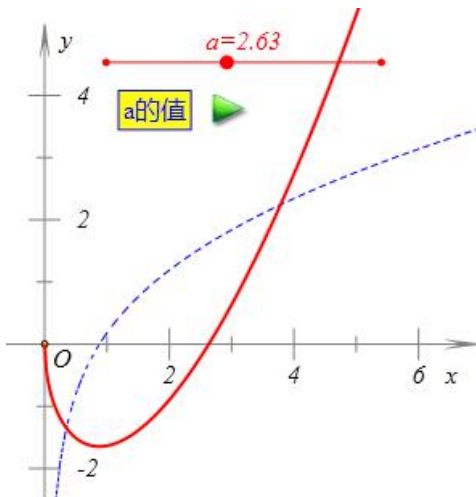


图 4.2.4

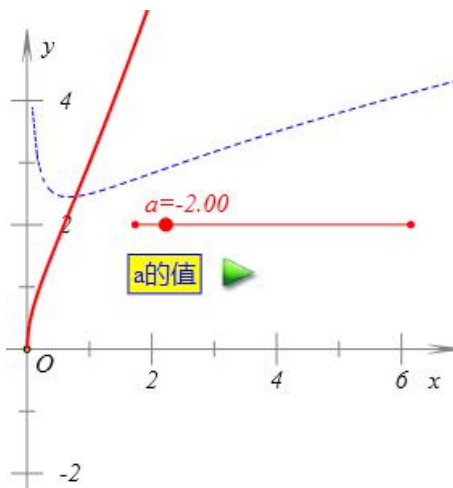


图 4.2.4

【动态解析】

函数的定义域为 $[0, +\infty)$, $f'(x) = \sqrt{x} + \frac{x-a}{2\sqrt{x}} = \frac{3x-a}{2\sqrt{x}}$ ($x > 0$).

若 $a > 0$ ，如图 4.2.4 所示，令 $f'(x) = 0$ ，得 $x = \frac{a}{3}$ ，当 $0 < x < \frac{a}{3}$ 时， $f'(x) < 0$ ；

当 $x > \frac{a}{3}$ 时， $f'(x) > 0$ 。 $f(x)$ 有单调递减区间 $\left[0, \frac{a}{3}\right]$ ，单调递增区间 $\left(\frac{a}{3}, +\infty\right)$ 。

若 $a \leq 0$ ，如图 1 (2) 所示，恒有 $f'(x) > 0$ ， $f(x)$ 有单调递增区间 $[0, +\infty)$ 。

(二) 求 $g(a)$ 的表达式

【动感体验】

进入文件“4-2-例 2. dmr”第二页，实线为函数 $f(x)$ 在区间 $[0, 2]$ 上的图像，通过变量尺改变实数 a 的值或通过按钮设置 a 的值，观察实数 a 对 $f(x)$ 在区间 $[0, 2]$ 上最小值的影响。如图 4.2.6-4.2.8 所示，为其中的几种情形。

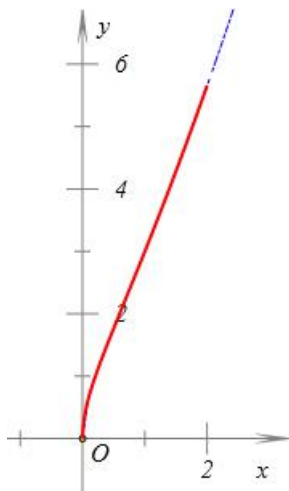


图 4.2.6

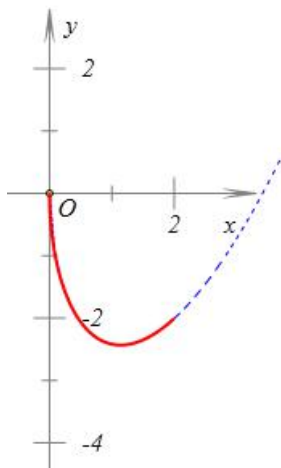


图 4.2.7

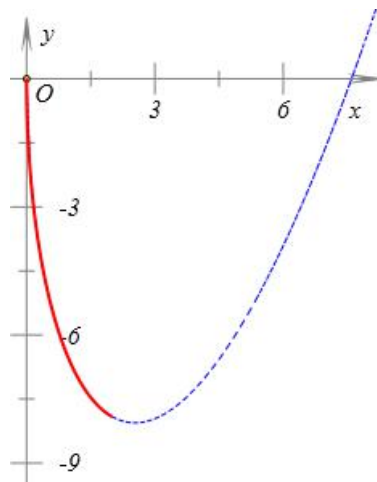


图 4.2.8

【思路点拨】

从上面的讨论和函数图像可以知道 $f(x)$ 在区间 $[0, 2]$ 上的最小值是与 a 密切相关的，因

此需要对 $x = \frac{a}{3}$ 是否落在区间 $[0, 2]$ 进行讨论。当 $a > 0$ 且 $0 \leq \frac{a}{3} < 2$ 时函数在 $x = \frac{a}{3}$ 时取

最小值；当 $\frac{a}{3} \geq 2$ 时，最小值为 $f(2)$ ；当 $a \leq 0$ 时 $f(x)$ 在 $[0, 2]$ 上递增，因此在 $x = 0$ 时

取得最小值。这样一来， $g(a)$ 就不难求出了，它应该是一个分段函数。

【动态解析】

若 $a \leq 0$ ，如图 4.2.6 所示， $f(x)$ 在 $[0, 2]$ 上单调递增，所以 $g(a) = f(0) = 0$ 。

若 $0 < a < 6$, 如图 4.2.7 所示, $f(x)$ 在 $\left[0, \frac{a}{3}\right]$ 上单调递减, 在 $\left(\frac{a}{3}, 2\right]$ 上单调递增,

$$\text{所以 } g(a) = f\left(\frac{a}{3}\right) = -\frac{2a}{3} \sqrt{\frac{a}{3}} = -\frac{2a\sqrt{3a}}{9}.$$

若 $a \geq 6$, 如图 4.2.8 所示, $f(x)$ 在 $[0, 2]$ 上单调递减, 所以 $g(a) = f(2) = \sqrt{2}(2-a)$.

$$\text{综上所述, } g(a) = \begin{cases} 0, & a \leq 0, \\ -\frac{2a}{3} \sqrt{\frac{a}{3}}, & 0 < a < 6, \\ \sqrt{2}(2-a), & a \geq 6. \end{cases}$$

(三) 求 a 的取值范围

进入文件“4-2-例 2. dmr”的第三页, 如图 4.2.9 所示, 为函数 $g(a)$ 的图像.

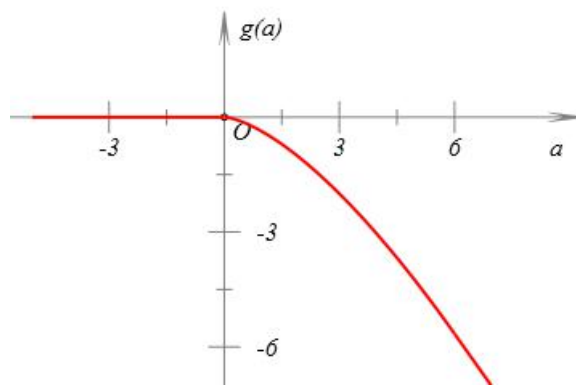


图 4.2.9

【动态解析】

当 $a \leq 0$ 时, 由 $-6 \leq g(a) = 0 \leq -2$ 知 a 无解.

当 $0 < a < 6$ 时, 由 $-6 \leq g(a) = -\frac{2a\sqrt{3a}}{9} \leq -2$ 解得 $3 \leq a \leq 3\sqrt[3]{9}$, 所以 a 的解是:

$$3 \leq a < 6.$$

当 $a \geq 6$ 时, 由 $-6 \leq g(a) = \sqrt{2}(2-a) \leq -2$ 解得 $2 + \sqrt{2} \leq a \leq 3 + 3\sqrt{2}$, 所以 a 的解是: $6 \leq a \leq 2 + 3\sqrt{2}$.

综上所述: 故 a 的取值范围为 $3 \leq a \leq 2 + 3\sqrt{2}$.

【简要评注】

解分段函数的不等式, 基本思想是分段求解, 需要注意的是, 对于最后的结果要进行整理, 得到一个形式完整的结论.

3. 不等式在指定区间上恒成立

例 3. 已知关于 x 的不等式 $\log_a(8-ax) > 1$ 在区间 $[1, 2]$ 上恒成立, 求实数 a 的取值范围.

【动感体验】

打开文件“4-2-例 3. dmr”, 实线为函数 $y = \log_a(8-ax)$ 在区间 $[1, 2]$ 上的图形, 通过变量尺改变实数 a 的值或通过按钮设置它的值, 研究实数 a 对函数在区间 $[1, 2]$ 上最小值的影响. 如图 4.2.10—4.2.13 所示, 为其中的几种情形.

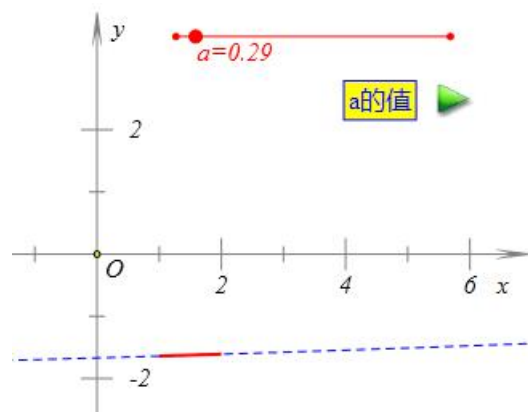


图 4.2.10

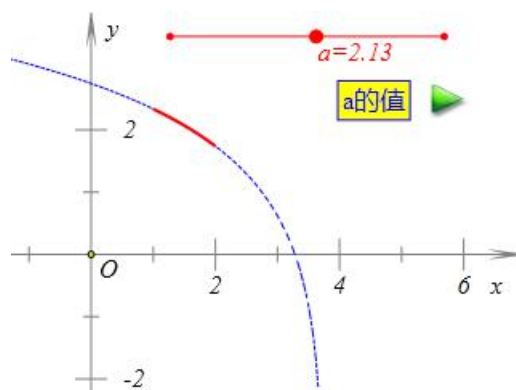


图 4.2.11

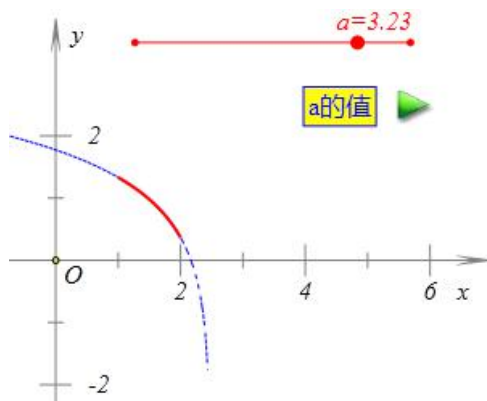


图 4.2.12

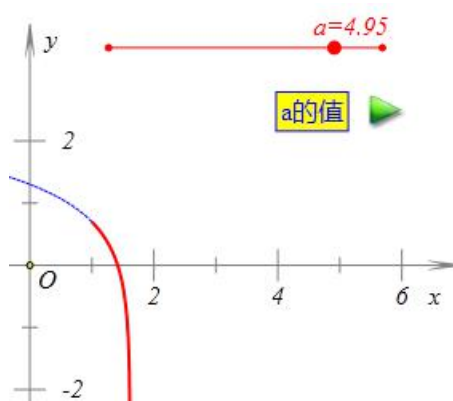


图 4.2.13

【思路点拨】

对 $0 < a < 1$ 和 $a > 1$ 两种情况分别研究函数 $y = \log_a(8-ax)$ 的单调性质, 找出在区间 $[1, 2]$ 上 $\log_a(8-ax) > 1$ 恒成立时 a 的临界值. 需要注意的是, 区间 $[1, 2]$ 要包含在函数 $y = \log_a(8-ax)$ 的定义域之内.

【动态解析】

当 $0 < a < 1$ 时, 如图 4.2.10 所示, 函数 $y = \log_a(8 - ax)$ 在区间 $[1, 2]$ 的值为负数, 因此不等式 $\log_a(8 - ax) > 1$ 不成立.

当 $a > 1$ 时, 函数 $y = \log_a(8 - ax)$ 在定义域上是减函数, 如图 4.2.11、图 4.2.12、图 4.2.13 所示. 因此, 当 $x = 2$ 时函数 $y = \log_a(8 - ax)$ 具有最小值, 因此若要求不等式 $\log_a(8 - ax) > 1$ 恒成立, 只需要 $\log_a(8 - 2a) > 1$ 即可, 解得: $a < \frac{8}{3}$.

而函数 $y = \log_a(8 - ax)$ 的定义域为 $(-\infty, \frac{8}{a})$, 由 $\frac{8}{a} > 2$ 得: $a < 4$.

所以 a 的取值范围是: $1 < a < \frac{8}{3}$.

【简要评注】

在本题中, 底数和真数都含有参数, 讨论时应分别进行研究和分类. 有关对数的函数的问题, 还应该注意定义域.

本题充分显示了利用数形结合的方法可以使问题极大的简化.

本节小结

含绝对值的不等式应注意结合绝对值所表示的几何意义. 若能转换成为分段函数处理, 利用分段函数的图像能够帮助我们更明显地提出分类讨论的依据.

解不等式, 有时单独命题, 而更多的时候会与集合、函数、三角等综合在一起, 而且解不等式往往是解答这些综合问题的关键环节, 常常还伴有参数讨论, 变量的范围等问题.

拓展练习

2.1. 不等式 $\frac{|x+1|}{|x+2|} \geq 1$ 的实数解为_____.

2.2. 设函数 $f(x) = |2x-1| + x + 3$, 则 $f(-2) =$ _____; 若 $f(x) \leq 5$, 则 x 的取值范围是_____.

2.3. 解不等式 $|2x-1| < |x| + 1$.

2.4. 设函数 $f(x) = |x-1| + |x-a|$, 若 $a = -1$, 解不等式 $f(x) \geq 3$.

第三节 线性规划

1. 目标函数在指定位置的最值问题

例 1. 若 x, y 满足约束条件 $\begin{cases} x+y \geq 1 \\ x-y \geq -1 \\ 2x-y \leq 2 \end{cases}$, 目标函数 $z = ax + 2y$ 仅在点 $(1, 0)$ 处

取得最小值, 则 a 的取值范围是

- A. $(-1, 2)$ B. $(-4, 2)$ C. $(-4, 0]$ D. $(-2, 4)$

【动感体验】

不等式组 $\begin{cases} x+y \geq 1 \\ x-y \geq -1 \\ 2x-y \leq 2 \end{cases}$, 可化为 $\begin{cases} y \geq -x+1 \\ y \leq x+1 \\ y \geq 2x-2 \end{cases}$, 将函数 $z = ax + 2y$ 化成 $y = -\frac{a}{2}x + \frac{1}{2}z$.

打开文件“4-3-例 1. dmr”, 如图 4.3.1 所示, 实线表示函数 $y = -\frac{a}{2}x + \frac{z}{2}$ 的图像. 通过变

量尺改变实数 a 的值或通过按钮改变 a 的值, 观察当直线 $y = -\frac{a}{2}x + \frac{z}{2}$ 仅经过点 $(1, 0)$

时 z 取最小值的情况下, 直线 $y = -\frac{a}{2}x + \frac{z}{2}$ 的斜率应满足的条件.

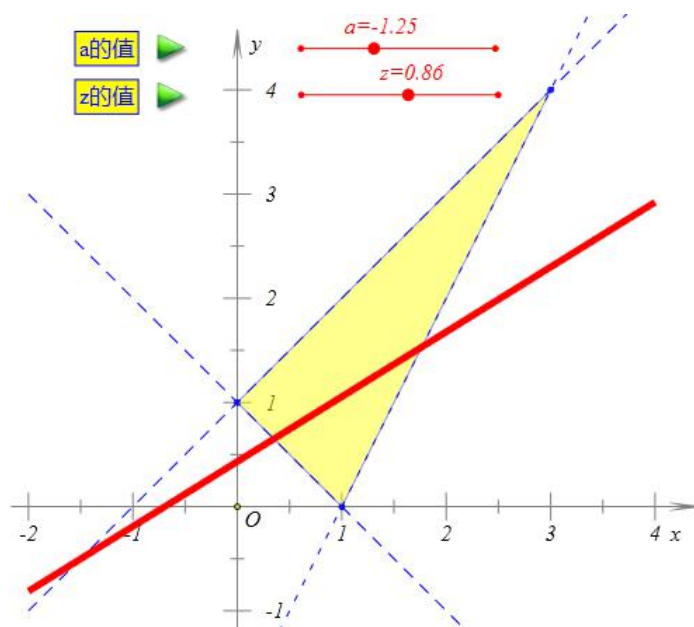


图 4.3.1

【思路点拨】

若要求标函数 $z = ax + 2y$ 仅在点 $(1, 0)$ 处取得最小值，则要求直线 $y = -\frac{a}{2}x + \frac{z}{2}$ 从

下往上平移的过程中，最先经过区域 $\begin{cases} y \geq -x+1 \\ y \leq x+1 \\ y \geq 2x-2 \end{cases}$ 中的点 $(1, 0)$ 。

【动态解析】

当直线 $y = -\frac{a}{2}x + \frac{z}{2}$ 的斜率 $-1 < -\frac{a}{2} < 2$ 时，即 $-4 < a < 2$ ，仅在点 $(1, 0)$ 处 z 取得最小值，如图 4.3.2.—4.3.7 所示。

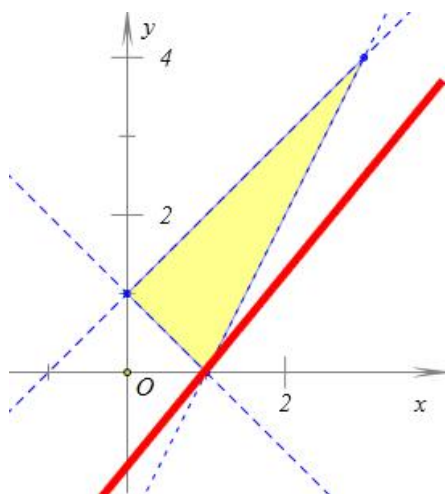


图 4.3.2

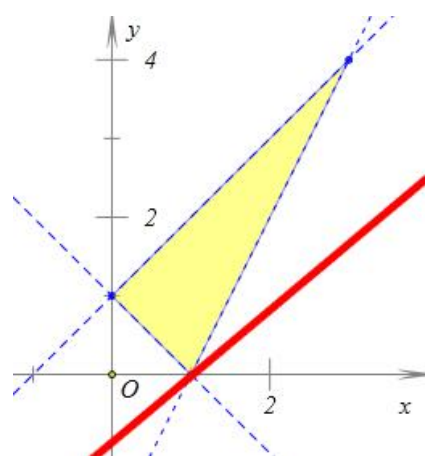


图 4.3.3.

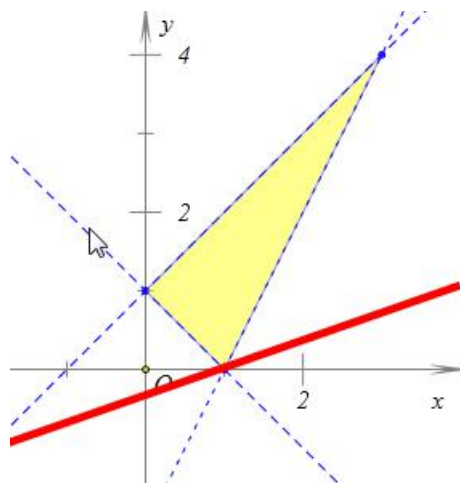


图 4.3.4

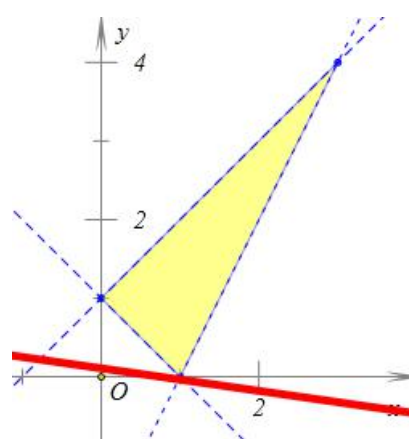


图 4.3.5

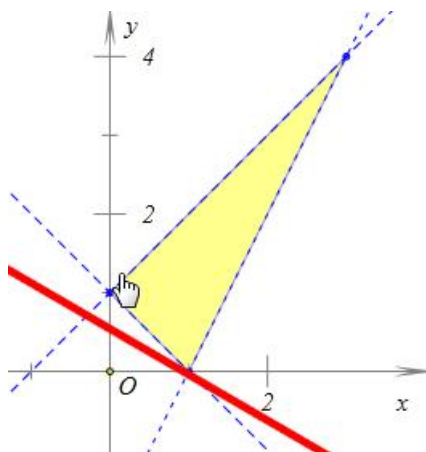


图 4.3.6

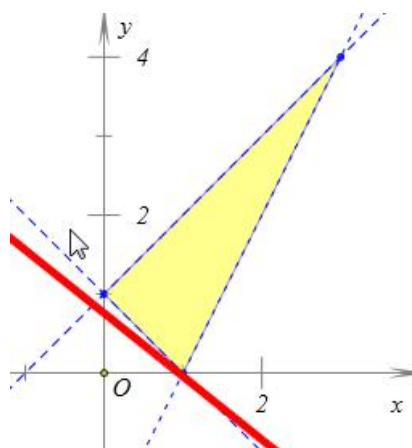


图 4.3.7

而当直线 $y = -\frac{a}{2}x + \frac{1}{2}z$ 的斜率 $-\frac{a}{2} < -1$ (如图 4.3.8) 或 $-\frac{a}{2} > 2$ 时 (如图 4.3.9),

$y = -\frac{a}{2}x + \frac{1}{2}z$ 在点 $(1, 0)$ 处, z 取不到最小值; 直线 $y = -\frac{a}{2}x + \frac{1}{2}z$ 的斜率 $-\frac{a}{2} = -1$ (如

图 4.3.10) 或 $-\frac{a}{2} = 2$ 时 (如图 4.3.11), $y = -\frac{a}{2}x + \frac{1}{2}z$ 并不是仅在点 $(1, 0)$ 处 z 取最

小值.

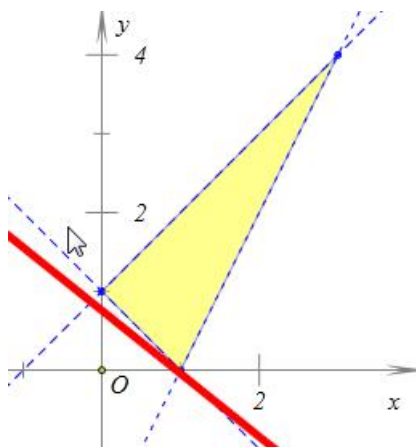


图 4.3.8

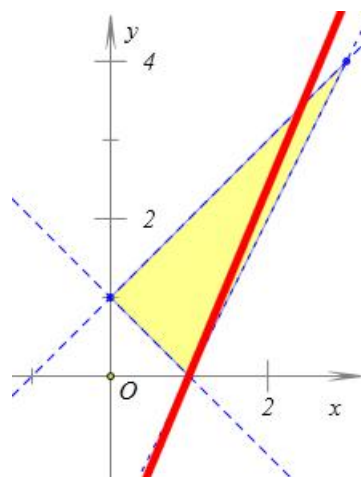


图 4.3.9

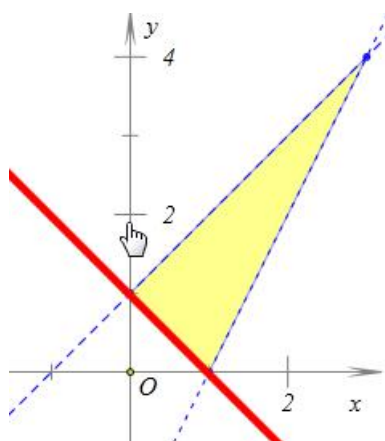


图 4.3.10

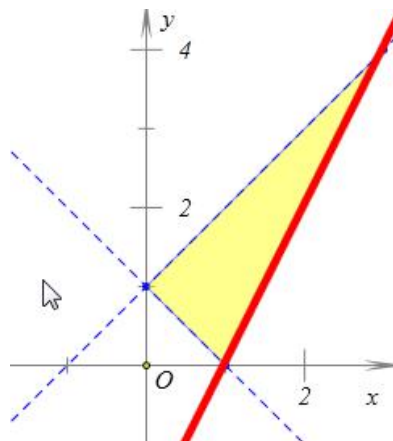


图 4.3.11

所以答案选择 B.

【简要评注】

研究线性规划问题，不仅要抓住可行区域，更要抓住目标函数的几何特征，才能明确取得最优解时对应的特殊位置.

2. 根据目标函数的最值求参数的值

例 2. 设集合 $A = \{(x, y) \mid y \geq \frac{1}{2}|x - 2|\}$, $B = \{(x, y) \mid y \leq -|x| + b\}$, $A \cap$

$B \neq \emptyset$. 若 $(x, y) \in A \cap B$, 且 $x + 2y$ 的最大值为 9, 求 b 的值.

【动感体验】

画出集合 $A = \{(x, y) \mid y \geq \frac{1}{2}|x - 2|\}$ 表示的区域. 再考虑 $y = -|x| + b$ 表示怎样的曲线, 想象随着 b 的变化该曲线与集合 $B = \{y \leq -|x| + b\}$ 怎样变化, 以及这两个集合的交集随之变化的情况.

设 $x + 2y = k$, 它表示过 $A \cap B$ 区域内的一点、斜率为 $-\frac{1}{2}$ 的直线, k 表示直线的 x

截距. 打开文件 “4-3-例 2. dmr”, 如图 4.3.12 所示, $y = \frac{1}{2}|x - 2|$ 表示一条折线, 集合

$y \geq \frac{1}{2}|x - 2|$ 表示该折线上方的区域, $(0, 1)$ 和 $(2, 0)$ 都是这个区域边界上的点.

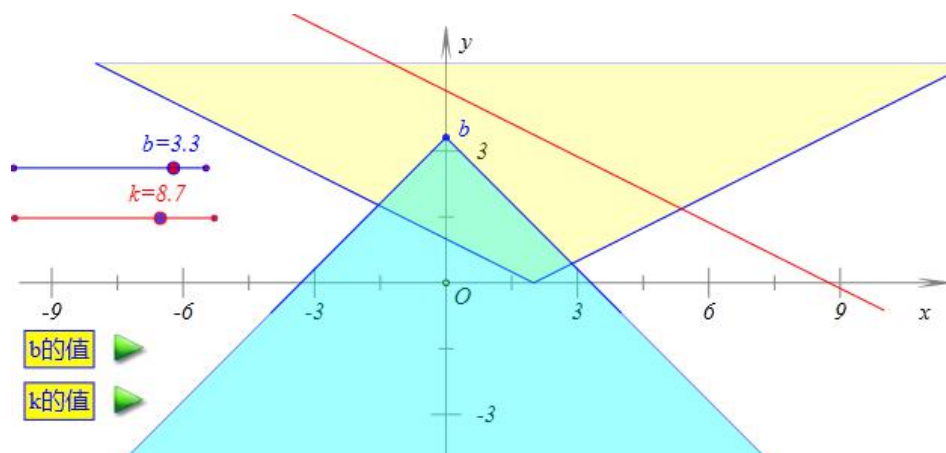


图 4.3.12

$y \leq -|x| + b$ 表示折线 $y = -|x| + b$ 下方的区域(含折线本身). 拖动点 b , 改变参数 b 的值, 可以观察到这个区域随 b 变化的情况. 观察当 $x + 2y$ 的最大值为 9 时, b 满足的条件.

【思路点拨】

对于经过区域 $A \cap B$ 内的点、斜率为 $-\frac{1}{2}$ 的直线, 当该直线经过点 b 时 $x + 2y$ 有最大值.

【动态解析】

如图 4.3.13 所示, 可求得当 $x + 2y$ 的最大值为 9 时, $b = \frac{9}{2}$.

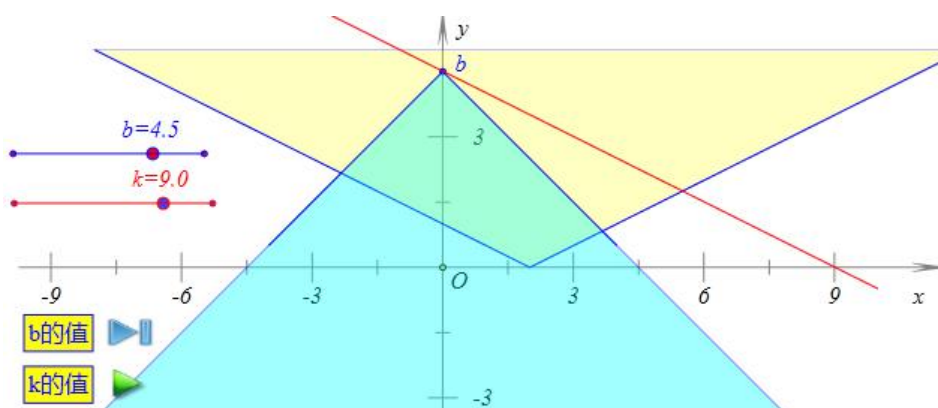


图 4.3.13

因此 b 的值为: $\frac{9}{2}$.

【简要评注】

线性规划问题一定要抓住目标函数的几何意义, 才能准确分析得出取得最优解的条件, 从而求出对应的参数的值.

本节小结

线性规划问题的求解过程完全依赖于图形. 准确作图, 正确理解目标函数的几何意义是解决问题的关键, 用运动的眼光看待问题能更快地得到最优解答.

线性规划问题具有很多具体的实际生产、生活背景, 又是数形结合思想的良好体现, 其本质是用平面区域表示二元一次不等式组. 这类问题难度不高, 运算量也不大, 在试卷中常常以选择、填空题的形式出现.

拓展练习

3.1. 设集合 $A = \{(x, y) | y \geq |x-2|, x \geq 0\}$, $B = \{(x, y) | y \leq -x+b\}$, $A \cap B \neq \emptyset$. 若 $(x, y) \in A \cap B$, 且 $x+2y$ 的最大值为 9, 求 b 的值.

3.2. 已知实数 x, y 满足
$$\begin{cases} y \geq 1, \\ y \leq 2x-1, \\ x+y \leq m. \end{cases}$$
 如果目标函数 $z = x-y$ 的最小值为 -1, 则实数

m 等于 ()

A. 7 B. 5 C. 4 D. 3

3.3. 在 R 上可导的函数 $f(x) = \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}ax^2 + 2bx + c$, 当 $x \in (0,1)$ 时取得极大值,

当 $x \in (1,2)$ 时取得极小值, 求点 (a,b) 对应的区域的面积以及 $\frac{b-2}{a-1}$ 的取值范围.

第四节 求参数的取值范围及综合问题

1. 两个区域之间的关系

例 1. 设集合 $A = \{(x, y) | y \geq \frac{1}{2}|x-2|\}$, $B = \{(x, y) | y \leq -|x|+b\}$, $A \cap B \neq \emptyset$,

求 b 的取值范围.

【动感体验】

因为 $y = \frac{1}{2}|x-2|$ 表示一条折线, 则集合 $y \geq \frac{1}{2}|x-2|$ 表示该折线上方的区域. 同理,

$y \leq -|x|+b$ 表示直线 $y = -|x|+b$ 下方的区域. 打开文件 “4-4-例 1. dmr”, 如图 4.4.1 所示. 通过变量尺改变参数 b 的值或者通过按钮设置 b 的值, 观察满足条件的 b 的取值范围.

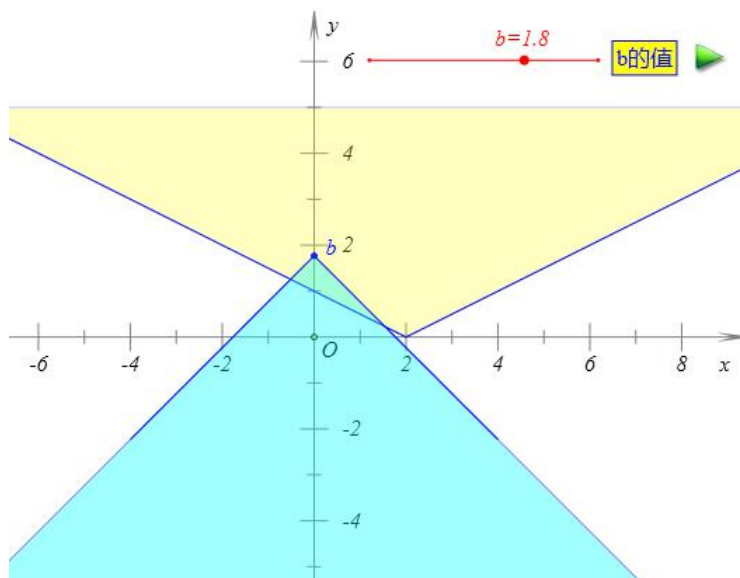


图 4.4.1

【思路点拨】

求满足条件的 b 的取值范围，主要考虑参数 b 应该满足的最小值.

【动态解析】

因为直线 $y = \frac{1}{2}|x-2|$ 经过点 $(0, 1)$ ，所以当 $b \geq 1$ 时， $A \cap B \neq \emptyset$ ；当 $b < 1$ 时， $A \cap B = \emptyset$ ，如图 4.4.2 所示，因此，参数 b 的取值范围是： $b \geq 1$.

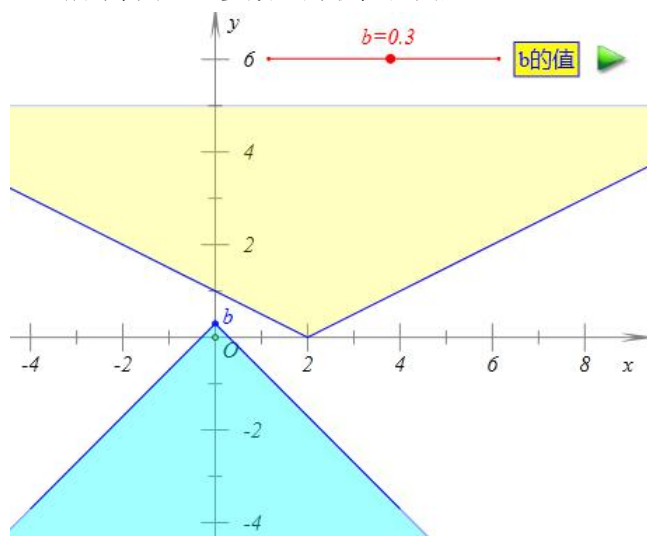


图 4.4.2

因此 b 的取值范围是： $b \geq 1$.

【简要评注】

$A \cap B = \emptyset$ 在平面上表现为两个图形之间没有公共点，而 b 恰好是对应 B 中函数 $y = -|x| + b$ 图像的最高点。利用图像能让解不等式的过程事半功倍。

2. 不等式组所表示的区域形状问题

例 2. 若不等式组
$$\begin{cases} x - y \geq 0, \\ 2x + y \leq 2, \\ y \geq 0, \\ x + y \leq a \end{cases}$$
 表示的平面区域是一个三角形, 求实数 a 的取值范围.

【动感体验】

这里容易确定的是不等式组
$$\begin{cases} x - y \geq 0 \\ 2x + y \leq 2 \\ y \geq 0 \end{cases}$$
 表示的区域, 可以考虑先把这个区域画出来.

然后考虑直线 $x + y \leq a$ 表示的区域, 这是直线 $x + y = a$ 下方的区域, 这个区域随 a 的变化而变化. 若不等式组
$$\begin{cases} x - y \geq 0, \\ 2x + y \leq 2, \\ y \geq 0, \\ x + y \leq a \end{cases}$$
 表示的平面区域是一个三角形就意味着这个变动的

区域与原来的三角形区域的交还是三角形, 由此不难确定 a 的取值范围.

打开文件“4-4-例 2. dmr”, 如图 4.4.3 所示, 不等式组
$$\begin{cases} x - y \geq 0 \\ 2x + y \leq 2 \\ y \geq 0 \end{cases}$$
 表示的平面区域.

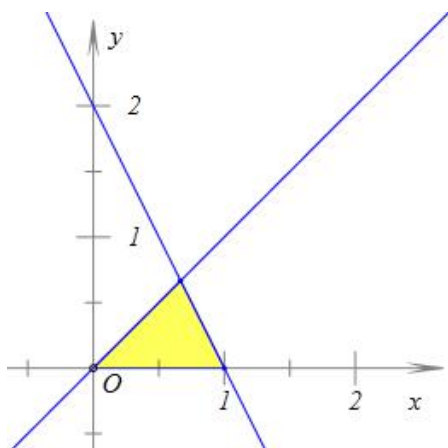


图 4.4.3

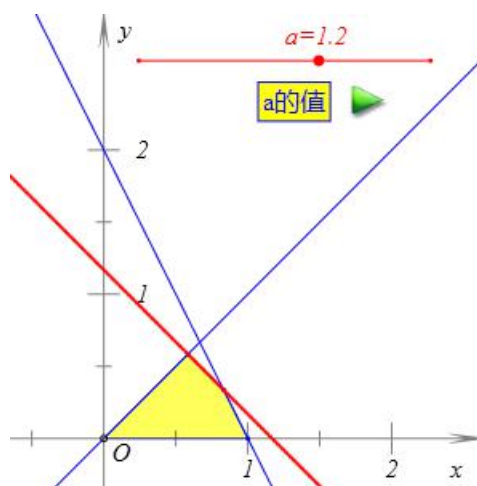


图 4.4.4

进入文件“4-4-例 2. dmr”第二页, 如图 4.4.4 所示表示不等式组
$$\begin{cases} x - y \geq 0, \\ 2x + y \leq 2, \\ y \geq 0, \\ x + y \leq a \end{cases}$$
 表示的

平面区域，通过变量尺改变 a 的值或通过按钮设置 a 的值，观察不等式组 $\begin{cases} x-y \geq 0, \\ 2x+y \leq 2, \\ y \geq 0, \\ x+y \leq a \end{cases}$ 所

表示的平面区域是一个三角形时直线 $x+y=a$ 所满足的条件.

【思路点拨】

考虑直线 $x+y=a$ 经过不等式组 $\begin{cases} x-y \geq 0 \\ 2x+y \leq 0 \\ y \geq 0 \end{cases}$ 表示的区域之内和区域之外两种情况.

【动态解析】

如图 4.4.5、图 4.4.6 所示情形，不等式组 $\begin{cases} x-y \geq 0, \\ 2x+y \leq 2, \\ y \geq 0, \\ x+y \leq a \end{cases}$ 所表示的平面区域是一个三角

形. 易求得直线 $x-y=0$ 和 $2x+y=2$ 的交点为 $(\frac{2}{3}, \frac{2}{3})$ ，当直线 $x+y=a$ 经过点 $(\frac{2}{3}, \frac{2}{3})$ ，

$\frac{2}{3}$ 时求得 $a=\frac{4}{3}$. 所以，当 $a \geq \frac{4}{3}$ 时，满足题设要求.

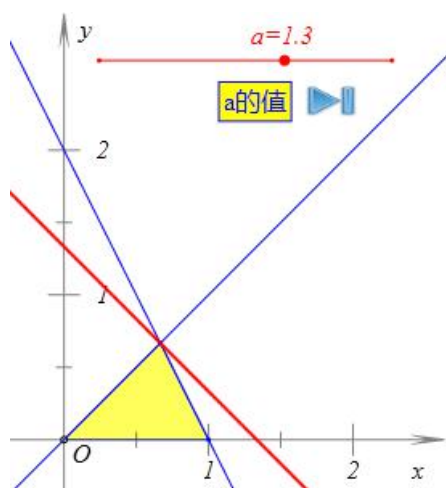


图 4.4.5

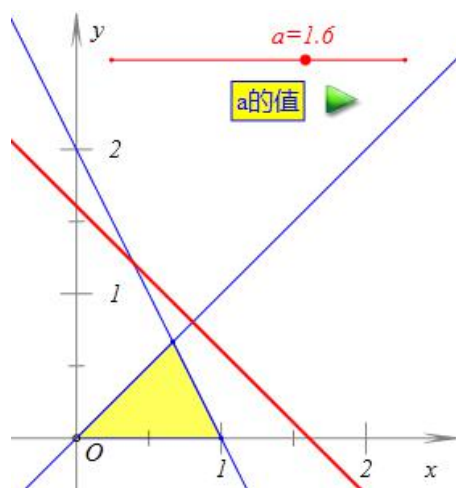


图 4.4.6

如图 4.4.7、图 4.4.8 所示情形，不等式组 $\begin{cases} x-y \geq 0, \\ 2x+y \leq 2, \\ y \geq 0, \\ x+y \leq a \end{cases}$ 所表示的平面区域是一个三角

形. 易知当 $0 < a \leq 1$ 时，满足题设要求.

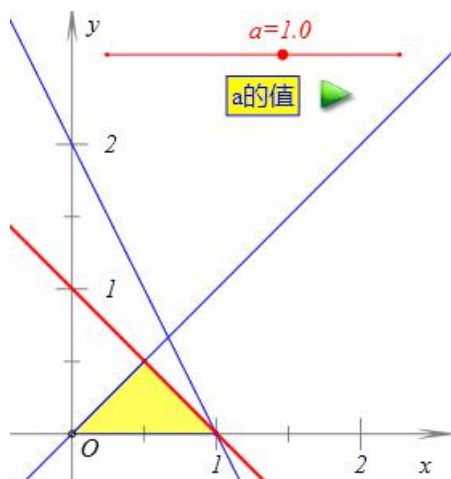


图 4.4.7

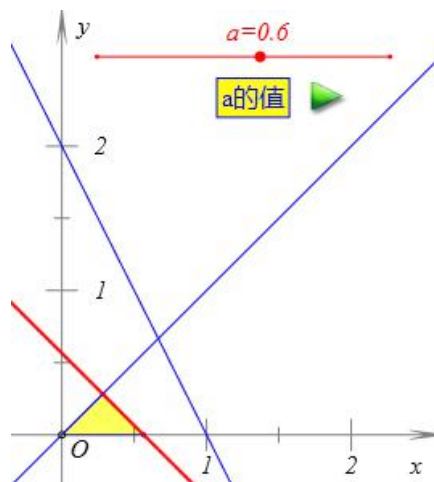


图 4.4.8

综上所述, 当 $0 < a \leq 1$ 或 $a \geq \frac{4}{3}$ 时, 不等式组
$$\begin{cases} x-y \geq 0, \\ 2x+y \leq 2, \\ y \geq 0, \\ x+y \leq a \end{cases}$$
 所表示的平面区域是一个

三角形.

因此答案选择 D.

【简要评注】

不仅要考虑区域的边界满足条件的情况, 还要考虑其他位置满足条件的情况.

3. 分段函数的单调性综合问题

例 3 · 若 $f_1(x) = 3^{|x-p|}$, $f_2(x) = 2 \cdot 3^{|x-q|}$, $x \in \mathbb{R}$, p, q 为常数, 且

$$f(x) = \begin{cases} f_1(x), & f_1(x) \leq f_2(x), \\ f_2(x), & f_1(x) > f_2(x). \end{cases}$$

(1) 求 $f(x) = f_1(x)$ 对所有实数成立的充要条件 (用 p, q 表示);

(2) 设 a, b 为两实数, 满足 $a < b$, 且 $p, q \in (a, b)$, 若 $f(a) = f(b)$

求证: $f(x)$ 在区间 $[a, b]$ 上的单调增区间的长度和为 $\frac{b-a}{2}$ (闭区间 $[m, n]$ 的长度定义为 $n-m$).

义为 $n-m$).

(一) 求 $f(x) = f_1(x)$ 对所有实数成立的充要条件.

【动感体验】

首先需要认识 $f_1(x) = 3^{|x-p|}$ 和 $f_2(x) = 2 \cdot 3^{|x-q|}$ 的特点, 这两个函数的最小值分别

为 1 和 2，且图象分别以直线 $x = p$ 和 $x = q$ 为对称轴“开口”向上。再根据函数 $f(x)$ 的定义知道需要比较 $f_1(x) = 3^{|x-p|}$ 和 $f_2(x) = 2 \cdot 3^{|x-q|}$ 的大小以确定 $f(x)$ 的函数值。显然这是与直线 $x = p$ 和 $x = q$ 的相互位置关系密切相关的。不妨画出图象的草图看看，会有助于这个问题的解决。

打开文件“4-4-例 3. dmr”，如图 4.4.9 所示，实线对应的函数为 $f_1(x) = 3^{|x-p|}$ ，虚线对应的函数为 $f_2(x) = 2 \cdot 3^{|x-q|}$ 。通过变量尺改变 p 或 q 的值或者通过按钮设置它们的值，研究 $f(x) = f_1(x)$ 时函数 $f_1(x)$ 与 $f_2(x)$ 所应满足的关系，并尝试用 p 和 q 表示。

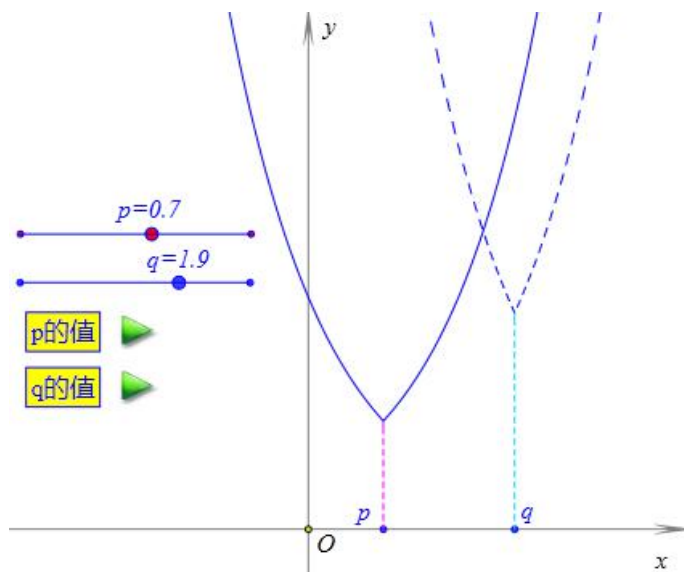


图 4.4.9

【思路点拨】

根据函数 $f(x)$ 的定义，确定 $f_1(x)$ 与 $f_2(x)$ 之间的关系。

【动态解析】

因为 $f(x) = \begin{cases} f_1(x), & f_1(x) \leq f_2(x), \\ f_2(x), & f_1(x) > f_2(x), \end{cases}$ ，若 $f(x) = f_1(x)$ 则必有，对任何 x 有：

$f_1(x) \leq f_2(x)$ ，如图 4.4.10 所示，即： $3^{|x-p|} \leq 2 \cdot 3^{|x-q|}$ ， $x \in \mathbb{R}$ 。

假定变量 p_2 固定不变。

当 $f_1(x)$ 图象（实线）的左半部分与 $f_2(x)$ 图象（虚线）的左半部分重合时，如图 4.4.11

所示， p 取得最大值。由 $3^{p-x} = 2 \cdot 3^{q-x}$ 解得： $p = q + \log_3 2$ 。而当 $p > q + \log_3 2$ 时，如图 4.4.12 所示，不满足条件。

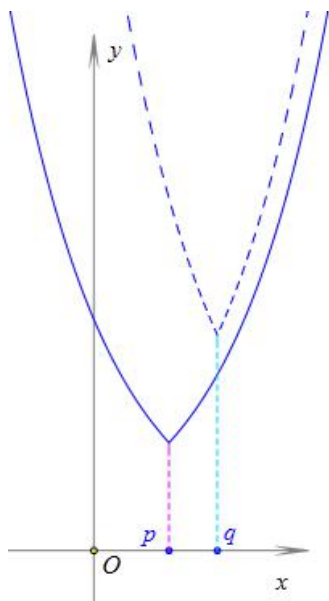


图 4.4.10

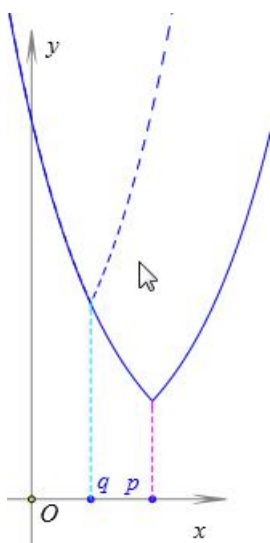


图 4.4.11

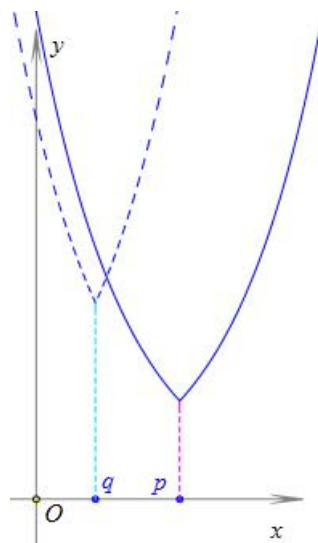


图 4.4.12

当 $f_1(x)$ 图象 (实线) 的右半部分与 $f_2(x)$ 图象 (虚线) 的右半部分重合时, 如图 4.4.13 所示, p 取得最小值. 由 $3^{x-p} = 2 \cdot 3^{x-q}$ 解得: $p = q - \log_3 2$. 而当 $p < q - \log_3 2$ 时, 如图 4.4.14 所示, 不满足条件.

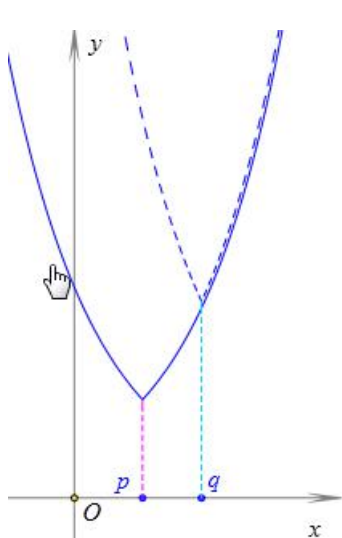


图 4.4.13

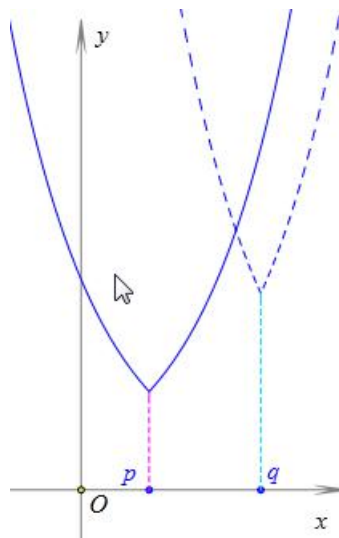


图 4.4.14

综上所述, $q - \log_3 2 \leq p \leq q + \log_3 2$, 亦可表示为 $|p - q| \leq \log_3 2$.

(二) 探索 $f(x)$ 在区间 $[a, b]$ 上的单调增区间的长度和.

【动感体验】

进入文件“4-4-例 3. dmr”的第二页, 如图 4.4.15 所示为函数 $f(x)$ 的图象. 通过变量尺可以改变 a 和 b 的值或通过按钮设置它们的值, 使得 $f(a) = f(b)$. 观察和研究 $f(x)$ 在

区间 $[a, b]$ 上的单调增区间.

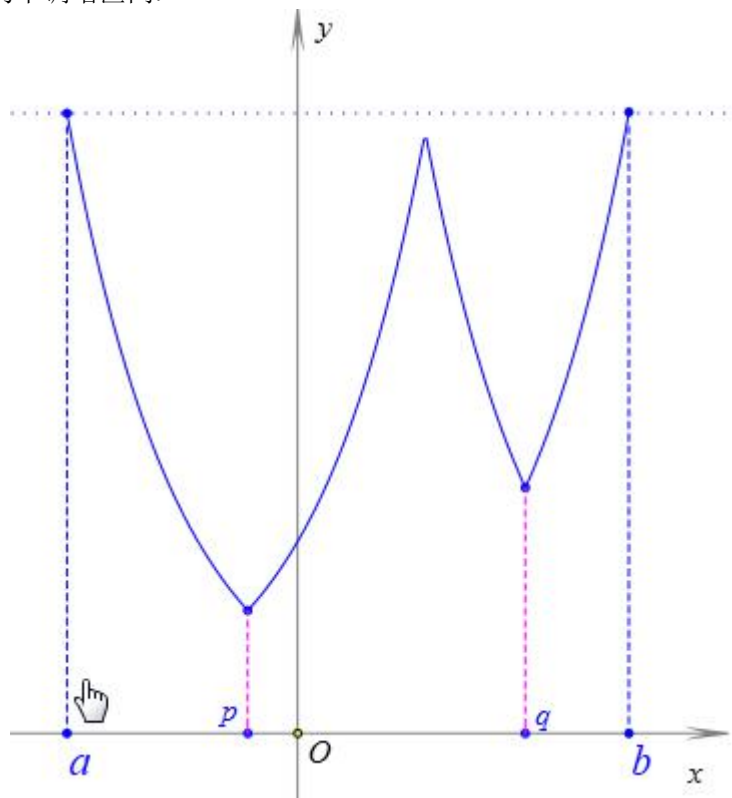


图 4.4.15

【思路点拨】

对 $|p-q| \leq \log_3 2$ 和 $|p-q| > \log_3 2$ 的情况进行分类讨论.

【动态解析】

(1) 若 $|p-q| \leq \log_3 2$, $f(x) = f_1(x) = 3^{|x-p|}$, 如图 4.4.16 和图 4.4.17 所示, 这时 $f(x)$ 的图象关于 $x=p$ 对称. 因为 $f(a) = f(b)$, $a < b$, 所以 $p-a = b-p$, 即

$p = \frac{a+b}{2}$. 而对应 $f(x)$ 得单调递增区间为: $[p, b]$, 根据定义知单调递增区间的长度

为: $b-p = b - \frac{a+b}{2} = \frac{b-a}{2}$.

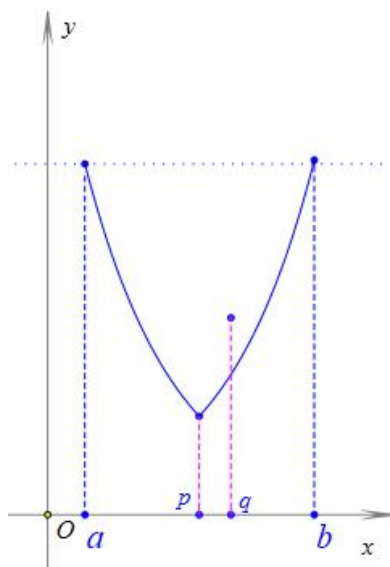


图 4.4.16

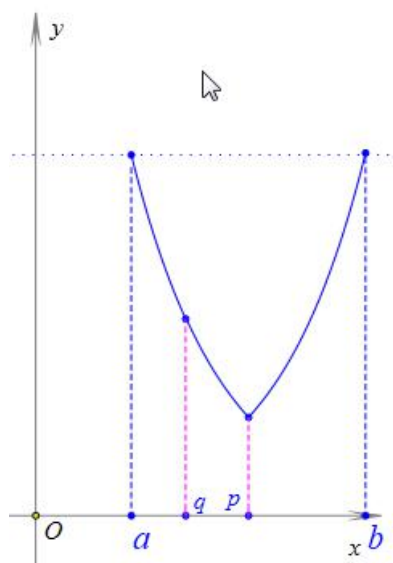


图 4.4.17

(2) 若 $|p - q| > \log_3 2$, 设 $x = x_0$ 时 $f_1(x) = f_2(x)$, 则函数 $f(x)$ 在区间 $[a, b]$ 上的图象分别在 $x = p$ 、 $x = q$ 、 $x = x_0$ 被分成四段, 如图 4.4.18、图 4.4.19 所示.

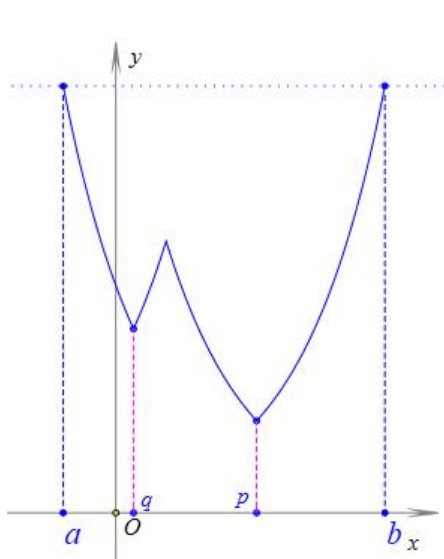


图 4.4.18

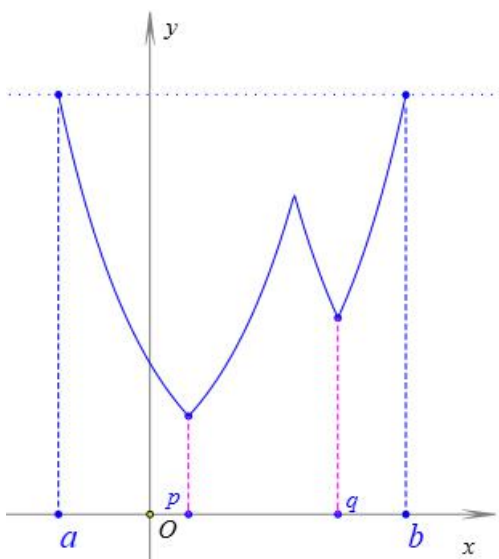


图 4.4.19

当 $p > q$ (图 4.4.18) 时, 则 $q < x_0 < p$, 由 $f_1(x) = f_2(x)$, 即 $3^{p-x_0} = 2 \cdot 3^{x_0-q}$, 解得: $x_0 = \frac{p+q-\log_3 2}{2}$, 单调递增区间的长度等于

$$(x_0 - q) + (b - p) = x_0 + b - p - q.$$

又由 $f(a) = f(b)$, 即 $2 \cdot 3^{q-a} = 3^{b-p}$, 解得: $p + q = a + b - \log_3 2$, 所以单调区间的长度为:

$$x_0 + b - p - q = \frac{a + b - \log_3 2 - \log_3 2}{2} + b - (a + b - \log_3 2) = \frac{b - a}{2}.$$

当 $p < q$ (图 4.4.19) 时, 则 $p < x_0 < q$, 由 $f_1(x) = f_2(x)$, 即 $3^{x_0-p} = 2 \cdot 3^{q-x_0}$, 解

得: $x_0 = \frac{p+q+\log_3 2}{2}$, 单调递增区间的长度等于

$$(x_0 - p) + (b - q) = x_0 + b - p - q.$$

又由 $f(a) = f(b)$, 即 $3^{p-a} = 2 \cdot 3^{b-q}$, 解得: $p + q = a + b + \log_3 2$, 所以单调区间的长度为:

$$x_0 + b - p - q = \frac{a + b + \log_3 2 + \log_3 2}{2} + b - (a + b + \log_3 2) = \frac{b - a}{2}.$$

综上所述, $f(x)$ 在区间 $[a, b]$ 上的单调增区间的长度和为 $\frac{b-a}{2}$.

【简要评注】

本题表面复杂, 问题新颖, 但只要耐心审题, 注意图像的对称性, 问题即可变得清晰明了. 图像虽然不能作为解答的依据, 但是对提供解题思路有很好的提示作用.

本节小结

不等式问题最终还是需要通过解方程解决, 但不等式与方程的区别在于: 不等式得到的是一个范围, 由于不等式本身的特点, 借助图像有助于启发解题的思路.

求参数的取值范围问题历来都是热点和重点, 它穿插在各个知识内容之内, 而其本质无疑就是不等式的求解与性质.

拓展练习

4.1. 设集合 $A = \{(x, y) | y \geq |x - 2|, x \geq 0\}$, $B = \{(x, y) | y \leq -x + b\}$, $A \cap B \neq \emptyset$, 求 b 的取值范围.

4.2. 若不等式组 $\begin{cases} x - y + 5 \geq 0, \\ y \geq a, \\ 0 \leq x \leq 2 \end{cases}$ 表示的平面区域是一个三角形, 则 a 的取值范围是

()

A. $a < 5$ B. $a \geq 7$ C. $5 \leq a < 7$ D. $a < 5$ 或 $a \geq 7$

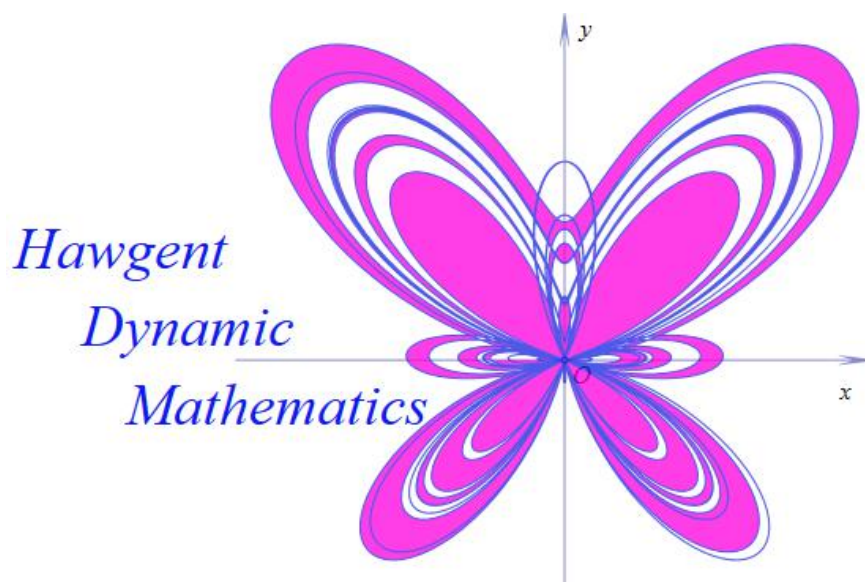
4.3. 设 m 为实数, 若 $\left\{ (x, y) \left| \begin{cases} x - 2y + 5 \geq 0 \\ 3 - x \geq 0 \\ mx + y \geq 0 \end{cases} \right. \right\} \subseteq \left\{ (x, y) \mid x^2 + y^2 \leq 25 \right\}$, 则 m 的

取值范围是_____.

4.4. 对 $a, b \in R$, 记 $\max(a, b) = \begin{cases} a, a \geq b \\ b, a < b \end{cases}$ 函数 $f(x) = \max(|x + 1|, |x - 2|)$ $x \in R$ 的

最小值是_____.

皓荡的大地，奔腾的骏马
只为向着那，最初的梦想



QQ 群: 367878041

www.hawgent.com

11033149@qq.com