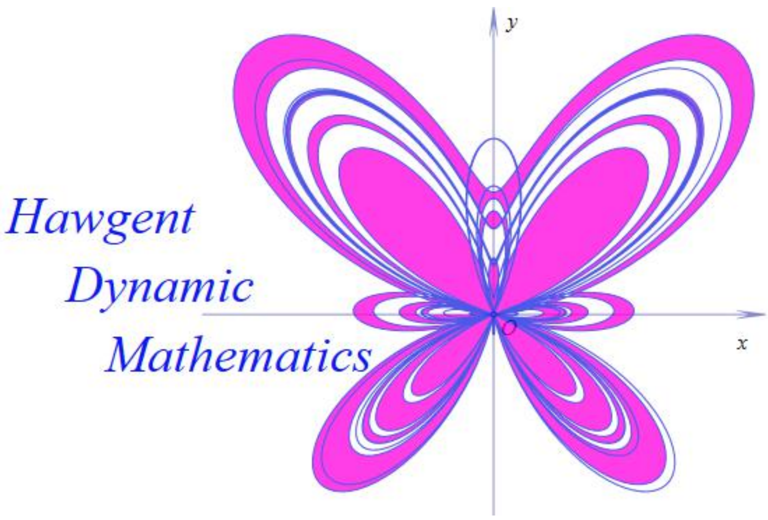
Since 1990's

Hawgent 皓骏动态数学课程系列

动态解析
初中数学综合问题

（下册）

深入学科，彻底突破数学教学和数学学习中的重点难点问题
开展数学实验、数学教学、数学学习和数学研究的必备工具



皓骏（广州）数学技术中心

Hawgent Technology Centre in Mathematics

内容介绍

在学习数学过程中，有许多问题在查看了详细的解答或听到了老师的讲解之后，很多学生仍然不得其解，即使他们在下一次遇到同一个问题也未必能够给出正确或完整的解答.

这是因为，在学习过程中，数学更加需要理解.

本课程收集并整理了一些综合性很高的数学问题，它们让老师感到难教，让学生感到难学。就是说，对于这类问题许多数学老师都反应他们在花费了很大力气、很多时间的讲解之后，很多学生仍然是似懂非懂.

同样是学习，但方法有优劣之分，效率有高低之分.把看似复杂、抽象的问题变得更容易一些，抓住数学的本质使学生多一些理性思考而少一些机械记忆，让学生感悟到自然朴实的数学思想方法从而能够举一反三，这是我们追求的理念.

Hawgent 皓骏团队利用动态数学技术将这类问题呈现在学生面前，为他们提供了一个动手、观察、探索、猜想和验证的机会与平台，帮助他们利用变化的图形和数据发现问题内在的关系，并逐渐形成真正属于他们自己的解决问题的思路，这是我们追求的目标.

如果这种方式能够得到大家的认同，对我们是一种鼓励，并将激发我们更加努力工作的热情，同时希望有更多志同道合者加入我们的队伍，将这项工作持续下去，越做越好.当然也欢迎各种不同的声音，甚至是批评的意见，从而帮助我们得到提高和成长.

欢迎联系：11033149@qq.com

目　录

第四章　图形变换问题

图形的变换包含了图形的平移变换、翻折变换（轴对称变换）、旋转变换，近几年来在全国各地的中考试题中，与图形变换有关的试题逐步成为中考压轴题的新宠.在压轴题中，越来越多地出现了以图形变换为载体，以二次函数、相似三角形、平面几何问题等为主线，将试题设计成为集探索性、开放性于一体，综合考查学生的逻辑推理能力以及运用多种数学思想方法能力的综合题.这些综合题不仅强化了图形变换、函数方程、多边形面积、相似三角形、图形设计等领域的知识，同时还考查了学生综合运用数学知识处理实际问题的能力.

第一节 图形的平移

1．探索与平移抛物线有关的四边形形状问题

例 4-1-1. 如图 4-1-1-1，抛物线 F：$y=ax^2+bx+c$ 的顶点为 P，抛物线与 y 轴交于点 A，与直线 OP 交于点 B．过点 P 作 $PD\perp x$ 轴于点 D，平移抛物线 F 使其经过点 A、D 得到抛物线 F'：$y=a'x^2+b'x+c'$ ，抛物线 F'与 x 轴的另一个交点为 C．

（1）当 $a=1$，$b=-2$，$c=3$ 时，求点 C 的坐标(直接写出答案)；

（2）若 a、b、c 满足了 $b^2=2ac$

①求 $b:b'$ 的值；②探究四边形 $OABC$ 的形状，并说明理由．

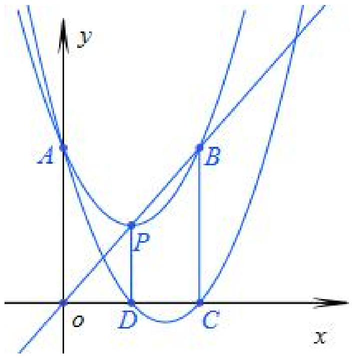


图 4-1-1-1

一、求 C 点的坐标

因为抛物线 F'是由抛物线 F 平移得到，所以 $a=a'$.又因为抛物线按 F'经过点 A（0，c），所以 $c=c'$.所以抛物线 F'的解析式可表示为：$y=ax^2+b'x+c$，当 $a=1$，$c=3$ 时可表示为 $y=x^2+b'x+3$．

可求得抛物线 F 的顶点坐标为（1，2），所以点 D 的坐标为（1，0），利用点 D 可求得 b'=-4，所以抛物线 F'的解析式为 $y=x^2-4x+3=(x-1)(x-3)$，可知点 C 的坐标为（3，0）．

二、求 $b:b'$ 的值

由（1）知，抛物线 F'的解析式可表示为 $y=ax^2+b'x+c$．

因为点 P 是 F 的顶点，而且 $PD\perp x$ 轴，所以 $x_D=x_P=-\dfrac{b}{2a}$，所以点 D（$-\dfrac{b}{2a}$，0）. 因为点 D 在抛物线 F'： $y=ax^2+b'x+c$ 上，所以有 $a(-\dfrac{b}{2a})^2+b'(-\dfrac{b}{2a})+c=0$，利用条件 $b^2=2ac$ 可以化简得 $b'=\dfrac{3b}{2}$，所以得到 $b:b'$=2∶3.

三、探究四边形 *OABC* 的形状

（一）动态解析

点 P 的坐标可表示为（$-\dfrac{b}{2a}$，$\dfrac{4ac-b^2}{4a}$），因为 $b^2=2ac$，所以点 P 的坐标可化简为（$-\dfrac{b}{2a}$，$\dfrac{c}{2}$）.所以直线 OP 的解析式可表示为：$\dfrac{y}{x}=\dfrac{\frac{c}{2}}{-\frac{b}{2a}}=-\dfrac{ac}{b}=-\dfrac{b}{2}$，即 $y=-\dfrac{b}{2}x$.

由 $\begin{cases} y=-\dfrac{b}{2} \\ y=ax^2+bx+c \end{cases}$ $\begin{cases} y=-\dfrac{b}{2} \\ y=ax^2+bx+c \end{cases}$ 可解得点 B 的坐标为（$-\dfrac{b}{a}$，c）.

因为 $b'=\dfrac{3}{2}b$，所以 F' 可表示为 $y=ax^2+\dfrac{3b}{2}x+c$，其对称轴为 $x=-\dfrac{3b}{4a}$，由点 D 的坐标（$-\dfrac{b}{2a}-\dfrac{b}{a}$，0）以及点 D 和点 C 关于直线 $x=-\dfrac{3b}{4a}$ 的对称性可得点 C 的坐标（$-\dfrac{b}{a}$，0）.

所以 $BC\perp x$ 轴，且 $BC=OA$，又因为 $\angle AOC=90°$，所以四边形 *OABC* 是矩形.

（二）动感体验

打开文件“例 4-1-1.dmr”，如图 4-1-1-2 所示，实线表示的曲线为 F，虚线表示的曲线为 F'，分别拖到点 a、点 b 可以分别改变实数 a、实数 b 的值.我们用 $\dfrac{b^2}{2a}$ 表示实数 c 的值.

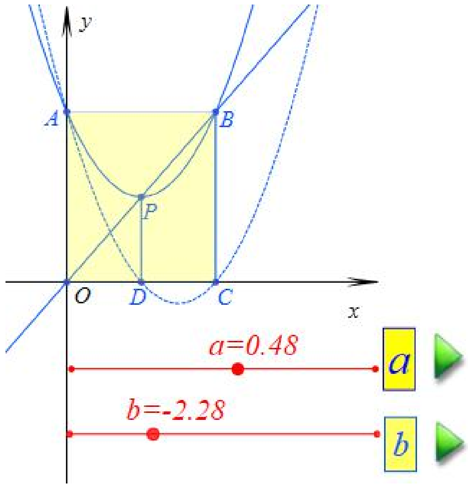


图 4-1-1-2

在实数 a 和实数 b 变化过程中，观察点 P、点 D、点 B 和点 C 的位置变化规律，以及 F 与 F'之间的关系.

（三）简要评注

比较二次函数 $y=ax^2+bx+c$ 平移后的图象和原图象，利用参数 a、b、c 对函数图象的影响，确定平移前后不变的参数 a、c.通过各点的坐标研究它们之间的位置联系和几何关系是解决问题的关键.

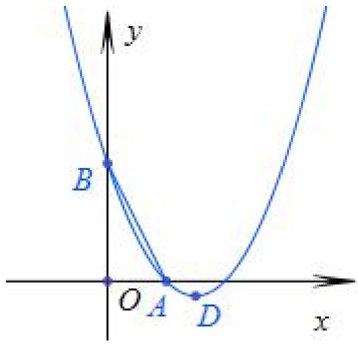
巩固练习(一)

练习 4-1-1：如下图，已知抛物线$y=x^2+bx+c$经过 A（1，0），B（0，2）两点，顶点为 D.

（1）求抛物线的解析式；

（2）将△OAB 绕点 A 顺时针旋转 90°后，点 B 落到点 C 的位置，将抛物线沿 y 轴平移后经过点 C，求平移后所得图象的函数关系式；

（3）设（2）中平移后，所得抛物线与 y 轴的交点为 B'，顶点为 D'，若点 N 在平移后的抛物线上，且满足△NBB'的面积是△NDD'面积的 2 倍，求点 N 的坐标.



本节小结

本节中涉及图形的平移和图象的平移两个内容.解决图形平移的相关问题时，要紧抓住平移的性质，如平移前后图形的对应角、对应边不变，对应点的连线平行且相等等，这些是我们解决问题的关键.在解决图象平移的问题时，利用参数对图象的影响，确定不变的参数和变化的参数与原参数的关系，从而解决问题.

第二节 图形的旋转

1．探索与菱形旋转有关的结论

例 4-2-1. 请阅读下列材料：

如图 4-2-1-1，在菱形 $ABCD$ 和菱形 $BEFG$ 中，点 A、B、E 在同一条直线上，P 是线段 DF 的中点，连结 PG、PC．若 $\angle ABC=\angle BEF=60°$，探究 PG 与 PC 的位置关系及 $\dfrac{PG}{PC}$ 的值．

小聪同学的思路是：延长 GP 交 DC 于点 H，构造全等三角形，经过推理使问题得到解决．

请你参考小聪同学的思路，探究并解决下列问题：

（1）写出上面问题中线段 PG 与 PC 的位置关系及 $\dfrac{PG}{PC}$ 的值；

（2）将图 4-2-1-2 中的菱形 $BEFG$ 绕点 B 顺时针旋转，使菱形 $BEFG$ 的对角线 BF 恰好与菱形 $ABCD$ 的边 AB 在同一条直线上，原问题中的其他条件不变（如图 4-2-2）．你在（1）中得到的两个结论是否发生变化？写出你的猜想并加以证明．

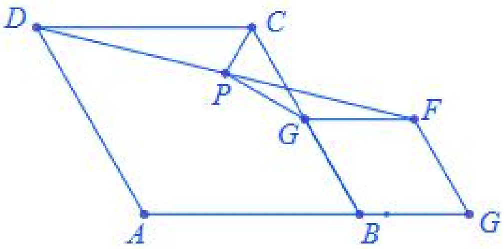


图 4-2-1-1

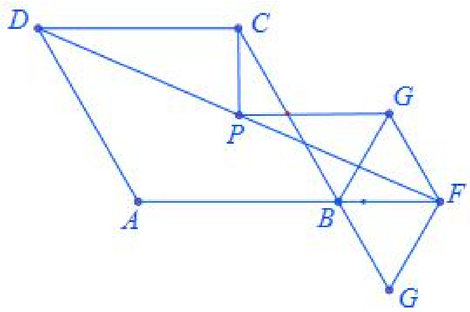


图 4-2-1-2

一、求 PG 与 PC 的位置关系及 $\dfrac{PG}{PC}$ 的值

延长 GP 交 DC 于点 H，如图 4-2-1--3 所示.因为 $CD//GF$，所以$\angle DHP=\angle PGF$，又因为$\angle DPH=\angle FPG$、$DP=FP$，所以$\triangle DHP\cong\triangle FGP$，所以 $DH=GF$，$PH=PG$.

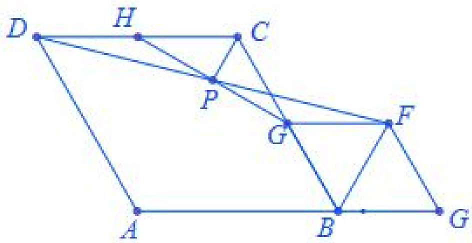


图 4-2-1-3

又因为 $CD=CB$、$GB=GF$，所以 $CD-DH=CB-GB$，即 $CH=CG$，所以△CHG 是等腰三角形且 $CP\perp HG$.因为∠DCB=120°，所以∠CGP=30°，所以 $\dfrac{PG}{PC}=\sqrt{3}$.

二、将菱形 $BEFG$ 绕点 B 顺时针旋转后探索 G 与 PC 的位置关系及 $\dfrac{PG}{PC}$ 的值

（一）动感体验

打开文件"例 4-2-1.*dmr*"，如图 4-2-1-4 所示，单击"旋转"按钮，则菱形开始绕点 B 为中心旋转 60°.在旋转的过程中，观察∠GPC 测量值的变化规律.

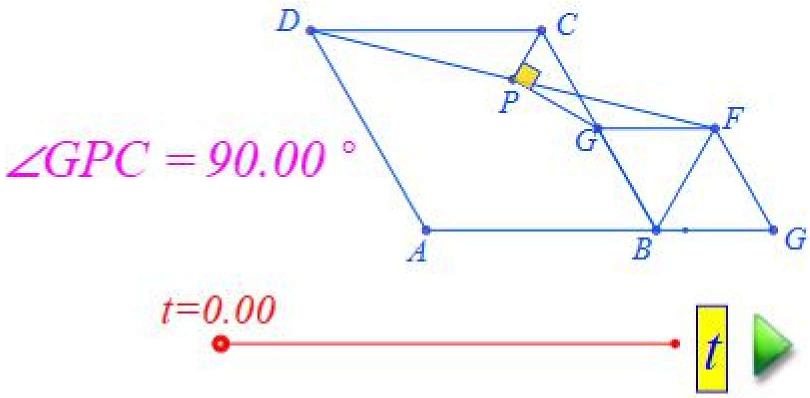


图 4-2-1-4

（二）思路点拨

类比问题（1）的方法，通过△DHP≌△FGP，△CDH≌△CBG，证△CHG 为等腰三角形.

（三）动态解析

延长 GP 交 AD 于点 H，连接 CH、CG，如图 4-2-1-5 所示.由 $DA//GF$ 知∠PDH=∠PFG，又因为∠DPH=∠FPG、$PF=FD$，所以△DHP≌△FGP，所以 $DH=GF=BG$，$HP=PG$.

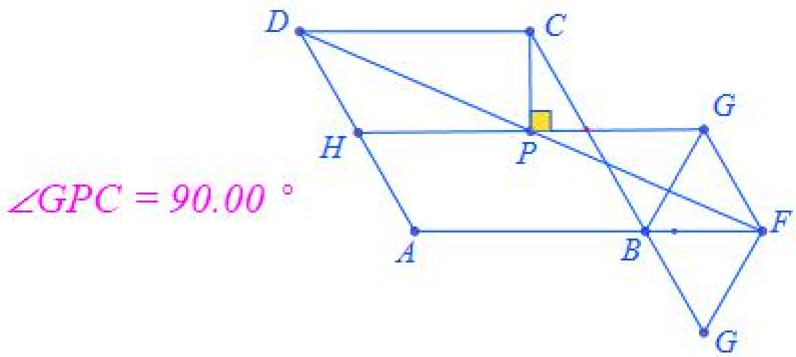


图 4-2-1-5

又由 $DC=BC$、$\angle CDH=\angle CBG=60°$，所以$\triangle CDH\cong\triangle CBG$，因此 $CH=CG$、$\angle CDH=\angle CBG$，这说明$\triangle CHG$ 为等腰三角形，因此 $CP\perp PG$.由$\angle DCH+\angle HCB=120°$得$\angle GCB+\angle HCB=120°$，所以$\angle CGP=30°$，所以$\dfrac{PG}{PC}=\sqrt{3}$.

（四）拓展延伸

若图 4-2-1-1 中$\angle ABC=\angle BEF=2\alpha$（$0°<\alpha<90°$），将菱形 $BEFG$ 绕点 B 顺时针旋转任意角度，原问题中的其他条件不变，请你直接写出$\dfrac{PG}{PC}$的值（用含α的式子表示）．单击“下一页”按钮，进入第二页，如图 4-2-1-6 所示，为菱形 $ABCD$ 和菱形 $BEFG$.拖动点 C 可以改变$\angle ABC$ 和$\angle BEF$ 的大小，但始终有$\angle ABC=\angle BEF$ 成立.拖动点 E 可以改变菱形 $BEFG$ 的边长和旋转的角度，观察$\angle CPG$ 是否始终为 90°.

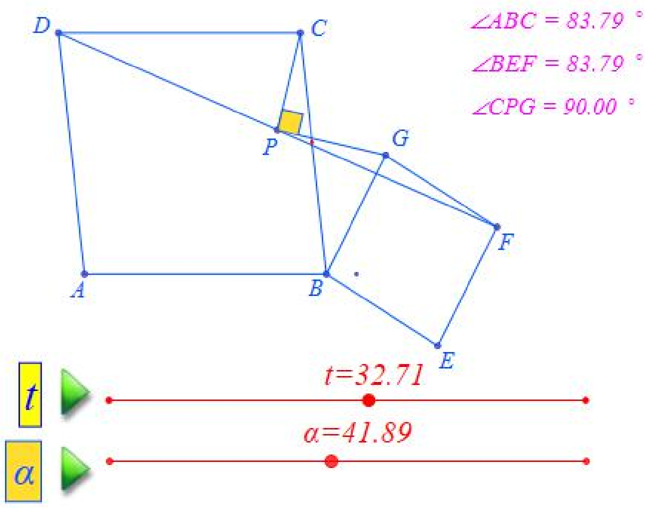


图 4-2-1-6

（五）简要评注

本题的解题思路在题干中以阅读材料的形式给出，其基本思路是通过构造全等三角形得到等腰三角形，利用三线合一的性质，得 PG 与 PC 的位置关系及其比值.问题（2）和问题（3）中利用旋转构建了新的问题背景，但利用从特殊到一般的数学思想，其解题思路不变，而在问题解决中需要用到菱形的性质、解直角三角形等相关知识.

2．探索与正方形旋转有关的周长问题

例 4-2-2. 在平面直角坐标中，边长为 2 的正方形 $OABC$ 的两顶点 A、C 分别在 y 轴、x 轴的正半轴上，点 O 在原点.现将正方形 $OABC$ 绕 O 点顺时针旋转，当 A 点第一次落在直线 $y=x$ 上时停止旋转，旋转过程中，AB 边交直线 $y=x$ 于点 M，BC 边交 x 轴于点 N（如图 4-2-2-1）.

（1）求边 OA 在旋转过程中所扫过的面积；

（2）旋转过程中，当 MN 和 AC 平行时，求正方形 $OABC$ 旋转的度数；

（3）设$\triangle MBN$ 的周长为 p，在旋转正方形 $OABC$ 的过程中，p 值是否有变化？请证明你的结论.

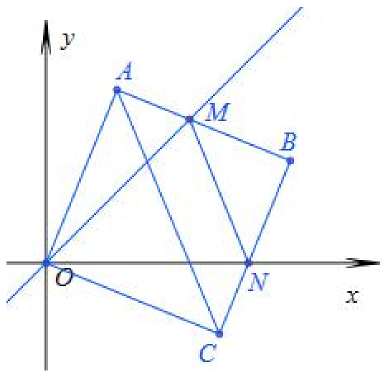


图 4-2-2-1

一、求 OA 扫过的面积

OA 扫过的图形为一扇形，利用扇形面积公式求出旋转角后 OA 扫过的面积.

点 A 第一次落在直线 $y=x$ 上时停止旋转，所以 OA 旋转了 45°，所以 OA 扫过的面积为 $\frac{45}{360}\times\pi\times2^2=\frac{\pi}{2}$.

打开文件“例 4-2-2.dmr”，单击“旋转”按钮（左侧主按钮），即可观察到动态的旋转过程，如图 4-2-2-2 所示.单击“旋转”按钮（中间辅按钮）即可返回到原来的位置.拖动点 A 也可以使得正方形 $OABC$ 绕点 O 任意旋转.

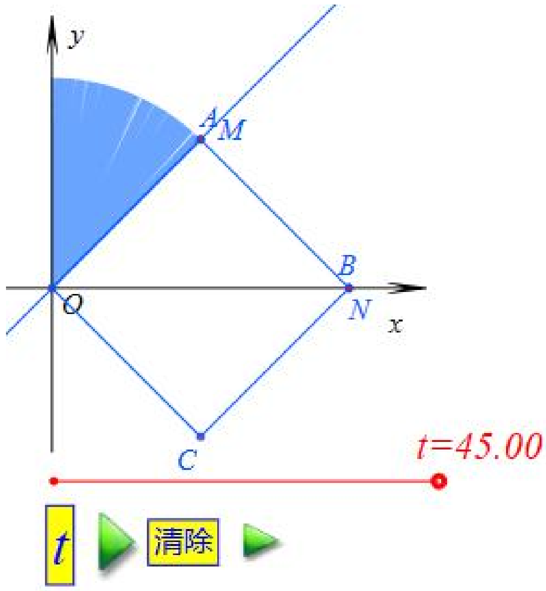


图 4-2-2-2

二、当 MN 和 AC 平行时，求正方形 $OABC$ 旋转过的度数

（一）动感体验

单击“下一页”按钮，进入第二页，如图 4-2-2-3 所示，拖动点 A，研究当 $MN//AC$ 时点 M 和点 N 应满足的条件.

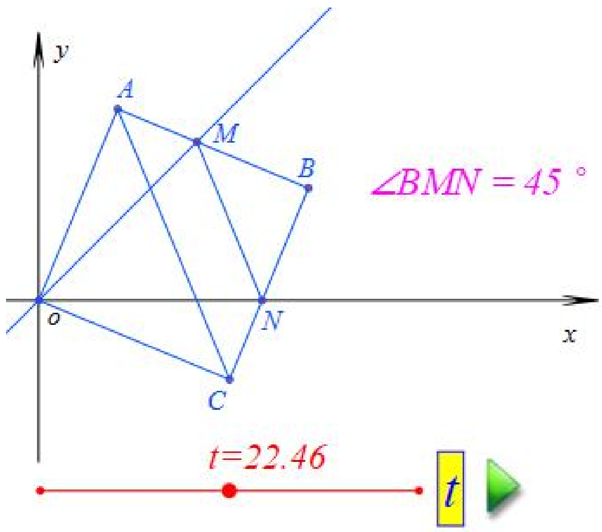


图 4-2-2-3

（二）思路点拨

若 $MN//AC$，则有 $\dfrac{AM}{CN}=\dfrac{AB}{CB}=1$，即 $AM=CN$，通过这个条件求旋转过的角度大小.

（三）动态解析

设旋转过的角度为 α，则 $\angle CON=\alpha$ 、$\angle AOM=45°-\alpha$.

当 $MN//AC$ 时，由 $\dfrac{AM}{CN}=\dfrac{AB}{CB}=1$ 得 $AM=CN$，又因为 $AO=CO$，所以 Rt△AOM≌△CON，则有∠AOM=∠CON，即 $45°-\alpha=\alpha$，解得 $\alpha=22.5°$

三、讨论旋转过程中，△MBN 的周长 p 是否发生改变

（一）动感体验

单击“下一页”按钮，进入第三页，如图 4-2-2-4 所示，拖动该点 A，观察△MBN 的周长测量值的变化规律.

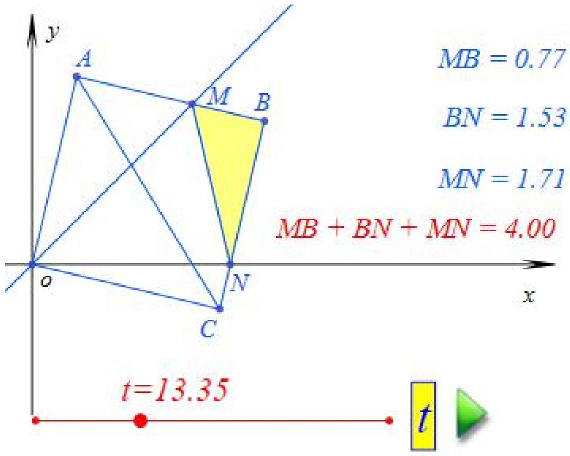


图 4-2-2-4

（二）思路点拨

通过观察发现△MBN 的周长为 4，是正方形 $OABC$ 边长的两倍，这说明 MN 的长度等于 AM 与 CN 的长度之和.那么我们只需要证明将 AM 与 CN 组合起来的直线段等于 MN 即可.

（三）动态解析

当点 A 绕 O 点旋转某一角度，此时 OA 与 y 轴正半轴的夹角为旋转角，∠CON 也为旋转角，而 $OA=OC$，所以考虑将△CON 绕 O 点逆时针旋转 90°，此时 C 点的对应点为点 A，N 点的对应点 E 落在 y 轴的正半轴上，设为 N'，如图 4-2-2-5 所示.因为 $N'A\perp OA$，$OA\perp AB$，所以点 N'、点 A 和点 B 三点共线.

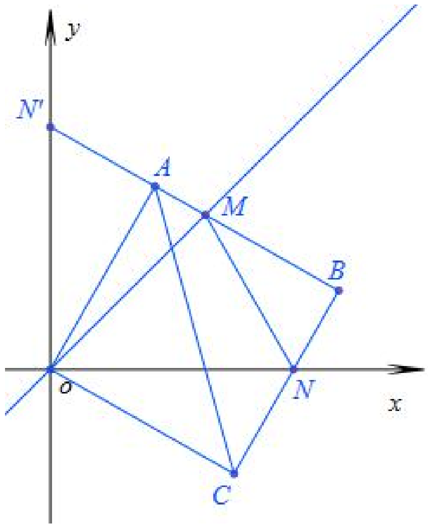


图 4-2-2-5

由旋转的性质知：$AN'=CN$，$ON'=ON$，又因为$\angle N'OM=\angle NOM$、$OM=OM$，所以$\triangle N'OM \cong \triangle NOM$，因此 $N'M=MN$，即：$MN=AM+CN$，所以$\triangle MBN$ 的周长 $p=MN+BM+BN=AM+CN+BM+BN=AB+CB=4$.

（四）简要评注

本题利用旋转变换，将$\triangle CON$ 绕 O 点逆时针旋转 90°，将$\triangle MBN$ 的周长转化为 AB 和 CB 的和. 通常在正方形中，根据正方形边长相等，各个角为直角的性质，将三角形进行旋转变化，达到转化线段的目的，从而解决问题.

3．利用旋转推导线段之间的长度关系

例 4-2-3. 如图 4-2-3-1，边长为 10 的正方形 $ABCD$ 被两条与边平行的线段 EF、GH 分割为四个小矩形，EF 与 GH 交于点 P.

（1）若 $AG=AE$，证明：$AF=AH$；

（2）若 $\angle FAH=45°$，证明：$AG+AE=FH$；

（3）若 RtΔGBF 的周长为 10，求矩形 $EPHD$ 的面积.

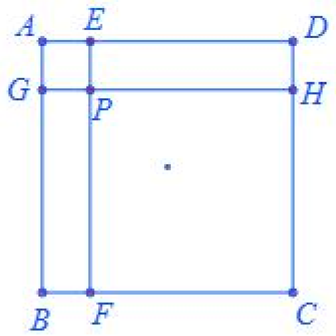


图 4-2-3-1

一、证明 $AF=AH$

连接 AF、AH，如图 4-2-3-2 所示.因为 $AB//EF$，$AE//BF$，$\angle ABF=90°$，所以四边形 $ABFE$ 是矩形，所以 $BF=AE$，同理可证 $AG=DH$.又因为 $AD=AB$、$\angle ABF=\angle ADH$，所以 Rt$\Delta ABF\cong$RtΔADH，所以 $AF=AH$.

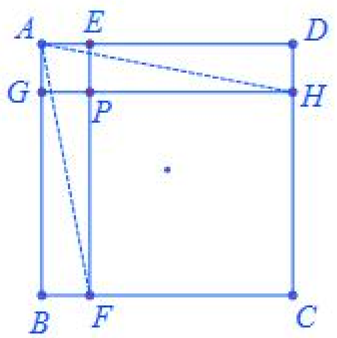


图 4-2-3-2

二、若 $\angle FAH=45°$，证明 $AG+AE=FH$

（一）动感体验

打开文件“例 4-2-3.dmr”，如图 4-2-3-3 所示，拖动点 E，$\angle FAH$ 保持为 45°不变，观察 $AE+AG$ 与 FH 的关系

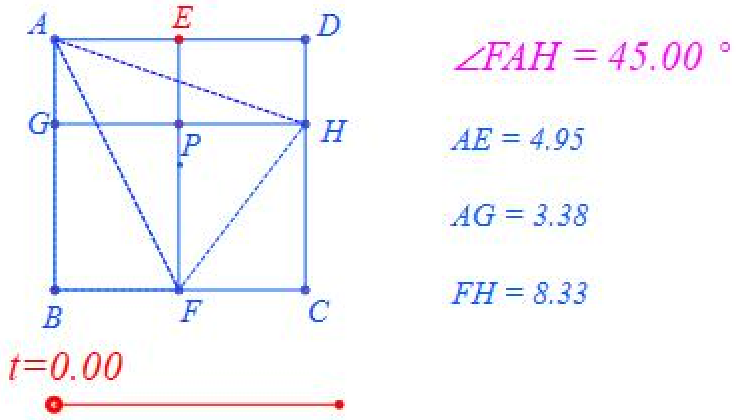


图 4-2-3-3

（二）思路点拨

因为要证明 $AE+AG=FG$，因此要构造长度等于 $AE+AG$ 的直线段，然后证明改线段与 FG 的长度相等.

可以以点 H 为顶点，以点 F 为底边顶点构造一个等腰三角形.因为 $DH=AG$，所以延长 HD 得到一条与 AE 相等的线段即可.那么通过将 Rt△ABF 绕点 A 旋转 90°可以实现.

（三）动态解析

将 Rt△ABF 绕点 A 按照逆时针方向旋转 90°，得到 Rt△$AB'F'$，其中点 B'与点 D 重合，如图 4-2-3-4 所示.因为 $F'D\perp AD$、$AD\perp DC$，所以点 F'、点 D、点 C 三点共线.

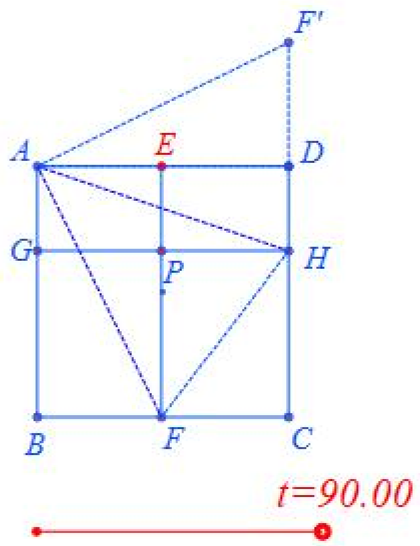


图 4-2-3-4

因为∠FAH=45°，所以∠BAF+∠DAH=45°，因为∠BAF=DAF'，所以∠DAF'+∠DAH=∠$F'AH$=45°，又因为 AF=AF'、AH=AH，所以 $\Delta AFH \cong \triangle AF'H$，因此 FH=$F'H$=DH+DF'=BF+DH=AE+AG.

三、求矩形 *EPHD* 的面积

如图 4-2-3-5 所示，分别用字母表示 BG 和 BF，根据条件 RtΔGBF 的周长为 10，利用代数式的恒等变形求矩形 $EPHD$ 的面积.

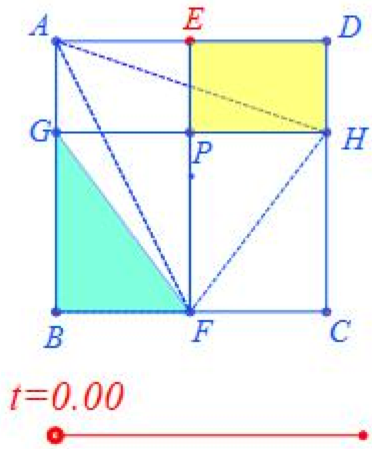


图 4-2-3-5

设 BG=x、BF=y，则矩形 $EPHD$ 的面积可表示为 $(1-x)(1-y)=1-(x+y)+xy$.

已知 RtΔGBF 的周长为 1，即 $x+y+\sqrt{x^2+y^2}=1$，可化为 $\sqrt{x^2+y^2}=1-(x+y)$，两边平分后化简得：$1-2(x+y)+2xy=0$，所以：$1-(x+y)+xy=\dfrac{1}{2}$

简要评注

此题的第（2）个问题，根据正方形的性质，利用旋转变换将 DH 和 BF 转化到一条线直线，通常在正方形中证线段的和差的问题时，这是常用的方法：“截长补短”法.那么为什么这里用补短法而不用截长法，因为截长法会破坏∠FAH，会使得其问题复杂化，但是还是可以解答。

4．与长方形旋转有关的存在性问题

例 4-2-4. 如图 4-2-4-1，在平面直角坐标系中，O 为坐标原点，点 A 的坐标为（-8，0），直线 BC 经过点 B（-8，6）和点 C（0，6），将四边形 $OABC$ 绕点 O 按顺时针方向旋转 α 度得到四边形 $OA'B'C'$，此时直线 OA'、直线 $B'C'$分别与直线 BC 相交于 P、Q.

（1）四边形 $OABC$ 的形状是____________，当 $\alpha=90°$时，$\dfrac{BP}{BQ}$的值是____________.

（2）①如图 4-2-4-1，当四边形 $OA'B'C'$的顶点 B'落在 y 轴正半轴上时，求$\dfrac{BP}{BQ}$的值;②如图 4-2-4-2，当四边形 $OA'B'C'$的顶点 B'落在直线 BC 上时，求$\Delta OPB'$的面积.

（3）在四边形 $OABC$ 旋转过程中，当 $0°<\alpha\le 180°$ 时，是否存在这样的点 P 和点 Q，使 $BP=\dfrac{1}{2}BQ$？若存在，请直接写出点 P 的坐标；若不存在，请说明理由.

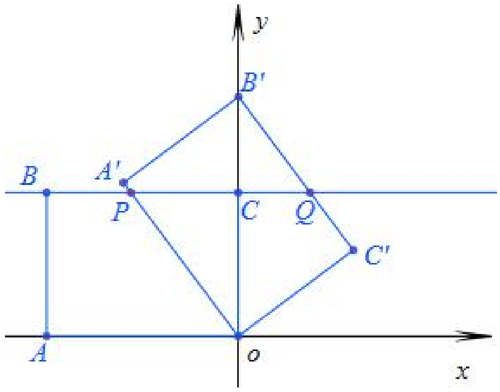


图 4-2-4-1

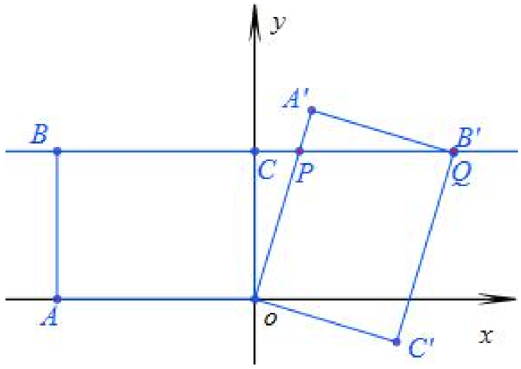


图 4-2-4-2

一、判断四边形的形状及$\dfrac{BP}{BQ}$的值

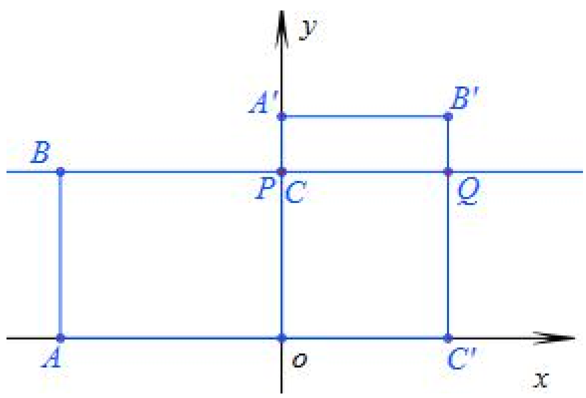


图 4-2-4-3

根据顶点坐标易判断四边形 $OABC$ 的形状为矩形.旋转 90°后，OA'与 y 轴重合，此时点 P 与点 C 重合，如图 4-2-4-3 所示，所以 BP=8，直线 $B'C'$与直线 BC 的交点 Q 的坐标为（6，6），所以 BQ=14，所以 $\dfrac{BP}{BQ}=\dfrac{8}{14}=\dfrac{4}{7}$.

二、求旋转后顶点 B'落在 y 轴正半轴上时 $\dfrac{BP}{BQ}$ 的值

利用△PCO∽△$B'A'O$ 求 PC，利用△$B'CQ$∽△$B'C'O$ 求 CQ.

因为∠POC=∠$B'OA'$，所以 Rt△POC∽Rt△$B'OA'$，所以有 $\dfrac{PC}{A'B'}=\dfrac{OC}{OA'}$，由 $A'B'$=OC=6、OA'=8，解得：$PC=\dfrac{9}{2}$，所以 $BP=BC-PC=\dfrac{7}{2}$.同理由 Rt△$B'CQ$∽Rt△$B'C'O$ 解得：$CQ=3$，所以 $BQ=11$.所以 $\dfrac{BP}{BQ}=\dfrac{7}{22}$.

三、求旋转后顶点 B'落在直线 BC 上时△OPB'的面积

解决问题的关键是求出线段 PB'的长度.

因为 OC=$A'B'$、∠CPO=∠$A'PB'$，所以 Rt△COP≌Rt△$A'B'P$，所以 PO=PB'.过点 P 作 OB'的垂足 K，如图 4-2-4-4 所示，则点 K 是 OB'的中点，因此 $OK=\dfrac{1}{2}OB'=\dfrac{1}{2}\sqrt{OA'^2+A'B'^2}=5$.

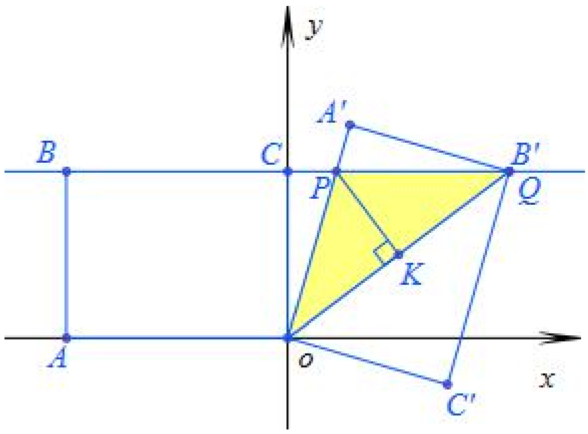


图 4-2-4-4

在 Rt△OPK 和 Rt△$OB'A'$中，$\cos\angle POK=\dfrac{OK}{OP}=\dfrac{OA'}{OB'}$，可解得：$OP=\dfrac{25}{4}$.

所以△OPB'的面积为 $\dfrac{1}{2}OC\cdot PQ=\dfrac{75}{4}$.

四、当 $0°<\alpha\leq 180°$ 时，讨论是否存在这样的点 P 和点 Q，使 BP=$\dfrac{1}{2}BQ$

（一）动感体验

打开文件“例 4-2-4.dmr”，如图 4-2-4-5 所示，拖动点 B' 使得矩形 $OA'B'C'$ 绕点 O 按照顺时针方向旋转，观察是否可能存在 $BP=\dfrac{1}{2}BQ$ 的情况.

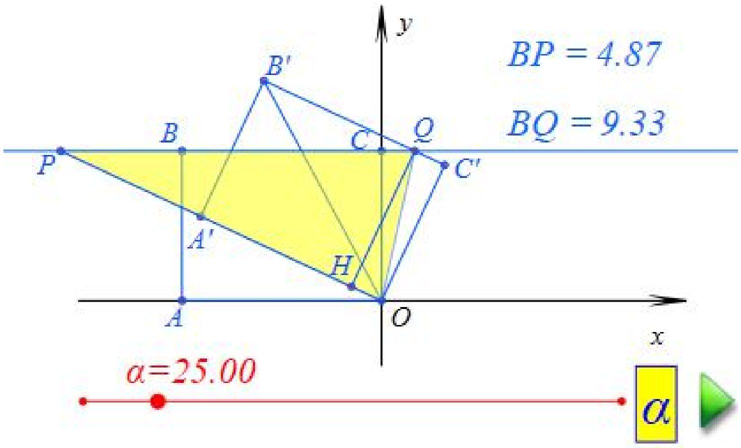


图 4-2-4-5

（二）思路点拨

分两种情况讨论：点 P 在点 B 的左侧，且满足 $BP=\dfrac{1}{2}BQ$；点 P 在点 B 的右侧，且满足 $BP=\dfrac{1}{2}BQ$.

（三）动态解析

当点 P 在点 B 的左侧，且满足 $BP=\dfrac{1}{2}BQ$ 时，连接 OQ，过 Q 作 $QH\perp OA'$ 于 H，如图 4-2-4-6 所示.由于在△PQO 中 PQ 边上的高 OC 和 PO 边上的高 QH 相等，所以由等面积法可知 $PQ=PO$.设 $BP=x$，则 $BQ=2x$，所以 $PO=PQ=3x$，而在 Rt△PCO 中，$PC=BC+BP=8+x$，$CO=6$，$PO=3x$.在 Rt△POC 中，根据勾股定理可求出 $x=1+\dfrac{3}{2}\sqrt{6}$，所以满足 $BP=\dfrac{1}{2}BQ$ 要求的点 P 的坐标为 $(-9-\dfrac{3}{2}\sqrt{6},6)$.

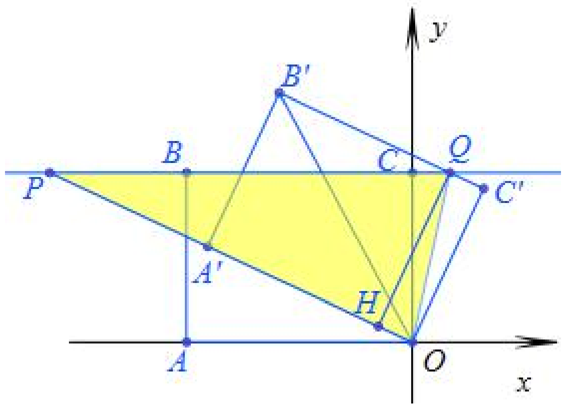


图 4-2-4-6

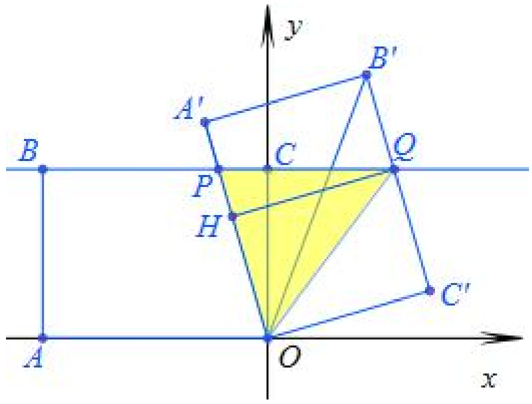


图 4-2-4-7

当点 P 在点 B 的右侧，且满足 $BP=\frac{1}{2}BQ$ 时，如图 4-2-4-7 所示，同理在 RtΔPOC 中，$PC=8-x$、$PO=PQ=BP=x$、$CO=6$，由勾股定理可解得 $x=\frac{25}{4}$，所以满足 $BP=\frac{1}{2}BQ$ 要求的点 P 的坐标为 $(-\frac{7}{4},6)$.

（四）简要评注

此题是以旋转变化为背景，设计的一个函数几何题，解决各问题时，应抓住旋转变换的性质——旋转前后的图形对应角，对应边不变，各点的旋转角不变.这些性质可以方便我们转化角和转化边，为证全等或相似提供条件.

5．与两次旋转有关的面积最大问题

例 4-2-5. 如图 4-2-5-1，已知 A、B 是线段 MN 上的两点，$MN=4, MA=1, MB>1$．以 A 为中心顺时针旋转点 M，以 B 为中心逆时针旋转点 N，使 M、N 两点重合成一点 C，构成 $\triangle ABC$，设 $AB=x$．

（1）求 x 的取值范围；

（2）若$\triangle ABC$ 为直角三角形，求 x 的值；

（3）探究$\triangle ABC$ 的最大面积.

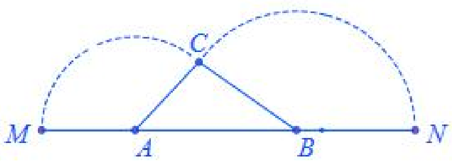


图 4-2-5-1

一、求 x 的取值范围

（一）动感体验

打开文件“例 4-2-5.dmr”，拖动点 B 可以该变 x 的大小，观察点 B 对点 C 位置的影响，如图 4-2-5-2、图 4-2-5-3 所示.

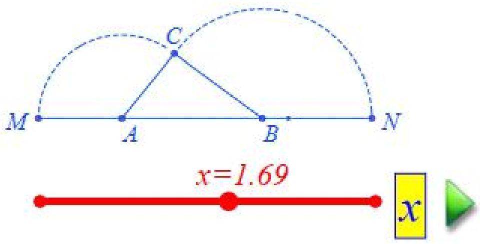


图 4-2-5-2

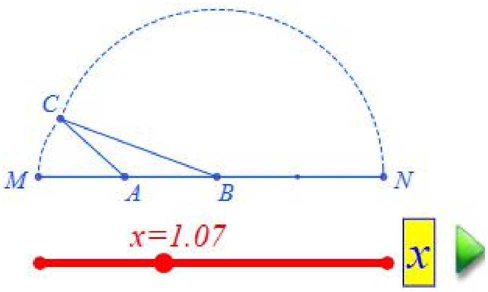


图 4-2-5-3

（二）思路点拨

当 $AC+AB>BC$ 且 $AC+BC>AB$ 时才能够构成$\triangle ABC$.

向左移动点 B 可能出现 $BC>AC+AB$ 的情况，向右移动点 B 可能出现 $AB>AC+BC$ 的情况.这两种情况下均不能构成$\triangle ABC$.因此找到点 B 位置的临界点是解决问题的关键.

（三）动态解析

由于 $AB=x$，$BC=BN=4-1-x=3-x$，$AC=MA=1$.而构成三角形的条件是任意两边之和大于第三边，所以要能构成△ABC，需满足的条件为 $AC+AB>BC$ 且 $AC+BC>AB$，即$\begin{cases}1+x>3-x\\1+3-x>x\end{cases}$，

解得：$1<x<2$.

二、当△ABC 为直角三角形，求 x 的值

（一）动感体验

单击“下一页”按钮，进入第二页，如图 4-2-5-4 所示，拖动点 B，观察△ABC 三个内角测量值的变化过程，研究△ABC 是否可能为直角三角形.

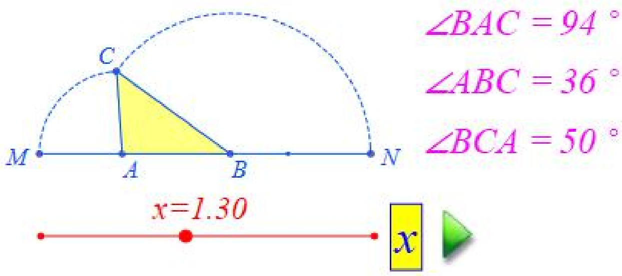


图 4-2-5-4

（二）思路点拨

根据直角的不同分三种情况进行讨论.

（三）动态解析

若∠CAB=90°，则有 $AC^2+AB^2=BC^2$，即 $1^2+x^2=(3-x)^2$，解得：$x=\dfrac{4}{3}$，如图 4-2-5-5 所示.

若∠ABC=90°，则有 $AB^2+BC^2=AC^2$，即 $x^2+(3-x)^2=1^2$，无解.

若∠BCA=90°，则有 $AC^2+BC^2=AB^2$，即 $1^2+(3-x)^2=x^2$，解得：$x=\dfrac{5}{3}$，如图 4-2-5-6 所示.

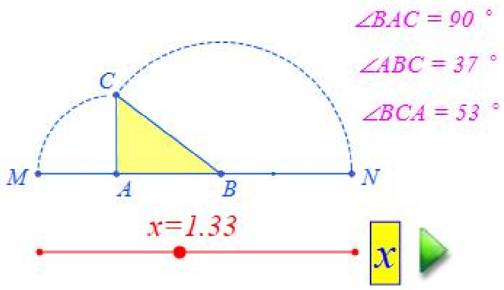


图 4-2-5-5

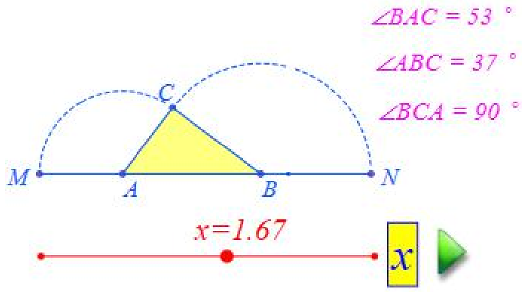


图 4-2-5-6

综上所述，当△ABC 为直角三角形时 x 的值为$\frac{4}{3}$或$\frac{5}{3}$.

三、讨论△ABC 的最大面积

（一）思路点拨

作 $CD\perp AB$ 于 D，分点 D 在线段 AB 上和点 D 在线段 MA 上两种情况讨论△ABC 的面积.

（二）动态解析

作 $CD\perp AB$ 于 D，当∠CAB≤90°时，AB 边上的高 CD 在△ABC 的内部或边上，如图 4-2-5-7 所示；当∠CAB＞90°时，AB 边上的高 CD 在△ABC 的外部，如图 4-2-5-8 所示.所以根据点 D 的位置分点 D 在线段 AB 上和点 D 在线段 MA 上两种情况讨论△ABC 的面积.

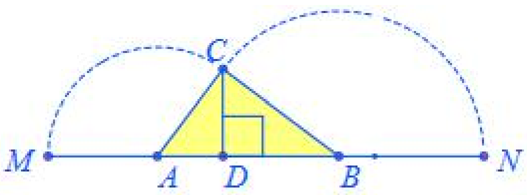


图 4-2-5-7

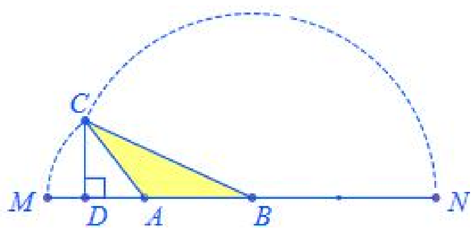


图 4-2-5-8

当点 D 在线段 AB 上时，根据△ABC 的三边 AC=1，AB=x，BC= 3-x，可表示 AB 边上的高 CD.方法如下：设 CD=h，则 AD=$\sqrt{1-h^2}$，BD=$\sqrt{(3-x)^2-h^2}$，因为 AD+BD=x，所以 $\sqrt{1-h^2}+\sqrt{(3-x)^2-h^2}=x$，化简后 $x^2h^2=-8x^2+24x-16$，所以 $S^2=\frac{1}{4}x^2h^2=-2x^2+6x-4=-2\left(x-\frac{3}{2}\right)^2+\frac{1}{2}$，由问题（2）知，当点 A 和点 D 重合时，即∠BAC=90°，此时 $x=\frac{4}{3}$，因为$1<x<2$，所以点 D 在线段 AB 上时，x 的取值范围为 $\frac{4}{3}\le x<2$，而当 $x=\frac{3}{2}$ 时（满足$\frac{4}{3}\le x<2$），S^2 取最大值$\frac{1}{2}$，从而 S 取最大值$\frac{\sqrt{2}}{2}$.

当点 D 在线段 AM 上时，由图可知 BD-AD=AB，所以$\sqrt{(3-x)^2-h^2}-\sqrt{1-h^2}=x$，同理可得，$S^2=\frac{1}{4}x^2h^2=-2x^2+6x-4=-2\left(x-\frac{3}{2}\right)^2+\frac{1}{2}$，因为 x 的取值范围为 $1<x\le\frac{4}{3}$，$1<x\le\frac{4}{3}$在对称轴 x=$\frac{3}{2}$的左侧，而 a<0，所以 S^2 随 x 的增大而增大，所以当 $x=\frac{4}{3}$，S^2 有最大值$\frac{4}{9}$，从而 S 取最大值$\frac{2}{3}$.

综合①②得，$\triangle ABC$ 的最大面积为 $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

（三）简要评注

本题以线段的旋转为背景，综合了构成三角形的条件，勾股定理及面积最值问题等多种问题，考察了学生数形结合、分类讨论的能力.在解决问题（2）时，要注意根据直角的不同进行分类讨论；在解决问题（3）时，AB 边上的高有可能在三角形内部或三角形外部，因为高所在位置不同其求法也有所不同，所以要分两种情况讨论.

6．与正方形旋转有关的结论成立问题

例 4-2-6. 如图 4-2-6-1，四边形 *ABCD* 是正方形，*G* 是 *CD* 边上的一个动点(点 *G* 与 *C*、*D* 不重合)，以 *CG* 为一边在正方形 *ABCD* 外作正方形 *CEFG*，连结 *BG*，*DE*．我们探究下列图中线段 *BG*、线段 *DE* 的长度关系及所在直线的位置关系：

（1）①猜想如图 4-2-6-1 中线段 *BG*、线段 *DE* 的长度关系及所在直线的位置关系；②将图 4-2-6-1 中的正方形 *CEFG* 绕着点 *C* 按顺时针(或逆时针)方向旋转任意角度α，得到如图 4-2-6-2 、如图 4-2-6-3 情形．请你通过观察、测量等方法判断①中得到的结论是否仍然成立，并选取图 4-2-6-2 证明你的判断．

（2）将原题中正方形改为矩形（如图 4-2-6-4 至图 4-2-6-6)，且 $AB=a$，$BC=b$，$CE=ka$，$CG=kb$ ($a\neq b$，$k>0$)，第(1)题①中得到的结论哪些成立，哪些不成立？若成立，以图 4-2-6-5 为例简要说明理由．

（3）在第(2)题图 4-2-6-5 中，连结 DG、BE，且 $a=3$，$b=2$，$k=\dfrac{1}{2}$，求 BE^2+DG^2 的值.

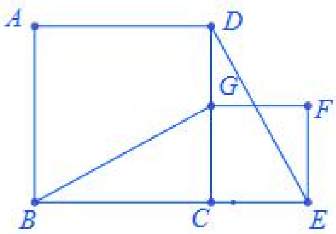


图 4-2-6-1

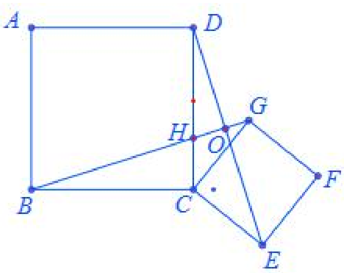


图 4-2-6-2

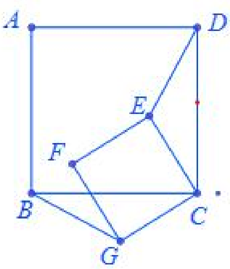


图 4-2-6-3

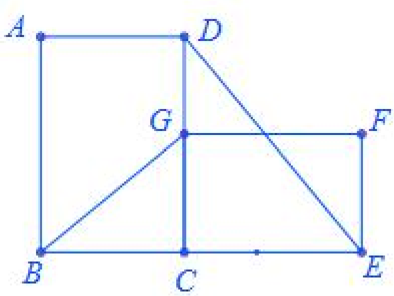


图 4-2-6-4

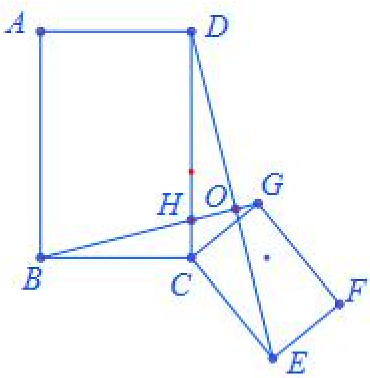


图 4-2-6-5

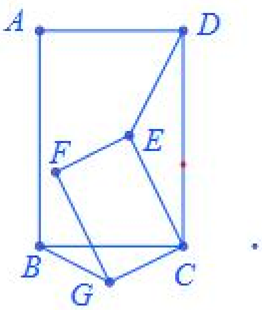


图 4-2-6-6

一、讨论线段 BG、线段 DE 的长度关系及所在直线的位置关系

（一）动感体验

打开文件“例 4-2-6.dmr”，如图 4-2-6-7 所示，点 O 是直线 BG 与 DE 的交点.拖动点 G 观察线段 BG 和 DE 的长度测量值的变化规律，并研究点 G 的位置对 $\angle BOD$ 的影响.

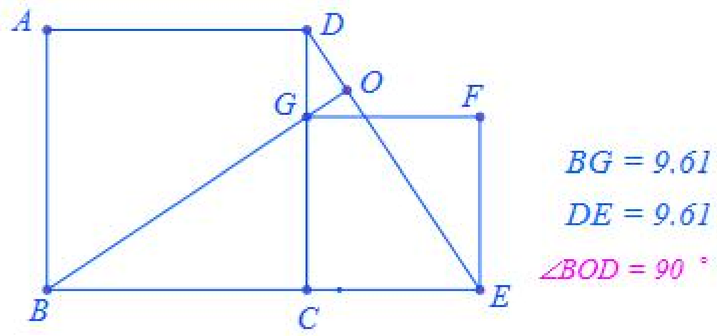


图 4-2-6-7

（二）思路点拨

因为 $CG=CE$，$BC=DC$，所以 Rt$\triangle BCG\cong\triangle DCE$，所以 $BG=DE$.接下来的问题是证明 $BG\perp DE$.

（三）动态解析

因为 Rt$\triangle BCG\cong\triangle DCE$，所以$\angle EDC=\angle CBG$,又因为$\angle BGC=\angle DGO$,所以$\angle DOG=\angle BCG=90°$,所以 $BG\perp DE$.

同样我们也可以通过旋转求解，将$\triangle DCE$ 绕点 D 按照逆时针顺序旋转 90°，则点 C 与点 A 重合，设点 E'是由旋转点 E 而得到的点，如图 4-2-6-8 所示.由图形旋转的性质可知$\angle E'DE=90°$，而$\angle E'DE=\angle E'DC+\angle CDE$，又因为$\angle CDE=\angle GBC$、$\angle GB\angle CGB=90°$，所以$\angle E'DC=\angle BGC$，因此 $E'D//BG$，所以 $BG\perp DE$.

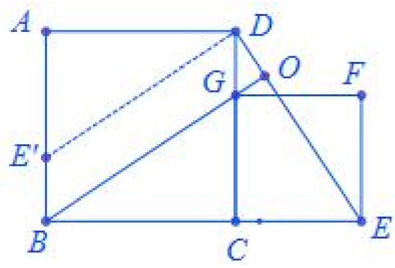


图 4-2-6-8

所以 BG 垂直且等于 DE.

二、探索将正方形 $CEFG$ 绕点 C 旋转后结论是否仍然成立

（一）动感体验

单击“下一页”按钮，如图 4-2-6-9 所示，拖动点 G，正方形 $CDFG$ 可绕点 C 任意旋转；拖动线段 CD 上的点可以改变正方形 $CGFE$ 的边长，观察是否仍然有 $BG=DE$ 以及 $\angle BOD=90°$ 成立.

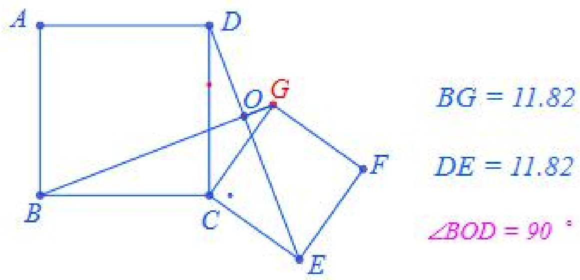


图 4-2-6-9

（二）思路点拨

证明的方法是类似的.

（三）动态解析

因为 Rt$\triangle BCG\cong\triangle DCE$，所以 $\angle EDC=\angle CBG$,又因为 $\angle BGC=\angle DGO$,所以 $\angle DOG=\angle BCG=90°$,所以 $BG\perp DE$.

同样也可以利用旋转的性质进行求解，设 DC 与 BG 交于点 P，容易证明 $\triangle BCG\cong\triangle DCE$，因此 $\angle PBC=\angle EDC$、$BG=DE$.

在图 4-2-6-10 所示情况下，由 $\angle E'DC+\angle EDC=\angle BPC+\angle PBC=90°$，得 $\angle E'DC=\angle BPC$，所以 $E'D//BG$，所以 $BG\perp DE$.

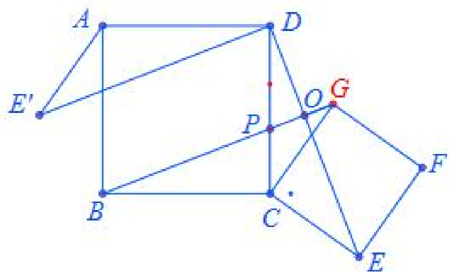


图 4-2-6-10

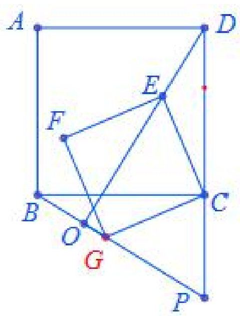


图 4-2-6-11

而当如图 4-2-6-11 所示情况下，由 $\angle PBC+\angle BPC=90°$，得 $\angle EDC+\angle BPC=90°$，所以 $ED\perp BG$.

所以，BG 垂直且等于 DE.

三、将正方形改为矩形后，讨论问题（1）中的结论是否仍然成立

（一）动感体验

单击“下一页”按钮，进入第三页，如图 4-2-6-12 所示，点 O 是直线 BG 与 DE 的交点.通过拖动点 B 和点 D 可以分别改变矩形 $ABCD$ 的宽和长，拖动点 G 可以改变矩形 $CEFG$ 与矩形 $ABCD$ 的比例.观察线段 BG、DE 的长度测量值的变化规律，能否探索出它们直接的关系？并研究点 G 的位置对 $\angle BOD$ 的影响

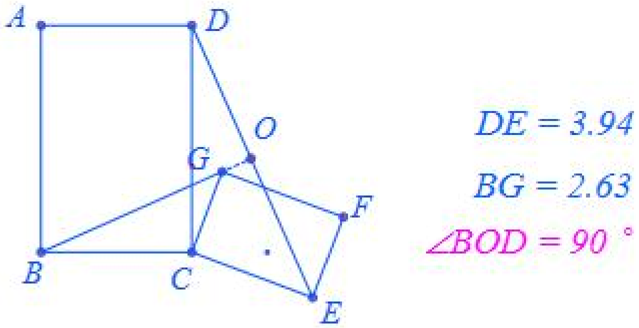


图 4-2-6-12

（二）思路点拨

当正方形 $CEFG$ 变为矩形时，$\triangle BCG$ 与$\triangle DCE$ 的关系由全等变为相似.

（三）动态解析

因为$k=\dfrac{BC}{CG}=\dfrac{DC}{CE}$，$\angle BCG=\angle DCE=90°$，所以$\triangle BCG \backsim \triangle DCE$，那么有$\angle CBG=\angle CDE$.

因为$\angle CDE+\angle CED=90°$，所以有$\angle GBC+\angle CED=90°$，则 $BO\perp DE$，即 $BG\perp DE$.

那么线段 BG 与 DE 的长度直接到底有什么关系呢？与 k 的值有关系吗？还是与矩形 $ABCD$ 的长与宽的之比有关系？你可以自己动手进行测量、计算和研究.单击“测量值”按钮，结果如图 4-2-6-13 所示，请你给出你所观察到得结论.

图 4-2-6-13

事实上，由△BCG∽△DCE可得到$\dfrac{BG}{DE}=\dfrac{BC}{DC}$.这些结论当矩形$CEFG$绕点$C$旋转的过程中仍然成立吗？单击“下一页”按钮，如图4-2-6-14所示，拖动带你G观察测量值的变化规律.

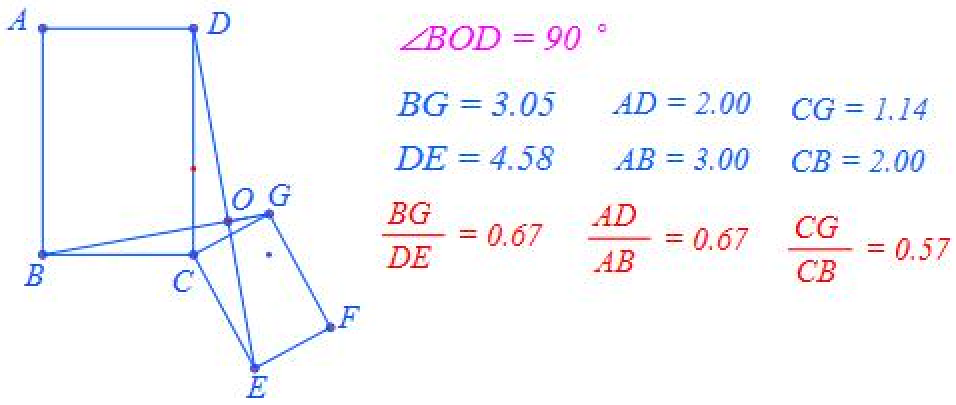


图 4-2-6-14

要证明这些结论其实也并不困难，只要证明△BCG∽△DCE即可.

四、在问题（2）的基础上，求BE^2+DG^2的值

由问题（2）的分析知BG与DE垂直，如图4-2-6-15所示，所以$BE^2=BO^2+OE^2$，$DG^2=DO^2+OG^2$．而$DO^2+BO^2=BD^2$，$OG^2+OE^2=GE^2$，所以$BE^2+DG^2=BD^2+EG^2$，利用条件易求出$BD^2=13$，$GE^2=\dfrac{13}{4}$，所以$BE^2+DG^2=\dfrac{65}{4}$.

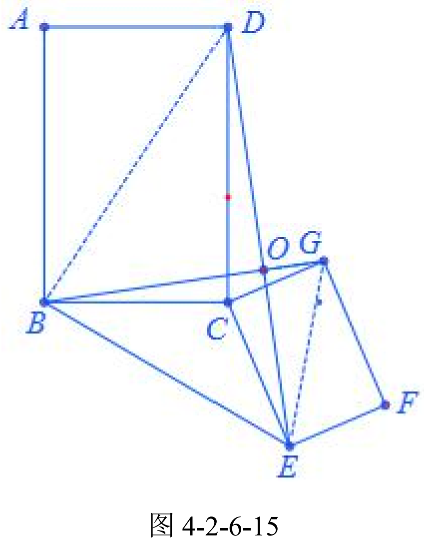


图 4-2-6-15

简要评注

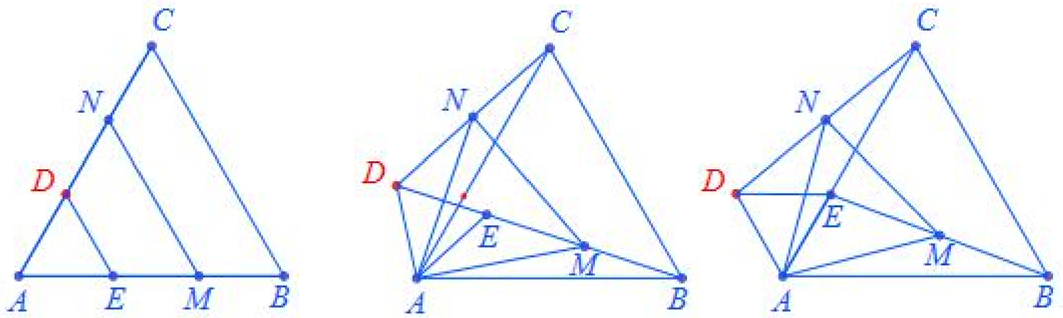
本题以旋转变换作“载体”，利用特殊到一般的数学思想构造图形及问题.其解决问题的思路也是利用特殊到一般的思想， 抓住旋转的性质，得全等或相似.

巩固练习（二）

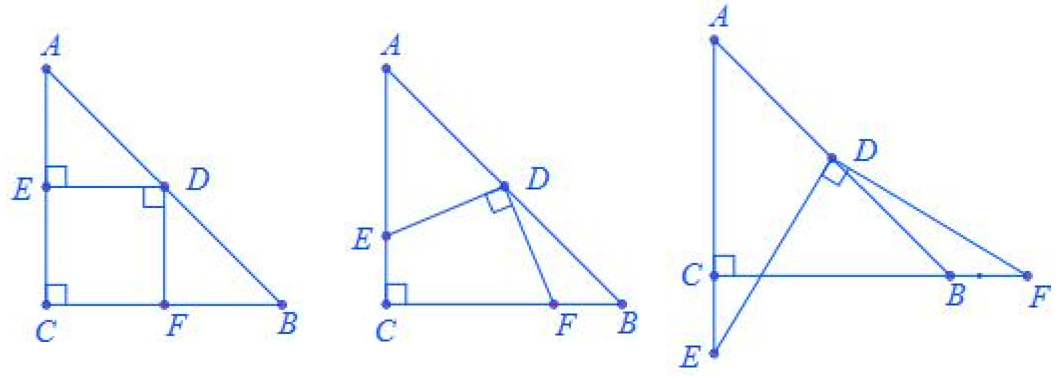
练习 4-2-1：如下图（左），若$\triangle ABC$和$\triangle ADE$为等边三角形，M，N分别EB，CD的中点，易证：$CD=BE$，$\triangle AMN$是等边三角形.

（1）当把$\triangle ADE$绕A点旋转到下图（中）的位置时，$CD=BE$是否仍然成立？若成立请证明，若不成立请说明理由；

（2）当$\triangle ADE$绕A点旋转到下图（右）的位置时，$\triangle AMN$是否还是等边三角形？若是，请给出证明，并求出当$AB=2AD$时，$\triangle ADE$与$\triangle ABC$及$\triangle AMN$的面积之比；若不是，请说明理由.



练习 4-2-2：已知 Rt$\triangle ABC$中，$AC=BC$，$\angle C=90°$，D为AB边的中点，$\angle EDF=90°$，$\angle EDF$绕D点旋转，它的两边分别交AC、CB（或它们的延长线）于E、F. 当$\angle EDF$绕D点旋转到$DE\perp AC$于E时，如下图（左），易证$S_{\triangle DEF}+S_{\triangle CEF}=\frac{1}{2}S_{\triangle ABC}$. 当$\angle EDF$绕$D$点旋转到$DE$和$AC$不垂直时，在下图（中）和下图（右）这两种情况下，上述结论是否成立？若成立，请给予证明；若不成立，$S_{\triangle DEF}$、$S_{\triangle CEF}$、$S_{\triangle ABC}$又有怎样的数量关系？请写出你的猜想，不需证明.



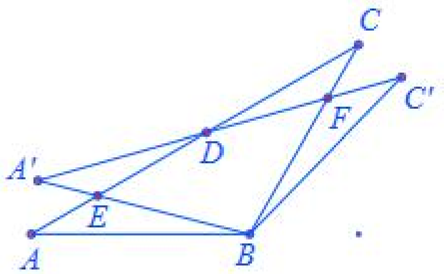
练习 4-2-3：在$\triangle ABC$中，$AB=BC=2$，$\angle ABC=120°$，将$\triangle ABC$绕点B顺时针旋

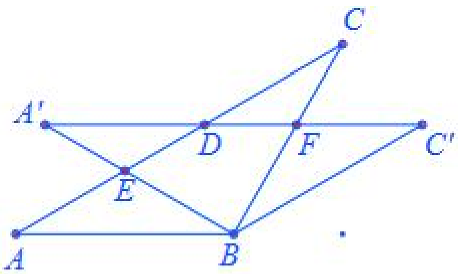
转角α $(0^\circ<\alpha<90^\circ)$得△*A'BC'*，*A'B* 交 *AC* 于点 *E*，*A'C'*分别交 *AC*、*BC* 于 *D*、*F* 两点.

（1）如下图(左)，观察并猜想，在旋转过程中，线段 *EA'*与 *FC* 有怎样的数量关系？并证明你的结论；

（2）如下图（右），当$\alpha=30^\circ$时，试判断四边形 *BC'DA* 的形状，并说明理由；

（3）在（2）的情况下，求 *ED* 的长.



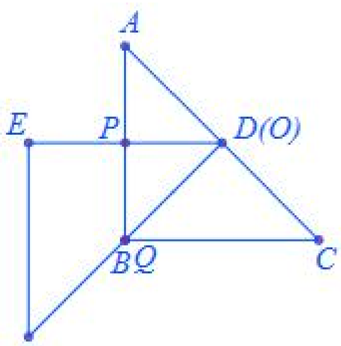


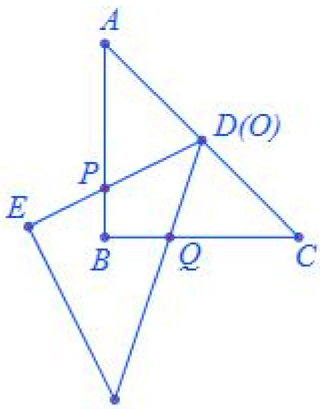
练习 4-2-4：把两块全等的直角三角形 *ABC* 和 *DEF* 叠放在一起，使三角板 *DEF* 的锐角顶点 *D* 与三角板 *ABC* 的斜边中点 *O* 重合，其中∠*ABC*=∠*DEF*=90°，∠*C*=∠*F*=45°，*AB*=*DE*=4,，把三角板 *ABC* 固定不动，让三角板 *DEF* 绕点 *O* 旋转，设射线 *DE* 与射线 *AB* 相交于点 *P*，射线 *DF* 与线段 *BC* 相交于点 *Q*.

（1）如下图（左），当射线 *DF* 经过点 *B*，即点 *Q* 与点 *B* 重合时，易证△*APD*∽△*CDQ*. 此时，$AP\cdot CQ$ =_______.

（2）将三角板 *DEF* 由下图（左）所示的位置绕点 *O* 沿逆时针方向旋转，设旋转角为α. 其中$0^\circ<\alpha<90^\circ$，问$AP\cdot CQ$的值是否改变？说明你的理由.

（3）在（2）的条件下，设$CQ=x$，两块三角板重叠面积为 *y*，求 *y* 与 *x* 的函数关系式.（图（中）和图（右）供解题用）





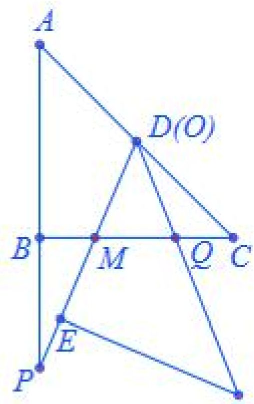


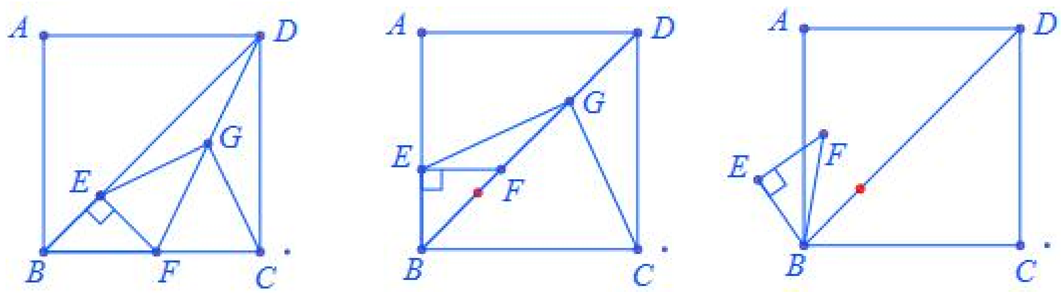
图 4-2-52①　　　　　　　　图 4-2-52②　　　　　　　　图 4-2-52③

练习 4-2-5：已知正方形 $ABCD$ 中，E 为对角线 BD 上一点，过 E 点作 $EF\perp BD$ 交 BC 于 F，连接 DF，G 为 DF 中点，连接 EG，CG．

（1）求证：$EG=CG$；

（2）将下图（左）中$\triangle BEF$ 绕 B 点逆时针旋转 45º，如下图（中）所示，取 DF 中点 G，连接 EG，CG．问（1）中的结论是否仍然成立？若成立，请给出证明；若不成立，请说明理由．

（3）将下图（左）中$\triangle BEF$ 绕 B 点旋转任意角度，如下图（右）所示，再连接相应的线段，问（1）中的结论是否仍然成立？通过观察你还能得出什么结论？（均不要求证明）

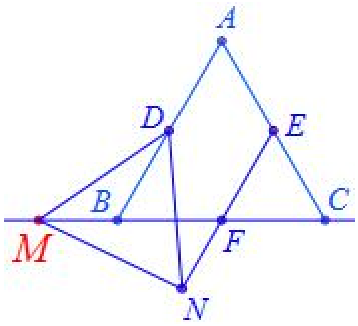
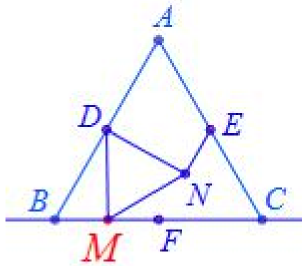
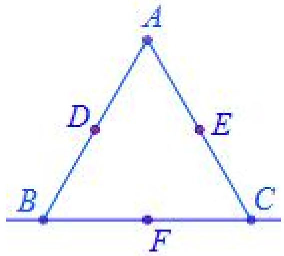


练习 4-2-6：如图， 已知等边三角形 ABC 中，点 D，E，F 分别为边 AB，AC，BC 的中点，M 为直线 BC 上一动点，$\triangle DMN$ 为等边三角形（点 M 的位置改变时， $\triangle DMN$ 也随之整体移动）．

（1）如下图（左），当点 M 在点 B 左侧时，请你判断 EN 与 MF 有怎样的数量关系？点 F 是否在直线 NE 上？都请直接写出结论，不必证明或说明理由；

（2）如下图（中），当点 M 在 BC 上时，其它条件不变，（1）的结论中 EN 与 MF 的数量关系是否仍然成立?若成立，请利用下图（中）证明；若不成立，请说明理由；

（3）若点 M 在点 C 右侧时，请你在下图（右）中画出相应的图形，并判断（1）的结论中 EN 与 MF 的数量关系是否仍然成立?若成立?请直接写出结论，不必证明或说明理由．


A
D
E
B
C
M
F
N

A
D
E
N
B
C
M
F

A
D
E
B
C
F

本节小结

旋转变换在中考中主要以两种方式呈现：一种是以图形旋转变换为背景的几何问题，此类问题的解决主要利用旋转变换的性质，找相等的角或变，进而得全等或相似，这类问题中往往用到从特殊到一般的数学思想；另一种是对图形进行旋转变换，以达到简便解决问题的目的，这种题灵活性强，要求学生对图形的感知能力较高.

第三节 图形的翻折

1．与图形翻折有关的两直线间的关系

例 4-3-1.将一矩形纸片 $OABC$ 放在平面直角坐标系中，O（0，0），$A(6，0)$，C（0，3）．动点 Q 从点 O 出发以每秒 1 个单位长的速度沿 OC 向终点 C 运动，运动 $\frac{2}{3}$ 秒时，动点 P 从点 A 出发以相等的速度沿 AO 向终点 O 运动．当其中一点到达终点时，另一点也停止运动．设点 P 的运动时间为 t（秒）．

（1）用含 t 的代数式表示 OP、OQ；

（2）当 t=1 时，如图 4-3-1-1，将△OPQ 沿 PQ 翻折，点 O 恰好落在 CB 边上的点 D 处，求点 D 的坐标；

（3）连结 AC，将△OPQ 沿 PQ 翻折，得到△EPQ，如图 4-3-1-2．问：PQ 与 AC 能否平行？PE 与 AC 能否垂直？若能，求出相应的 t 值；若不能，说明理由．

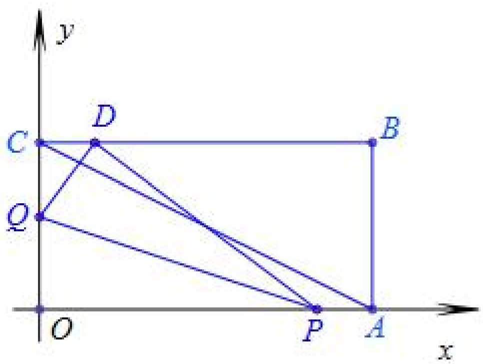


图 4-3-1-1

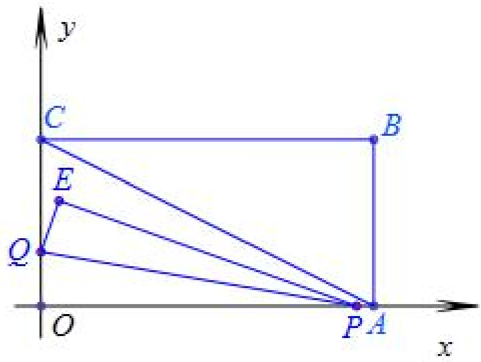


图 4-3-1-2

一、用含有 t 的式子表示 OP、OQ

$OP=OA-AP=6-t$，$OQ=t+\frac{2}{3}$．

二、求点 D 的坐标

当 t=1 时，$OQ=\frac{5}{3}$，由折叠性质可知 $DQ=OQ=\frac{5}{3}$，而 $CQ=CO-OQ=\frac{4}{3}$.所以在 Rt△QCD 中，$CD=\sqrt{QD^2-QC^2}=1$，因此点 D 的坐标为（1，3）．

三、判断 PQ 与 AC 能否平行

（一）动感体验

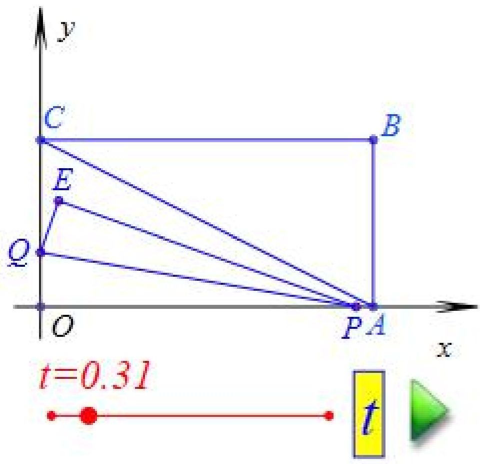


图 4-3-1-3

打开文件"例 4-3-1.dmr"，如图 4-3-1-3 所示，拖动点 Q，观察 PQ 与 AC 能否平行，研究当 PQ 与 AC 平行时点 P 和点 Q 应该满足的条件.

（二）思路点拨

当 PQ 与 AC 平行时有 $\dfrac{OP}{OQ}=\dfrac{OA}{OC}$，进而求出 t 的值，然后判断所求出的 t 的值是否满足题设的条件.

（三）动态解析

因为 $OQ=t+\dfrac{2}{3}>AP=t$，而 $OC<OA$，所以点 Q 先运动到点 C 的位置，则由 $t+\dfrac{2}{3}\leq 3$ 解得：$0\leq t\leq \dfrac{7}{3}$.

当 $PQ/\!/AC$ 时，由 $\dfrac{OP}{OQ}=\dfrac{OA}{OC}$，即 $\dfrac{6-t}{\frac{2}{3}+t}=\dfrac{6}{3}$，解得：$t=\dfrac{14}{9}$，满足 $0\leq t\leq \dfrac{7}{3}$，所以存在 PQ 与 AC 平行的情况，如图 4-3-1-4 所示.

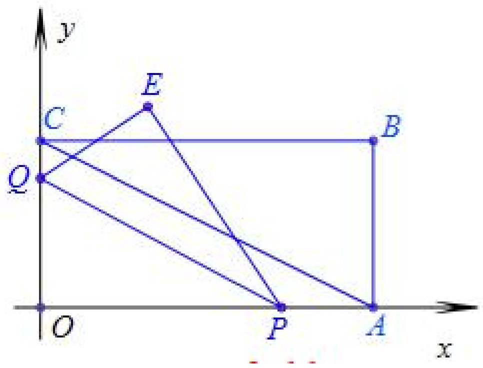


图 4-3-1-4

四、判断 PE 与 AC 能否垂直

（一）动感体验

继续拖动点 Q，观察是否可能出现 PE 与 AC 垂直的情况.

（二）思路点拨

因为 $QE\perp PE$，因此当 $PE\perp AC$ 时，$QE//AC$，然后根据比例线段之间的关系求解 t 的值，最后讨论所求得的解是否满足的条件.

（三）动态解析

因为 $QE\perp PE$，因此当 $PE\perp AC$ 时，$QE//AC$.可以用 t 表示出 Rt△PEF 各条边的长度，然后利用勾股定理求出 t 的值.

设直线 QE 与 x 轴交于点 F，则有 $\dfrac{OC}{OQ}=\dfrac{OA}{OF}=\dfrac{AC}{QF}$，其中 $OC=3$、$OQ=t+\dfrac{2}{3}$、$OA=6$、$AC=3\sqrt{5}$，解得：$OF=2(t+\dfrac{2}{3})$、$QF=\sqrt{5}(t+\dfrac{2}{3})$.

而 $OP=6-t$，所以 $PF=OF-OP=3t-\dfrac{14}{3}$.又由翻折图形的性质知 $PE=OP=6-t$、$QE=OQ=t+\dfrac{2}{3}$，因此 $EF=QF-QE=(\sqrt{5}-1)(t+\dfrac{2}{3})$.在 Rt△$PEF$ 中有：

$PF^2=PE^2+EF^2$，即 $(3t-\dfrac{14}{3})^2=(6-t)^2+(\sqrt{5}-1)^2\cdot(t+\dfrac{2}{3})^2$，化简得：

$(3t+2)[3(\sqrt{5}+1)t+2\sqrt{5}-38]=0$，解得：$t=-\dfrac{2}{3}$（舍去），或 $t=-4+\dfrac{10\sqrt{5}}{3}\approx 3.4$（如图 4-3-1-5 所示，舍去）.

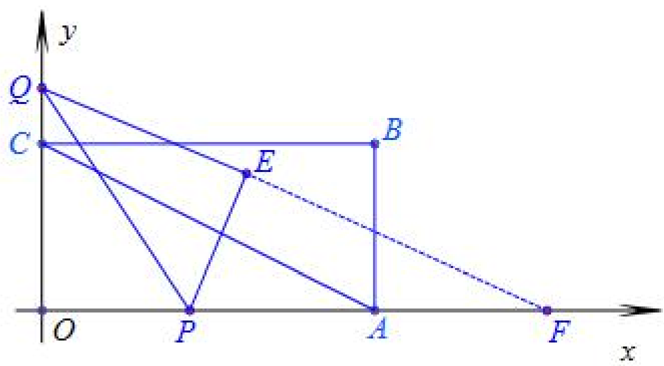


图 4-3-1-5

所以 PE 与 AC 垂直的情况不存在.

（四）简要评注

讨论折叠后 PQ 与 AC 能否平行或垂直，利用平行线对应成比例，将平行或垂直问题转化为对应线段的问题，利用折叠的性质用 t 表示各条线段， 从而得到关于 t 的方程，求解判断即可.

2．由正方形的折叠到长方形折叠的推广

例 4-3-2. 问题解决： 如图 4-3-2-1，将正方形纸片 $ABCD$ 折叠，使点 B 落在 CD 边上一点 E（不与点 C，D 重合），压平后得到折痕 MN．当 $\frac{CE}{CD}=\frac{1}{2}$ 时，求 $\frac{AM}{BN}$ 的值．

类比归纳： 在图 4-3-2-1 中，若 $\frac{CE}{CD}=\frac{1}{3}$ 则 $\frac{AM}{BN}$ 的值等于________；若 $\frac{CE}{CD}=\frac{1}{4}$ 则 $\frac{AM}{BN}$ 的值等于________；若 $\frac{CE}{CD}=\frac{1}{n}$（$n$ 为整数），则 $\frac{AM}{BN}$ 的值等于________．（用含 n 的式子表示）

联系拓广： 如图 4-3-2-2，将矩形纸片 $ABCD$ 折叠，使点 B 落在 CD 边上一点 E（不与点 C、D 重合），压平后得到折痕 MN 设 $\frac{AB}{BC}=\frac{1}{m}(m>1),\frac{CE}{CD}=\frac{1}{n}$ 则 $\frac{AM}{BN}$ 的值等于________．（用含 m、n 的式子表示）

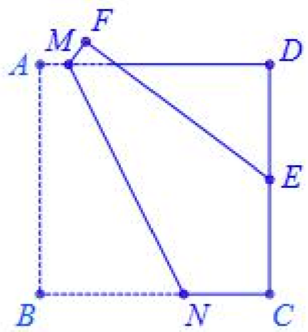


图 4-3-2-1

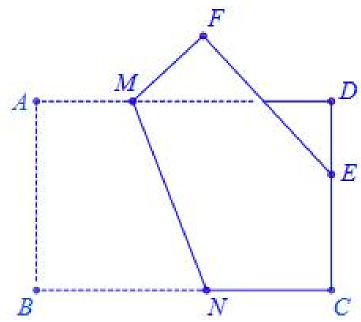


图 4-3-2-2

一、当 $\frac{CE}{CD}=\frac{1}{2}$ 时，求 $\frac{AM}{BN}$ 的值

为方便计算，设正方形的边长为 2，则 $EC=DE=1$.设 $NE=BN=x$，则 $NC=2-x$，在 Rt△BCE 中由勾股定理得 $NE^2=NC^2+EC^2$，即 $x^2=(2-x)^2+1^2$，解得：$x=\frac{5}{4}$，即 $BN=\frac{5}{4}$.

连接线段 MB、ME，如图 4-3-2-3 所示，根据翻折的性质有：$MB=ME$.设 $AM=y$，那么在 Rt△ABM 中根据勾股定理有 $MB^2=AB^2+AM^2=4+y^2$，在 Rt△MED 中根据勾股定理有 $ME^2=MD^2+DE^2=(2-y)^2+1^2$.由 $4+y^2=(2-y)^2+1^2$ 解得：$y=\frac{1}{4}$，即 $AM=\frac{1}{4}$.

所以 $\frac{AM}{BN}=\frac{1}{5}$.

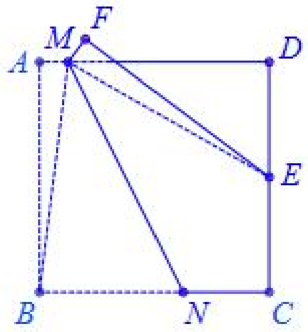


图 4-3-2-3

二、当 $\dfrac{CE}{CD}=\dfrac{1}{n}$ 时，求 $\dfrac{AM}{BN}$ 的值

为方便计算，设正方形边长为 n，则 CE=1，DE=n－1，其讨论方法同上，可求得

$BN=\dfrac{n^2+1}{2n}$、$AM=\dfrac{(n-1)^2}{2n}$，所以 $\dfrac{AM}{BN}=\dfrac{(n-1)^2}{n^2+1}$.

那么，当 $\dfrac{CE}{CD}=\dfrac{1}{3}$ 时则 $\dfrac{AM}{BN}$ 的值等于 $\dfrac{2}{5}$；当 $\dfrac{CE}{CD}=\dfrac{1}{4}$ 时 $\dfrac{AM}{BN}$ 的值等于 $\dfrac{9}{17}$；当 $\dfrac{CE}{CD}=\dfrac{1}{n}$（$n$ 为整数）时，$\dfrac{AM}{BN}$ 的值等于 $\dfrac{(n-1)^2}{n^2+1}$.

设 $CD=kCE$，即 $k=\dfrac{CD}{CE}$，事实上当 k 为任意实数时，上述结论都成立，你能进一步给出证明吗？打开文件“例 4-3-2.dmr”，如图 4-4-9 所示，拖动 CD 上的点 E 能够改变 $k=\dfrac{CD}{CE}$ 的值，可以发现总有 $\dfrac{AM}{BN}=\dfrac{(k-1)^2}{k^2+1}$ 成立.

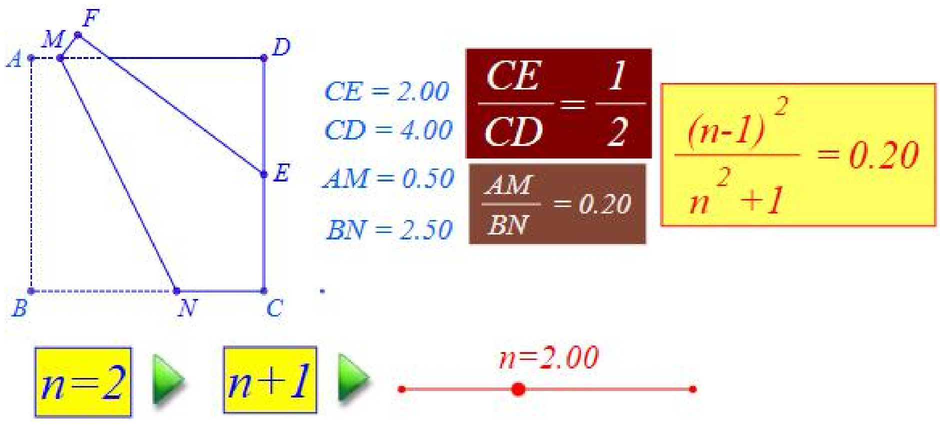


图 4-3-2-4

三、当 $\dfrac{AB}{BC}=\dfrac{1}{m},\dfrac{CE}{CD}=\dfrac{1}{n}$ 时求 $\dfrac{AM}{BN}$ 的值

为计算方便，可设 $AB=CD=n$，则 $CE=1$，$BC=mn$.设 $BN=NE=x$，则 $NC=mn-x$，那么在 Rt$\triangle NCE$ 中，由 $NE^2=NC^2+EC^2$，即 $x^2=(mn-x)^2+1^2$，解得：$x=\dfrac{m^2n^2+1}{2mn}$.

连接 MB、ME，如图 4-3-2-5 所示.设 $AM=y$，由 $MB=ME$ 以及 $BM^2=AB^2+AM^2$、$ME^2=MD^2+DE^2$ 得：$n^2+y^2=(mn-y)^2+(n-1)^2$，解得：$y=\dfrac{m^2n^2-2n+1}{2mn}$.

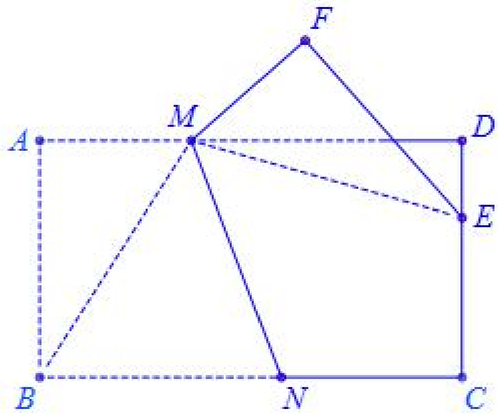


图 4-3-2-5

所以 $\dfrac{AM}{BN}=\dfrac{m^2n^2-2n+1}{m^2n^2+1}=1-\dfrac{2n}{m^2n^2+1}$.

在这里 m、n 可以是任意大于 1 的实数.单击“下一页”按钮，如图 4-3-2-6 所示，点 C 可以拖动从而改变 BC 的长度以及 m 的值，点 E 可以拖动从而改变 CE 的长度以及 n 的值，在拖动过程中观察 $\dfrac{AM}{BN}$ 的测量值与 $1-\dfrac{2n}{m^2n^2+1}$ 的测量值之间的关系.

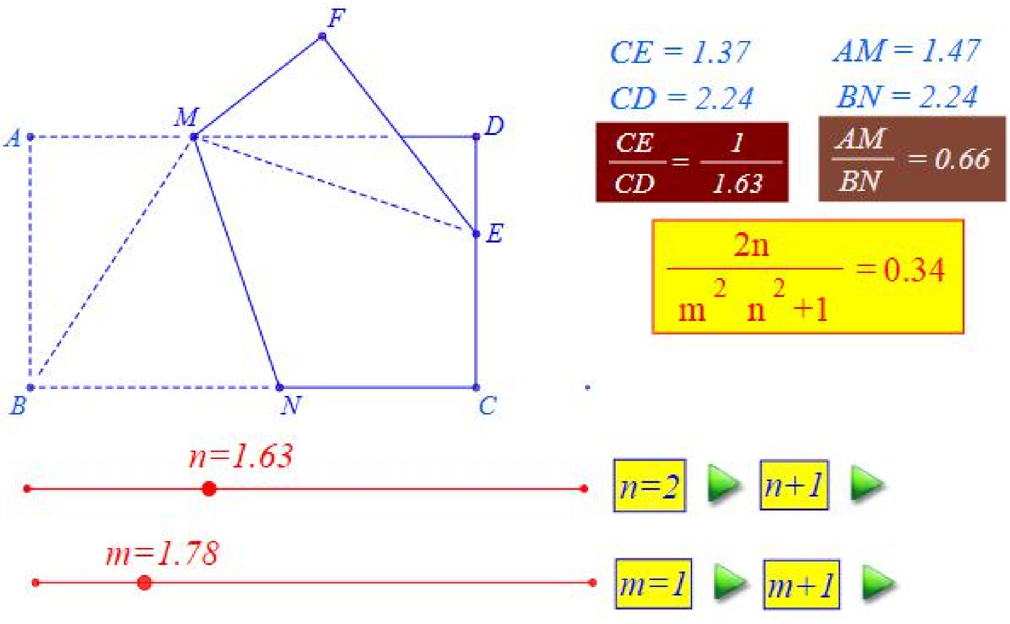


图 4-3-2-6

简要评注

此题体现了从特殊到一般的数学思想，利用（1）特殊情况下的解法过渡到（3）的一般情况.折叠问题中求线段的长通常要用到方程思想，用含有未知数的式子表示所需线段（表示时通常要运用到轴对称的性质，即折叠前后对应边相等）利用勾股定理列方程求解.

3．与纸片折叠有关的函数关系问题

例 4-3-3. 已知一个直角三角形纸片 OAB，其中 $\angle AOB=90°$，$OA=2$，$OB=4$．如图 4-3-3-1，将该纸片放置在平面直角坐标系中，折叠该纸片，折痕与边 OB 交于点 C，与边 AB 交于点 D.

（1）若折叠后使点 B 与点 A 重合，求点 C 的坐标；

（2）若折叠后点 B 落在边 OA 上的点为 B'，设 $OB'=x$，$OC=y$，试写出 y 关于 x 的函数解析式，并确定 y 的取值范围；

（3）若折叠后点 B 落在边 OA 上的点为 B'，且使 $B'D\,/\!/\,OB$，求此时点 C 的坐标.

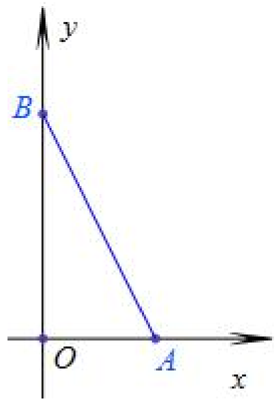


图 4-3-3-1

一、当点 B 与点 A 重合时，求点 C 的坐标

因为折叠后点 B 与点 A 重合，根据对称性知点 D 是线段 AB 的中点，那么点 C 是经过点 D 与 AB 垂直的直线与 OB 的交点，如图 4-3-3-2 所示.

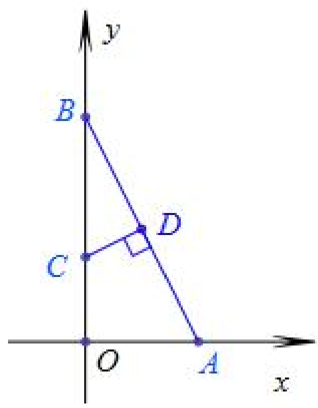


图 4-3-3-2

因为$\angle OBA=\angle DBC$，所以$\triangle OBA\backsim\triangle DBC$，因此有 $\dfrac{BC}{BD}=\dfrac{BA}{BO}$，又因为 $BO=4$、

$2BD = BA = \sqrt{OA^2 + OB^2} = 2\sqrt{5}$，所以 $BC = \frac{5}{2}$，于是 $OC = OB - BC = \frac{3}{2}$，因此点 C 的坐标为（0，$\frac{3}{2}$）.

二、求 y 关于 x 的函数解析式

连接 $B'C$，根据轴对称的性质知：$BC=B'C$，如图 4-3-3-3 所示.因为 $OB=4$，$OC=y$，所以 $B'C=OB-OC=4-y$. 那么在 Rt$\triangle OCB'$ 中，由勾股定理得：$B'C^2 = OB'^2 + OC^2$，即 $(4-y)^2 = x^2 + y^2$，化简得：$y = 2 - \frac{1}{8}x^2$.由 $0 \le x \le 2$ 可得到 y 的取值范围为 $\frac{3}{2} \le y \le 2$.

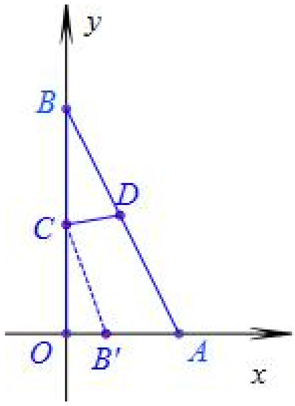


图 4-3-3-3

三、折叠后若使 $B'D\,/\!/\,OB$，求此时点 C 的坐标

连接 $B'D$，由对称图形的性质知 $B'D = BD$，如图 4-3-3-4 所示，设 $B'D = BD = a$.

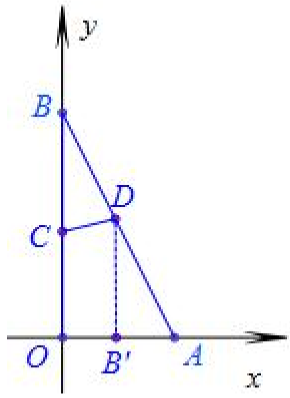


图 4-3-3-4

当 $B'D\,/\!/\,OB$ 时，有 $\frac{B'D}{OB} = \frac{AB'}{OA}$、$\frac{AB'}{OB'} = \frac{AD}{BD}$，即 $\frac{a}{4} = \frac{2-x}{2}$、$\frac{2-x}{x} = \frac{2\sqrt{5}-a}{a}$，

可解得：$x = 4\sqrt{5} - 8$，所以 $y = 2 - \frac{1}{8}x^2 = 2 - \frac{1}{8}(4\sqrt{5}-8)^2 = 8\sqrt{5} - 16$，因此点 C 的坐标为（0，$8\sqrt{5}-16$）.

简要评注

此题的关键在于根据不同的要求画出折叠后的图形，画图的方法是根据对称点的中垂线是对称轴，先通过一组对称点画出对称轴，在画出对称的图形即可.在求解各个问题时，结合所画图形，利用直角三角形的相关知识和相似的知识求解.

4．与图形翻折有关的动点存在性问题

例 4-3-4. 已知直角坐标系中菱形 $ABCD$ 的位置如图 4-3-4-1，C，D 两点的坐标分别为(4，0)，(0，3).现有两动点 P，Q 分别从 A，C 同时出发，点 P 沿线段 AD 向终点 D 运动，点 Q 沿折线 CBA 向终点 A 运动，设运动时间为 t 秒.

（1）填空：菱形 $ABCD$ 的边长是____、面积是____、 高 BE 的长是____；

（2）探究下列问题：

①若点 P 的速度为每秒 1 个单位，点 Q 的速度为每秒 2 个单位.当点 Q 在线段 BA 上时，求△APQ 的面积 S 关于 t 的函数关系式，以及 S 的最大值； ②若点 P 的速度为每秒 1 个单位，点 Q 的速度变为每秒 k 个单位，在运动过程中，任何时刻都有相应的 k 值，使得△APQ 沿它的一边翻折，翻折前后两个三角形组成的四边形为菱形.请探究当 t=4 秒时的情形，并求出 k 的值.

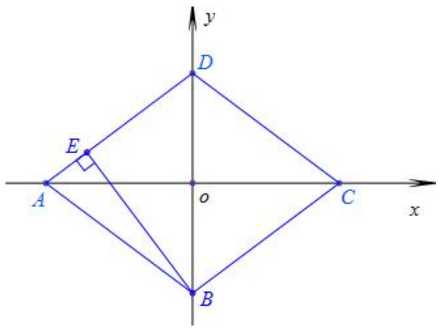


图 4-3-4-1

一、求菱形的边长、面积及高

由 C、D 点坐标可求出 CD=5，AC=8，BD=6，所以

$S_{菱形ABCD}=\dfrac{1}{2}AC\cdot BD=\dfrac{1}{2}\times 8\times 6=24$，又因为 $S_{菱形\mathrm{ABCD}}=\mathrm{AD}\cdot\mathrm{BE}$，$AD$=$CD$=5，所以 BE=$\dfrac{24}{5}$.

二、求△APQ 的面积 S 关于 t 的函数关系式，以及 S 的最大值；

（一）动感体验

打开文件“例 4-3-4.dmr”，如图 4-3-4-2 所示，拖动点 P，在点 P 和点 Q 运动的过程中，观察△APQ 的形状的变化规律，研究表示△APQ 面积的恰当形式.

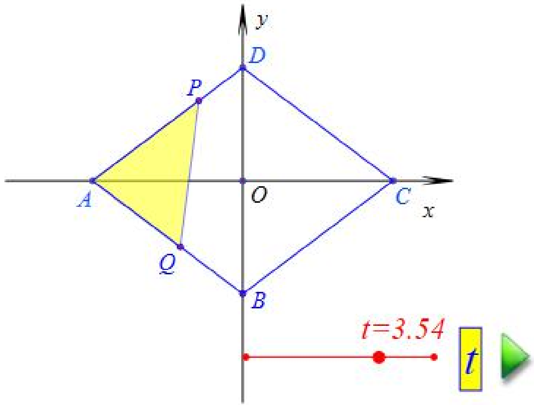


图 4-3-4-2

（二）思路点拨

因为$\angle PAQ$是固定的，因此可以用AP及其AP边上的高表示ΔAPQ的面积.

（三）动态解析

因为$BC=AB=5$，所以当点Q在线段AB上时，BQ的长度可表示为$BQ=2(t-\frac{5}{2})=2t-5$，而AP的长度可表示为$AP=t$，其中t的取值范围为：$\frac{5}{2}\le t\le 5$.

过点Q作$QF\perp AD$于点F，如图 4-3-4-3 所示，则ΔAPQ的面积可表示为：$S=\frac{1}{2}\cdot QF\cdot AP$.

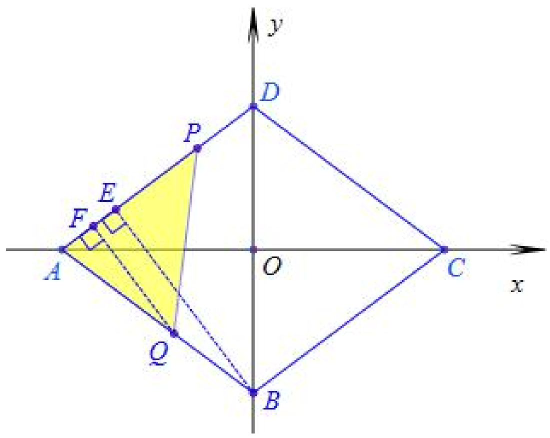


图 4-3-4-3

又因为BE垂直AD，所以$QF//BE$，所以有$\frac{FQ}{BE}=\frac{AQ}{AB}$，其中$BE=\frac{24}{5}$，$AQ=AB-BQ=10-2t$，$AB=5$，所以$FQ=\frac{48(5-t)}{25}$.所以$\Delta APQ$的面积可表示为：

$$S=\frac{1}{2}AP\cdot FQ=\frac{24}{25}t(5-t)==-\frac{24}{25}(t-\frac{5}{2})^2+6.$$

因此当$t=\frac{5}{2}$，即点Q与点B重合时，S有最大值 6.

三、探索翻折前后两个三角形组成的四边形为菱形的情况

（一）动感体验

当ΔAPQ为等腰三角形时，沿某边翻折前后两个三角形组成的四边形为菱形.

单击“下一页”按钮，进入第二页，如图 4-3-4-3 所示，拖动点 Q，通过测量值研究ΔAPQ是否可能为等腰三角形.

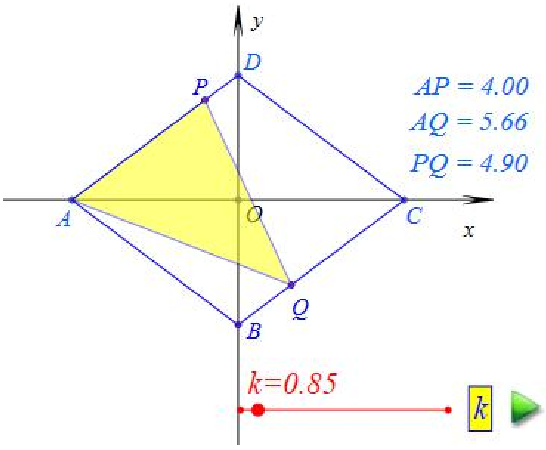


图 4-3-4-3

（二）思路点拨

分点 Q 在 AB 和在 BC 上两种情况进行讨论.

（三）动态解析

1.首先考虑以 AP 为底的等腰三角形.

过 AP 的中点 M 作 AP 的垂线，必定与折线段 ABC 交于线段 BC 上，如图 4-3-4-4 所示，设交点为 Q.这是因为在 RtΔABE 中，由 AB=5、$BE=\dfrac{24}{5}$ 可求得 $AE=\dfrac{7}{5}<2$，所以点 Q 在点 B 的右上侧.

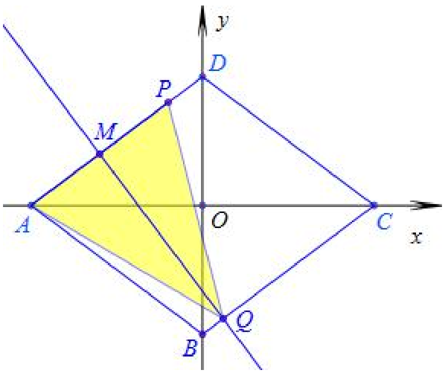


图 4-3-4-4

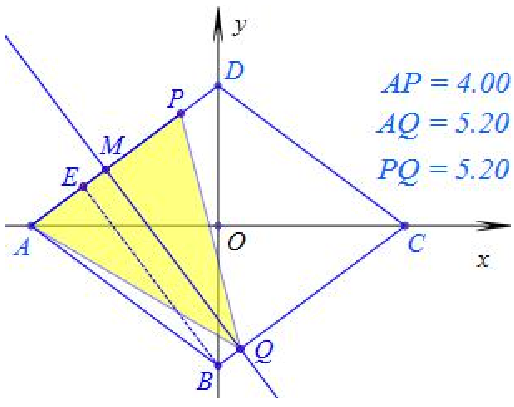


图 4-3-4-5

如图 4-3-4-5 所示， 由 $BE\perp AD$、$QM\perp AD$ 知：$BE//MQ$，又因为 $AD//BC$，所以四边形 $BEMQ$ 时平行四边形，因此 $BQ = EM = AM - AE = 2-\frac{7}{5}=\frac{3}{5}$，所以 $CQ = BC - BQ = 5-\frac{3}{5}=\frac{22}{5}$.所以点 Q 的运动速度 k 等于 $\frac{22}{5}\div 4=\frac{11}{10}$.

2.然后考虑以 AP 为腰、以 $\angle A$ 为顶角的等腰三角形.

因为 $AB = 5 > 4$，因此点 Q 一定在线段 AB 上，并且 AQ=4，如图 4-3-4-6 所示，那么点 Q 运动过的路程为 $CB+BQ$=6，所以点 Q 的运动速度 k 等于 $6\div 4=\frac{3}{2}$.

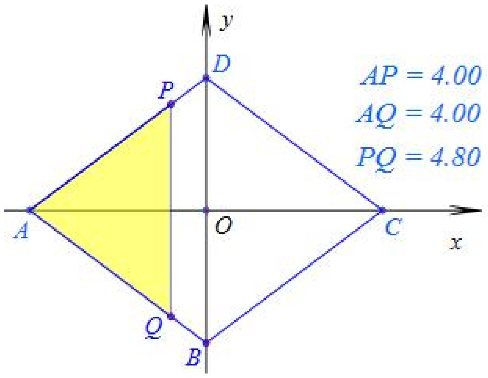


图 4-3-4-6

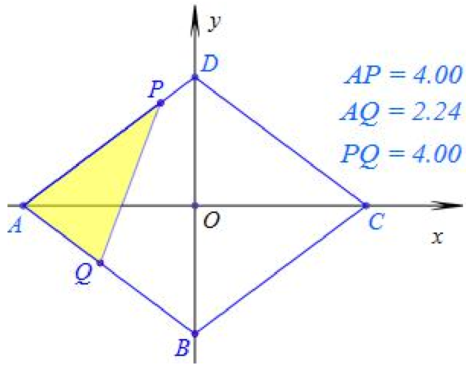


图 4-3-4-7

3.最后考虑以 AP 为腰、以 $\angle P$ 为顶角的等腰三角形.因为平行线段 BC 与 AD 之间的距离等于 $\frac{24}{5}$，大于 4，所以点 Q 只可能出现在线段 AB 上.如图 4-3-4-7 所示，当点 Q 在线段 AB 上且 AP=PQ 时，过点 P 作 $PM\perp AB$ 于 M，则 AM=MQ，过点 D 作 $DN\perp AB$ 于点 N，则 $DN = BE = \frac{24}{5}$，且 $PM//DN$，如图 4-3-4-8 所示，所以有 $\frac{MP}{DN}=\frac{AP}{AD}$，由 AP=4、AD=5，解得：$PN=\frac{96}{25}$.

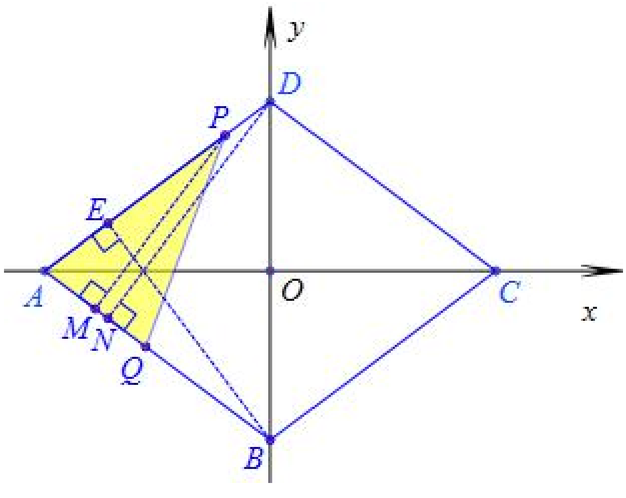


图 4-3-4-8

设 $AQ=x$，则 $AM=\frac{x}{2}$，在 RtΔAMP 中，由 $AP^2=AM^2+MP^2$，即 $4^2=\frac{x^2}{4}+\frac{96^2}{25^2}$，解得：$x=\frac{56}{25}$.所以点 Q 的运动速度 k 等于 $(10-\frac{56}{25})\div 4=\frac{97}{50}$.

综上所述，当 t=4 时，若ΔAPQ 绕它的一条边翻折后能够组成菱形，则 $k=\frac{11}{10}$ 或 $k=\frac{3}{2}$ 或 $k=\frac{97}{50}$.

简要评注

此题利用折叠的性质转化问题，将菱形的存在性问题转化为ΔAPQ 为等腰三角形的存在性问题.在讨论ΔAPQ 为等腰三角形时，应根据腰和底的不同分三种情况讨论.

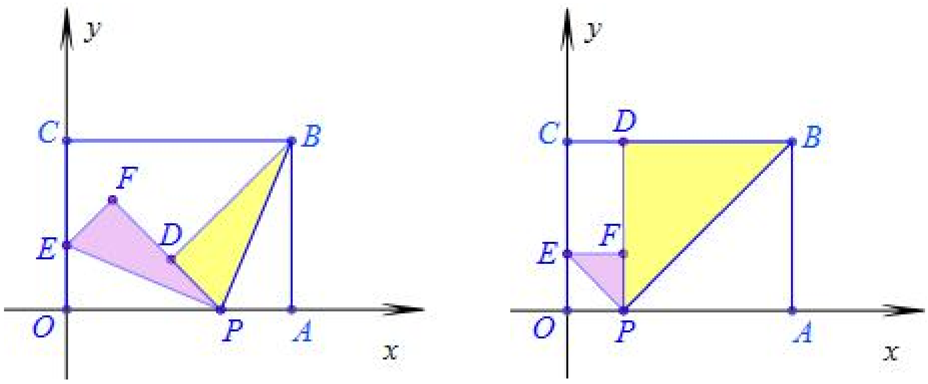
巩固练习（三）

练习 4-3-1：如下图（左），在平面直角坐标系中，有一张矩形纸片 $OABC$，已知 $O(0，0)$，$A(4，0)$，$C(0，3)$，点 P 是 OA 边上的动点(与点 O、A 不重合)．现将△PAB 沿 PB 翻折，得到△PDB；再在 OC 边上选取适当的点 E，将△POE 沿 PE 翻折，得到△PFE，并使直线 PD、PF 重合．

（1）设 $P(x，0)$，$E(0，y)$，求 y 关于 x 的函数关系式，并求 y 的最大值；

（2）如下图（右），若翻折后点 D 落在 BC 边上，求过点 P、B、E 的抛物线的函数关系式；

（3）在(2)的情况下，在该抛物线上是否存在点 Q，使△PEQ 是以 PE 为直角边的直角三角形？若不存在，说明理由；若存在，求出点 Q 的坐标．



练习 4-3-2：已知：矩形纸片 $ABCD$ 中，$AB=26$ 厘米，$BC=18.5$ 厘米，点 E 在 AD 上，且 $AE=6$ 厘米，点 P 是 AB 边上一动点．按如下操作：

步骤一，折叠纸片，使点 P 与点 E 重合，展开纸片得折痕 MN，如下图（左）所示；

步骤二，过点 P 作 $PT\perp AB$，交 MN 所在的直线于点 Q，连接 QE（如图 4-4-26②所示）

（1）无论点 P 在 AB 边上任何位置，都有 PQ_________ QE（填“>”、“=”、“<”号）；

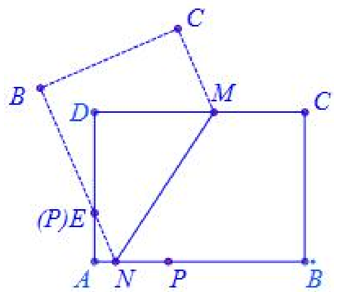
（2）如下图（中）所示所示，将纸片 $ABCD$ 放在直角坐标系中，按上述步骤一、二进行操作：

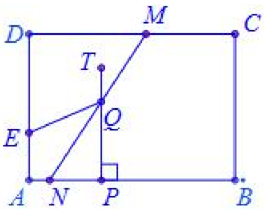
①当点 P 在 A 点时，PT 与 MN 交于点 Q_1，Q_1 点的坐标是（_______，_________）；

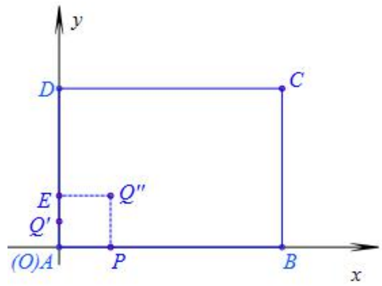
②当 $PA=6$ 厘米时，PT 与 MN 交于点 Q_2，Q_2 点的坐标是（_______，_________）；

③当 $PA=12$ 厘米时，在下图（右）所示中画出 MN，PT（不要求写画法），并求出 MN 与 PT 的交点 Q_3 的坐标；

（3）点 P 在运动过程，PT 与 MN 形成一系列的交点 Q_1，Q_2，Q_3，… 观察、猜想：众多的交点形成的图象是什么？并直接写出该图象的函数表达式．







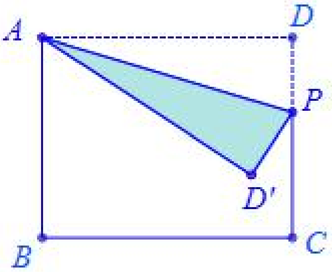
练习 4-3-3：如下图①所示，矩形 $ABCD$ 中，$AB=8$，$BC=10$，点 P 在矩形的边 DC 上由 D 向 C 运动．沿直线 AP 翻折△ADP，形成如下四种情形．设 $DP=x$，△ADP 和矩形重叠部分（阴影）的面积为 y．

（1）如下图④，当点 P 运动到与 C 重合时，求重叠部分的面积 y；

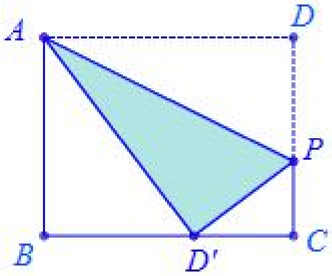
（2）如下图②，当点 P 运动到何处时，翻折△ADP 后，点 D 恰好落在 BC 边上？这时重叠部分的面积 y 等于多少？

（3）阅读材料：已知锐角 $\alpha \neq 45^{\circ}, \tan 2\alpha$ 是角 2α 的正切值，它可以用角 α 的正切值 $\tan\alpha$ 来表示，即：$\tan 2\alpha = \dfrac{2\tan\alpha}{1-(\tan\alpha)^2}$（$\alpha \neq 45^{\circ}$）．

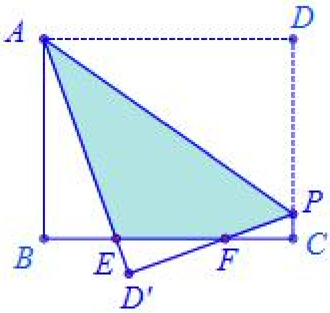
根据上述阅读材料，求出用 x 表示 y 的解析式，并指出 x 的取值范围．（提示：在下图③中可设 $\angle DAP=\alpha$ ）



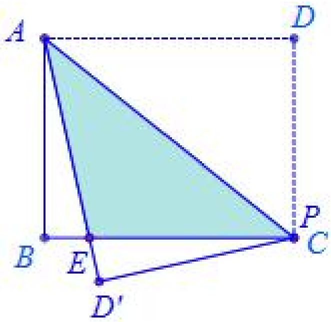
①



②



③



④

本节小结

图形折叠问题实质是对称问题的应用.在处理图形折叠问题中，关键是抓住下面两点：①折叠前后对应的边相等，对应的角相等；②折叠前后对应顶点之间的线段被折痕垂直平分.另外折叠问题通常与勾股定理、全等三角形、相似三角形等知识相结合，解答时注意这些知识的运用.

第五章　计算推理问题

图形运动中的计算推理问题主要是研究图形的位置发生变化后，之前的结论是否仍然成立，然后要求给出推论的依据，或者通过计算，或者通过推导进行数学上的证明过程.这类问题考查的知识点较多，不仅考查了学生的基础知识，而且还考查了学生的创新能力、数形结合能力、分类讨论能力和探索问题的能力.解决这类问题的关键是抓住图形运动过程中的数据特征和不变关系.

第一节 几何证明

1．与动点有关的代数式为定值问题

例 5-1-1. 如图 5-1-1-1，扇形 OAB 的半径 $OA=3$，圆心角 $\angle AOB=90°$，点 C 是弧 AB 上异于 A、B 的动点，过点 C 作 $CD\perp OA$ 于点 D，作 $CE\perp OB$ 于点 E，连结 DE，点 G、H 在线段 DE 上，且 $DG=GH=HE$

（1）求证：四边形 $OGCH$ 是平行四边形

（2）当点 C 在弧 AB 上运动时，在 CD、CG、DG 中，是否存在长度不变的线段？若存在，请求出该线段的长度

（3）求证：CD^2+3CH^2 是定值.

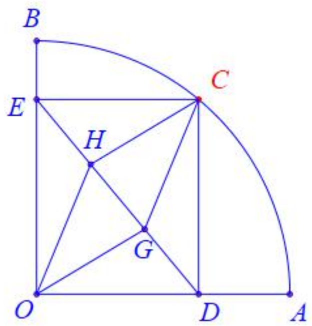


图 5-1-1-1

一、证明四边形 *OGCH* 是平行四边形

（一）动感体验

打开文件“例 5-1-1.dmr”，如图 5-1-1-1 所示，拖动点 C，观察四边形 $OGCH$ 的形状的变化规律.

（二）思路点拨

若四边形 $OGCH$ 的对角线互相平分，那么四边形 $OGCH$ 即为平行四边形.

（三）动态解析

连接 OC 交 DE 于点 F，如图 5-1-1-2 所示.因为$\angle EOD=\angle OEC=\angle ODC=90°$，所以四边形 $ODCE$ 是矩形，因此有 $OF=FC$、$EF=FD$，又因为 $EH=GD$，所以 $HF=FG$，那么在四边形 $OGCH$ 中两条对角线 OC 和 HG 相互平分，所以四边形 $OGCH$ 是平行四边形.

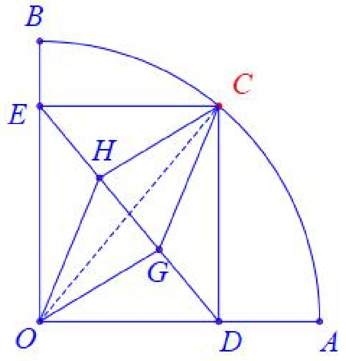


图 5-1-1-2

二、判断线段 CD、CG、DG 的长度是否不变

（一）动感体验

进入下一页，拖动点 C，观察线段 CD、CG、DG 的长度是否可能会发生变化？哪些线段是最容易判断的？如图 5-1-1-3、图 5-1-1-4 所示.

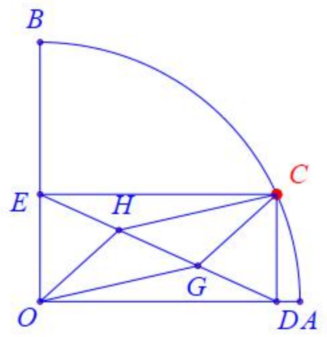


图 5-1-1-3

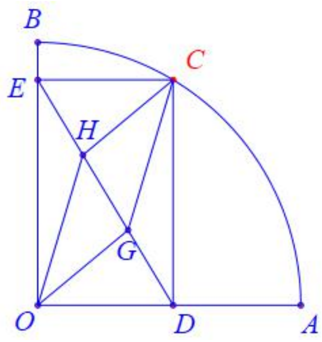


图 5-1-1-4

（二）思路点拨

因为 OC 长度不变，根据矩形的对角线相等得到 DE 的长度不变，从而说明 DG 的长度不变.

（三）动态解析

因为四边形 $ODCE$ 是矩形，所以其对角线相等，即 $DE=OC=3$，又因为 $DG=\frac{1}{3}DE$，所以 $DG=1$，为定值.

而线段 CD 的长度与点 CD 的位置有关，等于点 C 的纵坐标，所以它是随点 C 的位置变化而变化的.

另外，在平行四边形 $OGCH$ 中，$CG=OH$.当点 C 与点 A 重合时，如图 5-1-1-5 所示，可见 $OH=\frac{1}{3}OA$；当点 C 与点 B 重合时，如图 5-1-1-6 所示，可见 $OH=\frac{2}{3}OB$.因此 OH 的长度不可能固定不变.事实上，进入下一页，拖动点 CC，结果如图 5-1-1-7 所示，即可观察

到点 H 所经过的路径，你认为它是什么形状的图形呢？

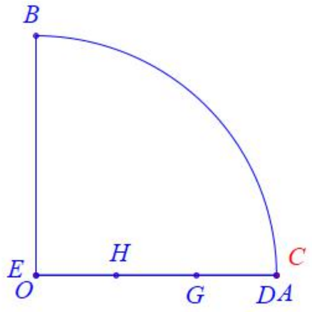


图 5-1-1-5

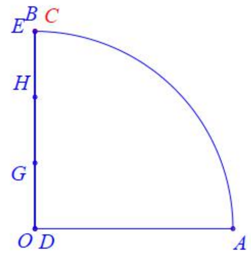


图 5-1-1-6

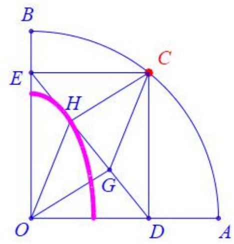


图 5-1-1-7

三、证明 CD^2+3CH^2 是定值

（一）思路点拨

我们容易想到的是 CD^2+CE^2 是一个定值，等于扇形半径的平方.因此，关键是将 $3CH^2$ 转化成为与 CE^2 相关的表达式

（二）动态解析

过点 H 作 $HK\perp CE$ 于点 K，如图 5-1-1-8 所示.又因为 $CD\perp CE$，所以 $HK//CD$，所以有 $\frac{HK}{CD}=\frac{EK}{EC}=\frac{EH}{ED}=\frac{1}{3}$，即：$HK=\frac{1}{3}CD$、$EK=\frac{1}{3}EC$.

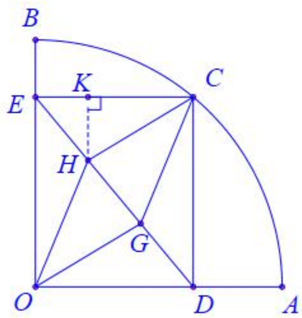


图 5-1-1-8

在 Rt$\triangle CHK$ 中，有 $CH^2=HK^2+CK^2$，即 $CH^2=\frac{1}{9}CD^2+\frac{4}{9}EC^2$，那么：

$CD^2+3CH^2=CD^2+\frac{1}{3}CD^2+\frac{4}{3}EC^2=\frac{4}{3}(CD^2+EC^2)=\frac{4}{3}OC^2=12$，所以说 CD^2+3CH^2 是定值.

（三）简要评注

点 C 在运动过程中，利用矩形对角线的性质，找到不变的关系是 $DE=OC$，这是解决问题的关键.CD^2+3CH^2 为定值，即 CH^2 为定值，从式子 CD^2+3CH^2 形式上可看出求 CH^2

应考虑勾股定理，所以通过做垂线利用相似求解即可.

2．与动点有关的比值之和为定值问题

例 5-1-2. 已知：抛物线 $y=ax^2+bx+c$（$a\neq0$），顶点 C（1，－3），与 x 轴交于 A、B 两点，A（－1，0）.

（1）求这条抛物线的解析式.

（2）如图 5-1-2-1，以 AB 为直径作圆，与抛物线交于点 D，与抛物线对称轴交于点 E，依次连接 A、D、B、E，点 P 为线段 AB 上一个动点（P 与 A、B 两点不重合），过点 P 作 $PM\perp AE$ 于 M，$PN\perp DB$ 于 N，请判断 $\dfrac{PM}{BE}+\dfrac{PN}{AD}$ 是否为定值？若是，请求出此定值；若不是，请说明理由.

（3）在（2）的条件下，若点 S 是线段 EP 上一点，过点 S 作 $FG\perp EP$，FG 分别与边 AE、BE 相交于点 F，G（F 与 A、E 不重合，G 与 E、B 不重合），请判断 $\dfrac{PA}{PB}=\dfrac{EF}{EG}$ 是否成立.若成立，请给出证明；若不成立，请说明理由.

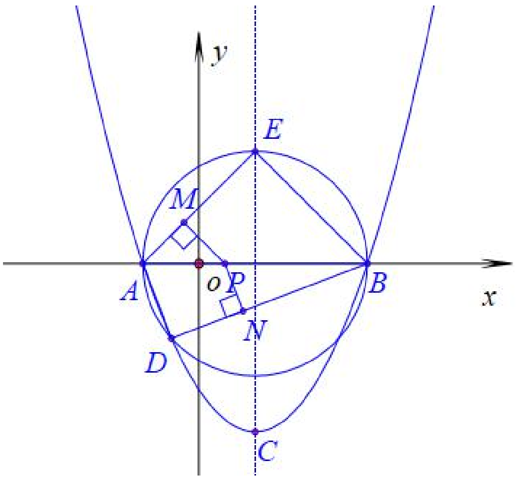


图 5-1-2-1

一、求抛物线解析式

此题为常规题，利用待定系数法可求出抛物线解析式，由于已知条件给出顶点坐标，所以用顶点式设抛物线解析式.设抛物线的解析式为 $y=a(x-1)^2-3$，将 A（－1，0）代入：$0=a(-1-1)^2-3$，解得 $a=\dfrac{3}{4}$，所以，抛物线的解析式为 $y=\dfrac{3}{4}(x-1)^2-3$，即 $y=\dfrac{3}{4}x^2-\dfrac{3}{2}x-\dfrac{9}{4}$.

二、判断$\dfrac{PM}{BE}+\dfrac{PN}{AD}$是否为定值

（一）思路点拨

由$\triangle APM\backsim\triangle ABE$，$\triangle BPN\backsim\triangle BAD$得$\dfrac{PM}{BE}=\dfrac{AP}{AB}$，$\dfrac{PN}{AD}=\dfrac{PB}{AB}$，进一步可求得$\dfrac{PM}{BE}+\dfrac{PN}{AD}$的值.

（二）动态解析

因为AB为直径，所以$\angle AEB=90°$，又因为$PM\perp AE$，所以$MP//BE$，那么有$\dfrac{PM}{BE}=\dfrac{AP}{AB}$，同理可得：$\dfrac{PN}{AD}=\dfrac{PB}{AB}$，所以$\dfrac{PM}{BE}+\dfrac{PN}{AD}=\dfrac{AP+PB}{AB}=1$.

三、判断$\dfrac{PA}{PB}=\dfrac{EF}{EG}$是否成立

（一）思路点拨

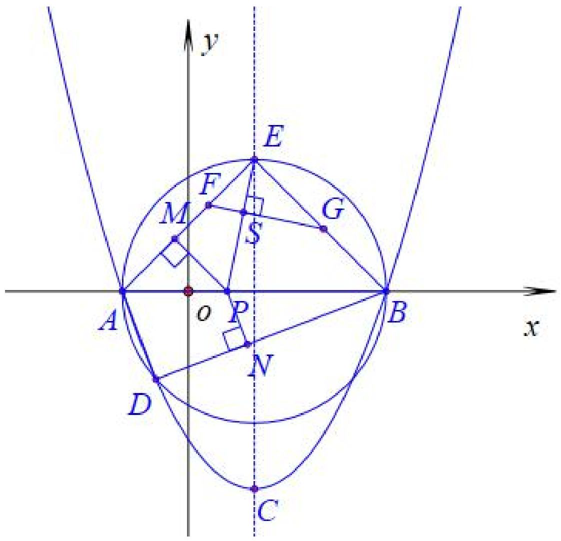


图 5-1-2-2

前面已经知道$\dfrac{PA}{PB}=\dfrac{MA}{ME}$.

因为$\angle MEP+\angle SEG=\angle FGE+\angle SEG=90°$，所以$\angle MEP=\angle FGE$，所以$\text{Rt}\triangle EMP\backsim\text{Rt}\triangle GEF$，所以有$\dfrac{EF}{EG}=\dfrac{MP}{ME}$.

若$\dfrac{PA}{PB}=\dfrac{EF}{EG}$成立，则有$\dfrac{MA}{ME}=\dfrac{MP}{ME}$，即$MA=MP$成立.事实上$MA=MP$是成立的，因为$\dfrac{MA}{MP}=\dfrac{AE}{BE}$，而点$E$是抛物线的对称轴上的点，因此有$AE=BE$，所以有$MA=MP$.

因此$\dfrac{PA}{PB}=\dfrac{EF}{EG}$成立.

（二）动态解析

打开文件“例 5-1-2.dmr”，如图 5-1-2-2 所示，考虑到$\dfrac{PA}{PB}$为两条线段的比，因此考虑构造相似三角形，过点 P 作 $PH\perp BE$ 于 H，如图 5-1-10 所示，所以$\triangle APM \backsim \triangle PBH$，观察图形发现四边形 $PHEM$ 是矩形，所以$\dfrac{PA}{PB}=\dfrac{PM}{PH}=\dfrac{PM}{ME}$，又因为$\triangle MEP \backsim \triangle EGF$，所以$\dfrac{PM}{ME}=\dfrac{EF}{EG}$，所以得到$\dfrac{PA}{PB}=\dfrac{EF}{EG}$.

（三）简要评注

本题要求的问题都是与两条线段的比有关，所以应考虑图中的相似三角形或根据线段的比构造相似三角形，将线段的比转化，从而解决问题.

3．由特殊角到一般角的结论拓展问题

例 5-1-3. 我们知道：有两条边相等的三角形叫做等腰三角形.类似地，我们定义：至少有一组对边相等的四边形叫做等对边四边形.

（1）请写出一个你学过的特殊四边形中是等对边四边形的图形的名称；

（2）如图 5-1-3-1，在△ABC 中，点 D、E 分别在 AB、AC 上，设 CD、 BE 相交于点 O，若$\angle A$=60°，$\angle DCB$=$\angle EBC$=$\frac{1}{2}\angle A$，请你写出图中一个与$\angle A$ 相等的角，并猜想图中哪个四边形是等对边四边形；

（3）在△ABC 中，如果$\angle A$ 是不等于 60°的锐角，点 D、E 分别在 AB、AC 上，且$\angle DCB$=$\angle EBC$=$\frac{1}{2}\angle A$.探究：满足上述条件的图形中是否存在等对边四边形，并证明你的结论.

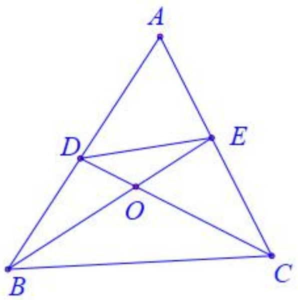


图 5-1-3-1

一、属于等对边四边形的特殊四边形

平行四边形、矩形、菱形、正方形、等腰梯形.

二、当$\angle A$=60°时，找图形中的等对边四边形

因为$\angle DCB=\angle EBC=\frac{1}{2}\angle A=30°$，所以$\angle EOC=\angle DOB=\angle A=60°$.

在 OE 上截取 OD'=OD，连接 CD'，如图 5-1-3-2 所示.因为$\angle D'OC$=$\angle DOB$、OC=OB，所以△$OD'C$≌△ODB，所以 CD'=BD、$\angle OCD'$=$\angle OBD$.

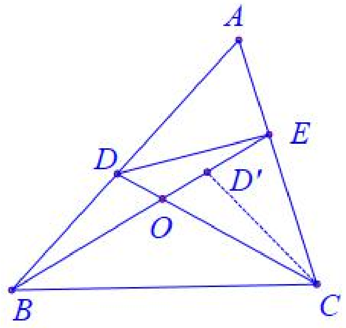


图 5-1-3-2

因为$\angle BEC$是$\triangle ABE$的外角，所以$\angle BEC=\angle A+\angle ABE$.因为$\angle ED'C$是$\triangle OCD'$的外角，所以$\angle ED'C=\angle COD'+\angle OCD'$.又因为$\angle COD'=\angle A$，所以$\angle BEC=\angle ED'C$，所以$CD'=EC$，即$BD=EC$.因此四边形$BCED$是等对边四边形.

【动感体验】

打开文件“例 5-1-3.dmr”，如图 5-1-3-3 所示，任意拖动点B，可以改变$\triangle ABC$的形状和性质，但无论图形如何变化总有$BD=EC$成立.

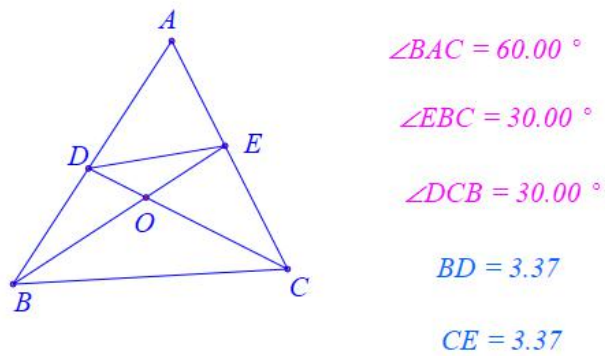


图 5-1-3-3

找$\angle A$的等角，证明$\triangle CD'E$为等腰三角形.因为$\angle DOB=\angle EOC=\angle A$，所以四边形$BCED$是等对边四边形.

三、$\angle A\neq 60°$时，找图形中的等对边四边形

（一）思路点拨

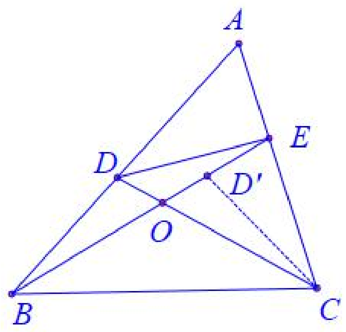


图 5-1-3-4

如图 5-1-3-4，在 OE 上截取 $OD'=OD$，构造与△DBO 全等的△$D'OC$，只需要证明 $BE=BD'$ 即可.

（二）动态解析

因为 $\angle DCB=\angle EBC=\dfrac{1}{2}\angle A$，所以 $\angle COD'=\angle A$.下面的证明过程与前面是相同的：

因为∠BEC 是△ABE 的外角，所以∠BEC=∠A+∠ABE.因为∠$ED'C$ 是△OCD'的外角，所以∠$ED'C$=∠COD'+∠OCD'.又因为∠COD'=∠A，所以∠BEC=∠$ED'C$，所以 $CD'=EC$，即 $BD=EC$.因此四边形 $BCED$ 是等对边四边形.

（三）动感体验

进入第二页，如图 5-1-3-5 所示，任意拖动点 B 或者点 C 任意改变△ABC 的形状与性质，但 $\angle DCB=\angle EBC=\dfrac{1}{2}\angle A$ 的性质始终保持不变，观察线段 BD 与 CE 的长度之间的关系.

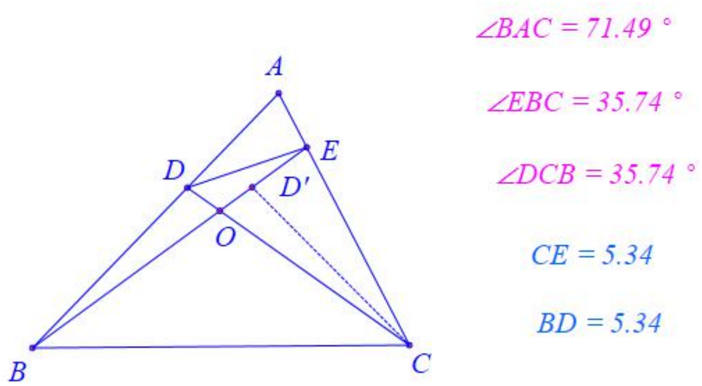


图 5-1-3-5

（四）简要评注

此题在证明等对边四边形时，利用图形特点构造全等三角形，将 BD 转化为 $C D'$，将证 $BD=CE$ 的问题转化为证等腰△$CE D'$的问题.而问题（3）的解决利用通过对特殊图形的猜想、

论证，为一般情况的判断提供方法和依据，体现了数学中特殊到一般的思想.

4．线段的倒数之和为定值的问题

例 5-1-4. 如图 5-1-4-1，在平面直角坐标系中，$\triangle ABC$ 的边 AB 在 x 轴上，且 $OA>OB$，以 AB 为直径的圆过点 C．若点 C 的坐标为 $(0,2)$，$AB=5$，A、B 两点的横坐标 x_A，x_B 是关于 x 的方程 $x^2-(m+2)x+n-1=0$ 的两根.

（1）求 m、n 的值；

（2）若 $\angle ACB$ 平分线所在的直线 l 交 x 轴于点 D，试求直线 l 对应的一次函数解析式；

（3）过点 D 任作一直线 l' 分别交射线 CA、CB（点 C 除外）于点 M、N．则 $\dfrac{1}{CM}+\dfrac{1}{CN}$ 是否为定值？若是，求出该定值；若不是，请说明理由.

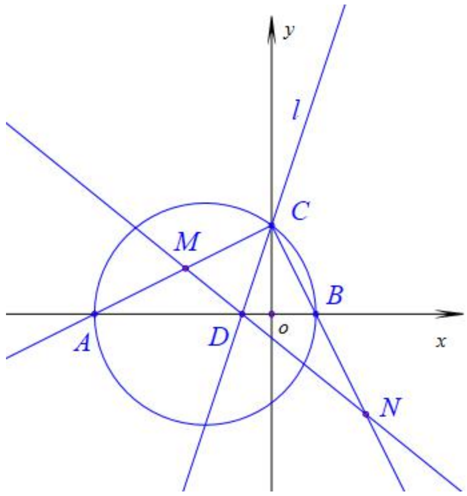


图 5-1-4-1

一、求 m、n 的值

如图 5-1-4-1 所示，因为∠*ACB* 是直径 *AB* 对的圆周角，所以 *AC*⊥*BC*，又因为 *CO*⊥*AB*，所以由射影定理可得 $CO^2=AO\cdot BO=4$，又因为 $AO+BO=5$ 从而求得 *AO*=4，*BO*=1，所以 $x_A=-4$，$x_B=1$，利用根与系数的关系可求得 $m=-5$，$n=-3$.

二、求直线 l 的解析式

因为 l 过点 *C*（0，2），因此可设直线 l 的解析式为 $y=kx+2$.

作直线 l 与圆弧 *AB* 交于点 *G*，如图 5-1-4-2 所示，因为直线 l 是圆弧 *AB* 所对的圆周角∠*ACB* 的平分线，所以点 *G* 是圆弧 *AB* 的中点，又因为∠*AGB*=90°，所以Δ*ABG* 是等腰直角

三角形.过点 G 作 $GP\perp AB$ 于点 P，则 $AP=PG=\frac{1}{2}AB=\frac{5}{2}$，所以点 G 的坐标为（$-\frac{3}{2}$，$-\frac{5}{2}$）.

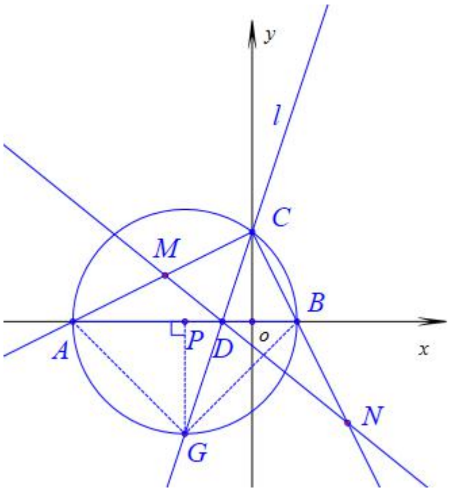


图 5-1-4-2

将 $x=-\frac{3}{2}$、$y=\frac{5}{2}$ 带入 $y=kx+2$ 得：$k=3$，所以直线 l 的解析式为：$y=3x+2$.

三、判断 $\frac{1}{CM}+\frac{1}{CN}$ 是否为定值

（一）动感体验

打开文件“例 5-1-4.dmr”，如图 5-1-4-3 所示,当改变 l’的斜率值，可发现 $\frac{1}{CM}+\frac{1}{CN}$ 值不变.

（二）思路点拨

因为 $\frac{1}{CM}+\frac{1}{CN}=\frac{CM+CN}{CM\cdot CN}$，而 $CM\cdot CN$ 正与 RtΔMNC 的面积直接相关，其中 CM、CN 也可以看作是将三角形 MNC 分为ΔDCM 和ΔDCN 后计算面积过程中涉及到的底边.

（三）动态解析

其实由 l 的解析式 $y=3x+2$ 可知点 D 的坐标为（$-\frac{2}{3}$，0），从而可计算 CD 的长度为 $\frac{2}{3}\sqrt{10}$.

过点 D 分别向 AC、AB 作垂足 E、F，如图 5-1-4-3 所示，那么四边形 $CEDF$ 是矩形，又因为直线 CD 平分 $\angle ACB$，因此 DE=DF，所以矩形 $CEDF$ 是正方形，因此

$DE = DF = \frac{CD}{\sqrt{2}} = \frac{2\sqrt{5}}{3}$.

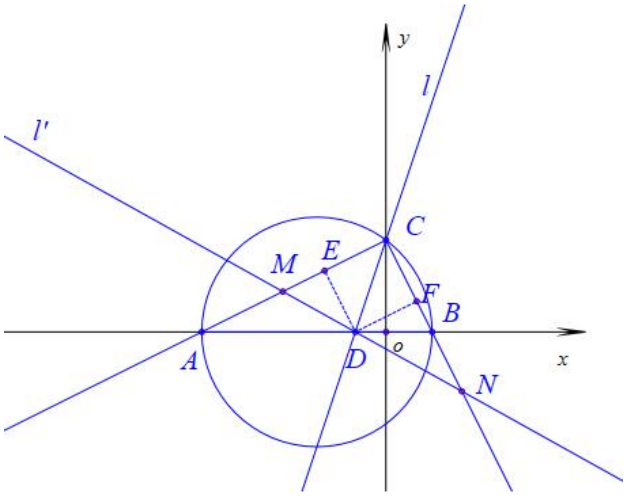


图 5-1-4-3

由于 $S_{\triangle MNC} = S_{\triangle DCM} + S_{\triangle DCN}$，即 $\frac{1}{2}CM \cdot CN = \frac{1}{2}CM \cdot DE + \frac{1}{2}CN \cdot DF$，将 $DE = DF = \frac{2\sqrt{5}}{3}$ 代入整理得：$\frac{CM \cdot CN}{CM + CN} = \frac{2\sqrt{5}}{3}$，所以 $\frac{1}{CM} + \frac{1}{CN} = \frac{CM + CN}{CM \cdot CN} = \frac{1}{\frac{2\sqrt{5}}{3}} = \frac{3\sqrt{5}}{10}$.

（三）简要评注

证明 $\frac{1}{CM} + \frac{1}{CN}$ 为定值时，对所要证明结论的等价变形 $\frac{1}{CM} + \frac{1}{CN} = \frac{CM + CN}{CM \cdot CN}$，而 $CM \cdot CN$ 可用 ΔCMN 的面积表示，从而找到解决问题的方法.这种对所求结论作等价变形，找寻解题思路的方法是我们分析问题时常采用的一种重要方法.

5．与旋转有关的等式恒成立问题

例 5-1-5. 如图 5-1-5-1，在同一平面内，将两个全等的等腰直角三角形 ABC 和 AFG 摆放在一起，A 为公共顶点，$\angle BAC=\angle AGF=90°$，它们的斜边长为 2，若$\Delta ABC$ 固定不动，ΔAFG 绕点 A 旋转，AF、AG 与边 BC 的交点分别为 D、E(点 D 不与点 B 重合，点 E 不与点 C 重合)，设 $BE=m$，$CD=n$.

（1）请在图中找出两对相似而不全等的三角形，并选取其中一对进行证明.

（2）求 m 与 n 的函数关系式，直接写出自变量 n 的取值范围.

（3）以ΔABC 的斜边 BC 所在的直线为 x 轴，BC 边上的高所在的直线为 y 轴，建立平面直角坐标系(如图 5-1-5-2).在边 BC 上找一点 D，使 $BD=CE$，求出 D 点的坐标，并通过计算验证 $BD^2+CE^2=DE^2$.

（4）在旋转过程中，(3)中的等量关系 $BD^2+CE^2=DE^2$ 是否始终成立，若成立，请证明，若不成立，请说明理.

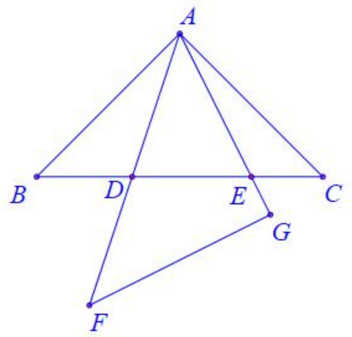


图 5-1-5-1

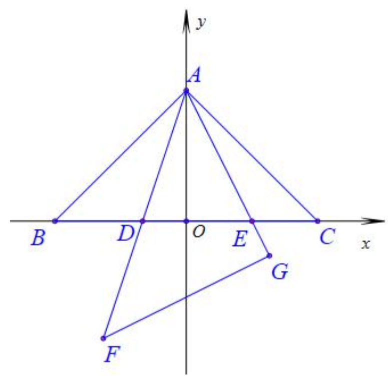


图 5-1-5-2

一、找相似三角形并证明

（一）动感体验

由于$\angle ABC=\angle ACB=\angle FAG=45°$，因此只需要研究具有 45°角的三角形即可找到相似三角形.打开文件“例 5-1-5.dmr”，如图 5-1-5-1 所示，拖动点 F，观察可能哪一组三角形为相似图形.

（二）动态解析

因为$\angle ABE=\angle DAE=45°$、$\angle AEB=\angle DEA$，所以$\triangle ABE\backsim\triangle DAE$.同理，$\triangle DAE\backsim\triangle DCA$.

二、求 m 与 n 的函数关系式

因为$\triangle ABE \backsim \triangle DAE$ 所以有$\frac{AB}{BE}=\frac{AD}{AE}$；同理，由$\triangle DAE \backsim \triangle DCA$ 得：$\frac{AD}{AE}=\frac{CD}{AC}$，

所以有：$\frac{AB}{BE}=\frac{CD}{AC}$，即$\frac{\sqrt{2}}{m}=\frac{n}{\sqrt{2}}$，所以有$mn=2$，即$m=\frac{2}{n}$.

当点 C 与点 E 重合时，$CD=n$ 有最小值 1，如图 5-1-5-3 所示；当点 D 与点 B 重合时，$CD=n$ 有最大值 2，如图 5-1-5-4 所示.所以 n 的取值范围为 $1<n<2$.

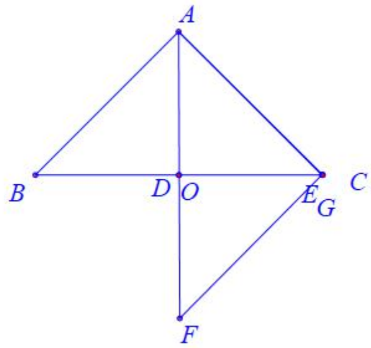


图 5-1-5-3

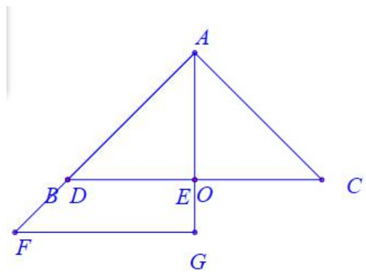


图 5-1-5-4

三、确定满足条件的点 D

（一）动感体验

单击“下一页”按钮，进入第二页，如图 5-1-5-5 所示，拖动点 F，研究当 $BE=CD$ 时，等腰三角形 AFG 应该所处的位置.点击动画按钮，点 F 运动到是的 $BD=CE$ 的位置.

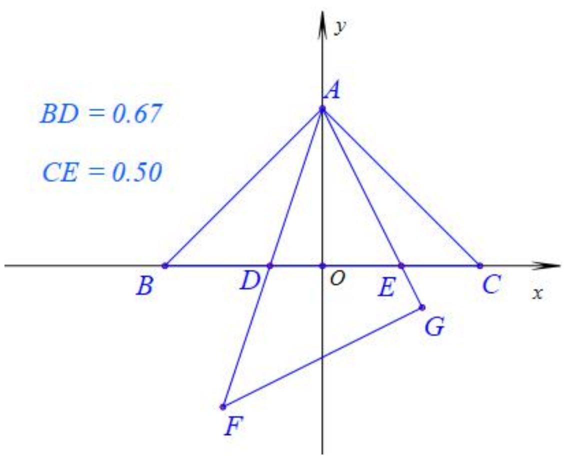


图 5-1-5-5

（二）思路点拨

利用问题（2）的结论求出 BD、CE、DE 的长.

（三）动态解析

当 $BD=CE$ 时，因为 $AB=AC$、$\angle ABD=\angle ACE$，所以$\triangle ABD \cong \triangle ACE$，因此有 $AD=AE$，

所以△*ADE* 是等腰三角形，如图 5-1-5-6 所示，则点 *O* 是线段 *DE* 的中点.

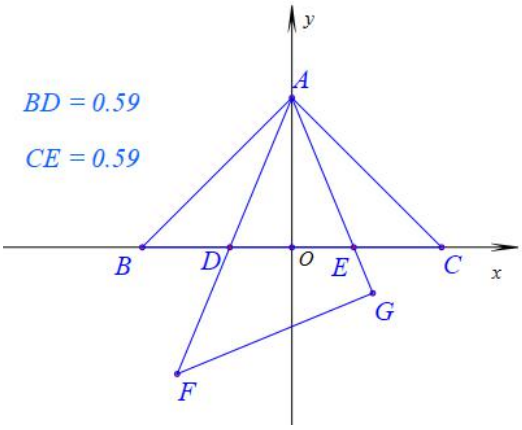


图 5-1-5-6

设 *OD*=*OE*=*x*，则 *BE*=*CD*=1+*x*.由 $\mathrm{BE}\cdot\mathrm{CD}=2$，即 $(1+x)^2=2$ 解得：$x=\sqrt{2}-1$，所以点 *D* 的坐标为（$1-\sqrt{2}$，0）.

其中，$\mathrm{BD}^2+\mathrm{CE}^2=2(1-\mathrm{x})^2=4(3-2\sqrt{2})$，$\mathrm{DE}^2=(2\mathrm{x})^2=4(3-2\sqrt{2})$，所以 $BD^2+CE^2=DE^2$ 成立.

四、判断旋转过程中 $BD^2+CE^2=DE^2$ 是否始终成立

（一）动感体验

单击“下一页”按钮，进入第三页，如图 5-1-5-7 所示，拖动点 *F*，观察是否仍然有 $BD^2+CE^2=DE^2$ 成立.

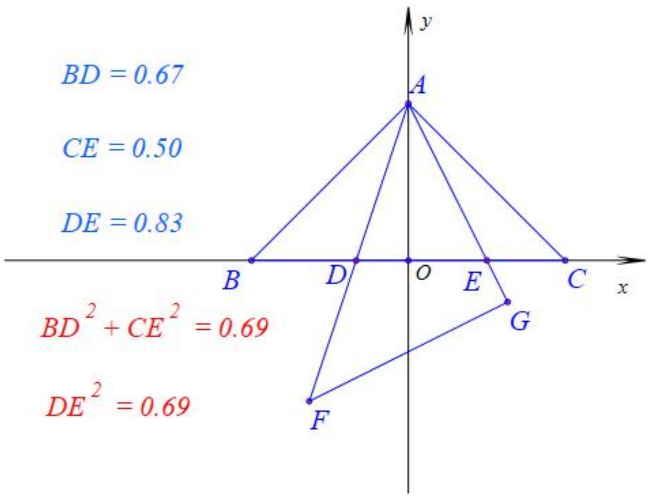


图 5-1-5-7

（二）动态解析

将 *BD*、*CE* 分别用 *DE* 表示，从等式的左边往右边推导.

$$
\begin{aligned}
& BD^2+CE^2=(2-CD)^2+(2-BE)^2 \\
& =8-4(CD+BE)+CD^2+BE^2 \\
& =8-4(2-DE)+(CD+BE)^2-2CD\cdot BE \\
& =4DE+(2-DE)^2-4 \\
& =DE^2
\end{aligned}
$$

因此在旋转过程中 $BD^2+CE^2=DE^2$ 始终成立.

（三）简要评注

证明恒等式常采用两种方法：一种利用利用图形中线段之间的关系，用字母表示待证等式中线段的长，通过代数计算证明；另一种，利用几何图形的特点，往往通过相似三角形、全等三角形、直角三角形等得到线段与线段的关系，从而将待证等式中的线段进行转化，达到证明的目的.

6．探索结论成立时角度所满足的条件

例 5-1-6. 如图 5-1-6-1，$\angle ABM$ 为直角，点 C 为线段 BA 的中点，点 D 是射线 BM 上的一个动点（不与点 B 重合），连结 AD，作 $BE\perp AD$，垂足为 E，连结 CE，过点 E 作 $EF\perp CE$，交 BD 于 F.

（1）求证：$BF=FD$ ；

（2）$\angle A$ 在什么范围内变化时，四边形 $ACFE$ 是梯形，并说明理由；

（3）$\angle A$ 在什么范围内变化时，线段 DE 上存在点 G，满足条件 $DG=\dfrac{1}{4}DA$，并说明理由.

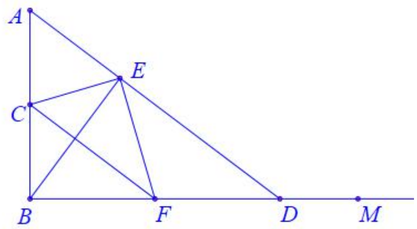


图 5-1-6-1

一、证明 $BF=FD$

由于点 C 是 RtΔABE 的斜边 AB 上的中点，所以 $AC=BC=CE$，所以$\angle CAE=\angle CEA$.

因为$\angle ADB+\angle BAD=90°$，$\angle FED+\angle CEA=90°$，所以$\angle FDE=\angle FED$，所以$\Delta FED$ 是等腰三角形，所以 $EF=FD$.

又因为$\angle EBF+\angle FDE=90°$，$\angle BEF+\angle FED=90°$，所以$\angle EBF=\angle FEB$，所以$\Delta FEB$ 是等腰三角形，所以 $EF=BF$，所以 $BF=FD$.

二、四边形 $ACFE$ 是梯形时，$\angle A$ 的范围

（一）动感体验

由于点 F 是 BD 的中点，因此 $CF//AD$，所以当 AC 与 EF 不平行时，四边形 $ACFE$ 就是梯形.打开文件“例 5-1-6.dmr”，拖动点 D，研究当 AC 与 EF 平行时点 D 应满足的条件，从而求出对应$\angle A$ 的值.

（二）动态解析

因为有 $CF \parallel AD$，所以当 AC 与 EF 不平行时，四边形 $ACFE$ 即为梯形，如图 5-1-27 所示.

若 $AC \parallel EF$，如图 5-1-6-2 所示，则 $\angle FEB=\angle EBA$，又因为 $\angle EBA+\angle EBF=90°$、$\angle FEB=\angle EBF$，所以 $\angle EBA=\angle EBF=\angle BEF=45°$，所以 $\angle A=45°$.

而在点 D 在射线 BM 上运动的过程中，$\angle A$ 始终为锐角，所以要使四边形 $ACFE$ 为梯形，$\angle A$ 满足的条件为 $0°<\angle A<90°$ 且 $\angle A\neq 45°$.

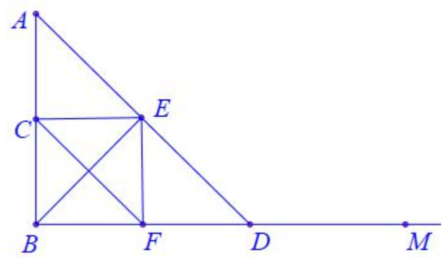


图 5-1-6-2

三、当 $DG=\frac{1}{4}DA$ 时，$\angle A$ 的范围

（一）动感体验

单击“下一页“按钮，进入第二页，如图 5-1-6-3 所示，点 G 是线段 DA 上的点，并且满足 $DG=\frac{1}{4}DA$，拖动点 D，研究点 G 在线段 DE 上时 $\angle A$ 应满足的条件.

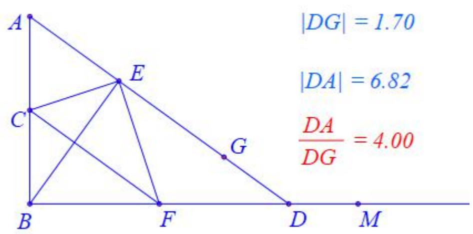


图 5-1-6-3

（二）思路点拨

若在线段 DE 上存在点 G，满足 $DG=\frac{1}{4}DA$，则需要 $\frac{\mathrm{DE}}{\mathrm{DA}}\geq\frac{1}{4}$.

（三）动态解析

当 $\frac{\mathrm{DE}}{\mathrm{DA}}=\frac{1}{4}$ 时，如图 5-1-6-4 所示，则有 $\mathrm{AE}:\mathrm{DE}=3:1$.

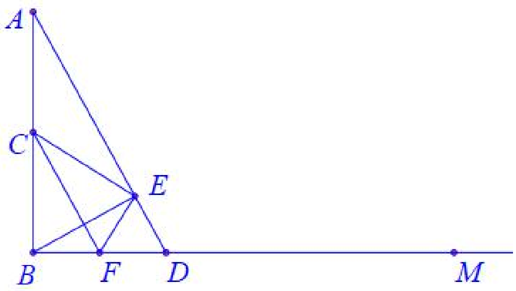


图 5-1-6-4

可设 $DE=a$，则 $AE=3a$.由于 Rt△ABE∽Rt△BDE，所以有：$\frac{AE}{BE}=\frac{BE}{ED}$，可解得：$BE=\sqrt{3}a$，所以在 Rt△$ABE$ 中 $\tan\angle A=\frac{BE}{AE}=\frac{\sqrt{3}}{3}$，所以∠$A$ 的值为 30°.

因此当 30°≤∠A≤90°时，在 DE 上存在点 G，满足条件 $DG=\frac{1}{4}DA$.

（四）简要评注

此题属于条件探索问题，这类试题的结论是已知的， 需要探索的是使结论成立的所具备的条件， 解决此类问题一般采用“执果索因”的方式， 一步一步寻根求源， 从而得出正确的答案.

7．与三角形的费尔马点有关恒等式问题

例 5-1-7. 若 P 为△ABC 所在平面上一点，且∠APB=∠BPC=∠CPA=120°，则点 P 叫做△ABC 的费马点.

（1）若点 O 为锐角△ABC 的费马点，且∠ABC=60°，PA=3，PC=4，则 PB 的值为________；

（2）如图 5-1-7-1，在锐角△ABC 外侧作等边△ACB'，连结 BB'.

求证：BB'过△ABC 的费马点 P，且 BB'=PA+PB+PC.

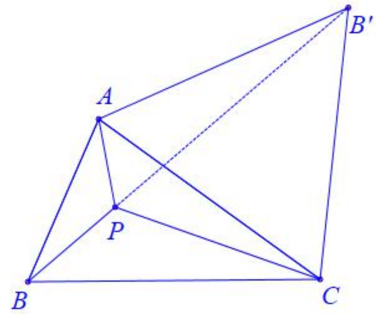


图 5-1-7-1

一、求 PB 的值

（一）动感体验

打开文件“例 5-1-7.dmr”，如图 5-1-7-2 所示，点 P 是△ABC 的费马点，有∠APB=∠BPC=∠CPA=120°且∠ABC=60°，PA=3，PC=4.

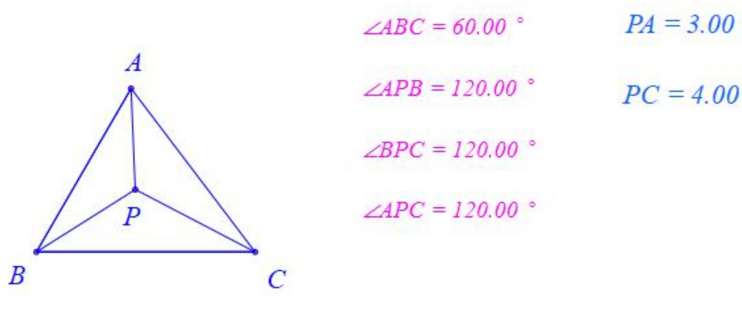


图 5-1-7-2

（二）思路点拨

因为 PA、PB、PC 是不同的三角形的边，因此需要构造相似三角形将 PA、PB 和 PC 关联在一起.

（三）动态解析

因为$\angle BPC=\angle APB=120°$，所以$\angle PAB+\angle PBA=60°$，又因为$\angle PAB+\angle PBC=\angle ABC=60°$，如图 5-1-7-3 所示，所以$\angle PAB=\angle PBC$，所以$\triangle PAB\backsim\triangle PBC$，所以有$\dfrac{PA}{PB}=\dfrac{PB}{PC}$.由$PA=3$、$PC=4$，解得：$PB=2\sqrt{3}$.

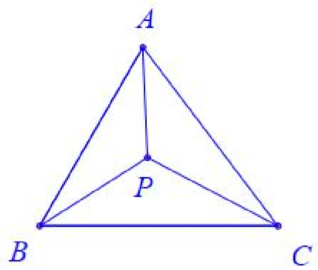


图 5-1-7-3

二、说明 BB'过$\triangle ABC$ 的费马点 P，且 $BB'=PA+PB+PC$

（一）动态体验

单击“下一页”按钮，进入第二页，如图 5-1-7-4 所示，此时 A、B、C 点都可以任意拖动，但始终有$\angle APB=\angle BPC=\angle CPA=120°$，拖动 A、B、C，我们发现始终有∠BPA=120°，∠AP’B=60°，所以 BB'过$\triangle ABC$ 的费马点 P.

（二）思路点拨

因为$\angle BPA=120°$，因此只要证明$\angle APB'=60°$，即可证明点 B、点 P 和点 B'三点共线，即 BB'过$\triangle ABC$ 的费马点 P.

然后在 PB'上截取一段使得它等于 PA 或 PC，然后证明剩下的一段等于 PC 或 PA 即可.

（二）动态解析

因为$\angle APC=120°$、$\angle AB'C=60°$，所以点 A、点 P、点 C 和点 B'四点共圆，因此有$\angle PAC=\angle PB'C$，又因为$\triangle ACB'$是等边三角形，每个内角均为 60°，所以：

$\angle PAC+\angle CAB'+\angle AB'P=\angle PB'C+60°+\angle AB'P=120°$，所以$\angle APB'=60°$，因此$\angle BPB'$为平角，所以说 BB'过$\triangle ABC$ 的费马点 P.

在 PB'上截取一段 PE 使得 $PE=PA$，连接 AE，如图 5-1-7-4 所示.那么$\triangle APE$ 是等边三角形，则 $AP=AE$，又由$\angle PCA=\angle EB'A$、$AC=AB'$知$\triangle APC\cong\triangle AEB'$，所以 $PC=EB'$，因此有：$BB'=PA+PB+PC$.

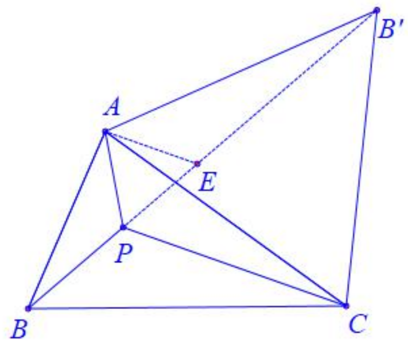


图 5-1-7-4

（三）简要评注

此题证明 BB'过$\triangle ABC$ 的费马点 P，即证明点在直线上，通常可将此类问题转化为在直线上找满足条件的点.而证明 $BB'=PA+PB+PC$ 常采用截长补短法，即在 PB'上截取 $PE=PC$，问题转化为证 $PA=B'E$，此方法也是证明线段和差关系的常用方法.

巩固练习(一)

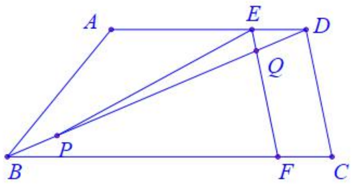
练习 5-1-1：如下图，在梯形 $ABCD$ 中，$AD // BC$，$AD = 6\text{cm}$，$CD = 4\text{cm}$，$BC = BD = 10\text{cm}$，点 P 由 B 出发沿 BD 方向匀速运动，速度为 1cm/s；同时，线段 EF 由 DC 出发沿 DA 方向匀速运动，速度为 1cm/s，交 BD 于 Q，连接 PE．若设运动时间为 t（s）（$0 < t < 5$）．解答下列问题：

（1）当 t 为何值时，$PE // AB$？

（2）设 $\triangle PEQ$ 的面积为 y（cm^2），求 y 与 t 之间的函数关系式；

（3）是否存在某一时刻 t，使 $S_{\triangle PEQ} = \dfrac{2}{25}S_{\triangle BCD}$？若存在，求出此时 t 的值；若不存在，说明理由．

（4）连接 PF，在上述运动过程中，五边形 $PFCDE$ 的面积是否发生变化？说明理由．

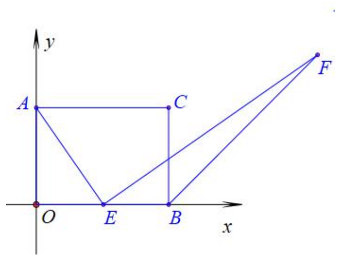


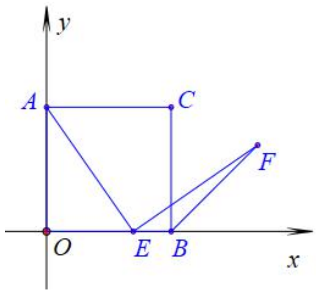
练习 5-1-2：如下图(左)，在平面直角坐标系中，矩形 $AOBC$ 在第一象限内，E 是边 OB 上的动点（不包括端点），作 $\angle AEF = 90^\circ$，使 EF 交矩形的外角平分线 BF 于点 F，设 C（m，n）．.参数点的范围可否是 0 到 m

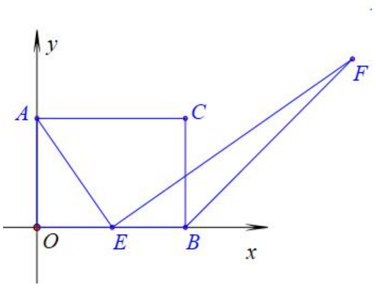
（1）若 $m = n$ 时，如下图(中)，求证：$EF = AE$；

（2）若 $m \neq n$ 时，如下图(右)，试问边 OB 上是否还存在点 E，使得 $EF = AE$？若存在，请求出点 E 的坐标；若不存在，请说明理由．

（3）若 $m = tn$（$t > 1$）时，试探究点 E 在边 OB 的何处时，使得 $EF = (t+1)AE$ 成立？并求出点 E 的坐标.





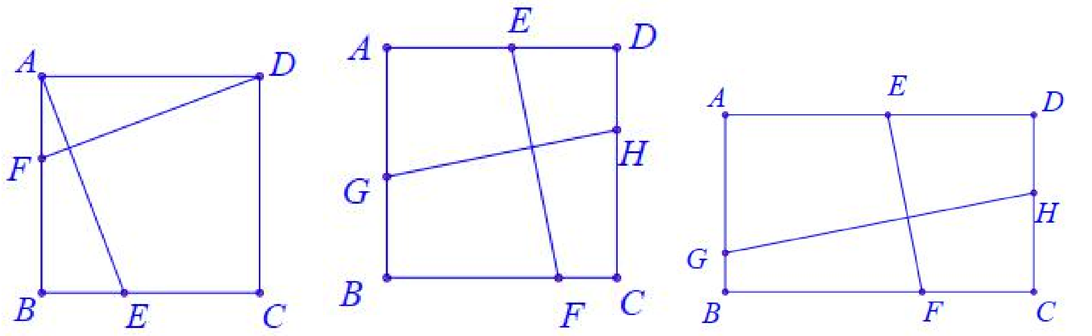


练习 5-1-3：小丽参加数学兴趣小组活动，提供了下面 3 个有联系的问题，请你帮助解决：

（1）如下图(左)，正方形 $ABCD$ 中，作 AE 交 BC 于 E，$DF \perp AE$ 交 AB 于 F，求证：$AE = DF$；

（2）如下图(中)，正方形 $ABCD$ 中，点 E，F 分别在 AD，BC 上，点 G，H 分别在 AB，CD 上，且 $EF \perp GH$，求 $\dfrac{EF}{GH}$ 的值；

（3）如下图(右)，矩形 $ABCD$ 中，$AB = a$，$BC = b$，点 E，F 分别在 AD，BC 上，且 $EF \perp GH$，求 $\dfrac{EF}{GH}$ 的值.

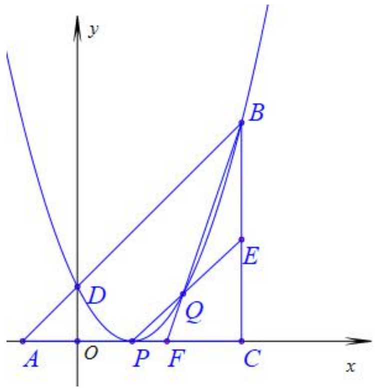


练习 5-1-4：如下图，已知 ΔABC 为直角三角形，$\angle ACB = 90°$，$AC = BC$，点 A、C 在 x 轴上，点 B 坐标为（3，m）（$m > 0$），线段 AB 与 y 轴相交于点 D，以 P（1，0）为顶点的抛物线过点 B、D.

（1）求点 A 的坐标（用 m 表示）；

（2）求抛物线的解析式；

（3）设点 Q 为抛物线上点 P 至点 B 之间的一动点，连结 PQ 并延长交 BC 于点 E，连结 BQ 并延长交 AC 于点 F，试证明：$FC(AC + EC)$ 为定值.



练习 5-1-5：已知：等边$\triangle ABC$的边长为a．

探究（1）：如下图(左)，过等边$\triangle ABC$的顶点 A、B、C 依次作 AB、BC、CA 的垂线围成$\triangle MNG$,求证：$\triangle MNG$是等边三角形且$MN=\sqrt{3}a$；

探究(2)：在等边$\triangle ABC$内取一点O，过点O分别作$OD\perp AB$、$OE\perp BC$、$OF\perp CA$,垂足分别为点D、E、F.

1）如下图(中)，若点O是$\triangle ABC$的重心，我们可利用三角形面积公式及等边三角形性质得到两个正确结论（不必证明）：结论 1．$OD+OE+OF=\frac{\sqrt{3}}{2}a$；结论 2．$AD+BE+CF=\frac{3}{2}a$；

2）如下图(右)，若点O是等边$\triangle ABC$内任意一点，则上述结论1､2是否仍然成立？如果成立，请给予证明；如果不成立，请说明理由．

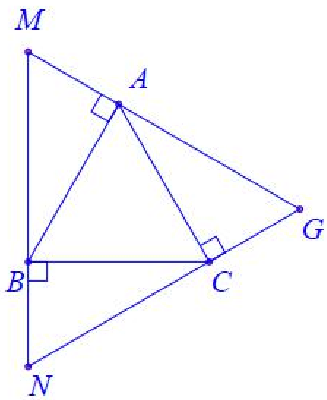


图 5-1-38①

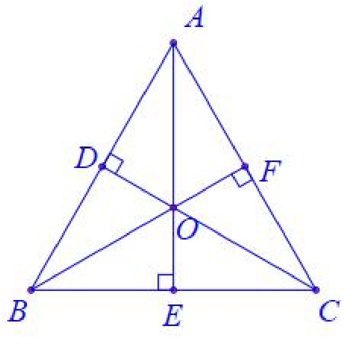


图 5-1-38②

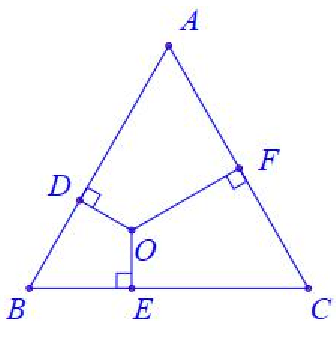


图 5-1-38③

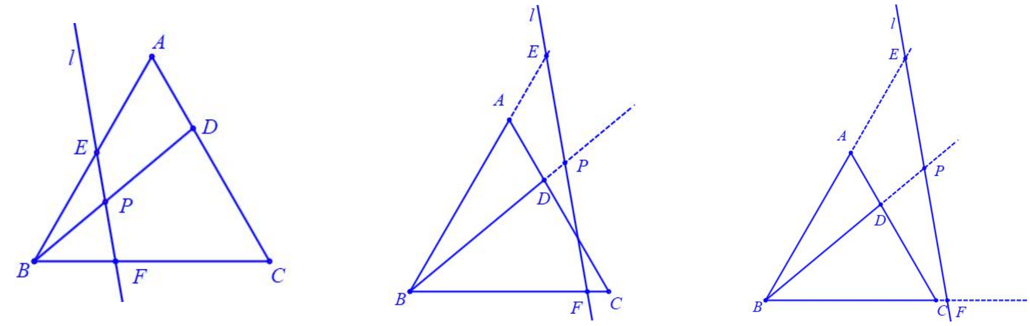
练习 5-1-6：在等边△ABC 中，点 D 为 AC 上一点，连结 BD，直线 l 与 AB、BD、BC 分别相交于点 E、P、F，且∠BPF=60°.

（1）如下图（左），写出图中所有与△BPF 相似的三角形，并选择其中一对给予证明；

（2）若直线 l 向右平移到下图（中）、下图（右）的位置时（其它条件不变），（1）中的结论是否仍然成立？若成立，请写出来（不证明），若不成立，请说明理由；

（3）探究：如下图（左），当 BD 满足什么条件时（其它条件不变），$PF=\dfrac{1}{2}PE$？请写出探究结果，并说明理由.

（说明：结论中不得含有未标识的字母）

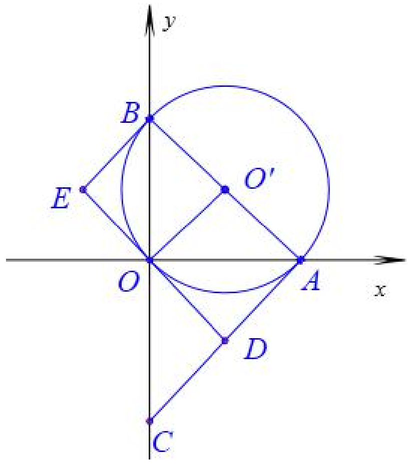


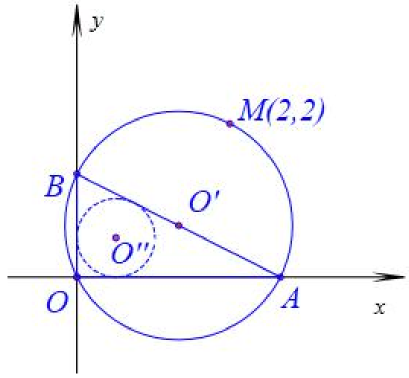
练习 5-1-7：已知：如下图（左），在直角坐标系中，⊙O' 经过坐标原点，分别与 x 轴正半轴、y 轴正半轴交于点 A、B.

（1）若点 O 到直线 AB 的距离为$\dfrac{12}{5}$，且 $\tan\angle OBA=\dfrac{3}{4}$，求线段 AB 的长；

（2）若点 O 到直线 AB 的距离为$\dfrac{12}{5}$，过点 A 的切线与 y 轴交于点 C，过点 O 的切线交 AC 于点 D，过点 B 的切线交 OD 于点 E，求$\dfrac{1}{CD}+\dfrac{1}{BE}$的值；

（3）如下图（右），若⊙O' 经过点 M（2，2），设△BOA 的内切圆的直径为 d，试判断 d＋AB 的值是否会发生变化，若不变，求出其值；若变化，求其变化的范围.

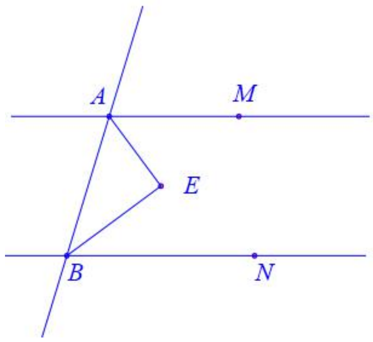




练习 5-1-8：如下图，直线 $AM // BN$，AE、BE 分别平分 $\angle MAB$、$\angle NBA$.

（1）$\angle AEB$ 的度数为________，并证明你的结论；

（2）过点 E 任作一条线段 CD，使 CD 交直线 AM 于点 D，交直线 BN 于点 C，线段 AD、BC、AB 三者之间有何数量关系？证明你的结论.



本节小结

图形运动产生的几何证明问题往往是以运动观点探索图形中的变化规律，在几何图形的运动中，伴随着出现一定的图形位置、数量关系的“变”与“不变”性，解决此类题的关键是要把握图形运动与变化的全过程，抓住其中的等量关系和变量关系.从运动变化得图形的特殊位置，进而探索出一般的结论或者从中获得解题启示，这种由特殊到一般的思想对我们解决运动变化问题是极为重要的.

第二节 代数计算

1．与双曲线有关的代数运算问题

例 5-2-1. 如图 5-2-1-1，已知双曲线 $y=\dfrac{k}{x}$ 与直线 $y=\dfrac{1}{4}x$ 相交于 A、B 两点．第一象限上的点 M（m, n）（在 A 点左侧）是双曲线 $y=\dfrac{k}{x}$ 上的动点．过点 B 作 $BD/\!/y$ 轴交 x 轴于点 D．过 N（0，－n）作 $NC/\!/x$ 轴交双曲线 $y=\dfrac{k}{x}$ 于点 E，交 BD 于点 C．

（1）若点 D 坐标是（－8，0），求 A、B 两点坐标及 k 的值．

（2）若 B 是 CD 的中点，四边形 $OBCE$ 的面积为 4，求直线 CM 的解析式．

（3）设直线 AM、BM 分别与 y 轴相交于 P、Q 两点，且 $MA=pMP$，$MB=qMQ$，求 $p-q$ 的值．

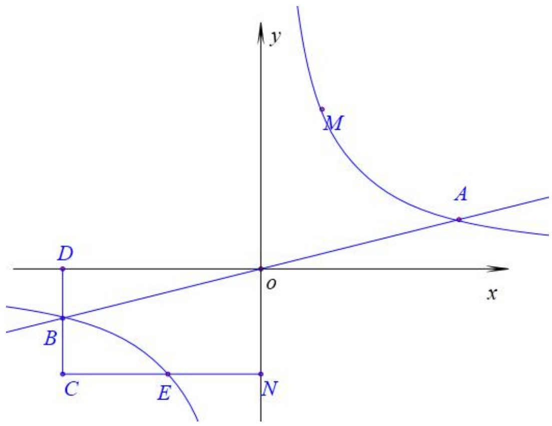


图 5-2-1-1

一、求 A、B 点坐标及 k 值

通过点 D 坐标知道点 B 的横坐标为 x=-8，通过 $y=\dfrac{1}{4}x$ 求得点 B 的坐标为（－8，－2），A、B 两点关于原点对称，所以点 A 的坐标为（8，2），将点 A 坐标代入 $y=\dfrac{k}{x}$，求出 k=16.

二、求直线 CM 的解析式

不妨设 k>0，因为点 B 在双曲线 $y=\dfrac{k}{x}$ 上，所以有 $S_{\triangle OBD}=\dfrac{1}{2}|x_B|\cdot|y_B|=\dfrac{1}{2}k$，同理可知 $S_{\triangle OEN}=\dfrac{1}{2}k$，如图 5-2-1-2 所示．因为点 B 是 CD 的中点，所以

$S_{四边形CNOD}=|x_B|\cdot|2y_B|=2k$，由四边形 $OBCE$ 的面积等于 2，即 $S_{四边形CNOD}-S_{\triangle OBC}-S_{\triangle OEN}=k=4$，所以双曲线的解析式为 $y=\dfrac{4}{x}$.

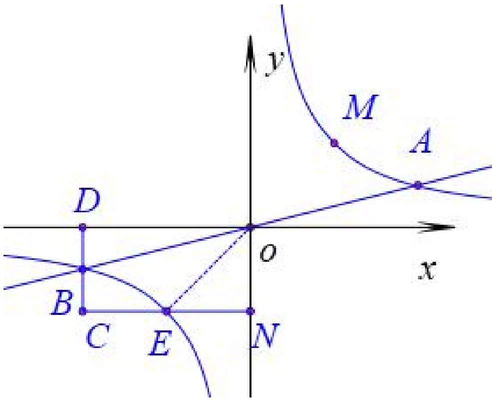


图 5-2-1-2

由 $y=\dfrac{4}{x}$ 和可解得点 B 的坐标为（-4，-1），所以点 C 的坐标为（-4，-2），所以点 N 的坐标为（0，-2），所以点 M 的纵坐标为 2，将 y=2 带入 $y=\dfrac{4}{x}$ 得：x=2，所以点 M 的坐标为（2，2），由点 C 和点 M 的坐标求出直线 CM 的解析式为 $y=\dfrac{2}{3}x+\dfrac{2}{3}$.

三、求 p-q 的值

（一）动感体验

打开文件“例 5-2-1.dmr”第三页，如图 5-2-1-3 所示，通过拖动变量尺可以改变 k 的值或通过按钮设置它的值，从而改变双曲线的位置，拖动点 M，此时 p、q 值在变化，观察 p-q 的值.

（二）思路点拨

可化为 $p=\dfrac{MA}{MP}$、$q=\dfrac{MB}{MQ}$ 的形式，因此需要构造相似三角形进行计算.

根据 MA、MP 以及 MB、MQ 之间的位置关系，可以分别从点 M、点 A 和点 B 向 x 轴作垂线段，从而构造相似三角形.

（三）动态解析

如图 5-2-1-3 所示，点 R、点 S、点 T 分别是点 M、点 A、点 B 到 x 轴的垂足.则 $AS//MR//y$ 轴$//BT$，所以有：$\dfrac{MA}{MP}=\dfrac{RS}{OR}$、$\dfrac{MB}{MQ}=\dfrac{TR}{OR}$，又因为 $RS=OS-OR$、$TR=OT+OR$、$OT=OS$，所以：

$$p-q=\frac{(OS-OR)-(OT+OR)}{OR}=\frac{-2OR}{OR}=-2.$$

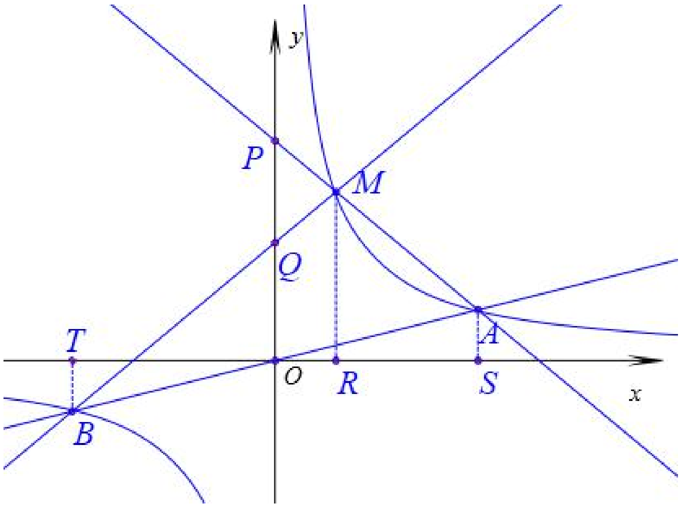


图 5-2-1-3

（四）简要评注

本题根据所求将条件 $MA=pMP$，$MB=qMQ$ 转化为 $p=\frac{MA}{MP}$，$q=\frac{MB}{MQ}$，根据式子形式确定解题思路——通过构造相似三角形进行计算，在表示线段的长时，借助字母表示所需线段长，同时注意点 A 和点 B 的对称关系.

2．与抛物线有关的线段比例问题

例 5-2-2. 已知抛物线 $y=x^2+mx-2m^2(m\neq0)$.

（1）求证：该抛物线与 x 轴有两个不同的交点；

（2）过点 $P(0，n)$作 x 轴的垂线交该抛物线于点 A 和点 B(点 A 在点 P 的左边)，是否存在实数 m、n，使得 $PA=2PB$？若存在，则求出 m、n 满足的条件；若不存在，请说明理由.

一、证明抛物线与 x 轴有两个不同的交点

通过证明$\Delta>0$ 判断交点的个数. $\Delta=m^2-4\times1\times(-2m^2)=9m^2$，因为 $m\neq0$ 所以 $\Delta>0$，所以该抛物线与 x 轴有两个不同的交点.

二、求使 $AP=2PB$ 时，m、n 满足的条件

（一）动感体验

打开文件“例 5-2-2.dmr”，如图 5-2-2-1 所示，通过拖动变量尺可以改变 m 和 n 的值或通过按钮设置它们的值，点 P 可以被直接上下拖动.研究有哪些情况能够使得 $PA=2PB$，研究若 $PA=2PB$ 则 m、n 应满足哪些条件.

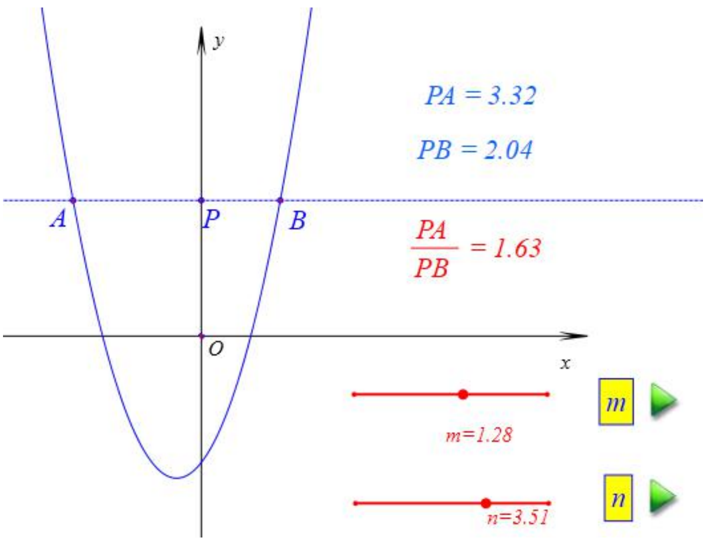


图 5-2-2-1

（二）思路点拨

如图 5-2-2-2 所示，当 $m<0$ 时，抛物线的对称轴 $y=-\dfrac{m}{2}>0$，由于点 A 和点 B 到抛物线的距离相等，那么 PA 一定小于 BP.同样道理，m 也不能等于 0，而只能大于 0.

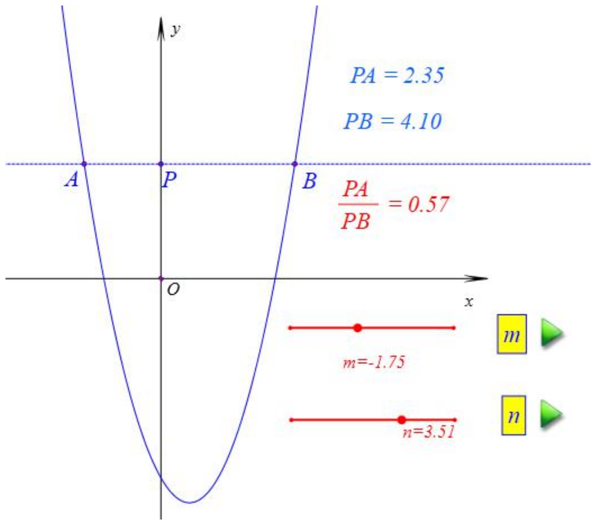


图 5-2-2-2

因为点 A 在点 P 的左侧，可以按照点 B 在 y 轴的左侧和点 B 在 y 轴的右侧两种情况进行分类讨论.

（三）动态解析

设点 A（x_1，y_1）、$B(x_2$，y_2），由 $\begin{cases} y = x^2 + mx - 2m^2 \\ y = n \end{cases}$ 可得：$\begin{cases} x_1 + x_2 = -m \\ x_1 x_2 = -(2m^2 + n) \end{cases}$.

当点 B 在 y 轴左侧时，如图 5-2-2-3 所示，由 AP=2PB 得 $x_1 = 2x_2$，带入上面的方程得：

$\begin{cases} 3x_2 = -m \\ 2x_2^2 = -(2m^2 + n) \end{cases}$，将 x_2 消去可得：$20m^2 + 9n = 0$.

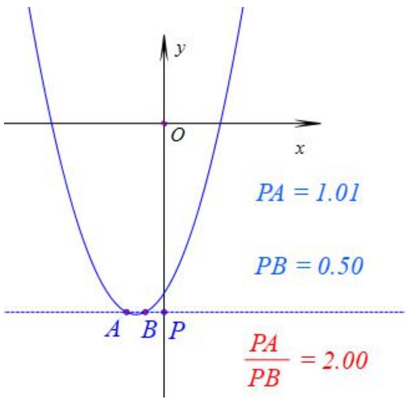


图 5-2-2-3

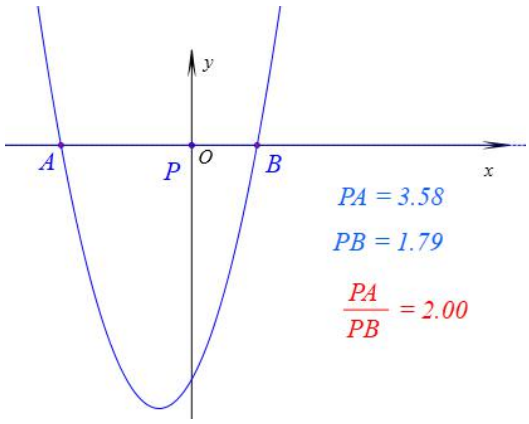


图 5-2-2-4

当点 B 在 y 轴右侧时，如图 5-2-2-4 所示，由 AP=2PB 得 $x_1 = -2x_2$，带入上面的方程得：

$\begin{cases} -x_2 = -m \\ -2x_2^2 = -(2m^2 + n) \end{cases}$，将 x_2 消去可得：$n = 0$ 且 m 为大于 0 的任意实数.

综上，当 $PA=2PB$ 时，m、n 满足的条件为 $\begin{cases}20m^2+9n=0\\m>0\end{cases}$ 或 $\begin{cases}n=0\\m>0\end{cases}$.

（四）简要评注

m 的取值决定着抛物线的对称轴，同时也决定着 A、B 的位置，根据对称轴的正负性，决定着点 A、B 存在着两种情况，而解决问题的关键就是能画出两种情况的草图，根据草图，利用对称性用 m、n 表示点 A、P、B 的坐标，由 $AP=2PB$ 得到关于 m、n 的等式，从而解决问题，本题的难点是坐标的表示.

3．与两条抛物线有关的线段最值问题

例5-2-3．如图5-2-3-1，抛物线 $y_1=-ax^2-ax+1$经过点$P\left(-\frac{1}{2},\frac{9}{8}\right)$，

且与抛物线$y_2=ax^2-ax-1$相交于A，B两点．

（1）求a值；

（2）如图5-2-3-2，设$y_1=-ax^2-ax+1$与x轴分别交于M，N两点（点M在点N的左边），$y_2=ax^2-ax-1$与x轴分别交于E，F两点（点E在点F的左边），观察M，N，E，F四点的坐标，写出一条正确的结论，并通过计算说明；

（3）设A，B两点的横坐标分别记为x_A，x_B，若在x轴上有一动点$Q(x,0)$，且$x_A\leqslant x\leqslant x_B$，过$Q$作一条垂直于$x$轴的直线，与两条抛物线分别交于$C$，$D$两点，试问当$x$为何值时，线段$CD$有最大值？其最大值为多少？

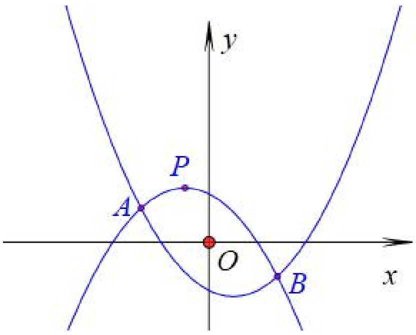


图5-2-3-1

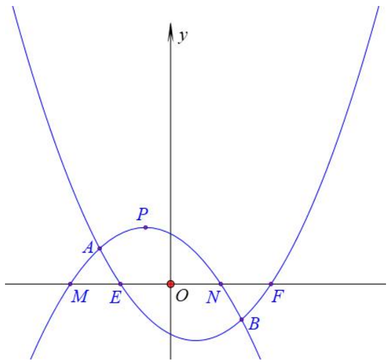


图5-2-3-2

一、求a的值

此题为常规题，利用待定系数法即可求出a.

将$P(-\frac{1}{2},\frac{9}{8})$代入$y=-ax^2-ax+1$中得：$\frac{9}{8}=-a(-\frac{1}{2})^2-(-\frac{1}{2})a+1$，解得：$a=\frac{1}{2}$.

二、根据点M、N、E、F的坐标写正确结论

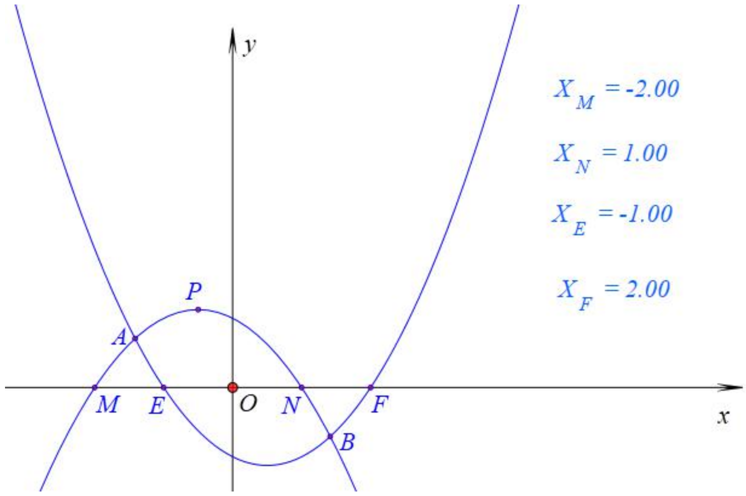


图5-2-3-3

（一）动感体验

打开文件“例 5-2-3.dmr”，如图 5-2-3-3 所示，通过测量观察可以得出结论.

（二）思路点拨

根据两条抛物线的解析式可以看出两条抛物线之间存在以下关系：①开口大小相同而方向相反；②对称轴关于y轴对称；③在y轴上的截距关于原点O对称；④顶点关于坐标原点对称.

由此可知得到以下结论：$OM=OF$、$OE=ON$、$ME=NF$.

（三）动态解析

下面通过计算说明：

由（1）知 $a=\dfrac{1}{2}$，所以抛物线 $y_1=-\dfrac{1}{2}x^2-\dfrac{1}{2}x+1$，$y_2=\dfrac{1}{2}x^2-\dfrac{1}{2}x-1$.

当 $-\dfrac{1}{2}x^2-\dfrac{1}{2}x+1=0$ 时，解得 $x_1=-2$，$x_2=1$. 因为点 M 在点 N 的左边，所以 $x_M=-2, x_N=1$.

当 $\dfrac{1}{2}x^2-\dfrac{1}{2}x-1=0$ 时，解得 $x_3=-1$，$x_4=2$. 因为点 E 在点 F 的左边，所以 $x_E=-1, x_F=2$.

很容易得到上述结论均成立.

三、求CD的最大值

（一）动感体验

打开文件“例 5-2-3.dmr”第二页，如图 5-2-3-4 所示，拖动点 Q，通过测量值观察点 Q 的坐标对 CD 长度的影响.

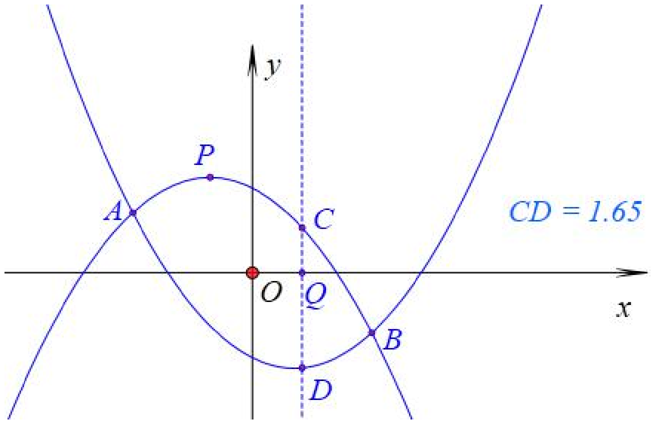


图 5-2-3-4

（二）思路点拨

用 C、D 点的纵坐标表示 CD 长，利用二次函数性质求 CD 的最值.

（三）动态解析

因为 $a=\frac{1}{2}>0$，所以抛物线 y_1 开口向下，抛物线 y_2 开口向上．根据题意，得

$$CD=y_1-y_2=\left(-\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{2}x+1\right)-\left(\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{2}x-1\right)=-x^2+2.$$

因为 $x_A\leqslant x\leqslant x_B$，所以当 $x=0$ 时，CD 有最大值 2.

（四）简要评注

本题也是通过计算，得到 M、F、N、E 的坐标，从而判定点 M 与点 F 对称，点 N 与点 E 对称，再表示 CD 的长时，也是通过计算点 C、D 的纵坐标的差得到.

4．判断翻折后的点是否落在抛物线上

例 5-2-4. 如图 5-2-4-1，直线 $y=\frac{\sqrt{3}}{3}x+b$ 经过点 B（$-\sqrt{3}$，2），且与 x 轴交于点 A，将抛物线 $y=\frac{1}{3}x^2$ 沿 x 轴作左右平移，记平移后的抛物线为 C，其顶点为 P.

（1）求∠BAO 的度数；

（2）抛物线 C 与 y 轴交于点 E，与直线 AB 交于两点，其中一个交点为 F，当线段 EF //x 轴时，求平移后的抛物线 C 对应的函数解析式；

（3）在抛物线 $y=\frac{1}{3}x^2$ 平移的过程中，将△PAB 沿直线 AB 翻折得到△DAB，点 D 能否落在抛物线 C 上？如能，求出此时抛物线 C 的顶点 P 的坐标；如不能，说明理由.

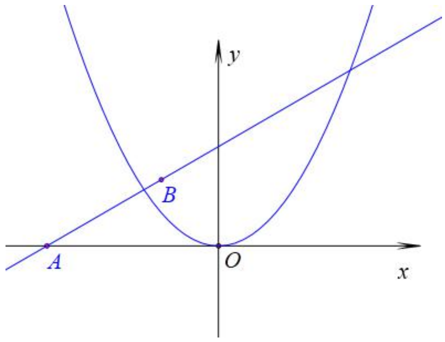


图 5-2-4-1

一、求∠BAO 的度数

因为直线 $y=\frac{\sqrt{3}}{3}x+b$ 经过点 B（$-\sqrt{3}$，2），所以 $2=\frac{\sqrt{3}}{3}\times(-3)+b$，解得 b=3，所以直线解析式为 $y=\frac{\sqrt{3}}{3}x+3$，那么直线与 x 轴交点为 $A(-3\sqrt{3},0)$，与 y 轴的交点为（0，3）.

由 $\tan\angle\mathrm{BAO}=\frac{3}{3\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{3}}{3}$ 得：∠BAO=30°.

二、求平移后抛物线 C 的解析式

（一）动感体验

抛物线与直线 $y=\frac{\sqrt{3}}{3}x+3$ 有两个交点，均可作为点 F，不妨分别记作 F'、F''.打开

文件“例 5-2-4.dmr”，如图 5-2-4-2 所示，点 F'、F'' 是直线 $y=\frac{\sqrt{3}}{3}x+3$ 与抛物线 C 的两个交点，通过拖动变量尺，可以改变抛物线的顶点 P 的位置，对抛物线进行左右平移，研究当 EF' 或 EF'' 平行于 x 轴时点 F' 或 F'' 应满足的条件.

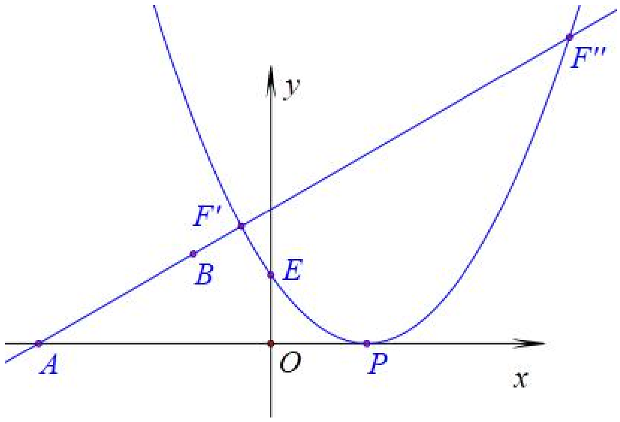


图 5-2-4-2

（二）思路点拨

抛物线与水平直线的两个交点关于抛物线的对称轴对称.因此，当 EF_1 平行于x轴时，点 F_1 与点E关于抛物线的对称轴对称，同样道理当 EF_2 平行于x轴时，点 F_2 与点E关于抛物线的对称轴对称.

（三）动态解析

设抛物线 C 的顶点 P 坐标为（m，0）那么抛物线 C 的解析式为 $y=\frac{1}{3}(x-m)^2=\frac{1}{3}x^2-\frac{2}{3}mx+\frac{1}{3}m^2$，所以抛物线 C 与 y 轴的交点 E（0，$\frac{1}{3}m^2$）.当 EF 平行于 x 轴时，那么点 E 与点 F 关于抛物线对称轴 $x=m$ 对称，因此点 F 的坐标可表示为（$2m$，$\frac{1}{3}m^2$）.

又因为点 F 在直线 $y=\frac{\sqrt{3}}{3}x+3$ 上，因此有 $\frac{1}{3}m^2=\frac{2\sqrt{3}}{3}m+3$，解得 $m=3\sqrt{3}$（如图 5-2-4-3 所示）或 $m=-\sqrt{3}$（如图 5-2-4-4 所示）.

所以抛物线 C 的解析式为 $y=\frac{1}{3}(x-3\sqrt{3})^2$ 或 $y=\frac{1}{3}(x+\sqrt{3})^2$.

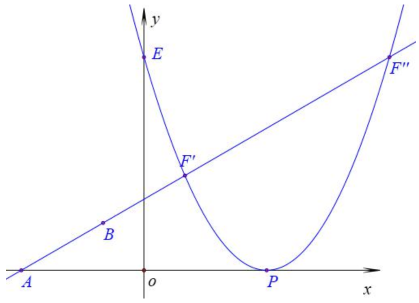


图 5-2-4-3

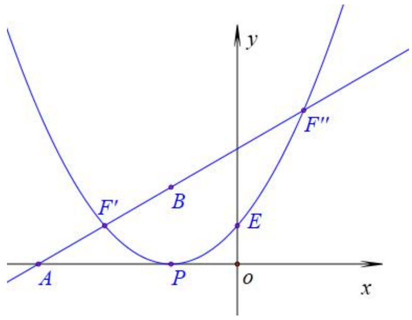


图 5-2-4-4

三、判断点 D 是否落在抛物线 C 上

（一）动感体验

单击"下一页"按钮，进入第二页，如图 5-2-4-5 所示，拖动点 P，观察点 D 是否可能落在抛物线上，研究如何通过点 P 的坐标表示点 D 的坐标.

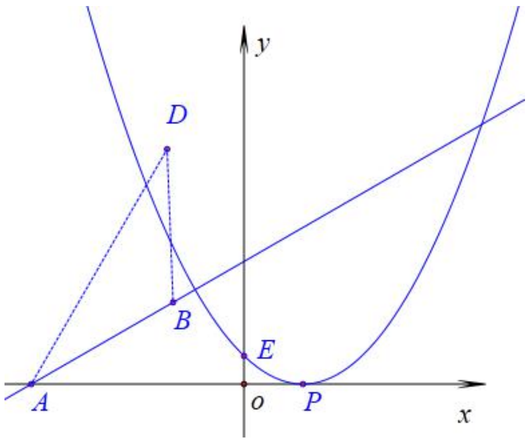


图 5-2-4-5

（二）思路点拨

因为直线 $y=\dfrac{\sqrt{3}}{3}x+3$ 与x轴的夹角为30°，所以∠DAP=60°，又因为AD=AP，所以△APD是等边三角形，从而通过点A和点P的坐标表示点D的坐标.

用字母表示等边△APD的边长后再表示点D、P的坐标，将点D坐标代入抛物线C的解析式求解.

（三）动态解析

由问题（1）∠BAO=30°可判定△APD 为等边三角形.由直线 AB 的解析式 $y=\dfrac{\sqrt{3}}{3}x+3$ 可求得点 A 的坐标（$-3\sqrt{3}$，0），设点 P 的坐标为（m，0）则 AP 的长度为 $m+3\sqrt{3}$，这时

因为点 P 一定在点 A 的右侧.否则，若点 P 在点 A 的左侧，则点 D 在 y 轴下方，不可能在抛物线上.

那么点 D 的坐标可表示为（$\frac{1}{2}(m-3\sqrt{3})$，$\frac{\sqrt{3}}{2}(m+3\sqrt{3})$），将点 D 的坐标带入抛物线 $y=\frac{1}{3}(x-m)^2$ 的解析式可解得：$\frac{\sqrt{3}}{2}(m+3\sqrt{3})=\frac{1}{3}\left(\frac{m}{2}-\frac{3\sqrt{3}}{2}-m\right)^2$，解得：$m=3\sqrt{3}$.如图 5-2-4-6 所示.

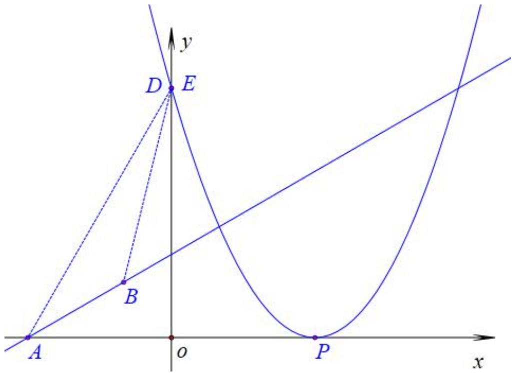


图 5-2-4-6

所以当点 D 能够落在抛物线 C 上时，抛物线顶点 P 的坐标为（$3\sqrt{3}$，0）.

（四）简要评注

判断点是否落在抛物线上，主要看该点是否满足函数解析式，对于不确定坐标的点，可用字母表示点的坐标，代入解析式后得方程，方程有解，说明点能落在抛物线上；方程无解，说明不存在满足条件的点.

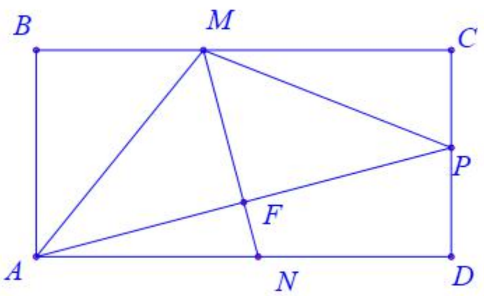
巩固练习（二）

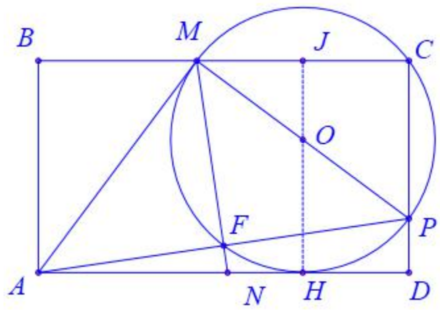
练习 5-2-1：已知：如下图（左），把矩形纸片 $ABCD$ 折叠，使得顶点 A 与边 DC 上的动点 P 重合(P 不与点 D，C 重合)， MN 为折痕，点 M，N 分别在边 BC， AD 上，连接 AP，MP，AM， AP 与 MN 相交于点 F．⊙O 过点 M，C，P．

（1）请你在图 5-2-17①中作出⊙O(不写作法，保留作图痕迹)；

（2）$\dfrac{AF}{AN}$ 与 $\dfrac{AP}{AD}$ 是否相等？请你说明理由；

（3）如下图（右），随着点 P 的运动，若⊙O 与 AM 相切于点 M 时，⊙O 又与 AD 相切于点 H．设 AB 为 4，请你通过计算，画出这时的图形．(图 5-2-17②，图 5-2-17③供参考)





练习 5-2-2：已知抛物线 $y=x^2+kx-\frac{3}{4}k^2$（k 为常数，且 $k>0$）．

（1）证明：此抛物线与 x 轴总有两个交点；

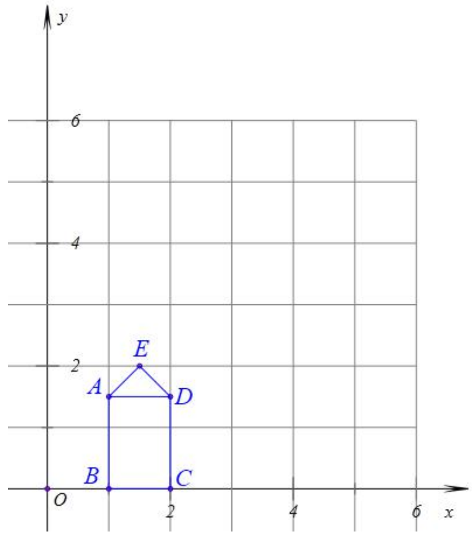
（2）设抛物线与 x 轴交于 M、N 两点，若这两点到原点的距离分别为 OM、ON，且 $\dfrac{1}{ON}-\dfrac{1}{OM}=\dfrac{2}{3}$，求 k 的值．

练习 5-2-3：如下图，矩形 $ABCD$ 的长、宽分别为 $\dfrac{3}{2}$ 和 1，且 $OB=1$，点 E（$\dfrac{3}{2}$，2），连接 AE、ED.

（1）求经过 A、E、D 三点的抛物线的表达式；

（2）若以原点为位似中心，将五边形 $AEDCB$ 放大，使放大后的五边形的边长是原五边形对应边长的 3 倍，请在下图网格中画出放大后的五边形 $A'E'D'C'B'$；

（3）经过 A'、E'、D'三点的抛物线能否由（1）中的抛物线平移得到？请说明理由.



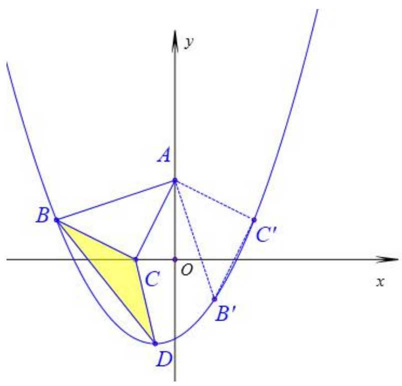
练习 5-2-4：如下图，在平面直角坐标系中，将一块腰长为 $\sqrt{5}$ 的等腰直角三角板 ABC 放在第二象限，且一边靠在两坐标轴上，直角顶点 C 的坐标为（-1，0），点 B 在抛物线 $y=ax^2+ax-2$ 上.

（1）点 A 的坐标为______________，点 B 的坐标为______________；

（2）抛物线的关系式为______________；

（3）设（2）中抛物线的顶点为 D，求$\triangle DBC$ 的面积；

（4）将三角板 ABC 绕顶点 A 逆时针方向旋转 90°，到达$\triangle AB'C'$ 的位置. 请判断点 B'、C' 是否在（2）中的抛物线上，并说明理由.



本节小结

利用代数计算进行的说理问题，其方法主要体现在计算上，这类题往往与函数知识相结合，利用函数的相关知识，如对称性，求特殊点的坐标、判断点在函数图象的方法等，结合题目的已知条件建立等量关系，解方程求解.在分析过程中，往往要先根据题目条件画草图判定是否需要分类讨论，再利用图形进行分析，找寻解决问题的方法.

第三节 方案设计

1．与圆有关的覆盖问题

例 5-3-1. 一种电讯信号转发装置的发射直径为 31km．现要求：在一边长为 30km 的正方形城区选择若干个安装点，每个点安装一个这种转发装置，使这些装置转发的信号能完全覆盖这个城市．问：

（1）能否找到这样的 4 个安装点，使得这些点安装了这种转发装置后能达到预设的要求？

（2）至少需要选择多少个安装点，才能使这些点安装了这种转发装置后达到预设的要求？

答题要求：请你在解答时，画出必要的示意图，并用必要的计算、推理和文字来说明你的理由．

一、探索能否找到达到要求的 4 个安装点

（一）动感体验

打开文件“例 5-3-1.dmr”，如图 5-3-1-所示，正方形 $ABCD$ 的边长为 30，圆 E、圆 F、圆 G 和圆 H 的直径均为 31，拖动圆心，研究如何利用四个装置将整个正方形覆盖.

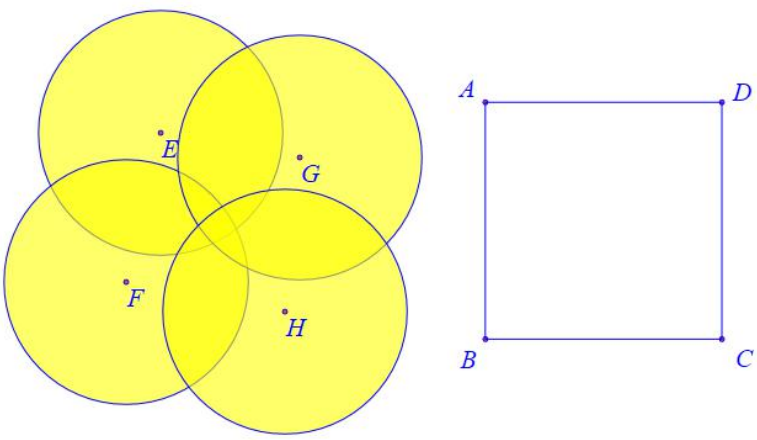


图 5-3-1-1

（二）思路点拨

最简单的方法是考虑将正方形分割成四个全等的小正方形或四个全等的等腰直角三角形.

（三）动态解析

问题转化为 4 个圆心在正方形区域内，直径都为 31km 的圆能否将正方形覆盖，容易联想将正方形分割成 4 个全等的部分，每个圆覆盖一个部分，从而找到 4 个安装点.

方法一：考虑将正方形分割成四个全等的小正方形，分别拖动 4 个圆的圆心在这 4 个小正方形对角线的交点处，如图 5-3-1-2 所示，此时，每个小正方形的对角线长为 $\frac{1}{2}\left(30\sqrt{2}\right)=15\sqrt{2}<31$，所以每个圆能覆盖一个小正方形，因此 4 个转发装置可安装在这 4 个小正方形对角线的交点处.

方法二：考虑将正方形分割成四个全等的等腰三角形，分别拖动 4 个圆的圆心在正方形 $ABCD$ 四边的中点处，如图 5-3-1-3 所示，此时等腰三角形 3 个顶点到圆心的距离小于 $\frac{31}{2}$ km，所以每个圆能覆盖一个等腰三角形，因此 4 个转发装置可安装在正方形四边的中点处.

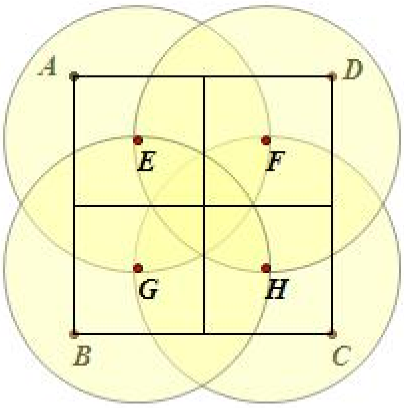


图 5-3-1-2

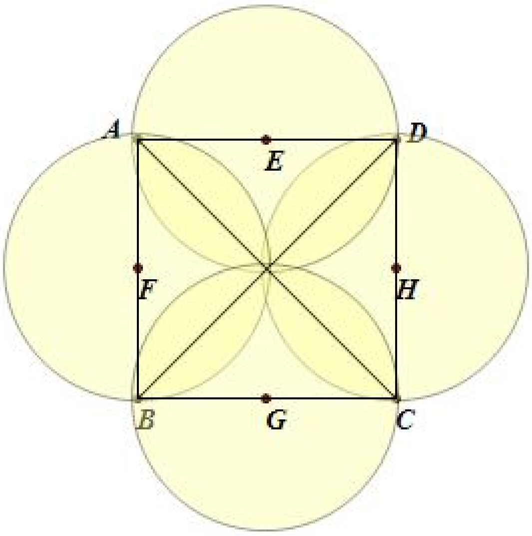


图 5-3-1-3

二、探索至少选择的安装点数

（一）动感体验

请你自己拖动圆，分别研究利用 3 个、2 个、1 个圆能否将正方形覆盖.

（二）动态解析

由问题（1）可找到四个安装点满足条件，所以可考虑至少 1 个安装点、至少 2 个安装点、至少 3 个安装点三种情况考虑.

首先考虑选择 1 个安装点，拖动直径为 31km 的圆的圆心至正方形 *ABCD* 的对角线处发现圆不能将正方形 *ABCD* 覆盖，如图 5-3-1-4 所示，所以选择 1 个安装点不可能达到预设要求.

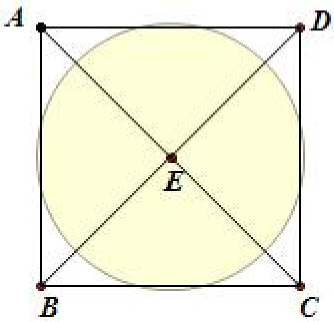


图 5-3-1-4

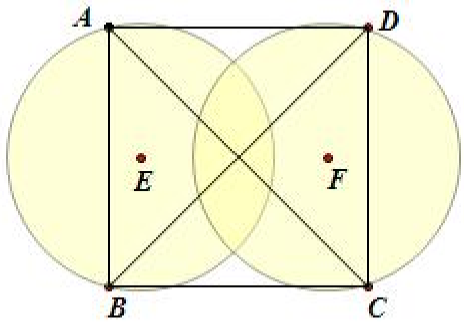


图 5-3-1-5

其次考虑选择 2 个安装点，要用两个圆覆盖一个正方形，则一个圆至少要经过正方形相邻两个顶点，拖动一个圆的圆心，使该圆经过正方形 *ABCD* 相邻的两个顶点 *A*、*B*，拖动另一个圆的圆心，使该圆经过 *C*、*D* 两点，发现两圆不能将剩余部分覆盖，如图 5-3-1-5 所示.利用勾股定理可得 *AD* 上覆盖在圆内部的线段长为 $\sqrt{31^2-30^2}=\sqrt{61}<\frac{1}{2}AD=15$，说明用两个直径都为 31 的圆不能完全覆盖正方形 *ABCD*，所以至少选择 2 个安装点不能达到预设要求.

最后考虑选择 3 个安装点，拖动三个直径为 31km 的圆，发现能将正方形覆盖，如图 5-3-1-6 所示.此问题可将正方形分割成三个矩形，让每个直径为 31km 的圆分别将三个矩形覆盖，圆心在矩形对角线的交点处，所以三个矩形的对角线不超过 31km.

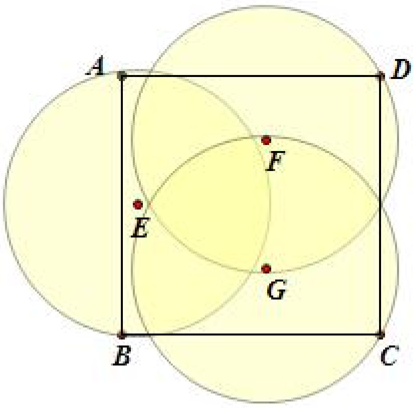


图 5-3-1-6

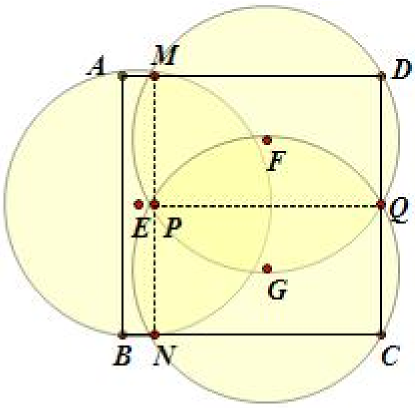


图 5-3-1-7

将正方形分割成三个矩形，使它们的对角线相等，如图 5-3-1-7 所示，设 *AM*=*x*，则 *DM*=30-*x*，其中点 *P* 是 *MN* 的中点，利用勾股定理根据 *BM*=*PD* 可求得 $x=\frac{15}{4}$.

所以$BM=PD=PC=\sqrt{\left(\frac{15}{4}\right)^2+30^2}\approx 30.2<31$，说明 3 个直径为 31km 的圆能分别覆盖这 3 个矩形，所以至少选择 3 个安装点能达到预设要求，这 3 个安装点在三个矩形对角线的交点上.

（三）简要评注

利用几何作图进行方案设计，不仅要有一定的几何作图能力，而且要能熟练的运用几何的有关性质，并注意充分发挥分类讨论、类比归纳、猜想验证等数学思想方法进行解题.

2．截取长方形得到面积最大的两个三角形

例 5-3-2. 问题探究

（1）请在图 5-3-2-1①的正方形 $ABCD$ 内，画出使$\angle APB=90°$的一个点 P，并说明理由．

（2）请在图 5-3-2-1②的正方形 $ABCD$ 内（含边），画出使$\angle APB=60°$的所有的点 P，并说明理由．

问题解决

（3）如图 5-3-2-1③，现在一块矩形钢板 $ABCD$，$AB=4$，$BC=3$，．工人师傅想用它裁出两块全等的、面积最大的$\triangle APB$ 和$\triangle CP'D$ 钢板，且$\angle APB=\angle CP'D=60°$．请你在图③中画出符合要求的点 P 和 P'，并求出$\triangle APB$ 的面积（结果保留根号）．

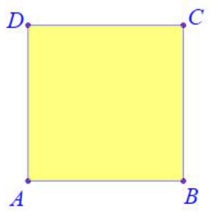


图 5-3-2-1①

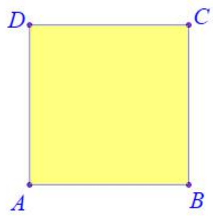


图 5-3-2-1②

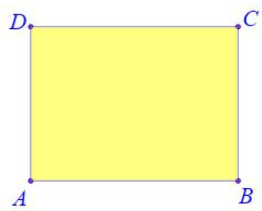


图 5-3-2-1③

一、画出使$\angle APB=90°$的一个点 P

（一）动感体验

打开文件“例 5-3-2.dmr”，如图 5-3-2-2 所示，拖动点 P，观察$\angle APB$ 测量值的变化规律，以及点 P 所经过的路径.

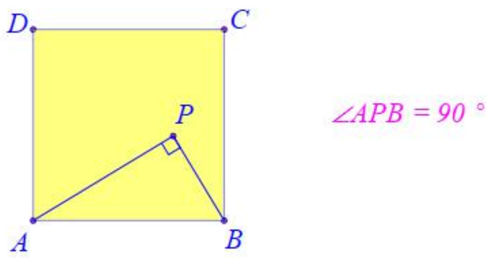


图 5-3-2-2

（二）思路点拨

点 P 在正方形覆盖的以 AB 为直径的圆上.

（三）动态解析

在正方形的内部，拖动点 P 以 AB 为直径的圆上运动，发现$\angle APB$ 始终是直径 AB 所对的圆周角，所以$\angle APB=90°$，如图 5-3-2-3 所示.

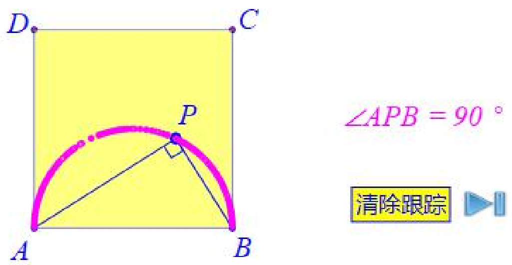


图 5-3-2-3

因此绘制以 AB 为直径的圆，在正方形内的圆周上任意取一点 P 即可满足条件$\angle APB=90°$.

二、画出使$\angle APB=60°$的所有的点 P

（一）动感体验

单击“下一页”按钮，进入第二页，如图 5-3-2-4 所示，拖动点 P，观察$\angle APB$ 测量值的变化规律以及点 P 所经过的路径.

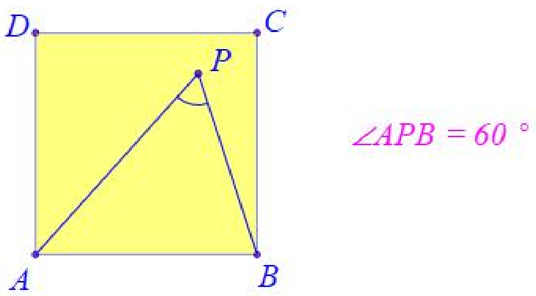


图 5-3-2-4

（二）思路点拨

点 P 在正方形覆盖的以 AB 为边的正三角形的外接圆上.

（三）动态解析

利用同弧所对的圆周角相等，因此考虑先构造 60°，所以以 AB 为边在正方形内部作正三角形 ABP，再作正三角形 ABP 的外接圆，外接圆上被正方形覆盖的部分即为所求的所有点 P 的位置，如图 5-3-2-5 所示.

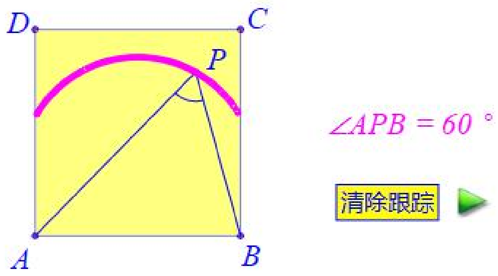


图 5-3-2-5

三、截两块全等的、面积最大的$\triangle APB$和$\triangle CP'D$钢板，且$\angle APB=\angle CP'D=60°$

（一）动感体验

单击“下一页”按钮，进入第三页，如图 5-3-2-6 所示，点 P 和点 P'可以被任意拖动，研究当$\triangle APB$ 和$\triangle C P'D$ 的面积最大时，点 P 和点 P'应该满足的条件.

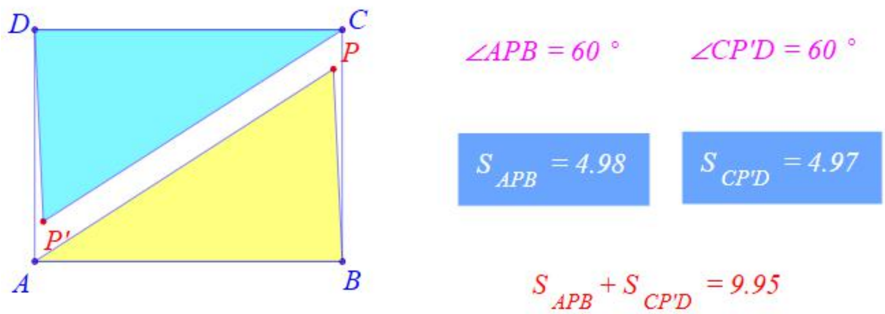


图 5-3-2-6

（二）思路点拨

点 P 在矩形覆盖的以 AB 为边，且在 AB 上方作的正三角形的外接圆与对角线的交点上.

（三）动态解析

矩形中两个全等的且面积最大三角形是连接一条对角线后得到的两个三角形，所以先连接 AC.

然后在$\triangle ABC$ 内找使$\angle APB$ =60°的点 P，方法同问题（2），因为底 AB 长不变，所以在$\triangle ABP$ 面积越大，点 P 到 AB 的距离越大，因此点 P 在所作圆与 AC 的交点处，利用对称性可找出点 P'，即在 AC 上截取 $AP'=CP$，如图 5-3-2-7 所示.

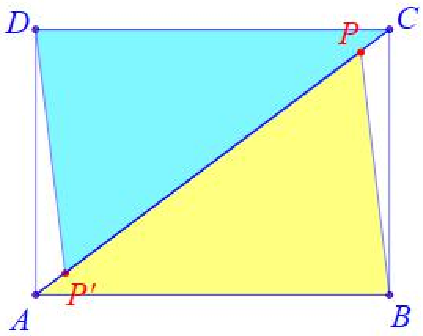


图 5-3-2-7

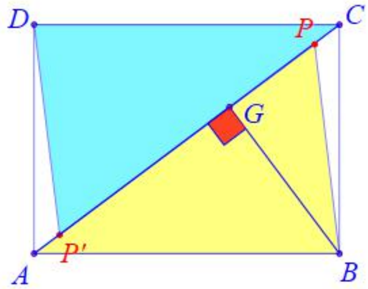


图 5-3-2-8

求 $\triangle APB$ 的面积：过点 B 过 $BG \perp AC$ 于点 G，如图 5-3-2-8 所示，由于 $S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2}AB \cdot BC = \frac{1}{2}AC \cdot BG$ 以及 $AB = 4$、$BC = 3$、$AC = 5$ 可求得 $BG = \frac{12}{5}$.在 Rt$\triangle ABG$ 中，$AG = \sqrt{4^2 - (\frac{12}{5})^2} = \frac{16}{5}$；在 $Rt\triangle BPG$ 中，$PG = BG \cdot \cot\angle BPG = \frac{4\sqrt{3}}{5}$，

所以 $S_{\triangle APB} = \frac{1}{2}AP \cdot BG = \frac{96 + 24\sqrt{3}}{25}$.

（四）简要评注

本题在正方形确定点 P 的位置时，主要利用了圆周角的相关性质，通过构造弦 AB 所对的弧的特殊度数，确定点 P.问题（3）的解决一方面结合前面问题的方法找 P 点，另一方面又利用了矩形的对称性.

3．截取三角形得到面积最大的矩形

例 5-3-3. 如图 5-3-3-1，已知：抛物线 $y=\frac{1}{2}x^2+bx+c$ 与 x 轴交于 A、B 两点，与 y 轴交于点 C，经过 B、C 两点的直线是 $y=\frac{1}{2}x-2$，连结 AC.

（1）B、C 两点坐标分别为 B（_____，_____）、C（_____，_____），抛物线的函数关系式为______________；

（2）判断△ABC 的形状，并说明理由；

（3）若△ABC 内部能否截出面积最大的矩形 $DEFG$（顶点 D、E、F、G 在△ABC 各边上）？若能，求出在 AB 边上的矩形顶点的坐标；若不能，请说明理由.

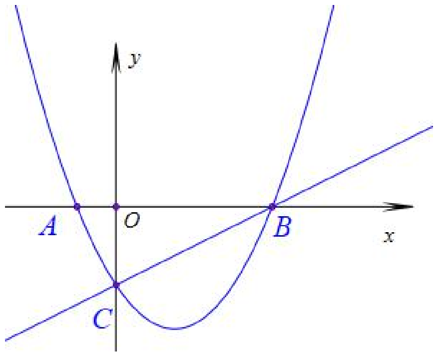


图 5-3-3-1

一、求 B、C 坐标及抛物线解析式

通过函数 $y=\frac{1}{2}x-2$ 可求出 B（4，0），C（0，－2），用待定系数法可求出抛物线解析式为 $y=\frac{1}{2}x^2-\frac{3}{2}x-2$.

二、判断△ABC 的形状

令 $y=0$，解方程 $\frac{1}{2}x^2-\frac{3}{2}x-2=0$ 得：$x_1=-1$、$x_2=4$，可知点 A 的坐标为（-1，0）.

又由点 B（4，0）、点 C(0，-2)知：$AB=5$、$AC=\sqrt{5}$、$BC=2\sqrt{5}$，由勾股定理逆定理：$AC^2+BC^2=5+20=25=AB^2$，所以△ABC 是直角三角形，其中 AB 为斜边.

三、讨论△ABC 内部能否截出面积最大的矩形 $DEFG$

（一）动感体验

打开文件“例 5-3-3.dmr”，如图 5-3-3-2 所示，矩形的两个顶点在线段 AB 上，拖动点 D 观察点 D 的位置对矩形形状和面积的影响，研究表示矩形面积的恰当形式.

单击“下一页”按钮，进入第二页，如图 5-3-3-3 所示，矩形的一个顶点在 AB 上，另外两个顶点分别在 AC、BC 上，第四个顶点在点 F 处，想一想为什么？拖动点 D，改变矩形的形状和面积，观察如何用恰当的形式表示矩形的面积.

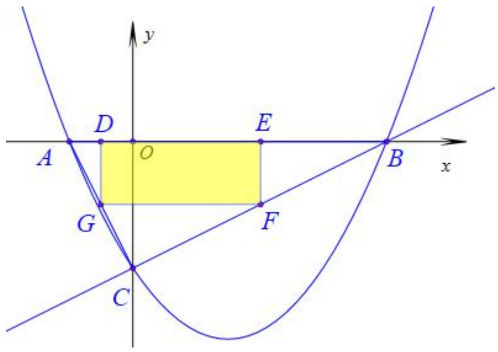


图 5-3-3-2

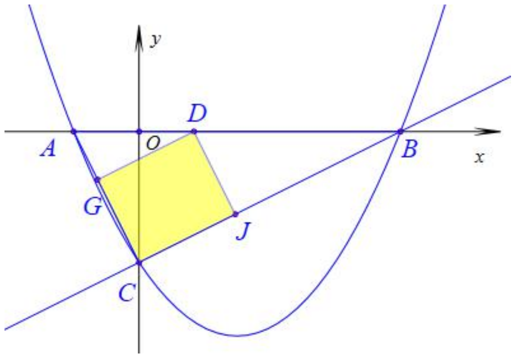


图 5-3-3-3

（二）动态解析

1．当矩形两个顶点 D、E 在 AB 边上时，因为 $GF//AB$，所以有$\triangle CGF \backsim \triangle CAB$.设 GF 于 y 轴交于点 H，如图 5-3-3-4 所示，则有 $\dfrac{GF}{AB}=\dfrac{CH}{CO}$，设 $GF=x$，求出 $CH=\dfrac{2}{5}x$，所以 $DG=OH=OC-CH=2-\dfrac{2}{5}x$，所以矩形 $DEFG$ 的面积可表示为

$S_{\text{矩形DEFG}}=DG\cdot GF=x\left(2-\dfrac{2}{5}x\right)=-\dfrac{2}{5}\left(x-\dfrac{5}{2}\right)^2+\dfrac{5}{2}$，当 $x=\dfrac{5}{2}$ 时，S 有最大值，所以 $DG=\dfrac{5}{2},GF=1$，利用$\triangle ADG \backsim \triangle AOC$，求出 $AD=\dfrac{1}{2}$，所以 $D\left(-\dfrac{1}{2},0\right)$，因为 $OE=DE-DO=2$，所以 E（2，0）.

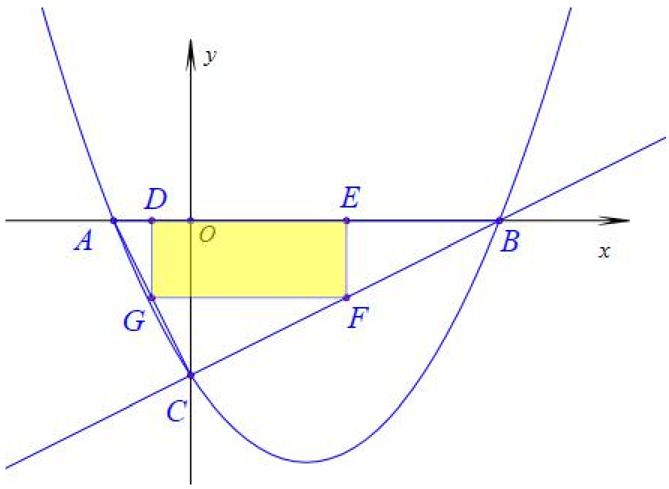


图 5-3-3-4

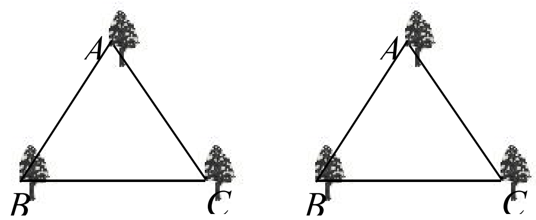
2．当矩形的一个顶点 D 在 AB 边上时，设 $AD=x$，由 $GD//CB$ 知：$\dfrac{AD}{GD}=\dfrac{AB}{CB}$，得 $GD=\dfrac{2\sqrt{5}}{5}x$.同理有 $DE//AC$ 知 $\dfrac{BD}{DE}=\dfrac{BA}{AC}$，得：$DE=\dfrac{\sqrt{5}}{5}(5-x)$，所以矩形 $DEFG$ 的面积可表示为：$S_{\text{矩形DEFG}}=GD\cdot DE=\dfrac{2}{5}x(5-x)=-\dfrac{2}{5}\left(x-\dfrac{5}{2}\right)^2+\dfrac{5}{2}$，所以当 $AD=\dfrac{5}{2}$，即点 D 的坐标为（$\dfrac{3}{2}$，0）时，S 有最大值.

（三）简要评注

在解决本题时，首先应考虑截的方式，画出草图，根据不同的解法，利用三角形相似的知识求出矩形的长和宽，从而达到解决问题的目的.

巩固练习（三）

练习 5-3-1：某公园有一个边长为 4 米的正三角形花坛，三角形的顶点 A、B、C 上各有一棵古树．现决定把原来的花坛扩建成一个圆形或平行四边形花坛，要求三棵古树不能移动，且三棵古树位于圆周上或平行四边形的顶点上．以下设计过程中画图工具不限．



（1）按圆形设计，利用右图（左）画出你所设计的圆形花坛示意图；

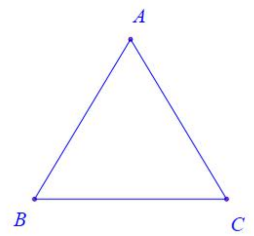
（2）按平行四边形设计，利用右图（右）画出你所设计的平行四边形花坛示意图；

（3）若想新建的花坛面积较大，选择以上哪一种方案合适？请说明理由．

练习 5-3-2：如下图，一块等腰三角形的小钢板下脚料，其中 $AB=AC$.工人师傅要将它做适当的切割，重新拼接后焊成一个面积与原下脚料面积相等的矩形工件.

（1）请根据上述要求，设计出将这块下脚料分割成两块或三块的两种不同的拼接方案(在图中画出切割时所沿的虚线，以及拼接后得到的矩形，保留拼接的痕迹);

（2）若要把该三角形下脚料切割后焊成一个正方形工件(只切割一次)，则该三角形需满足什么条件?并按(1)要求画图.

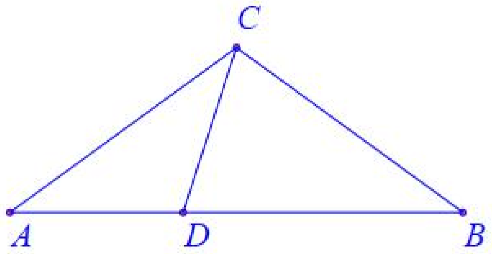


练习 5-3-3：已知：如下图，在$\triangle ABC$ 中，D 为 AB 边上一点，$\angle A=36°$，$AC=BC$，$AC^2=AB\cdot AD$.

（1）试说明：$\triangle ADC$ 和$\triangle BDC$ 都是等腰三角形，

（2）若 $AB=1$，求 AC 的长，

（3）试构造一个等腰梯形，要求该梯形连同它的两条对角线所形成的 8 个三角形中有尽可能多的等腰三角形．


C
A
D
B

本节小结

与方案设计有关的问题不仅要求学生有扎实的数学基础知识，还需要具有能够将实际问题转化成为数学语言的能力.它综合而全面地考查了学生的阅读能力、理解能力、分析能力、推理能力、数据处理能力、文字概括能力以及书面表达能力等.

第六章 函数图像问题

函数的图像是对函数关系的一种直观表示.它能形象地表现出因变量随自变量变化而变化的规律，能够帮助我们从整体上了解函数的特征，它在研究函数的性质过程中具有重要的价值，是运用数形结合思想解决问题的基础.因此读懂函数图像，从函数图像中提取所需要的信息，以及根据两个变量之间的变化关系绘制精确的对应函数图像，是数学学习过程中需要培养的重要能力.因此，有关图像的问题一直是中考压轴题的热点问题.

第一节 参数与函数图像

1．判断抛物线与 x 轴的交点问题

例 6-1-1. 已知抛物线 $y=3ax^2+2bx+c$

（Ⅰ）若 $a=b=1$，$c=-1$，求该抛物线与 x 轴公共点的坐标；

（Ⅱ）若 $a=b=1$，且当 $-1<x<1$ 时，抛物线与 x 轴有且只有一个公共点，求 c 的取值范围；

（Ⅲ）若 $a+b+c=0$，且 $x_1=0$ 时，对应的 $y_1>0$；$x_2=1$ 时，对应的 $y_2>0$，试判断当 $0<x<1$ 时，抛物线与 x 轴是否有公共点？若有，请证明你的结论；若没有，阐述理由.

一、求抛物线与 x 轴公共点的坐标

当 $a=b=1$，$c=-1$ 时，抛物线为 $y=3x^2+2x-1$，因为方程 $3x^2+2x-1=0$ 的两个根为 $x_1=-1$，$x_2=\frac{1}{3}$. 所以该抛物线与 x 轴公共点的坐标是 $(-1,0)$ 和 $\left(\frac{1}{3},0\right)$.

二、抛物线与 x 轴有且只有一个公共点，求 c 的取值范围

（一）动感体验

打开文件“例 6-1-1.dmr”，如图 6-1-1-1 所示，通过变量尺可以改变 c 的值或者通过按钮设置它的值，观察和研究当抛物线与 x 轴在 $-1<x<1$ 范围内只有一个交点的情况下抛物线的性质.

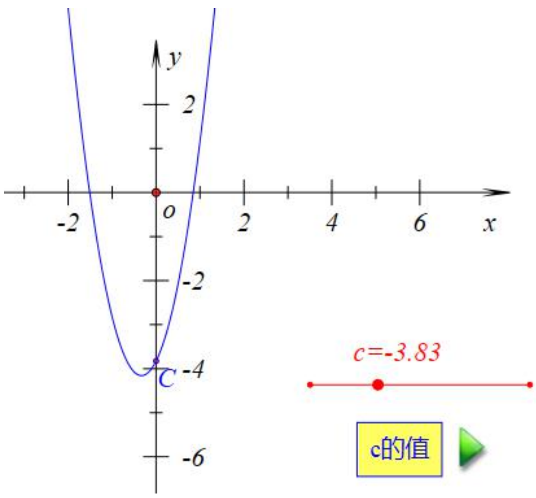


图 6-1-1-1

（二）思路点拨

对Δ=0 和Δ＞0 两种情况进行讨论.

（三）动态解析

当 $a=b=1$ 时，抛物线为 $y=3x^2+2x+c$，对称轴为 $x=-\frac{1}{3}$.若抛物线与 x 轴有公共点，那么对于方程 $3x^2+2x+c=0$ 来说必有判别式 $\Delta=4-12c\geq0$，即 $c\leq\frac{1}{3}$.

1）当Δ=0 时，$c=\frac{1}{3}$，抛物线与 x 轴只有一个交点（$-\frac{1}{3}$，0）正好在 $-1<x<1$ 范围内，因此满足条件，单击【c 的值】按钮，在弹出的对话框中输入：$\frac{1}{3}$，单击确定即可得到 t=$\frac{1}{3}$ 时的状态。如图 6-1-1-2 所示.

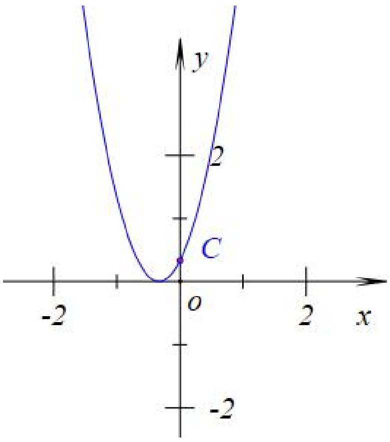


图 6-1-1-2

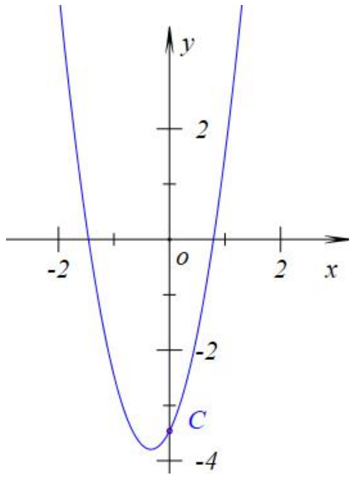


图 6-1-1-3

2）当Δ＞0 时，$c<\frac{1}{3}$.这时若抛物线有且只有一个交点在范围内，如图 6-1-1-3 所示，则有：当 x=-1 时 y<=0，当 x=1 时 y>0，即 $\begin{cases}3-2+c\leq0\\3+2-c>0\end{cases}$，解得：$-5<c\leq-1$.否则，如图 6-1-1-4 所示在 $-1<x<1$ 范围内有两个交点，如图 6-1-1-5 所示在 $-1<x<1$ 范围内没有交点.

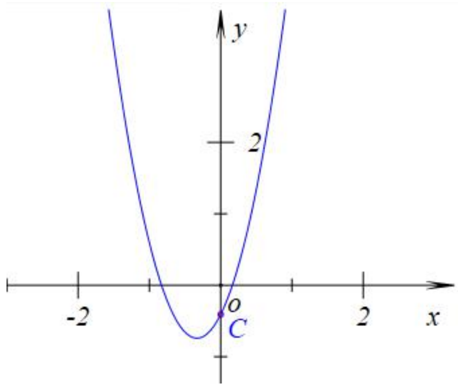


图 6-1-1-4

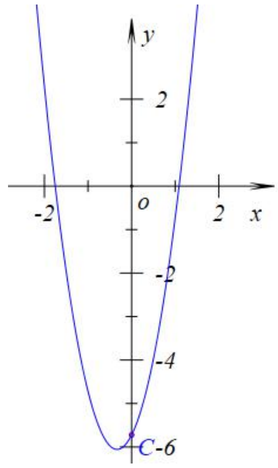


图 6-1-1-5

综上所述，当$c=\frac{1}{3}$或$-5<c\le -1$时抛物线与x轴在$-1<x<1$范围内有且只有一个交点.

三、试判断当$0<x<1$时，抛物线与x轴是否有公共点

（一）动感体验

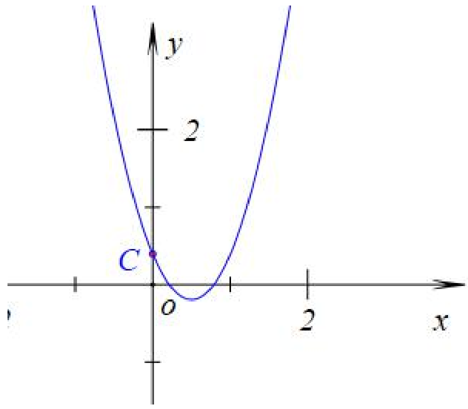


图 6-1-1-6

由$a+b+c=0$得：$b=-(a+c)$；所以函数表达式可以表示为：

$y=3ax^2-2(a+c)x+c$.单击“下一页”按钮，进入第二页，如图 6-1-1-6 所示，图像为函数$y=3ax^2-2(a+c)x+c$对应的曲线. 通过变量尺可以改变 a 和 c 的值或者通过按钮设置它们的值.当$y_1>0$并且$y_2>0$时，观察抛物线与x轴在范围内交点的情况.

（二）思路点拨

若抛物线与x轴在$0<x<1$范围内有交点，则可能有一个交点，也可能有两个交点.

（三）动态解析

当抛物线与 x 轴在 $0<x<1$ 范围内有两个交点或者唯一交点时，抛物线的对称轴必定在 $0<x<1$ 范围内，并且判别式不小于 0，即 $\begin{cases}0<\dfrac{a+c}{3a}=\dfrac{1}{3}(1+\dfrac{c}{a})<1\\ \Delta=4(a+c)^2-4a\cdot c\ge 0\end{cases}$.

由 $x_1=0$ 时，对应的 $y_1>0$；$x_2=1$ 时，对应的 $y_2>0$，可得 $\begin{cases}c>0\\ 3a-2(a+c)+c>0\end{cases}$，化简为 $0<c<a$.

显然，抛物线的判别式 $\Delta=4(a+c)^2-4a\cdot c=4(a-c)^2+4ac>0$.

由 $0<c<a$ 得：$0<\dfrac{c}{a}<1$，所以有 $\dfrac{1}{3}<\dfrac{1}{3}\cdot(1+\dfrac{c}{a})<\dfrac{2}{3}$，即抛物线的对称轴满足为 $\dfrac{1}{3}<\dfrac{a+c}{3a}<\dfrac{2}{3}$.

所以抛物线的在 $0<x<1$ 范围内必有交点，而且两个交点.

由 $x=0$ 时，$y_1>0$ 并且 $x=1$ 时 $y_2>0$，可知若抛物线与 x 轴在 $0<x<1$ 范围内有交点，则必有两个交点或者有唯一交点，如图 6-1-6 所示.否则，若有一个交点或没有交点时，若有 $y_1>0$ 成立则必有 $y_2>0$ 不成立，或者若有 $y_2>0$ 成立则必有 $y_1>0$ 不成立，如图 6-1-1-7、图 6-1-1-8、图 6-1-1-9、图 6-1-1-10 所示.

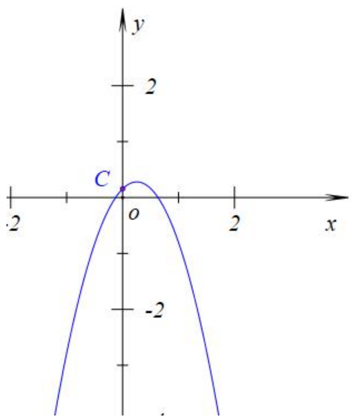


图 6-1-1-7

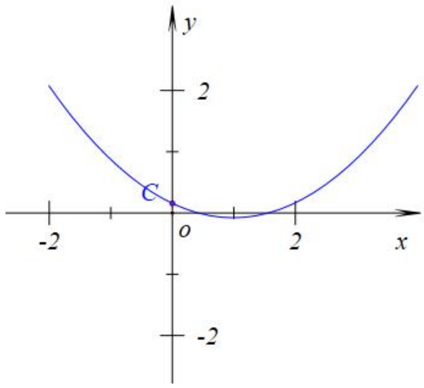


图 6-1-1-8

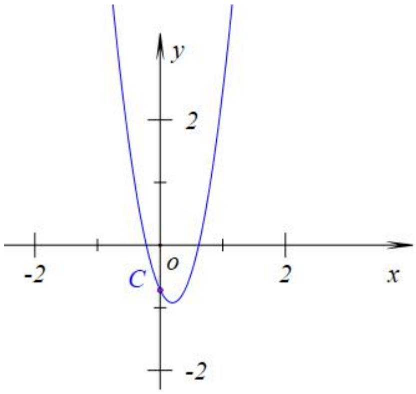


图 6-1-1-9

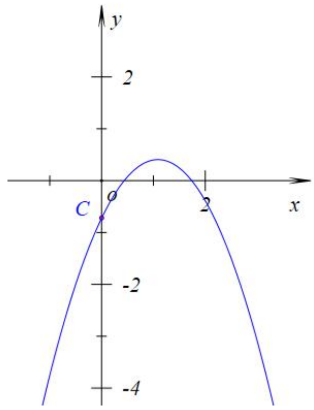


图 6-1-1-10

（四）简要评注

本题主要研究函数图像在指定范围内与 x 轴的交点问题.相对于函数图像与 x 轴交点的一般问题来说，解决这类问题需要不重不漏地考虑各种情况，把需要解决的问题准确地转化为数学语言，通过列不等式或不等式组，求出对应参数的范围或者证明结论是否成立.

2．探索满足指定条件的抛物线

例 6-1-2. 定义$\{a，b，c\}$为函数$y=ax^2+bx+c$的“特征数”.如函数$y=x^2-2x+3$的“特征数”是{1，-2，3}，函数$y=2x+3$的“特征数”是{0，2，3}，函数$y=x$的“特征数”是{0，1，0}.

（1）将“特征数”是$\{0,\dfrac{\sqrt{3}}{3},0\}$的函数图像向上平移 2 个单位，得到一个新函数，这个函数的解析式为________________.

（2）在(1)中，平移前后的两个函数分别与y轴相交于O、A两点，与直线$x=-\sqrt{3}$分别交于C、B两点，判断以A、B、C、O四点为顶点的四边形形状，并说明理由.

（3）若（2）中的四边形（不包括边界）始终覆盖着“特征数”是$\{1,-2b，b^2+\dfrac{1}{2}\}$的函数图像的一部分，求满足条件的实数$b$的取值范围.

一、求函数解析式

“特征数”是$\{0,\dfrac{\sqrt{3}}{3},0\}$的函数为$y=\dfrac{\sqrt{3}}{3}x$，将其向上平移 2 个单位后的函数为$y=\dfrac{\sqrt{3}}{3}x+2$.

二、判断以 A、B、C、O 四点为顶点的四边形形状

从点O到点A和从点C到点B按照相同的方向平移了相同的距离，因此$OA//CB$且$OA=CB$，所以四边形$OABC$是平行四边形，如图 6-1-2-1 所示.

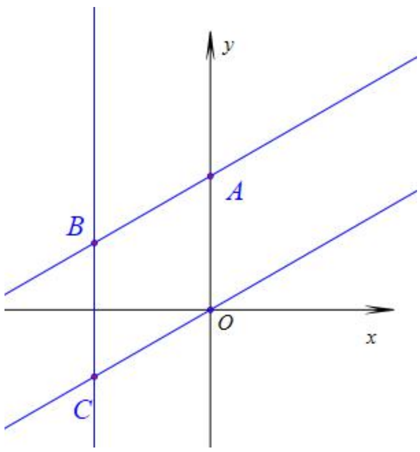


图 6-1-2-1

将 $x=-\sqrt{3}$ 代入 $y=\frac{\sqrt{3}}{3}x$ 得：$y=-1$，所以 $OC=\sqrt{3+1}=2$，因此 $OC=OA$，这说明四边形 $OABC$ 是菱形.

三、求满足条件的实数 b 的取值范围

（一）动感体验

"特征数"是 $\{1,-2b,\ b^2+\frac{1}{2}\}$ 的函数表达式为：$y=x^2-2bx+b^2+\frac{1}{2}$.

打开文件"例 6-1-2.dmr′，如图 6-1-2-2 所示，左右拖动变量尺改变实数 b 的值，研究菱形 $OABC$ 始终覆盖着函数 $y=x^2-2bx+b^2+\frac{1}{2}$ 的图像的一部分时函数的图像与菱形的关系.

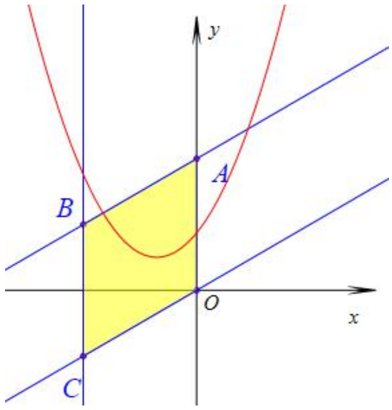


图 6-1-2-2

（二）思路点拨

函数 $y=x^2-2bx+b^2+\frac{1}{2}$ 的对称轴为 $x=b$，当对称轴在 CB 的左侧，那么点 B 应当在抛物线的上方；若对称轴在 OA 的右侧，那么点 A 应当在抛物线的上方.

（三）动态解析

抛物线的顶点为（b，$\frac{1}{2}$）.因此当抛物线的对称轴满足 $-\sqrt{3}\le b\le 0$ 时，函数 $y=x^2-2bx+b^2+\frac{1}{2}$ 的一部分必被菱形所覆盖，如图 6-1-2-3、图 6-1-2-4 所示.

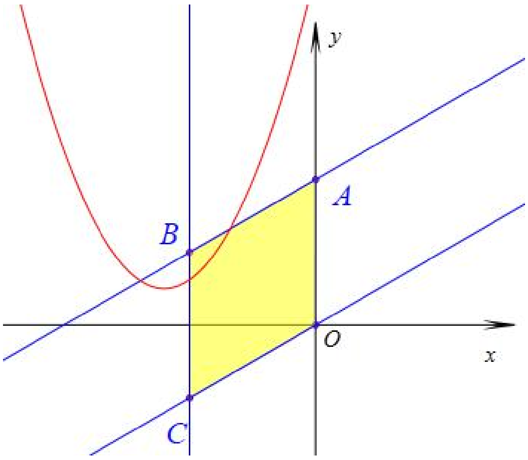


图 6-1-2-3

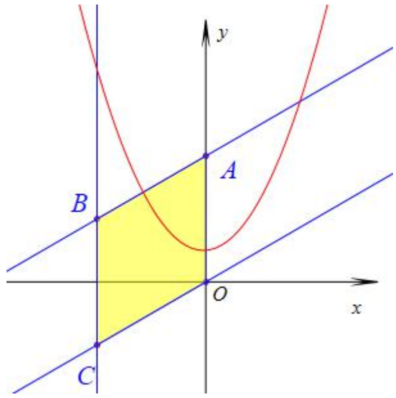


图 6-1-2-4

当$b<-\sqrt{3}$时，若函数$y=x^2-2bx+b^2+\dfrac{1}{2}$的一部分被菱形所覆盖，如图 6-1-2-5 所示，则点 B 需要在抛物线的上方，即当$x=-\sqrt{3}$时，$\dfrac{\sqrt{3}}{3}x+2>x^2-2bx+b^2+\dfrac{1}{2}$，解得：

$-\dfrac{\sqrt{2}}{2}-\sqrt{3}<b<\dfrac{\sqrt{2}}{2}-\sqrt{3}$，所以有$-\dfrac{\sqrt{2}}{2}-\sqrt{3}<b<-\sqrt{3}$.

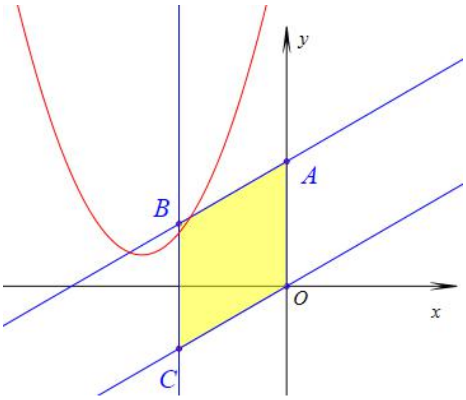


图 6-1-2-5

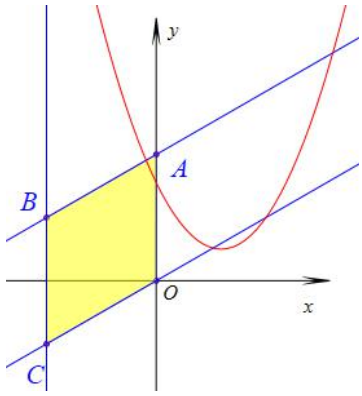


图 6-1-2-6

当$b>0$时，若函数$y=x^2-2bx+b^2+\dfrac{1}{2}$的一部分被菱形所覆盖，如图 6-1-2-6 所示，则点 A 需要在抛物线的上方，即当$x=0$时，$\dfrac{\sqrt{3}}{3}x+2>x^2-2bx+b^2+\dfrac{1}{2}$，解得：

$-\dfrac{\sqrt{6}}{2}<b<\dfrac{\sqrt{6}}{2}$，所以有$0<b<\dfrac{\sqrt{6}}{2}$.

综上所述，当$-\dfrac{\sqrt{2}}{2}-\sqrt{3}<b<\dfrac{\sqrt{6}}{2}$时，在函数$y=x^2-2bx+b^2+\dfrac{1}{2}$的图像上总是存在一部分被菱形 $OABC$ 所覆盖.

（四）简要评注

将抛物线与线段 AB 的交点问题转化为抛物线与点 A、点 B 的关系是解决问题的关键.这只是利用了函数图像与直线交点的基本性质：当函数图像穿过某条线段时，那么这条线段的两个端点必在函数图像的内外两侧.

3．探索与抛物线有交点时直线所满足的条件

例 6-1-3. 已知关于 x 的一元二次方程 $2x^2+4x+k-1=0$ 有实数根，k 为正整数.

（1）求 k 的值；

（2）当此方程有两个非零的整数根时，将关于 x 的二次函数 $y=2x^2+4x+k-1$ 的图像向下平移 8 个单位，求平移后的图像的解析式；

（3）在（2）的条件下，将平移后的二次函数的图像在 x 轴下方的部分沿 x 轴翻折，图像的其余部分保持不变，得到一个新的图像.请你结合这个新的图像回答：当直线 $y=\frac{1}{2}x+b\left(b<k\right)$ 与此图像有两个公共点时，b 的取值范围.

一、求 k 的值

由题意得，$\Delta=16-8（k-1）\geq 0$，所以 $k\leq 3$，因为 k 为正整数，所以 $k=1，2，3$.

二、求平移后的图像的解析式

利用问题（1）得到的 k 值分情况讨论：当 $k=1$ 时，方程 $2x^2+4x+k-1=0$ 有一个根为 0；当 $k=2$ 时，方程 $2x^2+4x+k-1=0$ 无整数根；当 $k=3$ 时，方程 $2x^2+4x+k-1=0$ 有两个非零的整数根.所以 $k=3$.

当 $k=3$ 时，二次函数为 $y=2x^2+4x+2$，把它向下平移 8 个单位得到的图像的解析式为 $y=2x^2+4x-6$.

三、当直线 $y=\frac{1}{2}x+b\left(b<k\right)$ 与此图像有两个公共点时，b 的取值范围

（一）动感体验

打开文件“例 6-1-3.dmr”，如图 6-1-3-1 所示，拖动变量尺可以改变实数 b 的大小从而对直线 $y=\frac{1}{2}x+b$ 进行上下平移，观察和研究直线与沿 x 轴翻折后的 $y=2x^2+4x-6$ 图像交点的个数.

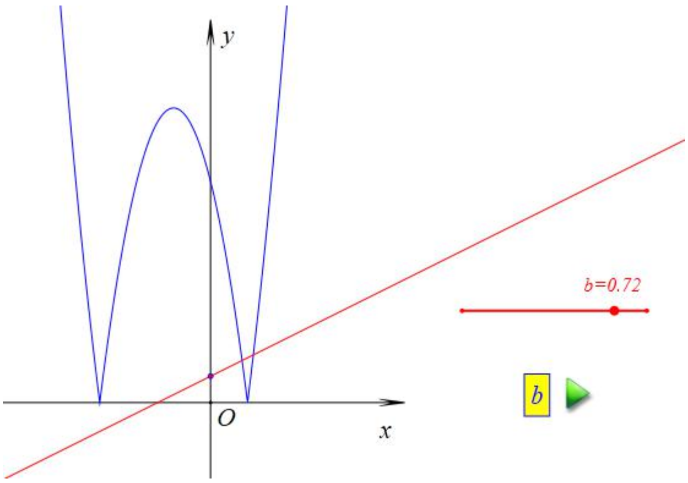


图 6-1-3-1

（二）思路点拨

首先根据 k 的值考虑 b 的取值范围，然后研究当直线与曲线有两个交点时的临界位置.

（三）动态解析

$y=2x^2+4x-6$ 在 x 轴下方的部分沿 x 轴翻折后的图像在 y 轴上的截距为 6，但是由于 $b<k=3$，所以不能考虑直线在抛物线顶点上方时有两个交点的情形，如图 6-1-3-2 所示.

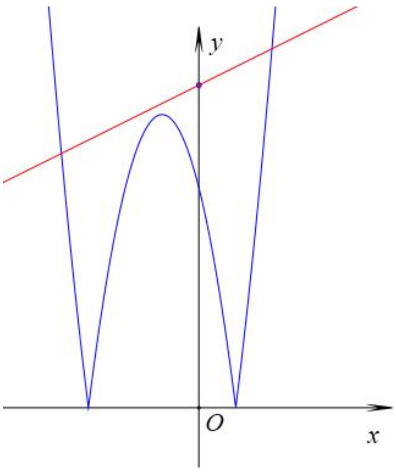


图 6-1-3-2

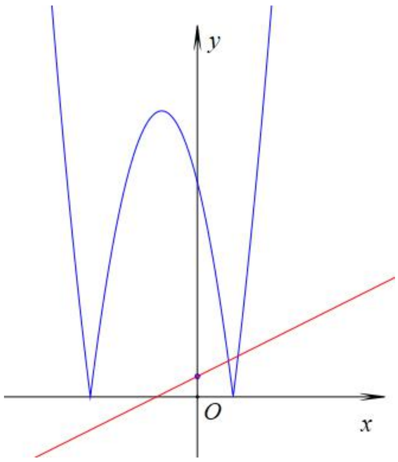


图 6-1-3-3

如图 6-1-3-3，函数 $y=2x^2+4x-6$ 与 x 轴的两个交点为 A（-3，0）、B（1，0），当 $b<3$ 时，若直线与曲线有两个交点，则直线与 x 轴的交点必在点 A 与点 B 之间.将 $x=-3$、$y=0$ 代入 $y=\frac{1}{2}x+b$ 解得：$b=\frac{3}{2}$；将 $x=1$、$y=0$ 代入 $y=\frac{1}{2}x+b$ 解得：$b=-\frac{1}{2}$.

所以，当 $-\frac{1}{2}<b<\frac{3}{2}$ 时，直线 $y=\frac{1}{2}x+b$ $(b<3)$ 与函数图像有两个公共点.

（四）简要评注

本题的解答充分体现了数形结合的思想，利用函数表达式，确定函数图像及翻折后的新图像，分析 b 对 $y=\frac{1}{2}x+b\left(b<k\right)$ 图像的影响，找到直线 $y=\frac{1}{2}x+b\left(b<k\right)$ 与此图像有两个公共点时的两个临界位置，从而确定 b 的取值范围.

4．探索直线与抛物线公共点的坐标关系

例 6-1-4. 已知函数 $y_1=x$，$y_2=x^2+bx+c$，α，β 为方程 $y_1-y_2=0$ 的两个根，点 $M(t,T)$ 在函数 y_2 的图像上.

（1）若 $\alpha=\frac{1}{3}$，$\beta=\frac{1}{2}$，求函数 y_2 的解析式；

（2）在（1）的条件下，若函数 y_1 与 y_2 的图像的两个交点为 A，B，当 $\triangle ABM$ 的面积为 $\frac{1}{12}$ 时，求 t 的值；

（3）若 $0<\alpha<\beta<1$，当 $0<t<1$ 时，试确定 T，α，β 三者之间的大小关系，并说明理由.

一、求函数 y_2 的解析式

由于 $y_1=x$，$y_2=x^2+bx+c$，所以 $y_1-y_2=0$ 可表示为 $x^2+(b-1)x+c=0$.因为 $\alpha=\frac{1}{3}$、$\beta=\frac{1}{2}$，由根与系数的关系知：$b=-(\frac{1}{3}+\frac{1}{2})+1=\frac{1}{6}$、$c=\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{6}$. 所以函数 y_2 的解析式为 $y_2=x^2+\frac{1}{6}x+\frac{1}{6}$.

二、当 $\triangle ABM$ 的面积为 $\frac{1}{12}$ 时求 t 的值

（一）动感体验

打开文件“例 6-1-4.dmr”，如图 6-1-4-1 所示，单击【b】按钮，在弹出的对话框中输入：1/6，同样单击【c】按钮，在弹出的对话框中输入：1/6，单击确定即可得到 $y_2=x^2+\frac{1}{6}x+\frac{1}{6}$。

拖动 t 的变量尺，改变点 M 的横坐标，观察$\triangle ABM$ 的面积的变化规律，研究如何用恰当的方式表示$\triangle ABM$ 的面积，观察可能有几种情况使得$\triangle ABM$ 的面积等于 $\frac{1}{12}$.

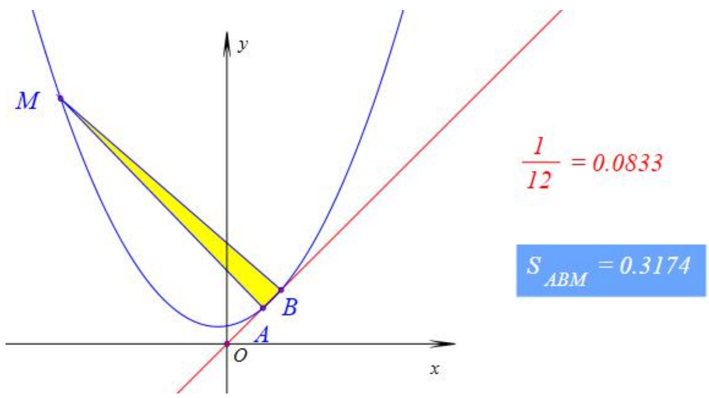


图 6-1-4-1

（二）思路点拨

利用△ABM 的面积和 AB 边的长可求出 AB 边上的高 h.问题的关键是如何表示出△ABM 的高.

（三）动态解析

由问题（1）的结论和 $y_1 = x$ 可求出两个交点的坐标分别为 A（$\frac{1}{3},\frac{1}{3}$），B（$\frac{1}{2},\frac{1}{2}$），所以求出 $AB=\frac{\sqrt{2}}{6}$，根据条件△ABM 的面积为$\frac{1}{12}$得到 AB 边上的高为$\frac{\sqrt{2}}{2}$.

过点 M 作 AB 所在直线 $y=x$ 上的垂足 E，则 ME 是△ABM 的底边 AB 上对应的高，则 $ME=\frac{\sqrt{2}}{2}$.过点 M 作 x 轴的垂线交直线 AB 于点 F，如图 6-1-4-2 所示.在 Rt△EFM 中，因为∠EFM=45°，所以 $MF=\sqrt{2}ME=1$.

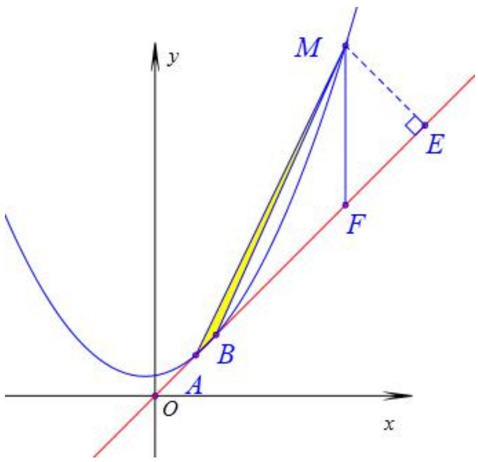


图 6-1-4-2

当将 $x=t$ 代入 $y=x$,得 $y=t$.又因为 $T=t^2+\frac{1}{6}t+\frac{1}{6}$，所以 $MF=|t^2-\frac{5}{6}t+\frac{1}{6}|$.令 $MF=1$，可解得：$t=\frac{5-\sqrt{145}}{12}$ 或 $t=\frac{5+\sqrt{145}}{12}$.

三、确定 T，α，β 三者之间的大小关系

（一）思路点拨

$\alpha=\alpha^2+b\alpha+c$，$\beta=\beta^2+b\beta+c$，$T=t^2+bt+c$，利用作差法比较 T，α，β 三者的大小关系，需根据 t 的取值不同分情况讨论.

（二）动态解析

用作差法比较T，α，β三者的大小.

由于$\alpha=\alpha^2+b\alpha+c$，$\beta=\beta^2+b\beta+c$，$T=t^2+bt+c$，所以

$T-\alpha=(t-\alpha)(t+\alpha+b)$，$T-\beta=(t-\beta)(t+\beta+b)$.

此外，$\alpha-\beta=(\alpha^2+b\alpha+c)-(\beta^2+b\beta+c)$，化简得：$(\alpha-\beta)(\alpha+\beta+b-1)=0$，由条件可知$\alpha-\beta\neq 0$，从而可得$\alpha+\beta+b-1=0$，所以$t+\alpha+b>0$，$t+\beta+b>0$，所以$T$与$\alpha$的大小由$t-\alpha$决定，$T$与$\beta$的大小由$t-\beta$决定.

当$t-\alpha\leq 0$，即$t\leq\alpha$时，即$T\leq\alpha$.因为$0<\alpha<\beta<1$，$0<t<1$，所以当$0<t\leq\alpha$时，$T\leq\alpha<\beta$.

同理可得：当$\alpha<t\leqslant\beta$时，$\alpha<T\leqslant\beta$；当$\beta<t<1$时，$\alpha<\beta<T$.

（三）简要评注

本题主要利用方程与函数的关系.方程$y_1-y_2=0$的两个根即为两个函数$y_1=x$和$y_2=x^2+\frac{1}{6}x+\frac{1}{6}$交点的横坐标，而两个函数图像交点的横坐标与纵坐标相同，所以比较T，α，β三者之间的大小关系，就是比较M点和两个交点的纵坐标的大小关系.

5．探索抛物线和双曲线的单调性

例 6-1-5. 已知直线 l：$y=-x+m$（$m\neq0$）交 x 轴、y 轴于 A、B 两点，点 C、M 分别在线段 OA、AB 上，且 $OC=2CA$，$AM=2MB$，连接 MC，将△ACM 绕点 M 旋转 180°，得到△FEM，则点 E 在 y 轴上，点 F 在直线 l 上;取线段 EO 中点 N,将 ACM 沿 MN 所在直线翻折,得到△PMG，其中 P 与 A 为对称点.记：过点 F 的双曲线为 C_1，过点 M 且以 B 为顶点的抛物线为 C_2，过点 P 且以 M 为顶点的抛物线为 C_3.

（1）如图 6-1-5-1，当 $m=6$ 时，

①直接写出点 M、F 的坐标，②求 C_1、C_2 的函数解析式；

（2）当 m 发生变化时，

①在 C_1 的每一支上，y 随 x 的增大如何变化？请说明理由.②若 C_2、C_3 中的 y 都随着 x 的增大而减小，写出 x 的取值范围.

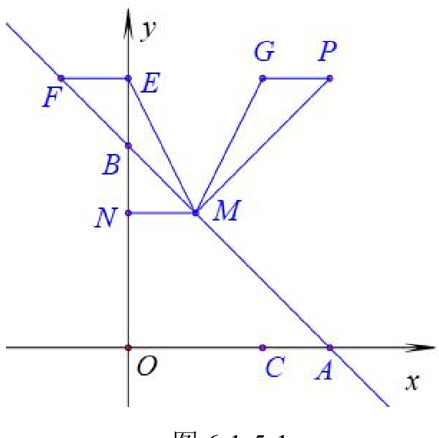


图 6-1-5-1

一、当 m=6 时，求 M、F 的坐标及 C_1、C_2 的解析式

1.用 m 表示出各个点的坐标以及曲线的表达式

由直线的解析式 $y=x+m$ 可得点 A（m，0)、B（0，m）.

因为 $OC=2CA$，所以点 C 的坐标为（$\frac{2}{3}m$，0）;同理可得点 M 的坐标为（$\frac{1}{3}m$，$\frac{2}{3}m$）.

由于点 E 和点 C 关于点 M 对称，可得点 E 的坐标为（0，$\frac{4}{3}m$）；同理可得点 F 的坐标为（$-\frac{1}{3}m$，$\frac{4}{3}m$）.

由于点N是线段OE的中点，所以点N的坐标为（0，$\frac{2}{3}m$）.

由于点P、点G分别于点A、点C关于直线MN对称，所以点P、点G的坐标分别为（m，$\frac{4}{3}m$）、（$\frac{2}{3}m$，$\frac{4}{3}m$）.

因为曲线C_1过点F（$-\frac{1}{3}m$，$\frac{4}{3}m$），所以C_1的解析式为：$y=\dfrac{-\frac{1}{3}m\cdot\frac{4}{3}m}{x}=-\dfrac{4m^2}{9x}$.

因为曲线C_2以点B（0，m）为顶点，所以可设曲线C_2的解析式为：$y=ax^2+m$（$a\neq 0$）；又因为C_2过点M（$\frac{1}{3}m$，$\frac{2}{3}m$），将$x=\frac{1}{3}m$、$y=\frac{2}{3}m$代入可求得：$a=-\frac{3}{m}$，所以曲线C_2的解析式为：$y=-\frac{3}{m}x^2+m$.

因为曲线C_3以点M（$\frac{1}{3}m$，$\frac{2}{3}m$）为顶点，所以可设曲线C_2的解析式为：$y=p(x-\frac{1}{3}m)^2+\frac{2}{3}m$（$p\neq 0$）；又因为$C_3$过点$P$（$m$，$\frac{4}{3}m$），将$x=m$、$y=\frac{4}{3}m$代入可求得：$p=\frac{3}{2m}$，所以曲线$C_3$的解析式为：$y=\frac{3}{2m}(x-\frac{1}{3}m)^2+\frac{2}{3}m$.

2.当$m=6$时，求C_1、C_2的解析式

当$m=6$时，点F的坐标为（-2，8），所以经过点F的双曲线的解析式为$y=-\frac{16}{x}$，如图 6-1-5-2 所示.

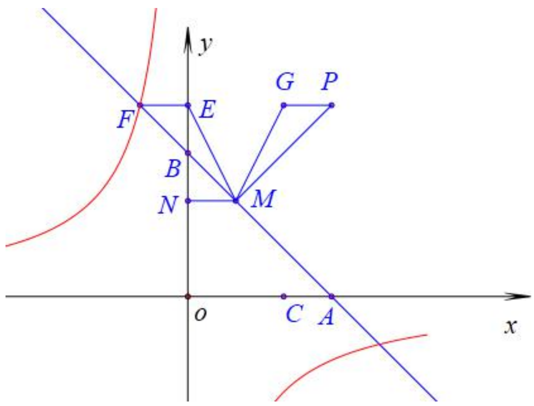


图 6-1-5-2

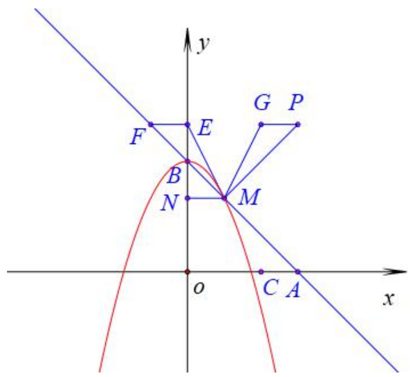


图 6-1-5-3

当$m=6$时，点M的坐标为（2，4），点B的坐标为（0，6）.所以C_2的解析式为：$y=-\frac{1}{2}x^2+6$，如图 6-1-5-3 所示.

二、m变化时，判断C_1每一支上的图像的增减性

（一）动感体验

打开文件“例 6-1-5.dmr”，如图 6-1-5-4 所示，拖动变量尺可以改变 m 的值，观察双曲线随实数的变化而变化的规律.

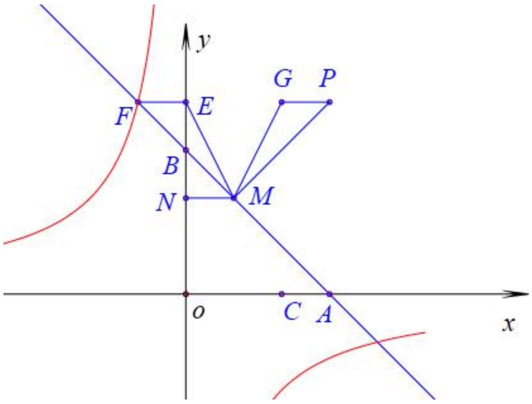


图 6-1-5-4

（二）思路点拨

因为点 F 的坐标为（$-\frac{1}{3}m$，$\frac{4}{3}m$），所以双曲线 C_1 的系数 $k=-\frac{4}{9}m^2<0$，因此双曲线只能出现在第二象限和第四象限.

（三）动态解析

经过点 F（$-\frac{1}{3}m$，$\frac{4}{3}m$）的双曲线 C_1 可表示为 $y=-\frac{4m^2}{9x}$，因为 $k=-\frac{4}{9}m^2<0$，所以双曲线只能出现在第二象限和第四象限，因此在 $x<0$ 范围内和在 $x>0$ 范围内均有：y 随 x 的增大而减小.

三、在 C_2、C_3 中均有 y 随 x 的增大而减小时求 x 的取值范围

（一）动感体验

单击“下一页”按钮，拖动点 B 改变实数 m 的值，研究当 m 变化时，C_2、C_3 的变化规律，如图 6-1-5-5、图 6-1-5-6 所示.

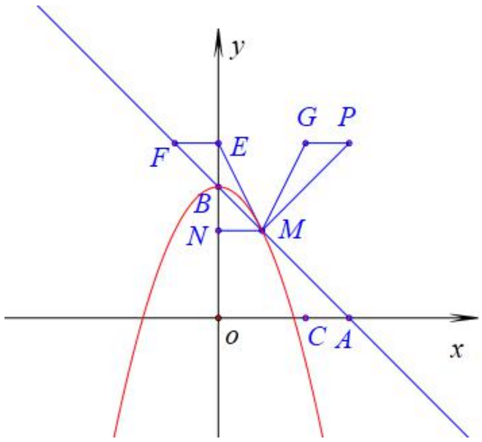


图 6-1-5-5

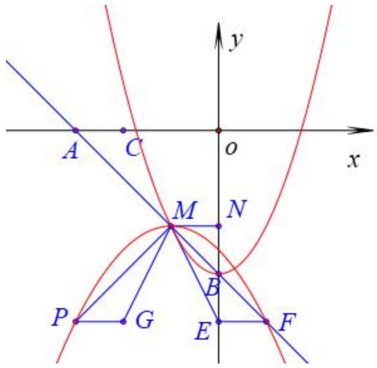


图 6-1-5-6

（二）思路点拨

分 $m>0$ 和 $m<0$ 两种情况讨论抛物线 C_2、C_3 的大致图像.

（三）动态解析

当 $m>0$ 时，如图 6-1-5-5 所示，抛物线 C_2 开口向下，对称轴为 y 轴，所以 y 随着 x 的增大而减小时 x 的取值范围为 $x>0$；而抛物线 C_3 开口向上，对称轴为过点 M（$\frac{m}{3},\frac{2m}{3}$）且与 y 轴平行的直线，所以 y 随着 x 的增大而减小时 x 的取值范围为 $x<\frac{m}{3}$，所以抛物线 C_2、C_3 中的 y 都随着 x 的增大而减小时，x 的取值范围 $0<x<\frac{1}{3}m$.

当 $m<0$ 时，如图 6-1-5-6 所示，抛物线 C_2 开口向上，对称轴为 y 轴，所以 y 随着 x 的增大而减小时 x 的取值范围为 $x<0$；而抛物线 C_3 开口向下，对称轴为过点 M（$\frac{m}{3},\frac{2m}{3}$），且与 y 轴平行的直线，所以 y 随着 x 的增大而减小时，x 的取值范围为 $x>\frac{m}{3}$，所以抛物线 C_2、C_3 中的 y 都随着 x 的增大而减小时，x 的取值范围 $\frac{1}{3}m<x<0$.

（四）简要评注

本题中理清点 A、B、F、M、P 的坐标之间的数量关系，用含有 m 的式子表示点 A、B、F、M、P 的坐标是解题的基础，而这些关系又建立在图形的对称性上.讨论函数的增减性时，根据 m 的正负性分情况讨论，而画出准确的示意图是解题的关键.

6．抛物线与线段存在公共点的问题

例 6-1-6. 如图 6-1-6-1，已知：直角梯形 $OABC$ 的四个顶点是 $O(0,0)$，$A(\frac{3}{2},1)$， $B(s,t)$，$C(\frac{7}{2},0)$，抛物线 $y=x^2+mx-m$ 的顶点 P 是直角梯形 $OABC$ 内部或边上的一个动点，m 为常数.

(1)求 s 与 t 的值，并在直角坐标系中画出直角梯形 $OABC$；

(2)当抛物线 $y=x^2+mx-m$ 与直角梯形 $OABC$ 的边 AB 相交时，求 m 的取值范围.

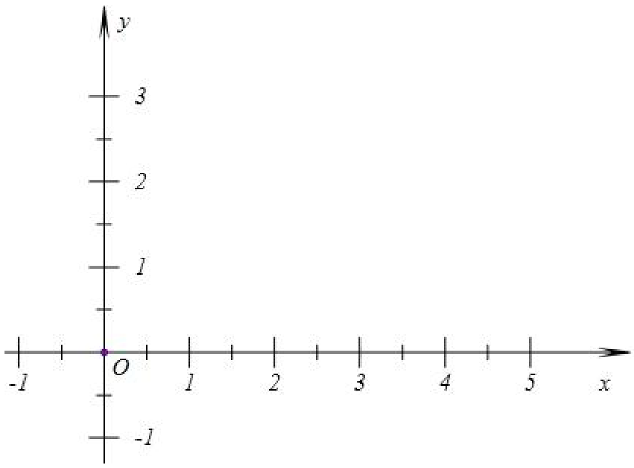


图 6-1-6-1

一、求 s 与 t 的值

在坐标系中标出 O，A，C 三点，连接 OA，OC.因为$\angle AOC\neq 90°$， 所以$\angle ABC=90°$，故 $BC\perp OC$， $BC\perp AB$，所以 B（$\frac{7}{2}$，1）. 即 $s=\frac{7}{2}$，t=1.直角梯形如图 6-1-6-2 所示.

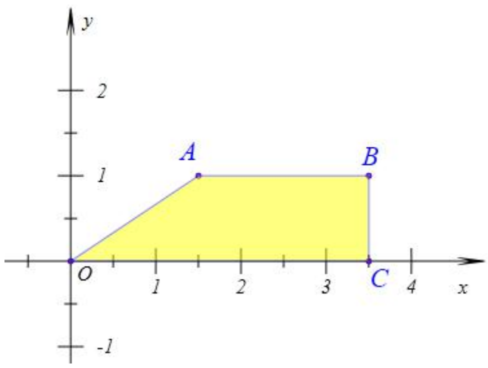


图 6-1-6-2

二、求 m 的取值范围

（一）动感体验

打开文件“例 6-1-6.dmr”，如图 6-1-6-3 所示，拖动变量尺可以改变 m 的值，观察点 P 的运动规律，研究当抛物线与线段 AB 有交点时，点 P 应满足的条件.

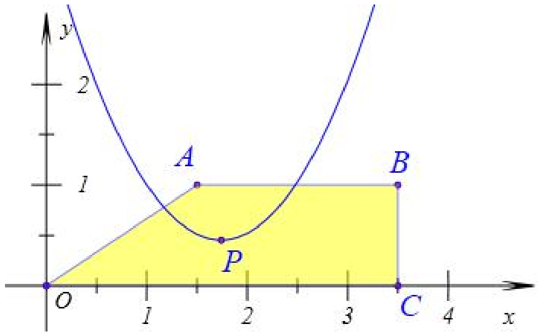


图 6-1-6-3

（二）思路点拨

因为抛物线 $y=x^2+mx-m$ 的顶点 P（$-\frac{m}{2},-\frac{m^2+4m}{4}$）在直角梯形 $OABC$ 内部或边上，因此需要首先研究 m 的取值范围.

另外，若抛物线 $y=x^2+mx-m$ 与直角梯形 $OABC$ 的边 AB 相交，则交点的横坐标需满足：不小于 $\frac{3}{2}$ 且不大于 $\frac{7}{2}$.

（三）动态解析

1）因为抛物线 $y=x^2+mx-m$ 的顶点 P 是直角梯形 $OABC$ 内部或边上的一个动点，抛物线 $y=x^2+mx-m$ 的顶点 P（$-\frac{m}{2},-\frac{m^2+4m}{4}$）的坐标满足

$-\frac{m^2+4m}{4}=-(-\frac{m}{2})^2+2(-\frac{m}{2})$，即满足方程：$y=-x^2+2x$，如图 6-1-6-4 所示，其中点 P'、P'' 为抛物线与直角梯形 $OABC$ 边界的两个交点.直线 OA 的解析式为：$y=\frac{2}{3}x$，

因此由 $\begin{cases} y=-x^2+2x \\ y=\frac{2}{3}x \end{cases}$ 可解得点 P'（$\frac{4}{3}$，$\frac{8}{9}$）；令 $y=0$，即 $-x^2+2x=0$，可解得点 P''（2，0）.

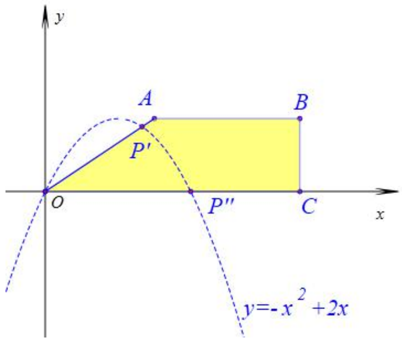


图 6-1-6-4

所以，若抛物线 $y=x^2+mx-m$ 的顶点 P（$-\frac{m}{2},-\frac{m^2+4m}{4}$）在梯形的内部或边界上，需满足 $\frac{4}{3}\le-\frac{m}{2}\le 2$，解得：$-4\le m\le-\frac{8}{3}$.

2）令 $y=1$ 得：$x^2+mx-m=1$，解得：$x=1$（不在线段 AB 上，舍去）或 $x=-(m+1)$，若抛物线 $y=x^2+mx-m$ 与直角梯形 $OABC$ 的边 AB 相交，如图 6-1-6-5 所示，则需满足：$\frac{3}{2}\le-(m+1)\le\frac{7}{2}$，解得：$-\frac{9}{2}\le m\le-\frac{5}{2}$.

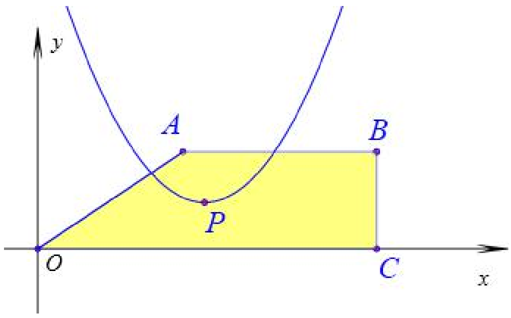


图 6-1-6-5

综合（1）（2）可得满足条件的 m 的取值范围为 $-4\le m\le-\frac{8}{3}$.

（四）简要评注

通过抛物线顶点的坐标求出抛物线的顶点所能经过的路径，即曲线，从而准确、快捷地得到参数 m 的“第一个”限制范围，然后通过抛物线与线段 AB 的交点问题得到参数 m 的“第二个”限制范围.理解题设条件的过程，就是限制参数范围的过程，就是解不等式（组）的过程.

巩固练习（一）

练习 6-1-1：已知关于 x 的方程 $3tx^2+(3-7t)x+4=0$ 的两个实数根分别为α、β.

（1）若α=$\frac{1}{2}$，试求实数 t 和β的值；

（2）若α，β满足 $0<\alpha<1<\beta<2$，求实数 t 的取值范围.

练习 6-1-2：已知关于 x 的方程 $x^2-2mx-3m^2+8m-4=0$

（1）求证：当 $m>2$ 时，方程有两个实数根

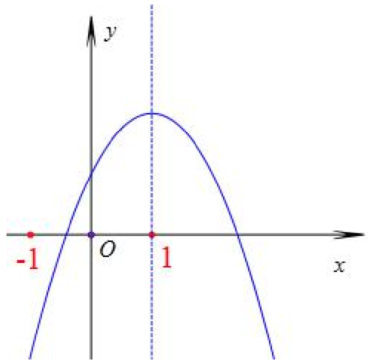
（2）若方程的两个实数根一个大于 5，一个小于 2，求 m 的取值范围.

练习 6-1-3：已知二次函数 $y=ax^2+bx+c(a\neq 0)$ 的图像如下图所示，有下列 5 个结论：

① $abc>0$；② $b<a+c$；③ $4a+2b+c>0$；④ $2c<3b$；⑤ $a+b>m(am+b)$，（$m\neq 1$ 的实数）

其中正确的结论有（　　）

A. 2 个　　*B*. 3 个　　*C*. 4 个　　*D*. 5 个



练习6-1-4：已知关于x的一元二次方程 $x^2+bx+c=x$ 有两个实数根 x',x''，且满足 $x'>0$，$x''-x'>1$.

（1）试证明 $c>0$；

（2）证明 $b^2>2(b+2c)$；

（3）对于二次函数 $y=x^2+bx+c$，若自变量取值为 x_0，其对应的函数值为 y_0，则

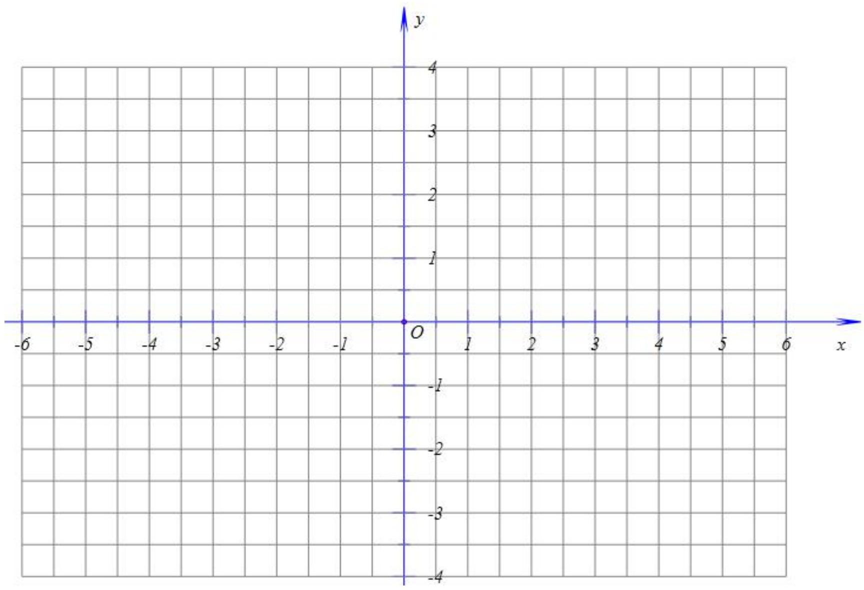
当$0 < x_0 < x'$时，试比较y_0与x'的大小.

练习 6-1-5：如下图，已知二次函数$y_1 = ax^2 + bx + c(a \neq 0)$的图像经过三点（1，0），（-3，0），（0，$-\frac{3}{2}$）.

（1）求二次函数的解析式，并在给定的直角坐标系中作出这个函数的图像；

（2）若反比例函数$y_2 = \frac{2}{x}(x > 0)$图像与二次函数$y_1 = ax^2 + bx + c(a \neq 0)$的图像在第一象限内交于点 A（x_0，y_0）， x_0落在两个相邻的正整数之间.请你观察图像，写出这两个相邻的正整数；

（3）若反比例函数$y_2 = \frac{k}{x}(k > 0, x > 0)$的图像与二次函数$y_1 = ax^2 + bx + c(a \neq 0)$的图像在第一象限内的交点为 A，点 A 的横坐标为x_0满足 2＜x_0＜3，试求实数 k 的取值范围.



本节小结

本节所研究的问题主要是参数对函数图像性质的影响：参数对函数顶点位置的影响、参数对函数单调性的影响、参数对函数与直线交点的影响，参数对函数最值的影响，等等.

解决这类问题需要对函数的基本性质,以及函数与方程不等式之间的关系具有清晰的认识和深刻的理解，因此，这些知识是利用数形结合思想解决问题的关键.

第二节 函数图像信息

1．通过图像信息推导运动过程

例 6-2-1. 如图 6-2-1-1，梯形 $ABCD$ 中，$\angle C=90°$.动点 E、F 同时从点 B 出发，点 E 沿折线 BA-AD-DC 运动到点 C 时停止运动，点 F 沿 BC 运动到点 C 时停止运动，它们运动时的速度都是 1 米/秒.设 E、F 出发 t 秒时，$\triangle EBF$ 的面积为 y 平方米.已知 y 与 t 的函数图像如图 6-2-1-2 所示，其中曲线 OM 为抛物线的一部分，MMN、NP 为线段.请根据图中的信息，解答下列问题：

（1）梯形上底边的长 AD=________米，梯形 $ABCD$ 的面积__________平方米；

（2）当点 E 在 BA、DC 上运动时，分别求出 y 与 t 的函数关系式（注明自变量的取值范围）；

（3）当 t 为何值时，$\triangle EBF$ 与梯形 $ABCD$ 的面积之比为 1：2.

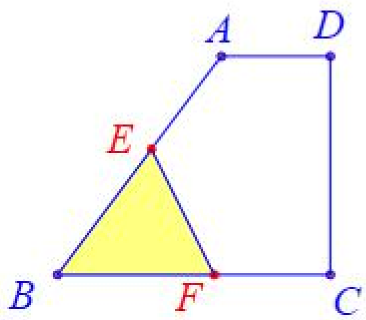


图 6-2-1-1

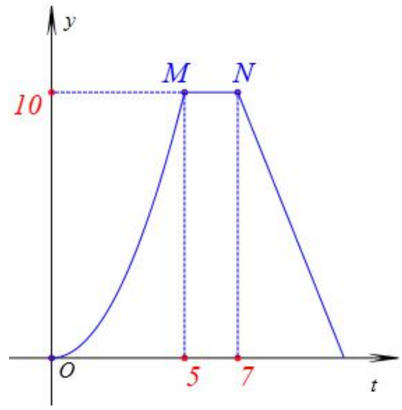


图 6-2-1-2

一、求上底边 AD 的长和梯形 $ABCD$ 的面积

（一）动感体验

打开文件“例 6-2-1.dmr”，单击“动画 1”按钮可以让点 E、点 F 同时在各自的路径上运动，同时得到$\triangle EBF$ 的面积测量值以及动态生成 y 关于 x 的函数图像，如图 6-2-1-3 所示.

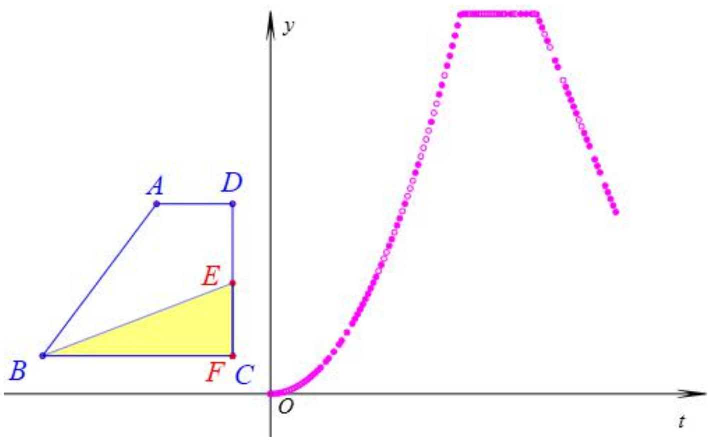


图 6-2-1-3

（二）动态解析

因为$\triangle EBF$的面积与BE的长和点F到BE的距离直接相关，通过图 6-2-1-2 中的线段MN可知：在第 5 秒点E运动到A的位置，同时点F运动到点C的位置，如图 6-2-1-4、图 6-2-1-5 所示，因此$AB=BC=5$.

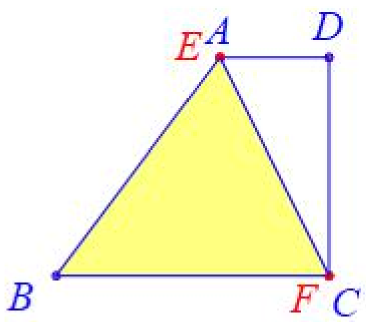


图 6-2-1-4

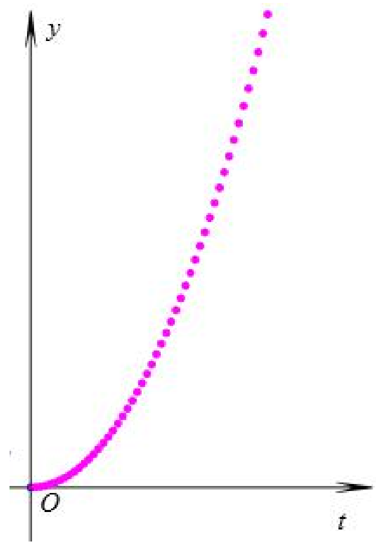


图 6-2-1-5

又因为这时$\triangle EBF$的面积$S_{\triangle EBF}=\dfrac{1}{2}BC\cdot DC=10$，可求得：$DC=4$.

由MN的长度为 2，可知$AD=2$，因此$S_{梯形ABCD}=\dfrac{1}{2}(AD+BC)\cdot DC=14$.

二、求 y 关于 t 的函数关系式

1）当点E在线段BA上时，$BE=t$.过点E作$EG\perp BC$于点G，过点A作$AH\perp BC$于点H，如图 6-2-1-6 所示，则有$AH=DC=4$.因为$EG//AH$，所以有$\dfrac{BE}{EG}=\dfrac{BA}{AH}$，可求得：$EG=\dfrac{4}{5}t$.所以$S_{\triangle EBF}=\dfrac{1}{2}BF\cdot EG=\dfrac{2}{5}t^2$，其中$0\le t\le 5$.

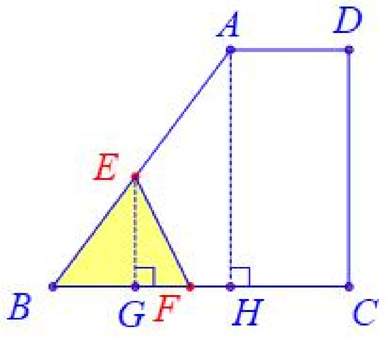


图 6-2-1-6

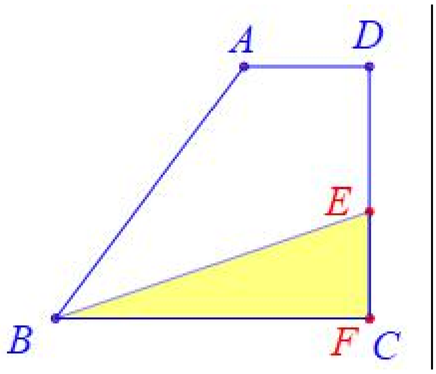


图 6-2-1-7

2）当点 E 在线段 DC 上时，如图 6-2-1-7 所示，这时点 F 与点 C 重合，BF=BC=5，$EF \perp BF$，则 EF 为底边 BF 对应的高，而 $DE = t-(BA+AD) = t-7$，所以 $S_{\triangle EBF} = \frac{1}{2}BF \cdot EF = \frac{5}{2}(11-t)$，其中 $7 \le t \le 11$.

三、当△EBF 与梯形 $ABCD$ 的面积之比为 1：2 时，求 t 的值

由（1）知梯形的面积为 14，它的二分之一为 7.

1.当点 E 在线段 BA 上时，由 $\frac{2}{5}t^2 = 7$ 求得：$t = \frac{\sqrt{70}}{2}$，在 $0 \le t \le 5$ 范围内，满足题意

2.当点 E 在线段 DC 上时，由 $\frac{5}{2}(11-t) = 7$ 求得：$t = \frac{41}{5}$，在 $7 \le t \le 11$ 范围内，满足题意

综上所述，当△EBF 与梯形 $ABCD$ 的面积之比为 1：2 时，$t = \frac{\sqrt{70}}{2}$ 或 $t = \frac{41}{5}$.

简要评注

根据图 6-2-1-1 所示梯形的大致性质，读懂图 6-2-1-5 所示的函数图像是顺利解决问题的关键.其中点 M、点 N 及其坐标又是图 6-2-1-2 所示图像的关键信息.读懂图像所蕴含的信息就能了解动点的运动路径，这与一般情况下需要由动点的运动路径绘制函数图像的过程是逆向的，需要对动点的运动性质具有更加清楚的认识，也需要对函数图像有更加深刻的理解.

2．通过图像信息解决实际运动问题

例 6-2-2. 一列快车从甲地驶往乙地，一列慢车从乙地驶往甲地，两车同时出发，设慢车行驶的时间为 $x(\mathrm{h})$，两车之间的距离为 $y(\mathrm{km})$，图中的折线表示 y 与 x 之间的函数关系．根据图像 6-2-2-1 进行以下探究：

信息读取

（1）甲、乙两地之间的距离为_________km；

（2）请解释图中点 B 的实际意义；

图像理解

（3）求慢车和快车的速度；

（4）求线段 BC 所表示的 y 与 x 之间的函数关系式，并写出自变量 x 的取值范围；

问题解决

（5）若第二列快车也从甲地出发驶往乙地，速度与第一列快车相同．在第一列快车与慢车相遇 30 分钟后，第二列快车与慢车相遇．求第二列快车比第一列快车晚出发多少小时？

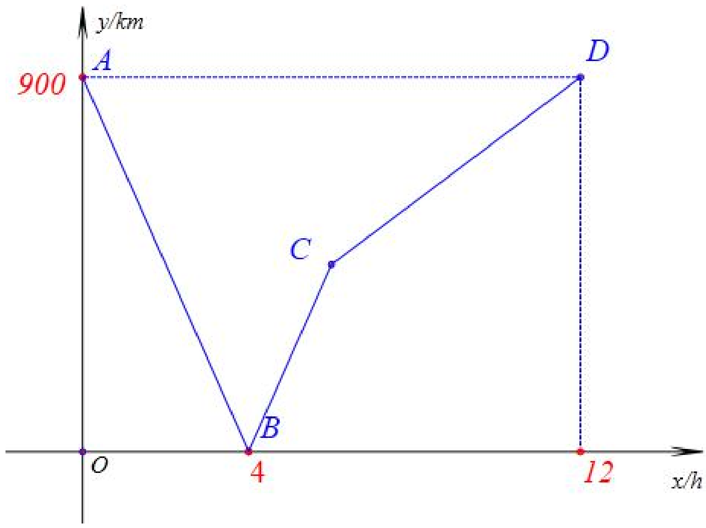


图 6-2-2-1

一、解释图示中的信息

（一）动感体验

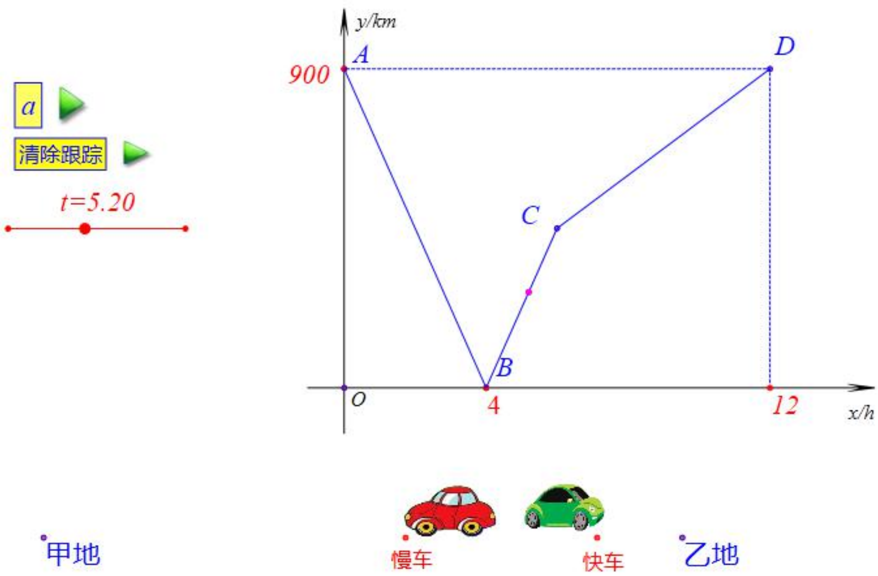


图 6-2-2-2

打开文件“例 6-2-2.dmr”，如图 6-2-2-2 所示，单击“行驶”按钮，观看两车的行使过程，同时观察 y 关于 x 的函数图像的形成过程.

（二）思路点拨

1．图像中 AB 表示两车从开始行驶到第一次相遇的过程；BC 表示相遇后两车继续行驶直至快车达到乙地的过程；CD 表示快车在乙地停止而慢车继续行驶直至到达甲地的过程.

2．对于问题(3)点 D 的坐标表示的实际意义为慢车从乙地到甲地用时 12h，共走 900km，利用点 D 求出慢车速度，利用 AB 表示的意义求出快车的速度.

3．对于问题（4）求出快车从甲地到乙地的时间及到达乙地后与慢车相距的距离得到点 C 的坐标.

（三）动态解析

点 A 表示甲、乙两地相距 900km.点 B 表示快车和慢车首次相遇的时间为 4h.

设快车的速度为 a、慢车的速度为 b，由于两车分别从甲、乙两地出发后首次相遇的时间为 4h，因此有 4（$a+b$）=900（km），而慢车从乙地到甲地共用的时间为 12h，所以有 12b=900km，解得：b=75km/h、a=150km/h.

AB 段表示两车分别从甲、乙两地出发直至在中途第一次相遇的过程，第一次相遇时快车行驶了 4×150=600km、慢车行驶了 4×75=300km.

而 BC 段表示从第一次相遇后继续沿着各自的方向前进，直至快车到达乙地，快车所行驶的路程为 300km，因此这段时间为：300÷150=2（h），而慢车行驶的距离为 75×2=150（km）.

因此点 C 的坐标为（6，450），所以线段 BC 的解析式为：$y=\dfrac{450}{2}(x-4)=225x-900$，其中自变量 x 的取值范围为：$4\le x\le 6$.

CD 段表示快车在乙地停止的过程中，慢车继续向甲地行驶，直至到达甲地，在这个过程中行驶了 900-（300+150）=450km，所用时间为 $\dfrac{450}{75}=6\,h$.

二、求第二列快车比第一列快车晚出的时间

若第一列快车与慢车相遇 30 分钟后第二列快车与慢车相遇，那么这时慢车从乙地出发所行驶的路程为（4+0.5）×75=337.5（km），则第二列快车从甲地到与慢车相遇时行驶的时间为：（900-337.5）÷150=3.75（h）.

当第二列快车与慢车相遇时，第一列快车与慢车行驶的时间相同，均为：4.5h，因此第二列快车比第一列快车晚出发的时间为：4.5-3.75=0.75（h），即 45min.

简要评注

本题利用函数图像反映了两车的行驶过程，所以读懂图像是正确解决问题的关键.在读图的过程中，理解关键点所代表的实际意义，每段线段代表的不同情况，可将问题转化为行程问题求解.

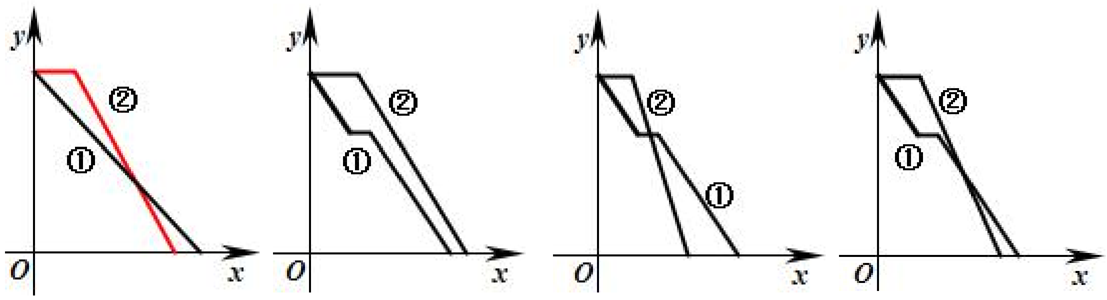
3．通过实际问题判断合理的图像信息

例 6-2-3. 刚回营地的两个抢险分队又接到救灾命令：一分队立即出发往 30 千米的 A 镇；二分队因疲劳可在营地休息 a（$0\le a\le 3$）小时再往 A 镇参加救灾.一分队出发后得知，唯一通往 A 镇的道路在离营地 10 千米处发生塌方，塌方地形复杂，必须由一分队用 1 小时打通道路，已知一分队的行进速度为 5 千米/时，二分队的行进速度为（$4+a$）千米/时.

（1）若二分队在营地不休息，问二分队几小时能赶到 A 镇？

（2）若二分队和一分队同时赶到 A 镇，二分队应在营地休息几小时？

（3）在 6-2-10 所示的图像中，①②分别描述一分队和二分队离 A 镇的距离 y(千米)和时间 x(小时)的函数关系，请写出你认为所有可能合理的代号，并说明它们的实际意义.



甲　　乙　　丙　　丁

图 6-2-3-1

一、求二分队不休息时赶到 A 镇需要的时间

（一）动感体验

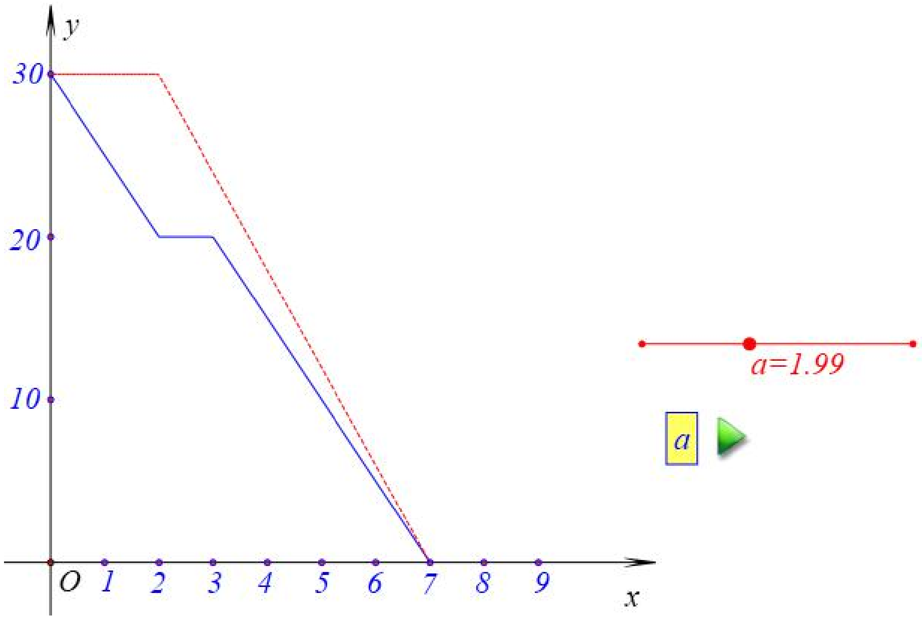


图 6-2-3-2

打开文件“例 6-2-3.dmr”，如图 6-2-11 所示，实线表示一分队距离 A 镇的距离 y 与时间 x 的函数关系，虚线表示二分队距离 A 镇的距离 y 与时间 x 的函数关系.拖动变量尺，可以改变实数 a 的值，即二分队在营地休息的时间，观察研究 a 对二分队距离 A 镇的距离 y 与时间 x 的函数图像的影响变化规律.

（二）思路点拨

若二分队在营地不休息，那么 $a=0$，二分队的速度为 4 千米/时.主要是求出二分队需要在塌方处停留的时间，然后即可求出二分队赶到 A 镇的时间.

（三）动态解析

一分队到达塌方处行走的距离为 10 千米，所用的时间为 10÷5=2 小时，然后用 1 小时时间打通通道，然后继续向 A 镇出发.

若二分队在营地不休息，那么二分队到达塌方处的时间为 10÷4=2.5 小时，然后用（2+1）-2.5=0.5 小时时间等待一分队将通道打通，然后从塌方处到达 A 镇的时间为：20÷4=5 小时.

所以二分队从营地到 A 镇所用的时间为：2.5+0.5+5=8 小时，如图 6-2-3-3 所示.

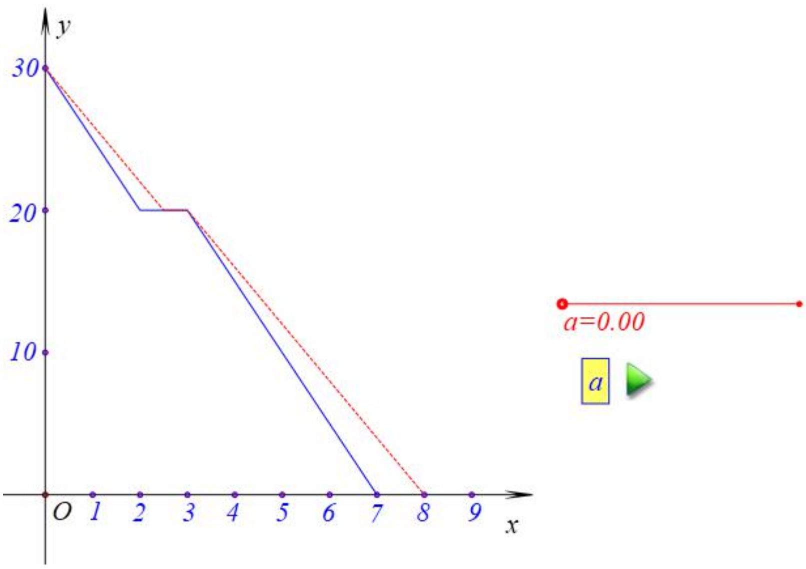


图 6-2-3-3

二、若一分队、二分队同时赶到 A 镇时，求二分队在营地休息的时间

（一）动感体验

一分队从营地到达塌方处所用的时间为：10÷5=2 小时，然后用 1 小时打通通道，然后从塌方处到达 A 镇所用的时间为：20÷5=4 小时，所以一分队从营地到达 A 镇所用的时间共为：2+1+4=7 小时.

拖动变量尺，如图 6-2-3-4 所示，使得二分队从营地出发到 A 镇所用的时间为 7 小时，那么二分队应该休息的时间对二分队的行程如何影响？

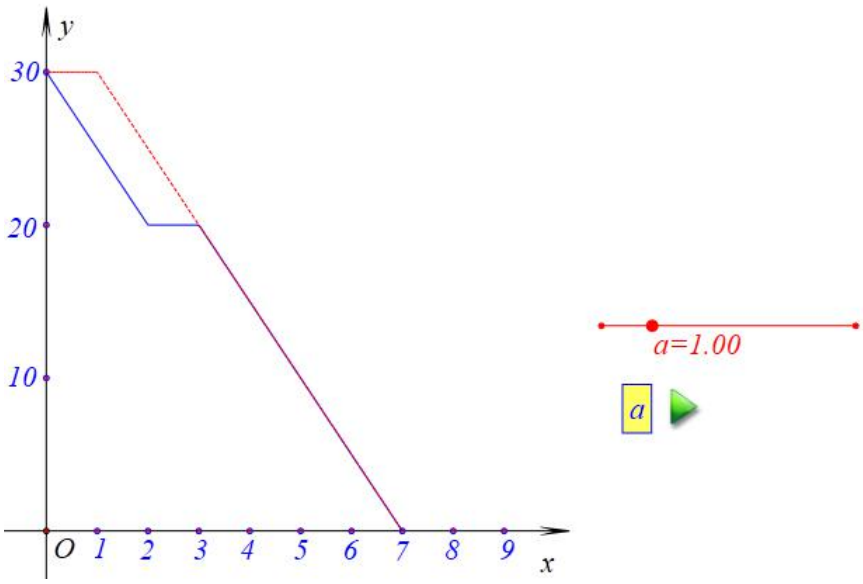


图 6-2-3-4

（二）思路点拨

按照二分队在塌方处停留和不停留两种情况讨论问题.

（三）动态解析

1. **若二分队在塌方处停留** b **小时，则二分队与一分队同时从塌方处出发并且同时达到** A **镇，这段距离为 20 千米，用时 4 小时，所以二分队与一分队的速度相同均为：5 千米/小时**

又因为二分队的速度满足条件（$4+a$）=5，因此 a=1 小时.又因为一分队从营地到塌方处再加上打通通道的时间为 3 小时，因此 b 满足：$a+10\div5+b=3$，所以 b=0.也就是说，二分队实际上在塌方处没有休息.

因此，若一分队、二分队同时赶到 A 镇时，二分队在营地休息的时间为 1 小时.

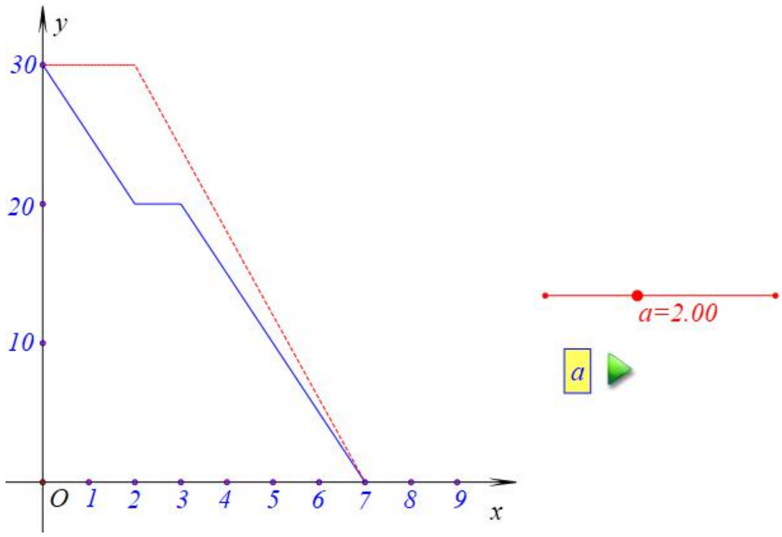


图 6-2-3-5

2. **若二分队在塌方处没有休息，则二分队从营地直接赶往** A **镇，那么** a **满足条件：**$a+30\div(4+a)=7$**，解得：**a=1**，或** a=2**，均满足要求** $0\le a\le3$

因此若一分队、二分队同时赶到 A 镇时，二分队在营地休息的时间为 1 小时或 2 小时.

综上所述，若一分队、二分队同时赶到 A 镇时，二分队在营地休息的时间为 1 小时（如图 6-2-13 所示）或 2 小时（如图 6-2-3-5 所示）.

（1） 判断符合条件的图像

（一）动感体验

请你变量尺改变实数 a 的值，研究哪种情况可能成立，哪种情况不可能成立？

（二）动态解析

1. **因为一分队要在塌方处停留 1 个小时，所以图甲首先是不符合题意**

2. **在二分队到达塌方处时，若一分队还没打通通道，则二分队需要停止前进，等待打通通道后与一分队一起继续前进.因此图丙不符合题意**

3. 由问题（2）知，若二分队在营地休息 1 小时或 2 小时，那么二分队将与一分队同时到达 A 镇

所以当二分队休息时间超过 2 小时，那么二分队到达 A 镇的时间为 $a+\frac{30}{a+4}$.由 $a+\frac{30}{a+4}-7=\frac{(a-1)(a-2)}{a+4}>0$.因此当二分队休息时间超过 2 小时，二分队到达 A 镇的时间 $a+\frac{30}{a+4}>7$，所以图乙符合题意，而图丁不符合题意.

综上所示，只有图乙符合题意.

（三）简要评注

此题讨论的关键在于二分队在塌方处是否有停留，如果停留，则在后 20 千米和一分队同时出发同时到达；若不停留，则直接从营地赶往 A 镇，可用 a 表示其走完全程的速度和时间.这样思考可将此题复杂的行程问题简单化，更容易理解并解决问题.

4．通过图像信息了解实际问题的意义

例 6-2-4. 已知某种水果的批发单价与批发量的函数关系如图 6-2-4-1 所示.

（1）请说明图 6-2-4-1 中①、②两段函数图像的实际意义.

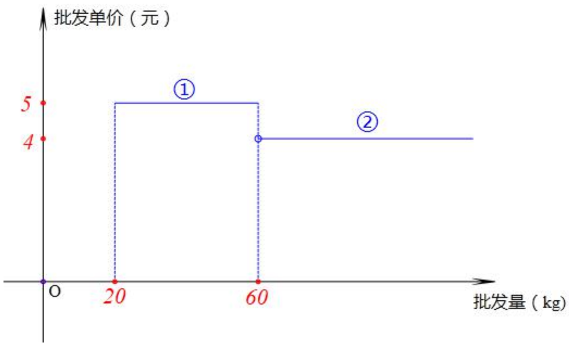


图 6-2-4-1

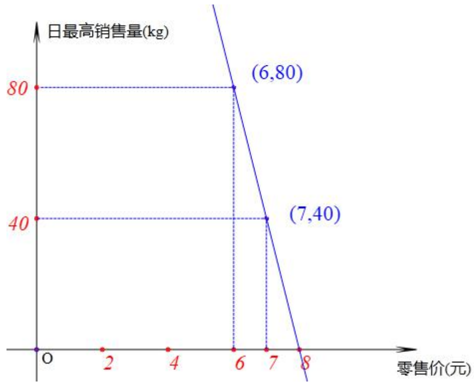


图 6-2-4-2

（2）写出批发该种水果的资金金额 w（元）与批发量 m（kg）之间的函数关系式；在下图 6-2-4-3 的坐标系中画出该函数图像；指出金额在什么范围内，以同样的资金可以批发到较多数量的该种水果.

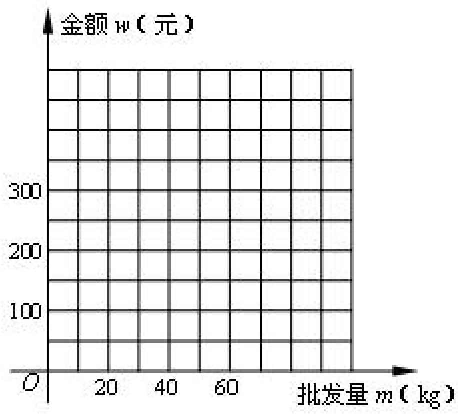


图 6-2-4-3

（3）经调查，某经销商销售该种水果的日最高销量与零售价之间的函数关系如图 6-2-4-2 所示，该经销商拟每日售出 60kg 以上该种水果，且当日零售价不变，请你帮助该经销商设计进货和销售的方案，使得当日获得的利润最大.

一、图 6-2-15 中①、②两段函数图像的实际意义

图 6-2-15①表示批发量在 20kg 与 60kg 之间时，批发价格为 5 元/kg；

图 6-2-15②表示批发量大于 60kg 时，批发价格为 4 元/kg.

二、求 W 与 x 的函数关系式及最值问题

（一）动感体验

打开文件“例 6-2-4.dmr”，如图 6-2-4-4 所示.实线为资金金额 w（元）与批发量 m（kg）之间的函数图像.拖动点 w，观察当资金为 w 时能够批发到的水果数量为多少.

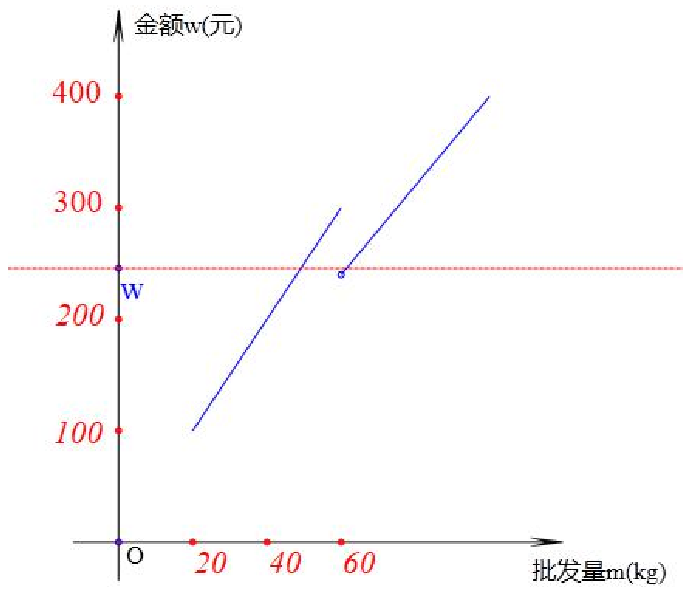


图 6-2-4-4

（二）思路点拨

水平直线与函数图像的交点的横坐标就是能够批发到的水果的数量.

（三）动态解析

w 与 m 的函数关系式是 $w=\begin{cases}5m，m\text{不小于}20\text{且不大于}60\\4m，m\text{大于}60\end{cases}$.

观察金额 w（元）与批发量 m（kg）之间的函数图像，如图 6-2-18 所示，发现资金金额满足 240＜w≤300 时，一个 w 值对应两个不同 m 值，说明以同样的资金可以批发到两种不同数量的该种水果，所以以同样的资金可以批发到较多数量的该种水果时，w 的取值范围为 240＜w≤300.

三、设计利润最大时的方案

（一）动感体验

略.

（二）思路点拨

利用问题（2）中日销售利润与日零售价之间的函数关系式求解.

（三）动态解析

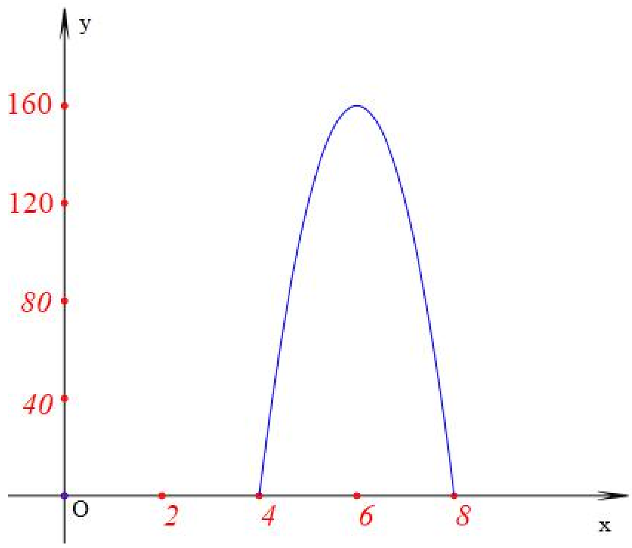


图 6-2-4-5

由图 6-2-4-2 可发现当零售价 x 与售货量的函数关系是 $m=40(8-x)$，其中销售利润=销售量×（每斤售价－每斤进价），所以销售利润 y 与零售价 x 的函数关系为 $y=40(8-x)(x-4)=-40(x-6)^2+160$，如图 6-2-4-5 所示.

由进货量 $m>60$，可求得 x 的取值范围为 $x<6.5$.因此当 $x=6$ 时，$y_{最大值}=160$，此时 $m=80$.所以经销商应批发 80kg 该种水果，日零售价定为 6 元/kg，当日可获得最大利润 160 元.

（四）简要评注

本题通过图像弄清批发量与批发价、零售价与日最高销售量之间的关系，利用销售利润=销售量×（单件售价－单件进价）得到销售利润 y 与零售价 x 的函数关系，通过函数的最值的讨论得到最大利润方案.

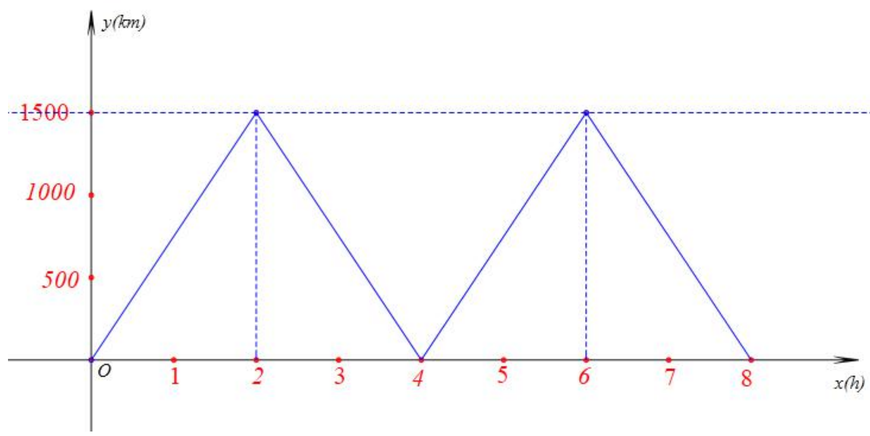
巩固练习（二）

练习 6-2-1：某公交公司的公共汽车和出租车每天从乌鲁木齐市出发往返于乌鲁木齐市和石河子市两地，出租车比公共汽车多往返一趟，如下图表示出租车距乌鲁木齐市的路程y（单位：千米）与所用时间x（单位：小时）的函数图像．已知公共汽车比出租车晚 1 小时出发，到达石河子市后休息 2 小时，然后按原路原速返回，结果比出租车最后一次返回乌鲁木齐早 1 小时．

（1）请在图中画出公共汽车距乌鲁木齐市的路程y（千米）与所用时间x（小时）的函数图像．

（2）求两车在途中相遇的次数（直接写出答案）

（3）求两车最后一次相遇时，距乌鲁木齐市的路程．

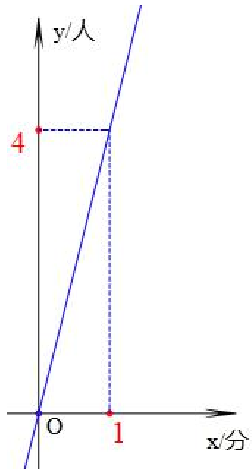


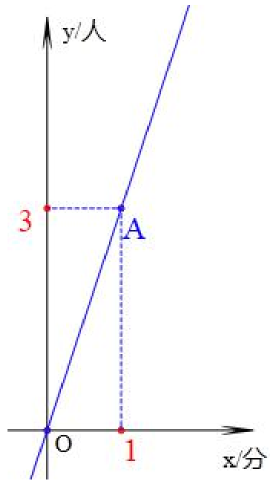
练习 6-2-2：某车站客流量大，旅客往往需长时间排队等候购票．经调查统计发现，每天开始售票时，约有 300 名旅客排队等候购票，同时有新的旅客不断进入售票厅排队等候购票，新增购票人数y（人）与售票时间x（分）的函数关系如下图（左）所示；每个售票窗口人数y（人）与售票时间x（分）的函数关系如下图（中）所示．某天售票厅排队等候购票的人数y（人）与售票时间x（分）的函数关系如下图（右）所示，已知售票的前a分钟开放了两个售票窗口．

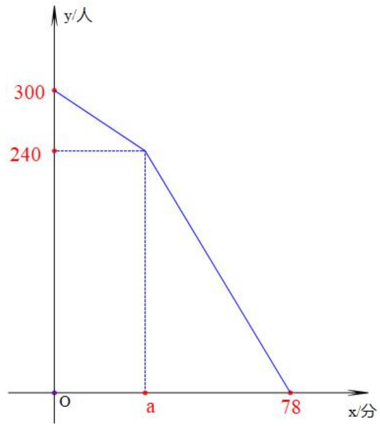
（1）求a的值；

（2）求售票到第 60 分钟时，售票厅排队等候购票的旅客人数；

（3）该车站在学习实践科学发展观的活动中，本着“以人为本，方便旅客”的宗旨，决定增设售票窗口．若要在开始售票后半小时内让所有排队购票的旅客都能购到票，以便后来到站的旅客能随到随购，请你帮助计算，至少需同时开放几个售票窗口？





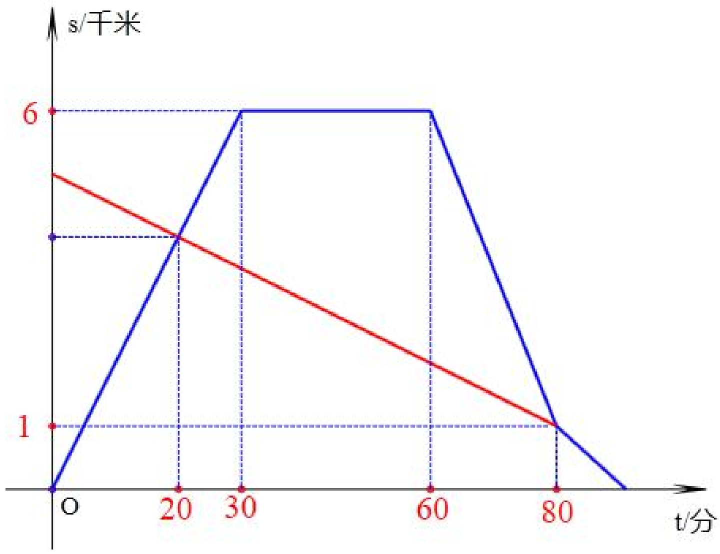


练习 6-2-3：如下图，邮递员小王从县城出发，骑自行车到 A 村投递，途中遇到县城中学的学生李明从 A 村步行返校．小王在 A 村完成投递工作后，返回县城途中又遇到李明，便用自行车载上李明，一起到达县城，结果小王比预计时间晚到 1 分钟．二人与县城间的距离 s (千米)和小王从县城出发后所用的时间 t (分)之间的函数关系如图，假设二人之间交流的时间忽略不计，求：

（1）小王和李明第一次相遇时，距县城多少千米？请直接写出答案．

（2）小王从县城出发到返回县城所用的时间．

（3）李明从 A 村到县城共用多长时间？



练习 6-2-4：由于国家重点扶持节能环保产业，某种节能产品的销售市场逐渐回暖．某经销商销售这种产品，年初与生产厂家签订了一份进货合同，约定一年内进价为 0.1 万元 /

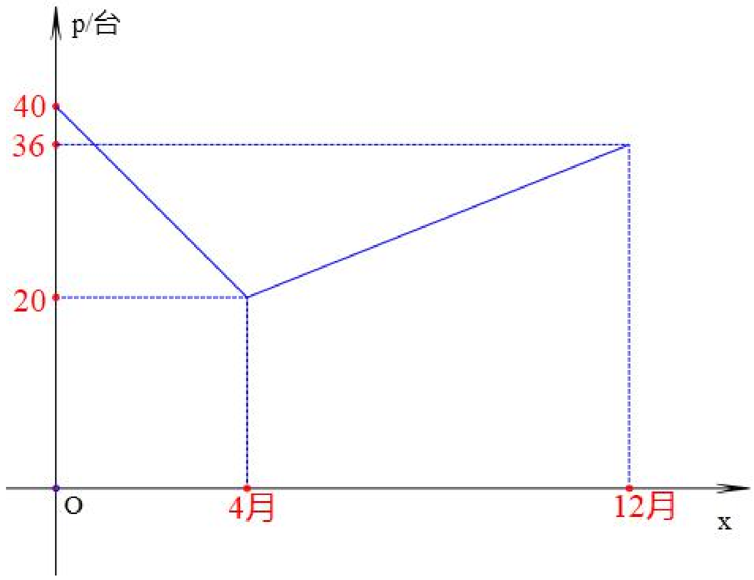
台，并预付了 5 万元押金.他计划一年内要达到一定的销售量，且完成此销售量所用的进货总金额加上押金控制在不低于 34 万元，但不高于 40 万元．若一年内该产品的售价 y（万元／台）与月次 x（$1\le x\le 12$ 且为整数）满足关系是式：$y=\begin{cases}-0.05x+0.25 & (1\le x<4)\\ 0.1 & (4\le x\le 6)\\ 0.015x+0.01 & (6<x\le 12)\end{cases}$，一年后发现实际每月的销售量 p（台）与月次 x 之间存在如下图所示的变化趋势.

（1）直接写出实际每月的销售量 p（台）与月次 x 之间的函数关系式；

（2）求前三个月中每月的实际销售利润 w（万元）与月次 x 之间的函数关系式；

（3）试判断全年哪一个月的的售价最高，并指出最高售价；

（4）请通过计算说明他这一年是否完成了年初计划的销售量.



本节小结

本节涉及与函数图像的信息有关的问题，题目中将已知信息用图像的形式给出，它要求学生从已知图像中获取数据，然后解决实际的问题.应用数学知识解决实际问题的过程，就是一个数学建模的过程，即从实际问题中获取必要的信息→分析处理有关信息→建立数学模型→解决数学问题→解答实际问题.解答函数图像问题的关键是通过图像获取正确的信息，如正确理解关键点的实际意义、分段函数图像的实际意义等.