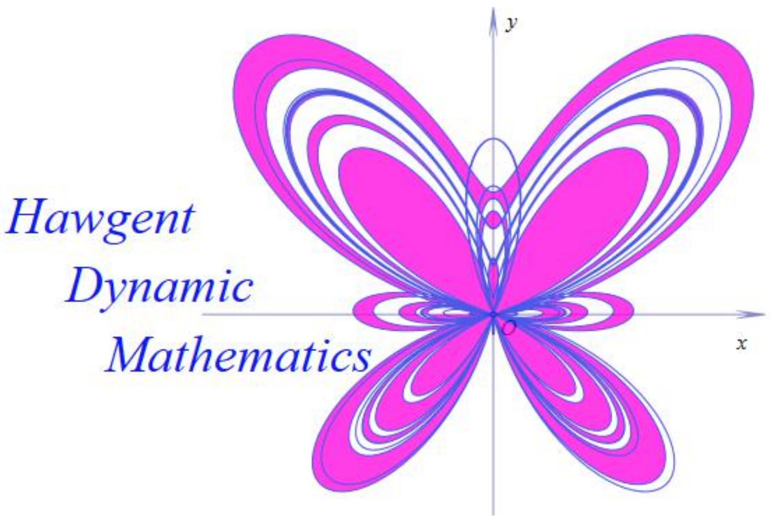
Since 1990’s

Hawgent 皓骏动态数学课程系列

动态解析
初中数学综合问题
（上册）

深入学科，彻底突破数学教学和数学学习中的重点难点问题
开展数学实验、数学教学、数学学习和数学研究的必备工具



皓骏（广州）数学技术中心

Hawgent Technology Centre in Mathematics

内容介绍

在学习数学过程中，有许多问题在查看了详细的解答或听到了老师的讲解之后，很多学生仍然不得其解，即使他们在下一次遇到同一个问题也未必能够给出正确或完整的解答.

这是因为，在学习过程中，数学更加需要理解.

本课程收集并整理了一些综合性很高的数学问题，它们让老师感到难教，让学生感到难学。就是说，对于这类问题许多数学老师都反应他们在花费了很大力气、很多时间的讲解之后，很多学生仍然是似懂非懂.

同样是学习，但方法有优劣之分，效率有高低之分.把看似复杂、抽象的问题变得更容易一些，抓住数学的本质使学生多一些理性思考而少一些机械记忆，让学生感悟到自然朴实的数学思想方法从而能够举一反三，这是我们追求的理念.

Hawgent 皓骏团队利用动态数学技术将这类问题呈现在学生面前，为他们提供了一个动手、观察、探索、猜想和验证的机会与平台，帮助他们利用变化的图形和数据发现问题内在的关系，并逐渐形成真正属于他们自己的解决问题的思路，这是我们追求的目标.

如果这种方式能够得到大家的认同，对我们是一种鼓励，并将激发我们更加努力工作的热情，同时希望有更多志同道合者加入我们的队伍，将这项工作持续下去，越做越好.当然也欢迎各种不同的声音，甚至是批评的意见，从而帮助我们得到提高和成长.

欢迎联系：11033149@qq.com

目　　录

第一章 动点与存在性问题

在图形运动过程中，研究满足某些条件的对象是否存在的问题，统称为存在性问题.例如，是否存在等腰三角形、直角三角形、平行四边形、矩形等常见的多边形，或者是否存在与某个已知的图形具有相似或全等关系的图形.

等腰三角形、直角三角形、平行四边形、矩形等都是我们非常熟悉的几何图形，相似或全等也是我们非常熟悉的几何关系.但是在运动变化的过程中判断一个图形是否为某个图形或者是否有某种性质时，就需要对这些几何图形和几何关系具有更加深刻的认识与理解.因此，简单的图形由静止的状态进入运动的环境，也可能变得非常复杂.

但是只要紧紧抓住几何图形或几何关系的本质，总是可以“以不变应万变”的方式处理这些问题.例如，只要有两条边相等的三角形就是等腰三角形，因此只要有两条边相等的条件成立，则就存在一个对应的等腰三角形.但是在三角形中，只要任何两条边相等，这个三角形都是等腰三角形.因此，需要做到不遗漏任何等腰三角形存在的情况.

某个或某几个对象在运动，判断是否存在一个时刻或者一个条件，使得某些条件成立或者说某些对象存在.

本章以若干典型的存在性问题为例，通过动态解析，帮助学生认识这类问题的本质并掌握解决这类问题的基本思路和方法.

第一节 等腰三角形

1．一个点在直线上运动

例 1-1-1．点 A 是抛物线. $y=-x^2+2x$ 的顶点，在抛物线的对称轴上是否存在点 P，使得△OPG 是等腰三角形？若不存在，请说明理由；若存在，直接答出所有满足条件的点的坐标（不要求写出求解过程）.

【动感体验】

打开文件“例 1-1-1.dmr”，如图 1-1-1-1 所示，点 P 是抛物线 $y=-x^2+2x$ 的对称轴 $x=1$ 上的一点.

通过拖动变量尺可以改变 t 的值或通过按钮设置它的值，从而改变点 P 的位置，△OAP 的形状就会发生改变，请你观察是否存在△OAP 为等腰三角形的情况，或者存在几种情况使得三角形 OAP 为等腰三角形.

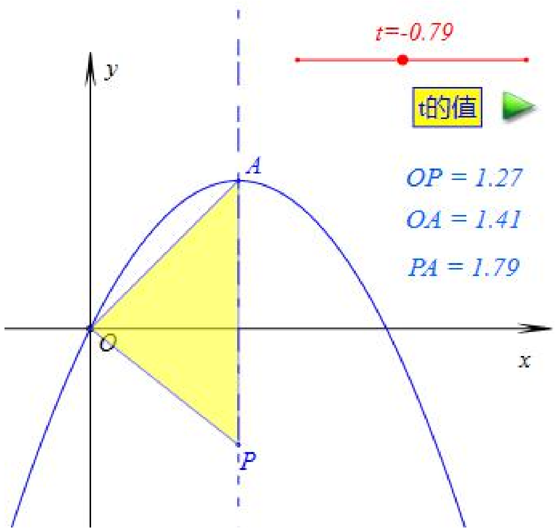


图 1-1-1-1

【思路点拨】

当 $OP=PA$ 或 $OP=OA$ 或 $PA=OA$ 时，△OAP 均为等腰三角形.因此需要根据这三种条件考虑点 P 应满足的位置.

【动态解析】

（1）首先考虑以 OA 为底边的等腰三角形，这就要求 $OP=GP$

那么点 P 应该在线段 OG 的垂直平分线上，如图 1-1-1-2 所示.根据点 $O(0，0)$和点 $A(1，$

1)的坐标容易知道点 P 的坐标为 $(1,0)$.

单击【t 的值】按钮，在弹出的对话框中输入：0，单击确定即可得到 t=0 时的状态。

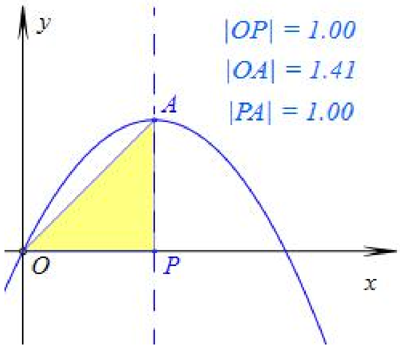


图 1-1-1-2

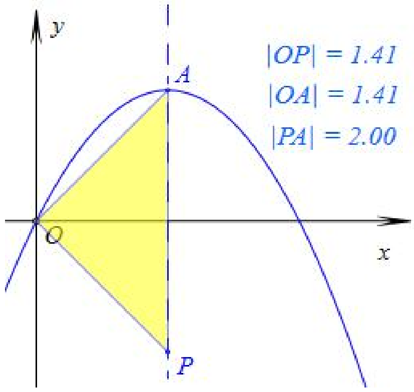


图 1-1-1-3

（2）其次考虑以 *AP* 为底边的等腰三角形，这就要求 *OP*=*OA*

那么点 P 应该在以点 O 为圆心、半径为 OA 的圆上，如图 1-1-1-5 所示.因为直线 AP 与 x 轴垂直，所以这时点 P 与点 A 关于 x 轴的对称，因此点 P 的坐标是（1，-1）.

单击【t 的值】按钮，在弹出的对话框中输入：-1，单击确定即可得到 t=-1 时的状态。

（3）最后考虑以 *OP* 为底边的等腰三角形，这就要求 *AP*=*OA*

那么点 P 应该在以点 A 为圆心、半径为 OA 的圆上，如图 1-1-1-4、图 1-1-1-5 所示.因为 $OG=\sqrt{2}$，所以对应点 P 的坐标分别是（1，$1-\sqrt{2}$）和（1，$1+\sqrt{2}$）.

单击【t 的值】按钮，在弹出的对话框中输入：1-2^(1/2)，单击确定即可得到 $t=1-\sqrt{2}$ 时的状态；类似地可以得到 $t=1+\sqrt{2}$ 时的状态。

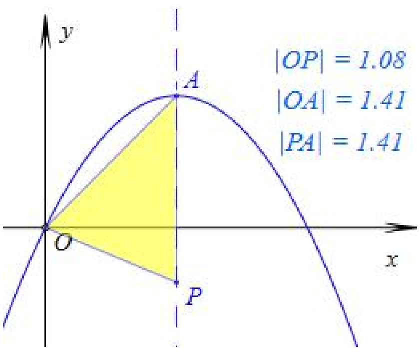


图 1-1-1-4

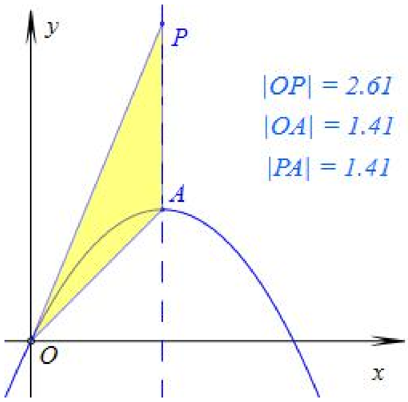


图 1-1-1-5

所以满足条件的点 P 的坐标为：$(1,0)$、$(1,-1)$、$(1,1-\sqrt{2})$和$(1,1+\sqrt{2})$.

【简要评注】

这是直线上的一动点产生的等腰三角形存在性问题，由于点 O 和点 A 为两定点，所以 OA 为等腰三角形的定边，在讨论点 P 的位置时，可根据 OA 为等腰三角形的腰或底的不同分情况讨论：

考虑以 OA 为底的等腰三角形时，点 P 为 OA 的中垂线与抛物线对称轴的交点；

考虑以 OA 为腰，且 $\angle A$ 为顶角时，点 P 为以点 A 为圆心，以 OA 长为半径的圆与对称轴的交点；

考虑以 OA 为腰，且 $\angle O$ 为顶角时，点 P 为以点 O 为圆心，以 OA 长为半径的圆与对称轴的交点.

对于由一个动点产生的等腰三角形存在性问题，通常我们根据腰和底的不同分情况讨论，在确定这一动点的大致位置时，可结合上述方法画出三种情况的草图，再结合草图进一步分析讨论.

在解决这类问题时，需要特别注意的是不要遗漏任何一种情况.

将两条边相等，迅速转化我们更加熟悉的几何关系，是解决这类问题的关键.

【拓展延伸】

在问题（3）中，如果将条件“在抛物线的对称轴上是否存在点 P”改变为“在抛物线上是否存在点 P”，那么会有怎样的结论？

2．速度不同的两个点

例 1-1-2．如图 1-1-8，在平面直角坐标系 xOy 中，A（18，0）、B（0，-10）、C（8，-10）．现有两动点 P、Q 分别从 O、C 两点同时出发，点 P 以每秒 4 个单位的速度沿 OA 向终点 A 移动，点 Q 以每秒 1 个单位的速度沿 CB 向点 B 移动，点 P 停止运动时，点 Q 也同时停止运动.线段 OC，PQ 相交于点 D，过点 D 作 $DE/\!/OA$，交 CA 于点 E，射线 QE 交 x 轴于点 F. 设动点 P、Q 移动的时间为 t (s)，当 t 为何值时，$\triangle PQF$ 为等腰三角形?请写出解答过程.

【动感体验】

打开文件"例 1-1-2.dmr"，如图所示，通过变量尺可以改变 t 的值或者通过按钮设置它的值，观察是否存在$\triangle PQF$ 为等腰三角形的情况.

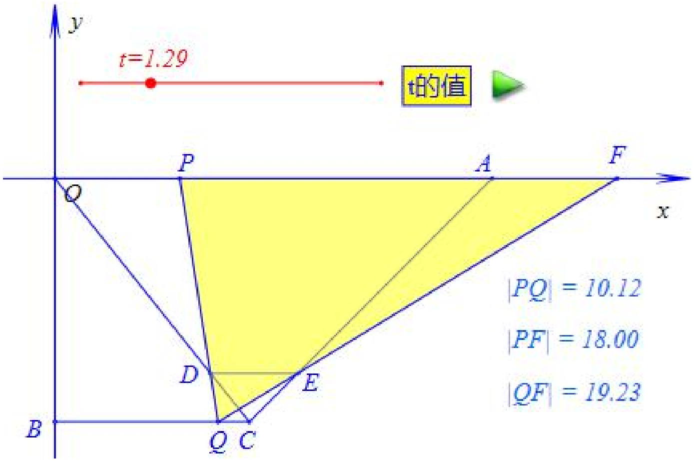


图 1-1-2-1

【思路点拨】

显然,要分 $PF=PQ, PF=QF, PQ=QF$ 三种情况进行讨论.但问题的关键是如何将这三种条件转化为我们所熟悉的数学关系，而且所转化而成的数学关系越简单越好.

当点 P 、Q 运动的过程中，$\triangle PQF$ 的所有顶点都在运动.因此，如果仍然利用例 1 中判定三角形为等腰三角形的方法，问题会在这里会变得非常复杂.

而点 P, Q, F 的坐标都可以用 t 表示，因此我们可以利用两点间的距离公式，然后通过代数式之间运算，判断等腰三角形成立的条件..

【动态解析】

因为 $PF=PA+AF$，$PA=18-4t$.所以，只需要求出利用 t 表示的关于 AF 长度的表达式即

可.

因为 $BC//OA$，所以$\triangle AEF \backsim \triangle CEQ$，则：$\dfrac{AF}{CQ}=\dfrac{AE}{EC}$.

因为 $DE//OA$，所以$\triangle CAO \backsim \triangle CDE$，则：$\dfrac{AE}{EC}=\dfrac{OD}{DC}$.

因为 $BC//OA$，所以$\triangle OPD \backsim \triangle CQD$，则：$\dfrac{OD}{DC}=\dfrac{OP}{CQ}$.

所以，$\dfrac{AF}{CQ}=\dfrac{OP}{CQ}$，即：$AF=OP$. 所以 $PF=PA+OP=OA=18$.

点 P 的坐标为 $(4t,0)$、点 Q 的坐标为 $(8-t,-10)$，因此点 F 的坐标为 $(18+4t,0)$.

因为：

$PF^2=324$；

$PQ^2=(4t-8+t)^2+(-10)^2=(5t-8)^2+100$；

$QF^2=(8-t-18-4t)^2+(-10)^2=(5t+10)^2+100$.

当 $PF=PQ$，即 $324=(5t-8)^2+100$ 时，解得：$t=\dfrac{8-4\sqrt{14}}{5}$（小于 0，舍去）或 $t=\dfrac{8+4\sqrt{14}}{5}$（约等于 4.593，大于 $\dfrac{9}{2}$，因此舍去）.

单击【t 的值】按钮，在弹出的对话框中输入：(8-4*14^(1/2))/5，单击确定，即可得到 $t=\dfrac{8-4\sqrt{14}}{5}$ 时的情形，如图 1-1-2-2 所示；类似地可以得到 $t=\dfrac{8+4\sqrt{14}}{5}$ 的情形，如图 1-1-2-3 所示.

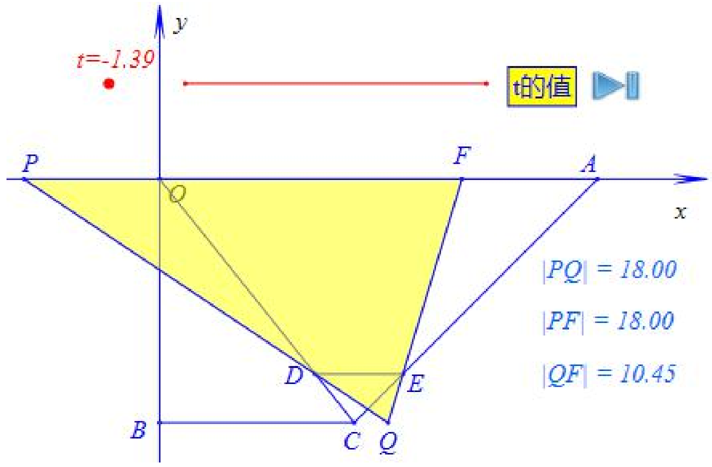


图 1-1-2-2

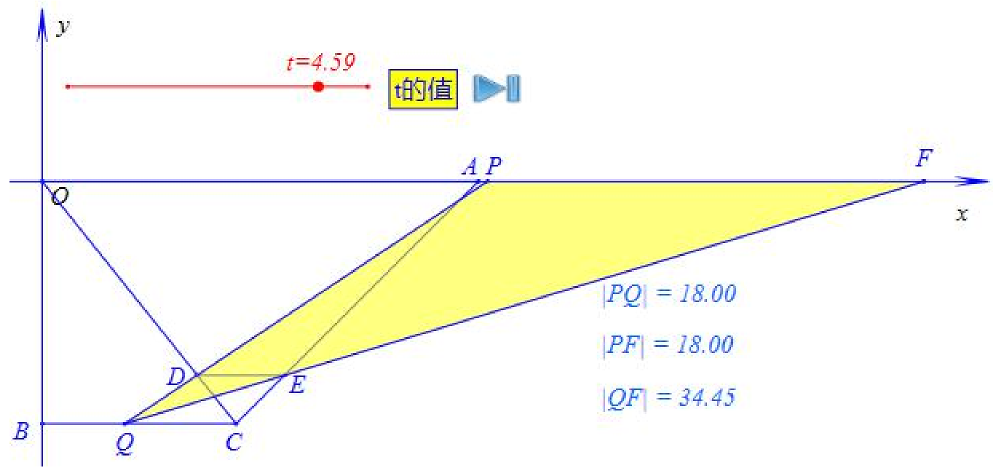


图 1-1-2-3

当 $PF=QF$，即 $324=(5t+10)^2+100$ 时，解得：$t=\dfrac{-10-4\sqrt{14}}{5}$（小于 0，舍去）或 $t=\dfrac{-10+4\sqrt{14}}{5}$.通过按钮【t 的值】输入对应的值，即可得到对应的情形，分别如图 1-1-2-4、1-1-2-5 所示.

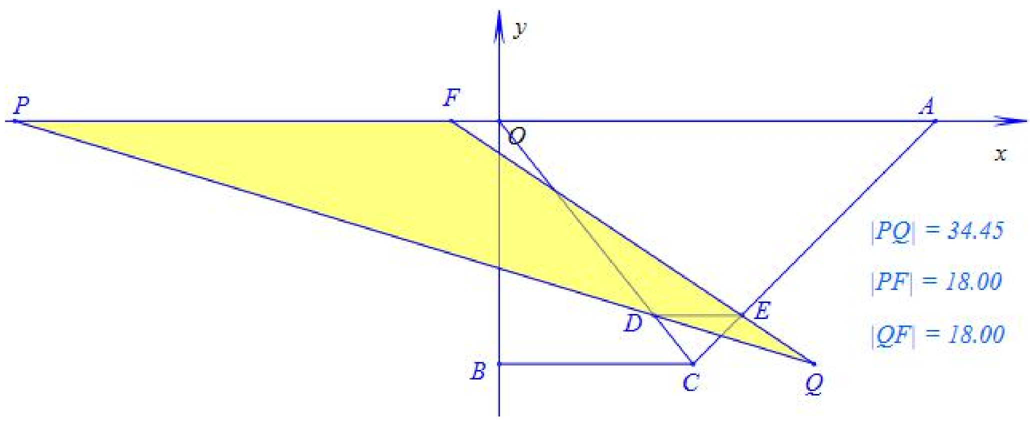


图 1-1-2-4

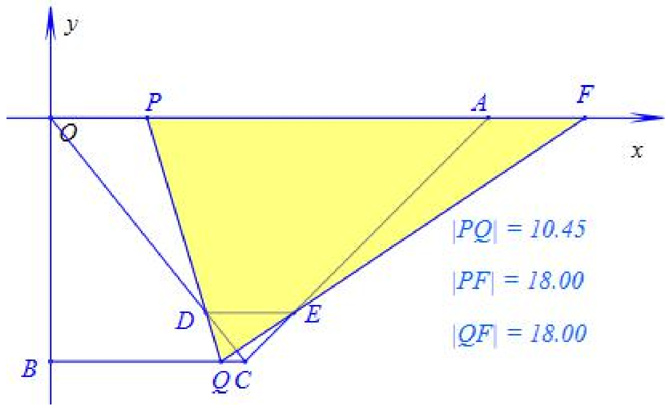


图 1-1-2-5

当 $PQ = QF$，即 $(5t-8)^2+100=(5t+10)^2+100$ 时，解得：$t=-\dfrac{1}{5}$（小于 0，舍去）. 通过按钮【t 的值】输入对应的值，即可得到对应的情形，如图 1-1-2-6 所示.

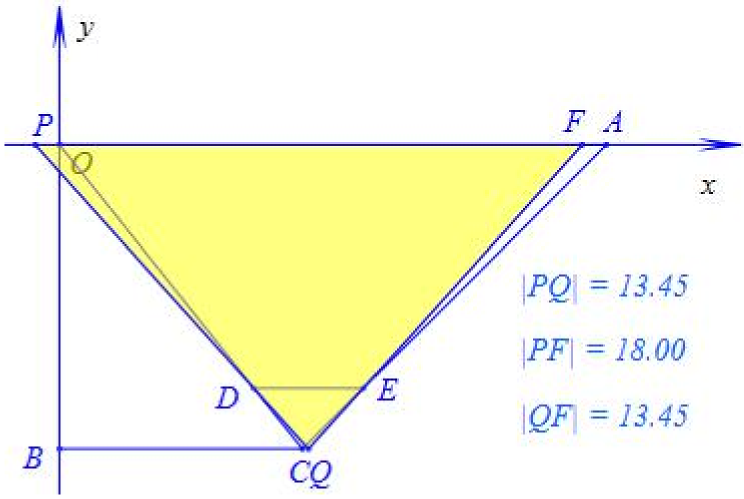


图 1-1-2-6

综上所述，当 $t=\dfrac{-10+4\sqrt{14}}{5}$ 时，$\triangle PQF$ 为等腰三角形.

【简要评注】

一个形状变化的三角形来说，理论上来讲，该三角形为等腰三角形的情形可能为六种. 但是，在实际问题中，尤其是涉及到时间问题时，需要判断得到的结论是否满足实际情况.

3．一个动点而产生的三个动点

例 1-1-3. 在等腰梯形 $ABCD$ 中，$AD // BC$，E 是 AB 的中点，过点 E 作 $EF // BC$ 交 CD 于点 F．$AB = 4$，$BC = 6$，$\angle B = 60°$．点 P 为线段 EF 上的一个动点，过 P 作 $PM \perp EF$ 交 BC 于点 M，过 M 作 $MN // AB$ 交折线 ADC 于点 N，连结 PN，设 $EP = x$．是否存在点 P，使 $\triangle PMN$ 为等腰三角形？若存在，请求出所有满足要求的 x 的值；若不存在，请说明理由.

【动感体验】

打开文件“例 1-1-3.drm”，通过变量尺改变字母 x 的值或通过按钮设置它的值，可以改变点 P 的位置，通过$\triangle PMN$ 三条边的测量值，观察是否可能为等腰三角形.

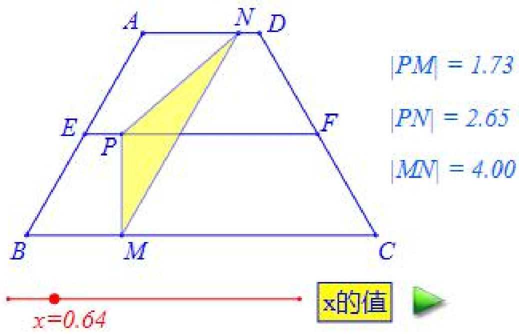


图 1-1-3-1

【思路点拨】

因为边 PM 的长度是固定的，所以可以先考虑以 PM 为底边的等腰三角形，然后再考虑 $PM = PN$ 和 $PM = MN$ 的情况.

当点 P 在线段 EF 上运动时，$\triangle PMN$ 的三个顶点的位置都在改变，因此之前判断等腰三角形的方法在这里不太适用.同时，由于难以找到简便的方法，用 EP 的长度 x 表示线段 PN 的长度.

因此我们需要“另辟蹊径”来寻找判断等腰三角形的方法.实际上，只要等腰三角形的性质和判定定理，就会迅速找到解决问题的办法.

【动态解析】

（一）考虑当点 N 在 AD 上的情况

因为 $EF // BC$、$PM \perp BC$，所以 PM 的长度保持不变；因为 $AN // BM$、$MN // AB$，所以四边形 $ABMN$ 是平行四边形，因此 MN 的长度不变；因为

$\angle PMB = 90°$, $\angle NMC = \angle B = 60°$,所以 $\angle PMN = 180° - \angle NMC - \angle PMB = 30°$.

因此当点 P 在 EF 上运动的过程中，点 N 在 AD 上时，$\triangle ABC$ 的形状和大小均不改变. 如图 1-1-3-2、图 1-1-3-3 所示.

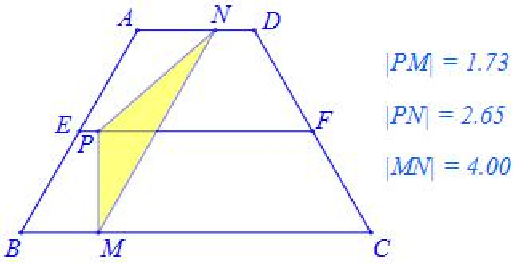


图 1-1-3-2

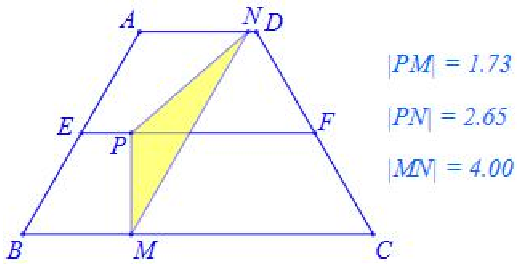


图 1-1-3-3

所以，三角形 PMN 不可能为等腰三角形。

实际上，还可以将$\triangle PMN$ 的每条边都放在一个直角三角形中，求出每条边的长度.

当点 P 与点 E 重合时，如图 1-1-3-4 所示，这时 $PM = EB \cdot \sin 60° = \frac{1}{2} AB \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3}$.

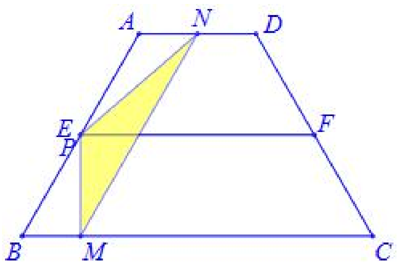


图 1-1-3-4

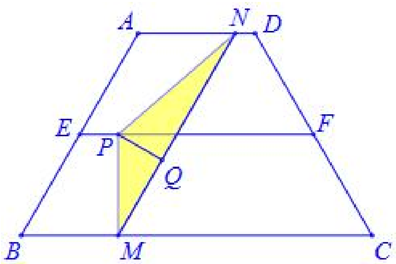


图 1-1-3-5

因为 $ABMN$ 是平行四边形，所以 $MN = AB = 4$.

因为$\angle PNM$ 和$\angle MPN$ 的大小不容易求出，因此我们可以利用勾股定理求出边 PN 的长度.过点 P 作线段 MN 的垂足 Q，如图 1-1-3-5 所示.

在 $Rt\triangle PMQ$ 中， $\angle PMQ = 30°$ 、 $PM = \sqrt{3}$ ， 所 以 $PQ = \sqrt{3}\sin 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$ 、 $MQ = \sqrt{3}\cos 30^\circ = \frac{3}{2}$.

在 $Rt\triangle PNQ$中，$PN = \sqrt{PQ^2 + QN^2} = \sqrt{\frac{3}{4} + (4 - \frac{3}{2})^2} = \sqrt{7}$.

（二）考虑当点 N 在 DC 上的情况

在 $\triangle$MNC 中， $\angle NMC = \angle MCN = 60°$ ， 所 以 $MN = MC = NC$. 所 以 $MN = MC = NC = 6 - (1 + x) = 5 - x$.

当 $PN = MN$ 时，如图 1-1-3-6 所示，则点 N 在线段 PM 的中垂线上，那么点 N 是线段 FC 的中点，即 $MN = NC = 1$，解得：$x = 4$.那么，这时点 P 与点 F 重合.

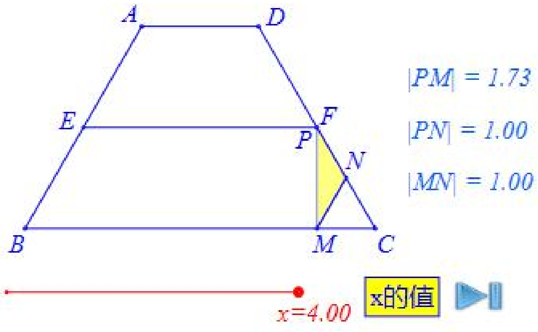


图 1-1-3-6

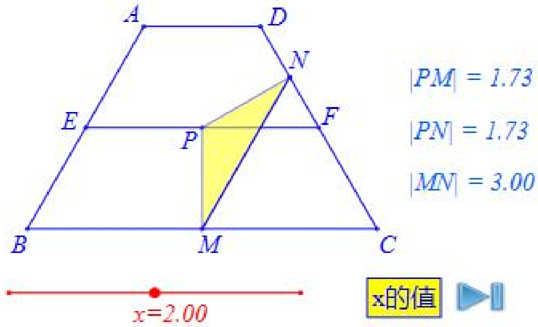


图 1-1-3-7

当 $PM = PN$ 时，如图 1-3-7 所示，若点 Q 是点 P 到线段 MN 的垂足，则点 Q 也是线段 MN 的中点，即 $MQ = \frac{1}{2}(5-x)$.又因为：$MQ = PM \bullet \cos 30^\circ = \frac{3}{2}$，由 $\frac{1}{2}(5-x) = \frac{3}{2}$ 解得：$x = 2$.

当 $PM = MN$ 时，如图 1-1-3-8 所示.由 $5 - x = \sqrt{3}$，得：$x = 5 - \sqrt{3}$.

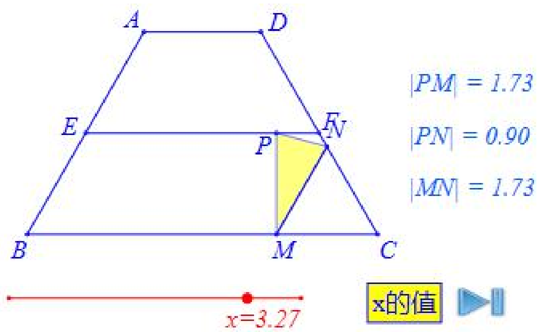


图 1-1-3-8

综上所述，当 $x = 2$ 或 4 或 $5 - \sqrt{3}$ 时，$\triangle PMN$ 为等腰三角形.

【简要评注】

这个问题是三个顶点同时运动的过程中研究等腰三角形的存在性问题.

由于 PN 的长度难以利用运动变量 x 表示，考虑到线段 PM 的长度和 $\angle PMN$ 的大小不变，因此就利用了等腰三角形“三线合一”的性质处理了 $PM = PN$ 的情形.

【拓展延伸】

若点 N 是过 M 与 CD 平行的直线与折线段 BAD 的交点，其他条件不变.当点 N 在线段 AB 上时（如图 1-1-3-9），是否存在点 P，使 $\triangle PMN$ 为等腰三角形？若存在，请求出所有满足要求的 x 的值；若不存在，请说明理由.

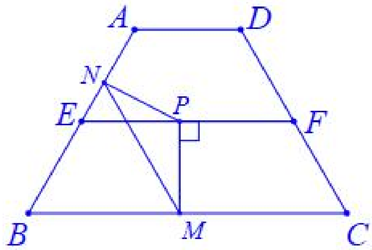


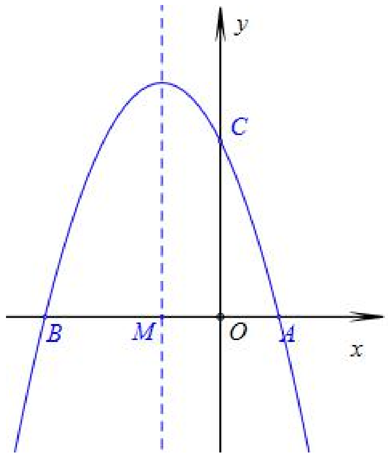
图 1-1-3-9

巩固练习（一）

练习 1-1-1：如下图，已知抛物线 $y=ax^2+bx+3$（a≠0）与 x 轴交于点 A(1，0)和点 B (－3，0)，与 y 轴交于点 C.

（1）求抛物线的解析式；

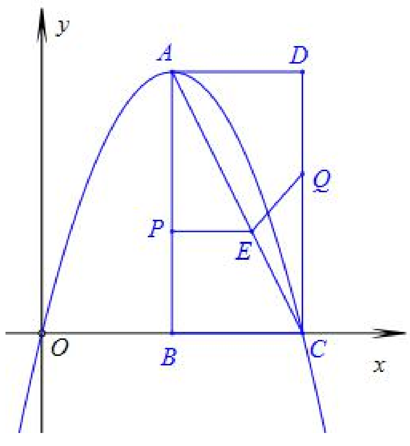
（2）设抛物线的对称轴与 x 轴交于点 M，问在对称轴上是否存在点 P，使△CMP 为等腰三角形？若存在，请直接写出所有符合条件的点 P 的坐标；若不存在，请说明理由.



练习 1-1-2：如下图，在平面直角坐标系中，已知矩形 $ABCD$ 的三个顶点 B（4，0）、C（8，0）、D（8，8）.抛物线 $y=Ax^2+Bx$ 过 A、C 两点.

（1）直接写出点 A 的坐标，并求出抛物线的解析式；

（2）动点 P 从点 A 出发．沿线段 AB 向终点 B 运动，同时点 Q 从点 C 出发，沿线段 CD 向终点 D 运动．速度均为每秒 1 个单位长度，运动时间为 t(s).过点 P 作 $PE\perp AB$ 交 AC 于点 E.连接 EQ．在点 P、Q 运动的过程中，判断有几个时刻使得△CEQ 是等腰三角形?请直接写出相应的 t 值.

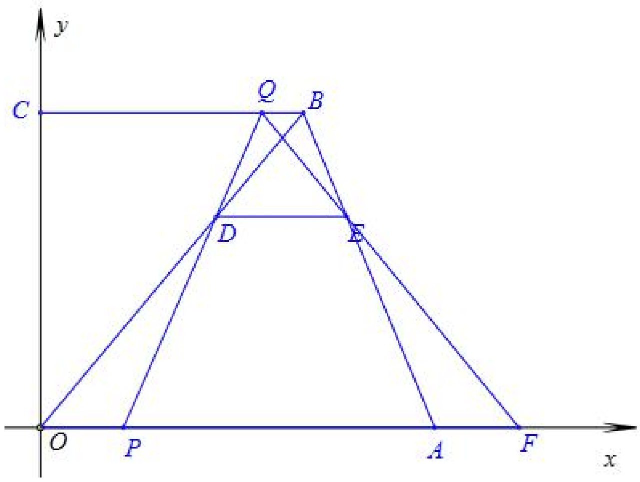


练习 1-1-3：如图，在直角梯形 $OABC$ 中， $OA \parallel CB$，A、B 两点的坐标分别为 A（15，0），B（10，12），动点 P、Q 分别从 O、B 两点出发，点 P 以每秒 2 个单位的速度沿 OA 向终点 A 运动，点 Q 以每秒 1 个单位的速度沿 BC 向 C 运动，当点 P 停止运动时，点 Q 也同时停止运动．线段 OB、PQ 相交于点 D，过点 D 作 $DE \parallel OA$，交 AB 于点 E，射线 QE 交 x 轴于点 F．设动点 P、Q 运动时间为 t（单位：s）．

（1）当 t 为何值时，四边形 $PABQ$ 是等腰梯形，请写出推理过程；

（2）当 t=2s 时，求梯形 $OFBC$ 的面积；

（3）当 t 为何值时，$\triangle PQF$ 是等腰三角形？请写出推理过程．

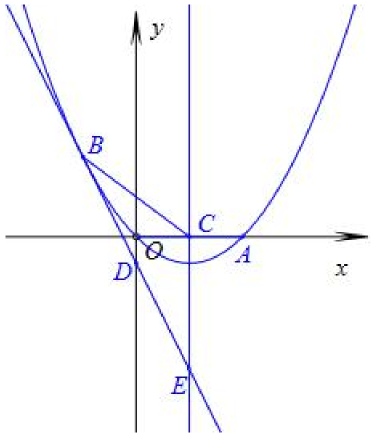


练习 1-1-4：如图，已知抛物线经过原点 O 和 x 轴上另一点 A，它的对称轴 $x=2$ 与 x 轴交于点 C，直线 $y=-2x-1$ 经过抛物线上一点 $B(-2,m)$，且与 y 轴、直线 $x=2$ 分别交于点 D、E.

（1）求 m 的值及该抛物线对应的函数关系式；

（2）求证：① $CB=CE$ ；② D 是 BE 的中点；

（3）若 $P(x,y)$ 是该抛物线上的一个动点，是否存在这样的点 P，使得 $PB=PE$？若存在，试求出所有符合条件的点 P 的坐标；若不存在，请说明理由.

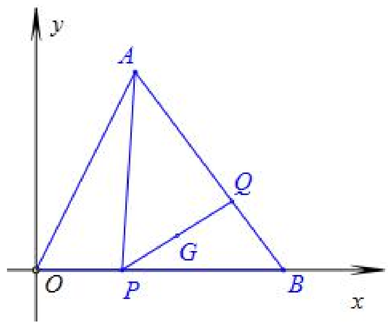


练习 1-1-5：如图，直角坐标系中，已知点 $A(2，4)$，$B(5，0)$，动点 P 从 B 点出发沿 BO 向终点 O 运动，动点 Q 从 A 点出发沿 AB 向终点 B 运动．两点同时出发，速度均为每秒 1 个单位，设从出发时刻起运动的时间为 x．

（1）Q 点的坐标为(______，______)（用含 x 的代数式表示）

（2）当 x 为何值时，$\triangle APQ$ 是一个以 AP 为腰的等腰三角形?

（3）记 PQ 的中点为 G．请你探求点 G 随点 P，Q 运动所形成的图形，并说明理由.



本节小结

对于一个任意的三角形来说，最多有 6 种情况可以使得它成为等腰三角形.但实际上到底有多少种机会使得它成为等腰三角形，要由具体的问题来确定.

如果三角形的三条边都能利用与运动有关的变量来表示，然后通过求解方程是最直接有效的方法.不过需要注意的是，通过方程求解得到的结果要进行检验，是否符合实际问题的要求.

如果三角形不是所有的边长都能用运动变量方便地表示，那么合理地利用等腰三角形的基本性质（如“三线合一”、“两腰相等”、“两底角相等”）往往成为解决问题的有效途径.

第二节 等边三角形的存在性

1．速度相同的两个动点

例 1-2-1．如图 1-2-1-1，在平面直角坐标系中，A 点坐标为(3，0)，B 点坐标为(0，4). 动点 M 从点 O 出发，沿 OA 方向以每秒 1 个单位长度的速度向终点 A 运动；同时，动点 N 从点 A 出发沿 AB 方向以每秒 $\frac{5}{3}$ 个单位长度的速度向终点 B 运动．设运动了 x（s）.

（1）点 N 的坐标为(________________，________________)；(用含 x 的代数式表示)

（2）当 x 为何值时，$\triangle AMN$ 为等腰三角形？

（3）连结 ON 得$\triangle OMN$，$\triangle OMN$ 可能为正三角形吗？若不能，点 M 的运动速度不变，试改变点 N 的运动速度，使$\triangle OMN$ 为正三角形，并求出点 N 的运动速度和此时 x 的值.

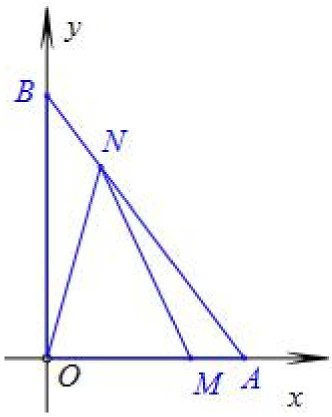


图 1-2-1-1

一、求点 N 的坐标

过点 N 作 $NC\perp OA$ 于点 C，如图 1-2-1-2 所示，则 $NC /\!/ OB$，所以 $\frac{NA}{AB}=\frac{NC}{OB}=\frac{CA}{OA}$，又因为 $NA=\frac{5}{3}x$、$OA=3$、$OB=4$、$AB=5$，则 $\frac{\frac{5}{3}x}{5}=\frac{NC}{4}=\frac{CA}{3}$，可得 $NC=\frac{4}{3}x$，$CA=x$.

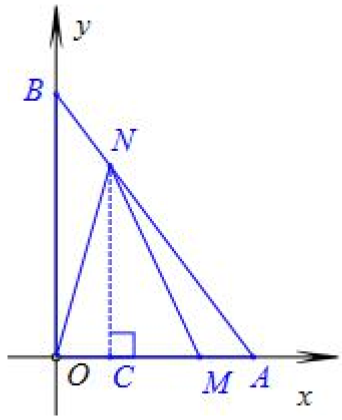


图 1-2-1-2

所以 $OC = OA - AC = 3 - x$，因此点 N 的坐标为 $(3 - x, \frac{4}{3}x)$ ..

二、探索等腰三角形的存在性

【动感体验】

打开文件“例 1-4.dmr”，如图 1-2-1-3 所示，通过变量尺可以改变 x 的值或通过按钮设置它的值，观察△ AMN 三条边的长度变化规律，它有可能是等腰三角形吗？

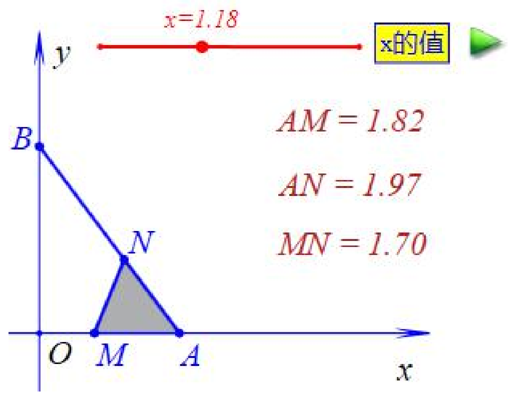


图 1-2-1-3

【思路点拨】

AM 、AN 的长度都能方便地用 x 表示出来，解决问题的关键是用 x 表示出线段 MN 的长度.

【动态解析】

由图 1-2-1-3 可知，$MN^2 = NC^2 + MC^2 = \frac{16}{9}x^2 + (x - 3 + x)^2 = \frac{52}{9}x^2 - 12x + 9$.

又因为：

$AN^2 = \frac{25}{9}x^2$ 、 $AM^2 = (3 - x)^2 = x^2 - 6x + 9$.因此，

当 $AM = AN$ 时，即 $x^2-6x+9=\frac{25}{9}x^2$，解得：$x=-\frac{9}{2}$（舍去）或 $x=\frac{9}{8}$. 如图 1-2-1-4 所示，可得 $AM = AN$ 的情形.

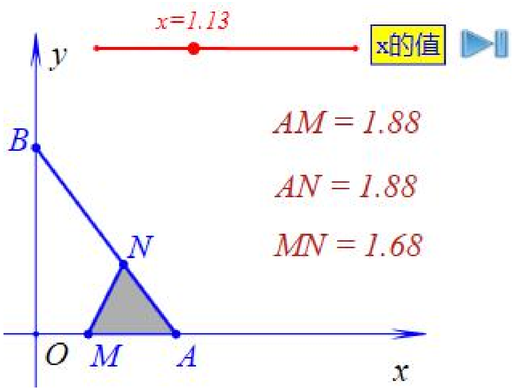


图 1-2-1-4

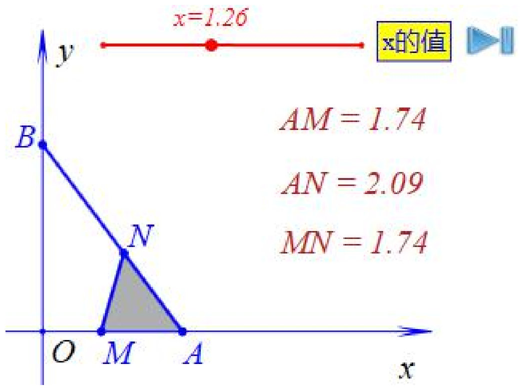


图 1-2-1-5

当 $AM = MN$ 时，即 $x^2-6x+9=\frac{52}{9}x^2-12x+9$，解得：$x=0$（舍去）或 $x=\frac{54}{43}$. 如图 1-2-1-5 所示，可得 $AM = MN$ 的情形.

当 $AN = MN$ 时，即 $\frac{25}{9}x^2=\frac{52}{9}x^2-12x+9$，解得：$x=1$ 或 $x=3$（舍去）. 如图 1-2-1-6 所示，可得 $AN = MN$ 的情形.

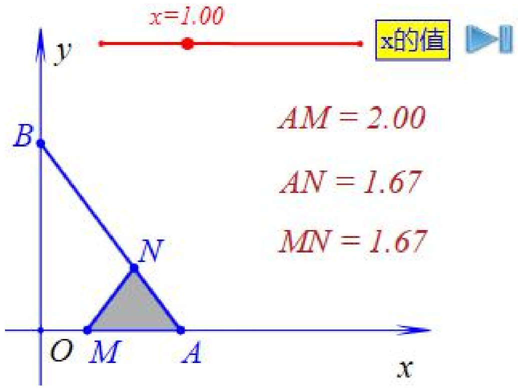


图 1-2-1-6

综上所述，当 $x=1$ 或 $\frac{9}{8}$ 或 $\frac{54}{43}$ 时，$\triangle AMN$ 为等腰三角形.

三、研究等边三角形的存在性

【动感体验】

进入下一页，如图 1-2-1-7 所示，通过字母 x 的变量尺可以任意拖动点 M，通过字母 k 的变量尺可以任意改变点 N，看是否能够得到等边三角形.当 $\triangle OMN$ 为等边三角形时，$\angle AON$ 应满足什么条件？

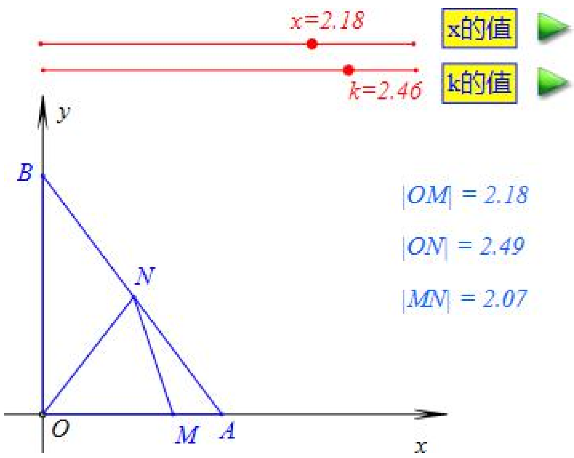


图 1-2-1-7

【思路点拨】

等边三角形的性质是它的每个角都等于 60°.因此 $\angle AON$ 的值应该等于 60°，符合这个条件的点 N 在线段 AB 上存在并且仅存在一个.那么可以求出点 N 的具体位置.

【动态解析】

当 $\angle AON = 60°$ 时，可设 $OC = m$、$NC = \sqrt{3}m$、$ON = 2m$，其中点 C 是点 N 到 x 轴的垂足，如图 1-2-1-8.

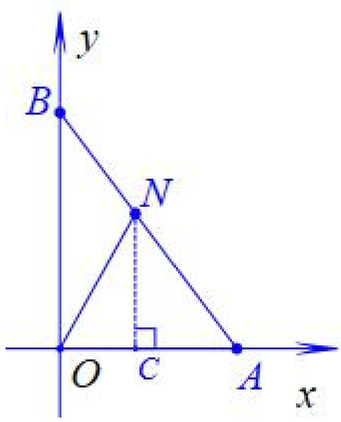


图 1-2-1-8

由于 $NC // BO$，所以有 $\dfrac{NC}{BO} = \dfrac{AC}{AO}$，即 $\dfrac{\sqrt{3}m}{4} = \dfrac{3-m}{3}$，解得：$m = \dfrac{12(3\sqrt{3}-4)}{11}$.

那么 $ON = 2m = \dfrac{24(3\sqrt{3}-4)}{11}$.

若△ OMN 为等边三角形，则 $OM = ON = \dfrac{24(3\sqrt{3}-4)}{11}$，约等于 2.61，因此点 M 在线段 OA 上.

而 $AN=\dfrac{5}{4}NC=\dfrac{5\sqrt{3}}{4}m=\dfrac{15(9-4\sqrt{3})}{11}$，所以点 N 的速度是 $\dfrac{15(9-4\sqrt{3})}{11}$.

单击“动画 1”，然后单击“动画 1”，如图 1-2-1-9 所示，即可得到一个等边三角形 OMN.

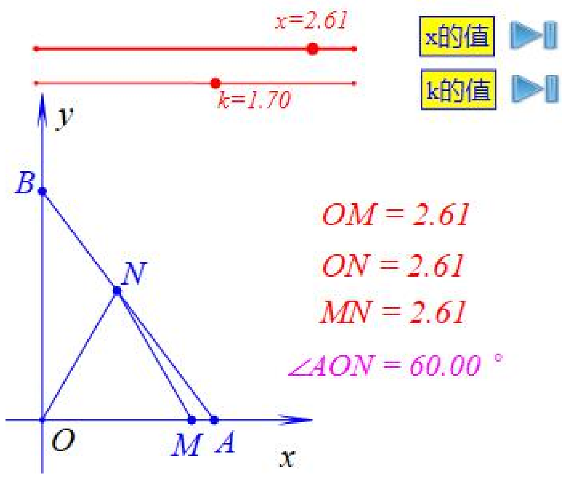


图 1-2-1-9

而点 N 的速度与点 M 的速度之比是 $\dfrac{AN}{OM}=\dfrac{\frac{5\sqrt{3}}{4}m}{2m}=\dfrac{5\sqrt{3}}{8}\neq\dfrac{5}{3}$.说明当点 M 的速度为 1 而点 N 的速度为 $\dfrac{5}{3}$ 时，$\triangle OMN$ 不能成为等边三角形.

【简要评注】

因为正三角形是一个角为 60°的等腰三角形.因此我们只要从 $\angle AON$ 出发，就能确定点 N 的位置，继而确定 ON 的边长.最后要解决的问题就是判断与满足 $OM=ON$ 条件的点 M 是否在线段 OA 上即可.

等边三角形存在了，然后通过勾股定理求出 AN 的长度，继而求出它的速度.

2．一个动点产生的两个动点

例 1-2-2．如图 1-2-2-1，在平面直角标系中，直线 $l: y=-2x-8$ 分别与 x 轴，y 轴相交于 A，B 两点，点 $P(0,k)$ 是 y 轴的负半轴上的一个动点，以 P 为圆心，3 为半径作⊙ P.

（1）连结 PA，若 $PA=PB$，试判断⊙ P 与 x 轴的位置关系，并说明理由；

（2）当 k 为何值时，以⊙ P 与直线 l 的两个交点和圆心 P 为顶点的三角形是正三角形？

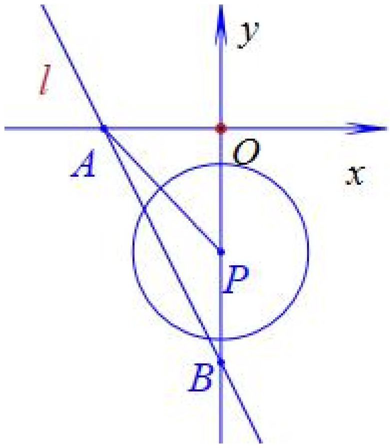


图 1-2-2-1

一、判断⊙ P 与 x 轴的位置关系

判断⊙ P 与 x 轴的位置关系，实际上就转化为比较⊙ P 的半径与 OP 的长度的问题.

因为直线 $l: y=-2x-8$ 与 x 轴交于 $A(-4,0)$，与 y 轴交于 $B(0,-8)$，所以 $OA=4$，$OB=8$.

又因为点 $P(0,k)$ 在 y 轴负半轴上，所以 $OP=-k$，$BP=8+k$.由 $PA=PB$ 得：

$AP=8+k$.

在 Rt△ AOP 中，$AO^2+OP^2=AP^2$，即：$4^2+(-k)^2=(8+k)^2$，求得：$k=-3$.这时 OP 等于⊙ P 的半径，所以⊙ P 与 x 轴相切.如图 1-2-2-2 所示.

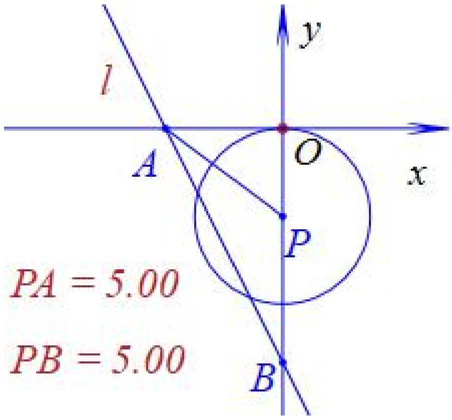


图 1-2-2-2

二、研究正三角形存在时 k 的值

【动感体验】

打开文件“例 1-5.dmr”，如图 1-2-2-3 所示，设⊙ P 与直线 l 的两个交点为 M 、 N ，因为 $PM = PN$，因此当 $\angle MPN = 60°$ 时，$\triangle PMN$ 为正三角形.

通过变量尺改变 k 的值或者通过按钮设置它的值，可以改变点 P 的位置，观察 $\angle MPN$ 测量值的变化规律，以及是否存在 $\angle MPN = 60°$ 的情形.

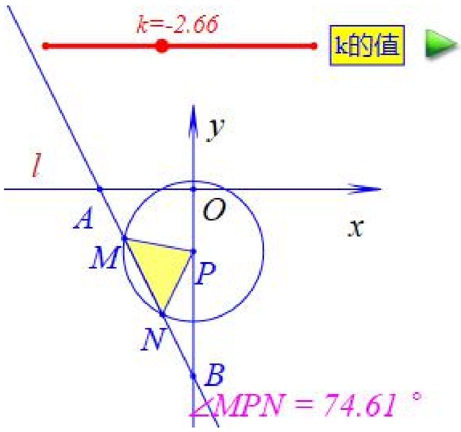


图 1-2-2-3

【思路点拨】

如果 $\angle MPN = 60°$ ，那么就能够直接求出正三角形的高，然后根据相似三角形构造线段之间比例关系，从而求出 k 的值.

需要注意的是，若点 P 在点 B 上方存在正三角形 PMN ，那么点 P 在点 B 下方也存在一个正三角形 PMN .

【动态解析】

过点 P 作直线 l 的垂足 Q，如图 1-2-2-4 所示.由 $\triangle OBA \backsim QBP$ 得：$\dfrac{BP}{PQ}=\dfrac{AB}{OA}$，即

$\dfrac{8+k}{PQ}=\dfrac{4\sqrt{5}}{4}$，所以 $PQ=\dfrac{\sqrt{5}}{5}(8+k)$.

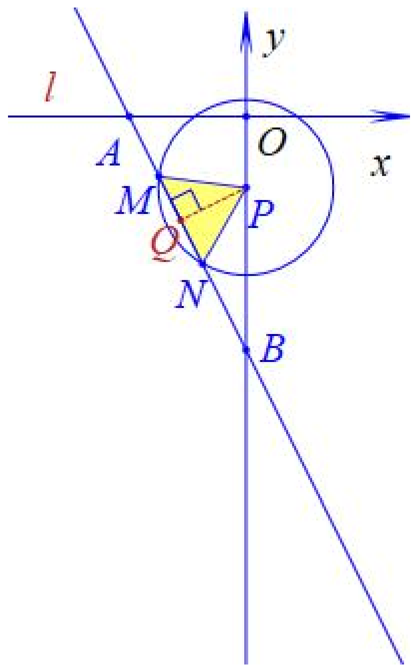


图 1-2-2-4

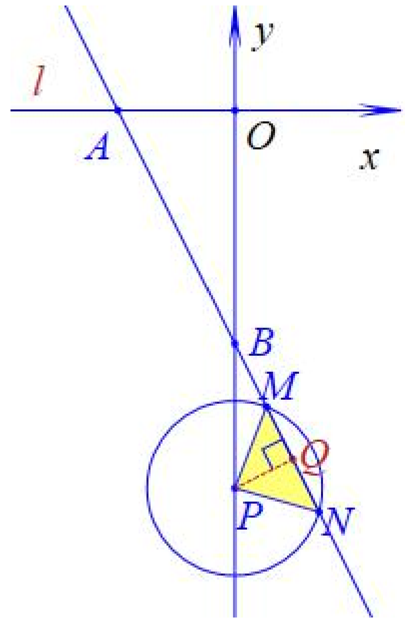


图 1-2-2-5

类似地，当点 P 在点 B 下方时，如图 1-2-2-5 所示，$BP=-8-k$，同理可得：$PQ=-\dfrac{\sqrt{5}}{5}(8+k)$.

若 $\angle MPN=60°$，则 $PQ=\dfrac{\sqrt{3}}{2}PM=\dfrac{3\sqrt{3}}{2}$.

由 $\dfrac{\sqrt{5}}{5}(8+k)=\dfrac{3\sqrt{3}}{2}$ 或 $-\dfrac{\sqrt{5}}{5}(8+k)=\dfrac{3\sqrt{3}}{2}$，解得：$k=-8+\dfrac{3\sqrt{15}}{2}$ 或 $k=-8-\dfrac{3\sqrt{15}}{2}$.

通过【k 的值】按钮设置 k 对应的数值，就可以得到$\triangle PMN$ 为正三角形的两种情形，如图 1-2-2-6、图 1-2-2-7 所示.

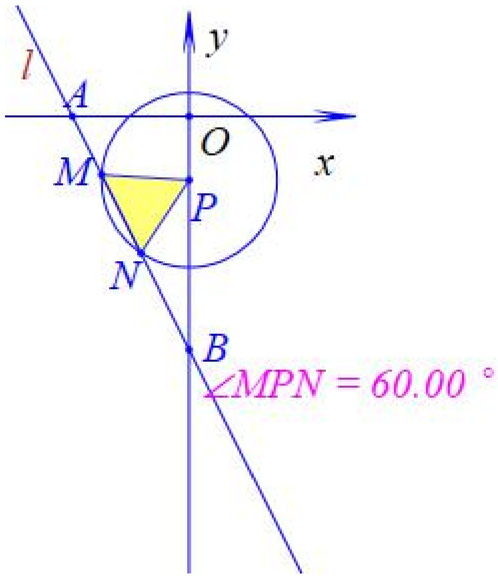


图 1-2-2-6

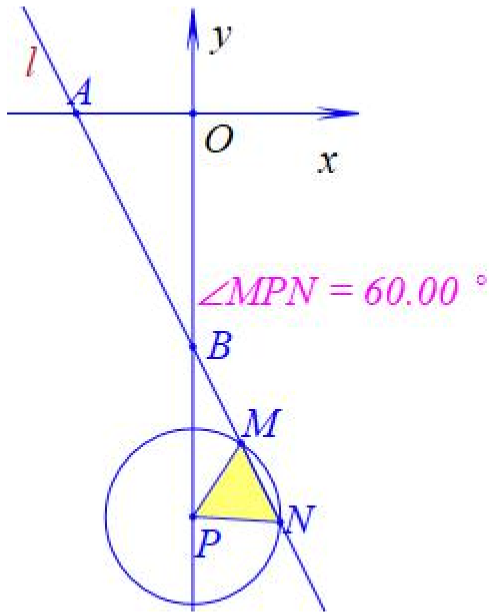


图 1-2-2-7

【简要评注】

在解决本题的过程中也是利用了正三角形的基本性质.可见，熟悉并灵活运用图形的这些基本性质往往成为解决问题的突破口和关键.

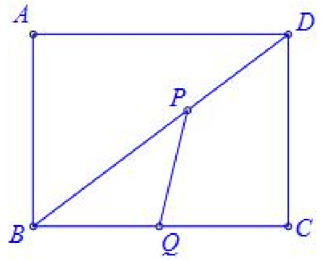
巩固练习（二）

练习 1-2-1：如下图，在矩形 $ABCD$ 中，AB＝3cm，BC＝4cm.设 P、Q 分别为 BD、BC 上的动点，在点 P 自点 D 沿 DB 方向作匀速直线移动的同时，点 Q 自点 B 沿 BC 方向向点 C 作匀速直线移动，移动的速度均为 1cm/s，设 P、Q 移动的时间为 t（$0<t\le4$）.

（1）写出$\triangle PBQ$ 的面积 S（cm^2）与时间 t（s）之间的函数表达式，当 t 为何值时，S 有最大值？最大值是多少？

（2）当 t 为何值时，$\triangle PBQ$ 为等腰三角形？

（3）$\triangle PBQ$ 能否成为等边三角形？若能，求 t 的值；若不能，说明理由.

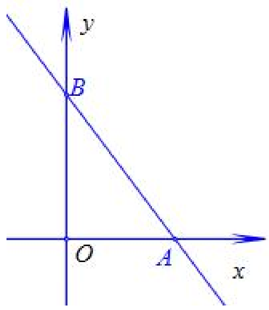


练习 1-2-2：如下图，在平面直角坐标系中，直线 $y=-\frac{4}{3}x+4$ 分别交 x 轴、y 轴于 A、B 两点.

（1）求两点的坐标；

（2）设直线 AB 上一动点 P(点 P 与点 A 不重合)，设⊙P 始终和 x 轴相切，和直线 AB 相交于 C、D 两点（点 C 的横坐标小于 点 D 的横坐标）设 P 点的横坐标为 m，试用含有 m 的代数式表示点 C 的横坐标；

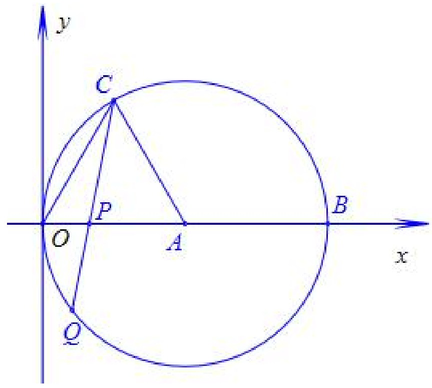
（3）在（2）的条件下，求 m 为何值时，$\triangle BOC$ 为等腰三角形？



练习 1-2-3：在平面直角坐标系 xOy 中，点 A 的坐标为(4，0)，以点 A 为圆心，4 为半径的圆与 x 轴交于 O，B 两点，OC 为弦，$\angle AOC$=60°，P 是 x 轴上的一动点，连结 CP.

（1）求$\angle OAC$的度数；

（2）当点P在直径OB上时，CP的延长线与$\odot A$相交于点Q，问PO为何值时，$\triangle OCQ$是等腰三角形？



本节小结

在解决等边三角形的存在性问题时，通常我们利用“有一个角是 60°的等腰三角形是等边三角形”这个判定，作出三角形某一边上的高，当该边上的高线也为中线时该三角形为等腰三角形，再根据 60°的条件得到高线与该边的数量关系，即可得知该三角形为等边三角形. 同时应根据动点的位置思考是否存在其它可能性.

第三节 直角三角形

1．坐标轴上的一个动点

例 1-3-1． 如图 1-3-1-1，$\odot B$ 切 y 轴于原点 O，过定点 $A(-2\sqrt{3},0)$ 作 $\odot B$ 的切线交圆于点 P，已知 $\tan\angle PAB=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$.

（1）求 $\odot B$ 的半径；

（2）y 轴上有一点 M，若 $\triangle APM$ 为直角三角形，求点 M 的坐标.

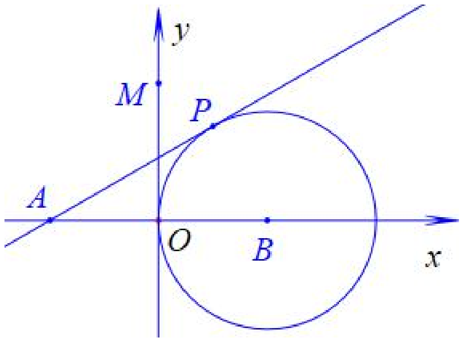


图 1-3-1-1

（一）求 $\odot B$ 的半径

该题为考查切线性质定理的常规题.因为 AP 切 $\odot B$ 的半径于点 P，利用切线的性质，连结 BP 后 BP 为 $\odot B$ 的半径，如图 1-3-1-2 所示.

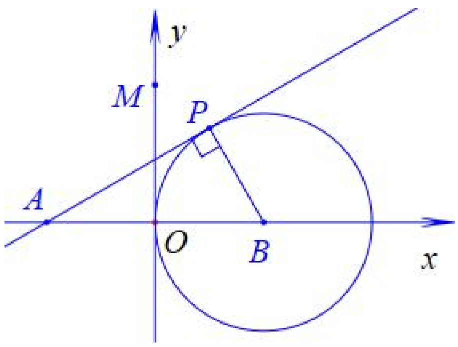


图 1-3-1-2

因为 AP 是 $\odot B$ 的切线，所以 $AP\perp BP$.在 Rt$\triangle APB$ 中，由 $\tan\angle PAB=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$ 知：

$\angle PAB = 30°$，所以 $\sin\angle PAB = \frac{1}{2}$.设⊙ B 的半径为 r，则 $\sin\angle PAB = \frac{r}{r+2\sqrt{3}} = \frac{1}{2}$，解得 $r = 2\sqrt{3}$，所以⊙ B 的半径 r 为 $2\sqrt{3}$.

（二）探究△APM 为直角三角形时点 M 的坐标

【动感体验】

打开文件“例 1-6.dmr”，如图 1-3-1-3 所示，通过变量尺改变 m 的值或通过按钮设置它的值，可以改变点 M 的位置，观察是否存在△ APM 为直角三角形的情形，以及当△ APM 为直角三角形时，点 M 应满足什么条件？

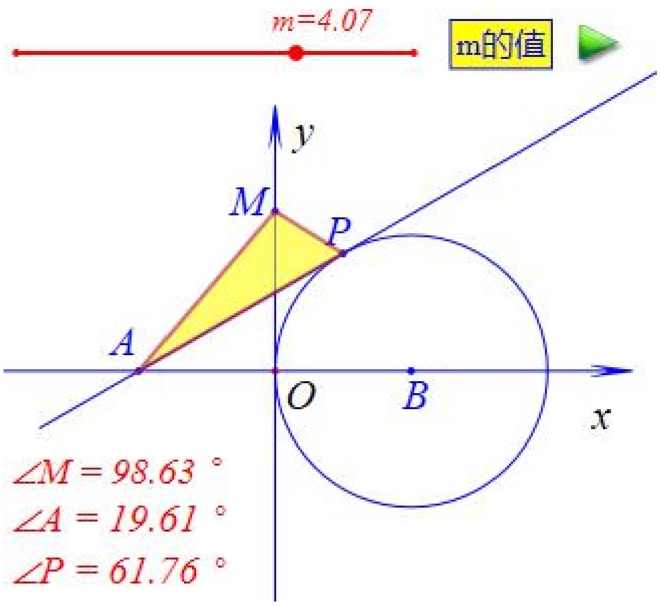


图 1-3-1-3

【思路点拨】

当 $\angle A = 90°$ 或 $\angle P = 90°$ 或 $\angle M = 90°$ 时，△ APM 均为直角三角形，因此需要分三种情况进行讨论.

解决问题的关键在于，将直角或垂直关系转化为更加容易判断几何问题.

【动态解析】

假设点 M 的坐标为 $(0, m)$，则：

$AP^2 = (-2\sqrt{3}-\sqrt{3})^2 + 3^2 = 36$；

$AM^2 = (-2\sqrt{3})^2 + m^2 = 12 + m^2$；

$PM^2 = (\sqrt{3})^2 + (3-m)^2 = 12 - 6m + m^2$.

根据勾股定理值，在直角三角形中，两条直角边的平方之和等于第三边的平方.因此，

当 $\angle M$ 为直角时，则点 M 是以 AP 为直径的圆与 y 轴的交点.这时有 $AP^2 = AM^2 + PM^2$，即 $36 = 12 + m^2 + 12 - 6m + m^2 = 24 - 6m + 2m^2$，解得：$m = \dfrac{3-\sqrt{33}}{2}$ 或 $m = \dfrac{3+\sqrt{33}}{2}$. 通过【m 的值】按钮输入 m 的值，即可得到 $\angle M$ 为直角的两种情形，如图 1-3-1-4、图 1-3-1-5 所示.

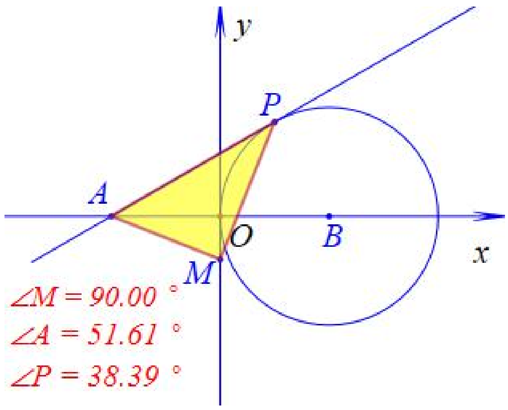


图 1-3-1-4

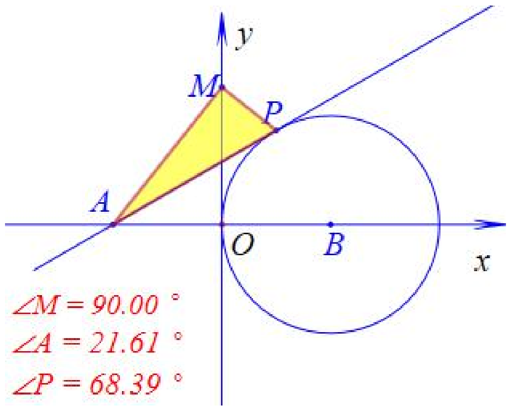


图 1-3-1-5

当 $\angle P$ 为直角时，则点 M 是经过点 P 与 AP 垂直的直线与 y 轴的交点.这时有 $AM^2 = AP^2 + PM^2$，即 $12 + m^2 = 36 + 12 - 6m + m^2$，解得：$m = 6$. 通过【m 的值】按钮输入 m 的值，即可得到 $\angle P$ 为直角的情形，如图 1-3-1-6 所示.

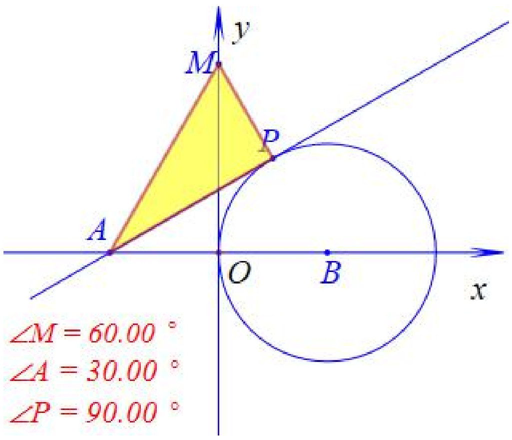


图 1-3-1-6

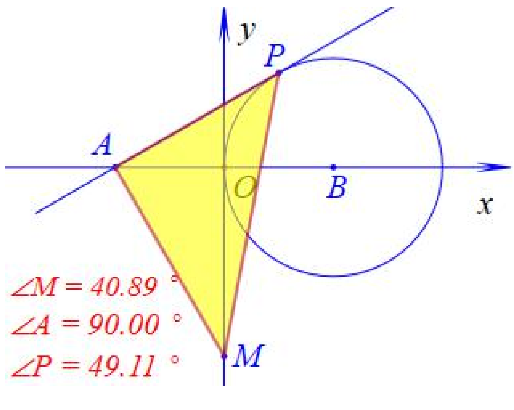


图 1-3-1-7

当 $\angle A$ 为直角时，点 M 是经过点 P 与 AP 垂直的直线与 y 轴的交点.这时有 $PM^2 = AM^2 + AP^2$，即 $12 - 6m + m^2 = 12 + m^2 + 36$，解得：$m = -6$.

通过【m 的值】按钮输入 m 的值，即可得到 $\angle A$ 为直角的情形，如图 1-3-1-7 所示.

综上所述，当$\triangle APM$均为直角三角形时，点M的坐标为：$(0,-6)$或$(0,\dfrac{3-\sqrt{33}}{2})$或$(0,\dfrac{3+\sqrt{33}}{2})$或$(0,6)$.

【简要评注】

对于由一个动点产生的直角三角形存在性问题，通常我们根据三个顶点分别为直角顶点而分情况讨论问题.

一般来说，**由固定的点去“寻找”变化的点，由已知的点去确定未知的点**.例如：

若点M是直角顶点，则点M在“以AP为直径的圆上”.而不能说：点M在“经过点P与PM垂直的直线上”或者点M在“经过点A与PM垂直的直线上”.

若点P是直角顶点，则点M在“经过点P与AP垂直的直线上”.而不能说：点M是“点A关于$\triangle APM$外接圆圆心的对称点”或者其他的由点M确定的图形.

若点A是直角顶点，则点M在“经过点A与AP垂直的直线上”.同样，而不能说：点M是“点P关于$\triangle APM$外接圆圆心的对称点”或者其他的由点M确定的图形.

在确定了动点的大致位置之后，可以画出草图，然后再进一步分析讨论.

2．抛物线上一个动点

例 1-3-2.如图 1-3-2-1 在平面直角坐标系xOy中,已知抛物线$y=a(x+1)^2+c$ $(a>0)$与x轴交于A、B两点(点A在点B的左侧)，与y轴交于点C，其顶点为M，若直线MC的函数表达式为$y=kx-3$，与x轴的交点为N，且$\cos\angle BCO=\dfrac{3\sqrt{10}}{10}$.

（1）求此抛物线的函数表达式;

（2）在此抛物线上是否存在异于点C的点P，使以N、P、C为顶点的三角形是以NC为一条直角边的直角三角形？若存在，求出点P的坐标；若不存在，请说明理由；

（3）过点A作x轴的垂线，交直线MC于点Q，若将抛物线沿其对称轴上下平移，使抛物线与线段NQ总有公共点，则抛物线向上最多可平移多少个单位长度？向下最多可平移多少个单位长度？

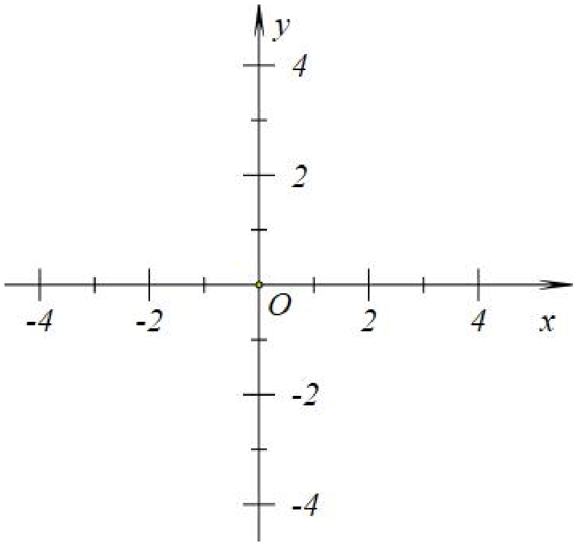


图 1-3-2-1

（一）求抛物线解析式

此题是求抛物线解析式的常规题，求出点 B 和点 C 的坐标后代入解析式可得抛物线解析式.

如图 1-3-2-2 所示，由直线 MC 的表达式 $y=kx-3$ 可知点 C 的坐标为 $(0,-3)$，所以 $OC=3$.

由 $\cos\angle BCO=\dfrac{3\sqrt{10}}{10}$ 可得到 $\tan\angle BCO=3$，即 $\dfrac{OC}{OB}=3$，所以 $OB=1$，又因为 $a>0$、$C(0,-3)$，所以点 B 在 x 轴的正半轴，即 $B(1,0)$.

根据点 $B(1,0)$、$C(0,-3)$ 可求得抛物线解析式为 $y=x^2+2x-3$.

同时可求得点 A 的坐标为 $(-3,0)$.

键.

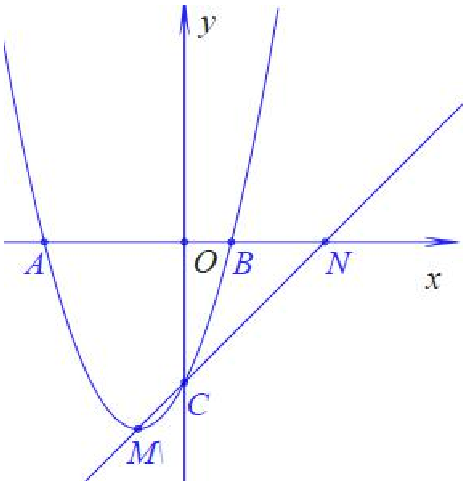


图 1-3-2-2

（二）研究$\triangle NPC$为直角三角形时点 P 的位置

【动感体验】

打开文件“例 1-7.dmr”，如图 1-3-2-3 所示，点 P 为抛物线 $y=x^2+2x-3$ 上的点，通过变量尺可以改变 m 的值或通过按钮设置它的值，从而改变点 P 的位置，观察$\triangle NPC$是否可能成为以 NC 为直角边的直角三角形，当$\triangle NPC$为以 NC 为直角边的直角三角形时点 P 应满足什么条件？

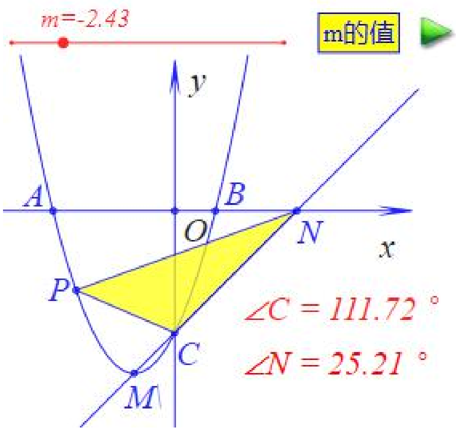


图 1-3-2-3

【思路点拨】

因为 NC 为直角三角形一条直角边，所以点 P 在过点 C 与 NC 垂直的直线上，或者在过点 N 与 NC 垂直的直线上.

将垂直关系转化成为我们熟悉的几何条件或者能够处理的代数方程，是解决问题的关键.

【动态解析】

方法一：

因为点 P 在抛物线 $y=x^2+2x-3$ 上，因此我们首先想到的是可设点 P 的坐标为（$m,n)$，此时又因为点 $C(0,-3)$、$N(3,0)$，所以

$NC^2=(-3)^2+3^2=18$；

$PC^2=m^2+(n+3)^2$；

$PN^2=(m-3)^2+n^2$.

这里如果将 P 点坐标设为 (m,m^2+2m-3),会产生高次方程，一般来说求解非常困难，所以我们先将 P 点坐标设为（$m,n)$，通过化简后再将 n 用 m^2+3m-3 表示.

当 $PC\perp NC$ 时，有 $PC^2=PN^2+NC^2$，即

$m^2+(n+3)^2=(m-3)^2+n^2+18$，解得：$m=-3$ 或 $m=0$（舍去，因为此时点 P 与点 C 重合）. 结果如图 1-3-2-4 所示，此时对应的点 P 的坐标为 $(-3,0)$.

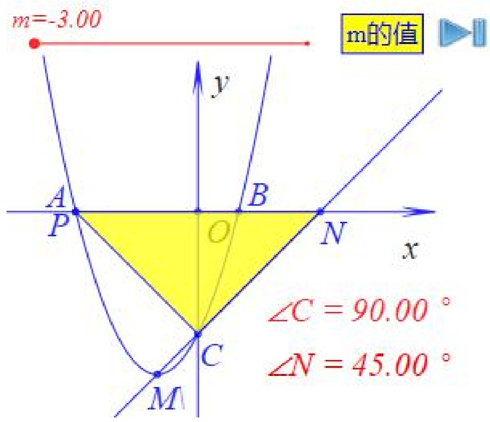


图 1-3-2-4

当 $PN\perp NC$ 时有 $PN^2=PC^2+NC^2$，即

$(m-3)^2+n^2=m^2+(n+3)^2+18$，化简得：$m+n=3$，即 $m+m^2+3m-3=3$，解得：$m=\dfrac{-3-\sqrt{33}}{2}$ 或 $m=\dfrac{-3+\sqrt{33}}{2}$.分别单击“动画 2”、“动画 3”，结果如图 1-3-2-5、图 1-3-2-6 所示，此时对应的点 P 的坐标分别是 $(\dfrac{-3-\sqrt{33}}{2},\dfrac{9+\sqrt{33}}{2})$ 或

$(\frac{-3+\sqrt{33}}{2},\frac{9-\sqrt{33}}{2})$.

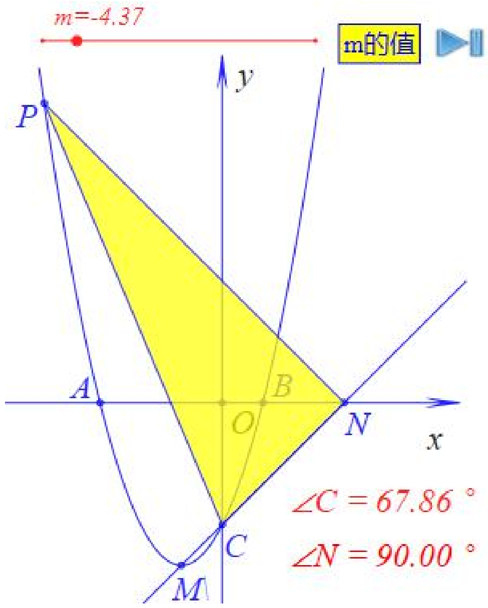


图 1-3-2-5

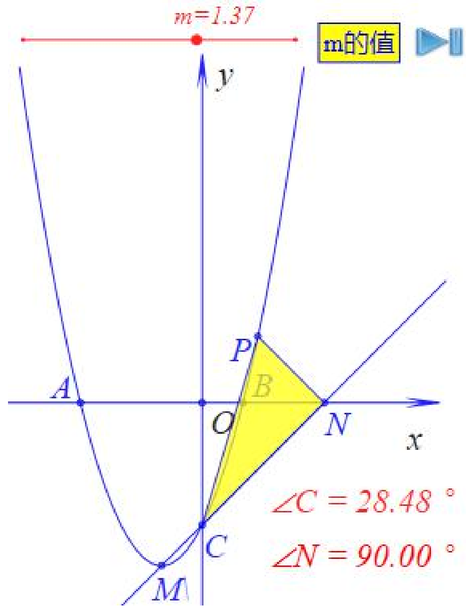
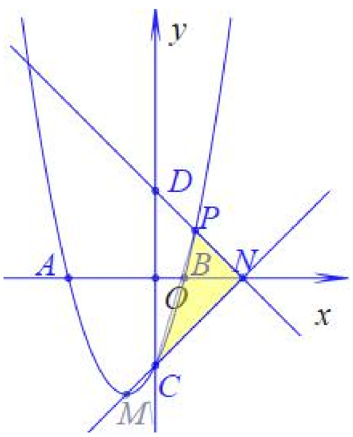


图 1-3-2-6

方法二：

通过问题（1）可求出直线 MC 的解析式为 $y=x-3$，所以 N 点坐标为 $(3,0)$ 且 $\angle CON=90^{\circ}$，当 $\angle PNC=90°$ 时，设直线 NP 与 y 轴的交点为 D，如图 1-3-2-7、1-3-2-8 所示，此时 $\angle DNO=45°$，所以 $OD=ON$，所以点 $D(0,3)$，由点 N 和点 D 可求出直线 NP 的解析式为 $y=-x+3$，结合抛物线解析式 $y=x^2+2x-3$，可求出交点坐标有两个，分别为：$P(\frac{-3-\sqrt{33}}{2},\frac{9+\sqrt{33}}{2})$ 或 $P(\frac{-3+\sqrt{33}}{2},\frac{9-\sqrt{33}}{2})$.



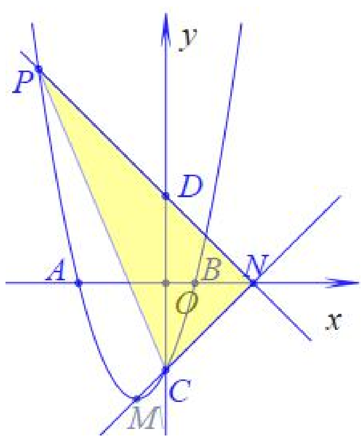


图 1-3-2-7　　　　　　　　　　　　　　　　图 1-3-2-8

当 $\angle PCN = 90°$ 时，如图 1-3-2-4 所示，类似地可求出直线 PC 与 x 轴的交点为 $(-3,0)$，可求出直线 PC 的方程为 $y=-x-3$，通过求直线与抛物线的交点的方法得到点 P 的坐标：$(-3,0)$ 或 $(0,-3)$（舍去）.

综上所述，满足条件的点 P 有 3 个：

$$P(\frac{-3-\sqrt{33}}{2},\frac{9+\sqrt{33}}{2}) \text{ 或 } P(-3,0) \text{ 或 } P(\frac{-3+\sqrt{33}}{2},\frac{9-\sqrt{33}}{2}).$$

（三）研究抛物线与线段 NQ 总有公共点时抛物线平移的距离

【动感体验】

单击“下一页”按钮，进入第二页.如图 1-3-2-9 所示，通过变量尺改变 m 的值或通过按钮设置它的值，可以对抛物线进行上下平移，观察当抛物线与线段 NQ 始终有交点时，抛物线应该满足的条件.

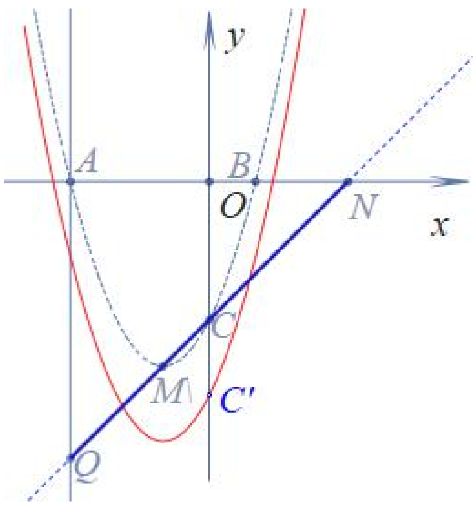


图 1-3-2-9

【思路点拨】

找出抛物线与线段 NQ 有交点的临界状态：在某个位置有交点，而继续往上或者向下平移就没有交点了.

【动态解析】

假设抛物线在竖直方向上拖动的距离为 b，那么平移之后的抛物线的表达式可以表示为：$y=x^2+2x-3+b$.

$b>0$ 时表示向上平移；$b<0$ 时表示向下平移；$b=0$ 时表示没有平移.

首先向上平移抛物线，可以发现当抛物线与直线 NQ 相切时，抛物线与线段 NQ 有一个公共点，如图 1-3-2-10 所示，否则继续向上拖动则没有公共点，如图 1-3-2-11 所示.

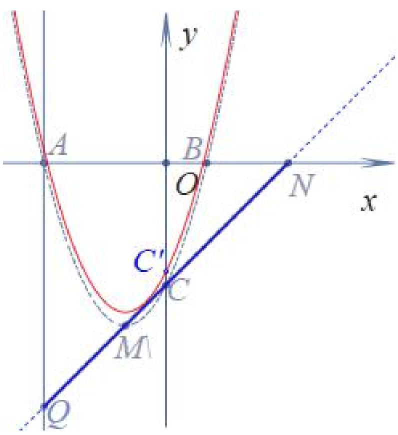


图 1-3-2-10

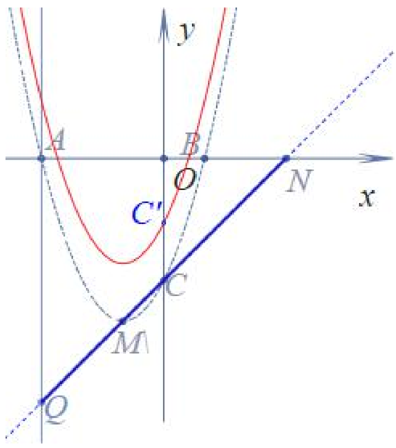


图 1-3-2-11

当抛物线与直线 NQ 相切时，方程的 $x^2+2x-3+b=x-3$ 的 $\Delta=0$，解得 $b=\dfrac{1}{4}$.

因此，抛物线向上平移不超过 $\dfrac{1}{4}$ 个单位时，抛物线与线段 NQ 有公共点.

然后向下平移直线，可以发现抛物线首先经过点 Q,然后再到达点 N，如图 1-3-2-12、1-3-2-13 所示，因此当抛物线经过点 N 时，抛物线与线段 NQ 有一个公共点 N，然后再往下拖动时则没有公共点，如图 1-3-2-14 所示.

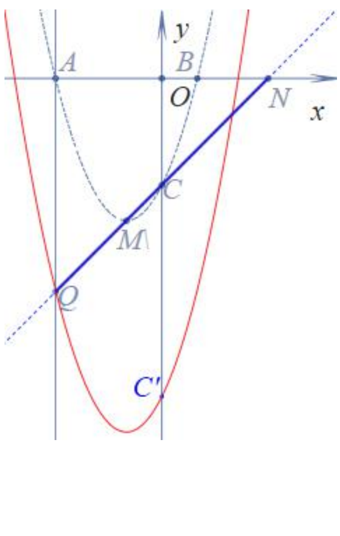


图 1-3-2-12

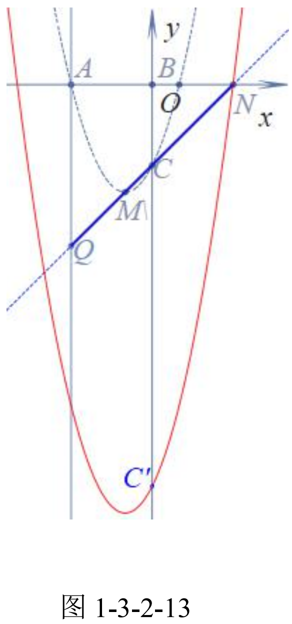


图 1-3-2-13

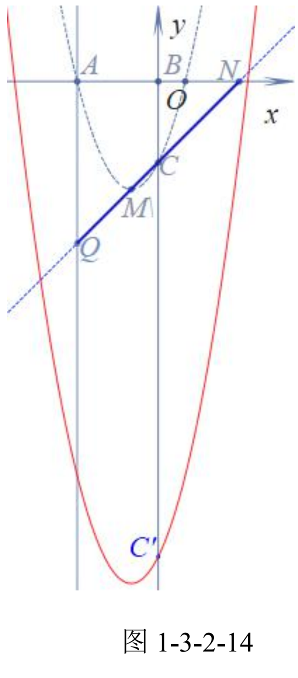


图 1-3-2-14

当抛物线经过点 N 时，将点的坐标 $(3,0)$ 代入平移后的抛物线的表达式后，可解得：

$b=-12$.

因此，抛物线向下平移不超过 12 个单位时，抛物线与线段 NQ 有公共点.

综上，将抛物线沿其对称轴上下平移，使抛物线与线段 NQ 总有公共点，则抛物线向上最多可平移 $\dfrac{1}{4}$ 个单位长度，向下最多可平移 12 个单位长度.

【简要评注】

对于本题第（2）问，一般来说可以将几何问题转化为求代数方程问题.遇到高次方程时，认真研究是否可将高次方程化简为二次方程甚至一次方程；若确实无法化简，那么就需要其他解决问题的途径.

对于本题第（3）问，抓住解决问题的“临界点”或“临界状态”非常重要，找到了临界点就理清了解决问题的思路.

【拓展延伸】

在本题第（2）中，你认为是否存在抛物线上的点 P 使得 $\triangle PNC$ 是以边 NC 为斜边的直角三角形？若存在，那么应该如何叙述点 P 的具体位置？

3．运动速度不同的两个点

例 1-3-3．如图 1-3-3-1，AB 是⊙O的直径，弦 $BC=2cm$，$\angle ABC=60^{\circ}$.

（1）求⊙O的直径；

（2）若D是AB延长线上一点，连结CD，当BD长为多少时，CD与⊙O相切；

（3）若动点E以$2cm/s$的速度从A点出发沿着AB方向运动，同时点F以$1cm/s$的速度从B点出发沿BC方向运动，设运动时间为$t(s)(0<t<2)$，连结EF，当t为何值时，$\triangle BEF$为直角三角形？

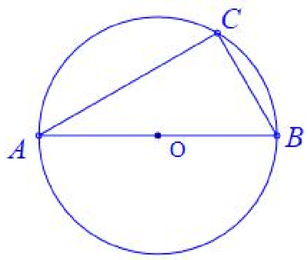


图 1-3-3-1

（一）求⊙O的直径

此题为常规题，可通过解直角三角形的知识求⊙O的直径.

因为AB是⊙O的直径，所以$\angle ACB=90^{\circ}$，又因为$\angle ABC=60^{\circ}$，所以$\angle BAC=30^{\circ}$，所以$AB=2BC=4cm$，即⊙O的直径为$4cm$.

（二）求CD与⊙O相切时线段BD的长度

如图 1-3-3-2 所示，CD切⊙O于点C，连结OC，则 $CD\perp CO$，即$\angle OCD=90^{\circ}$.

因为$\angle BAC=30^{\circ}$，所以$\angle COD=2\angle BAC=60^{\circ}$，此时$\angle D=180^{\circ}-\angle COD-\angle OCD=30^{\circ}$，$OD=2OC=4cm$，$BD=OD-OB=4-2=2cm$.

所以当 BD 长为 $2cm$，CD 与⊙O 相切.

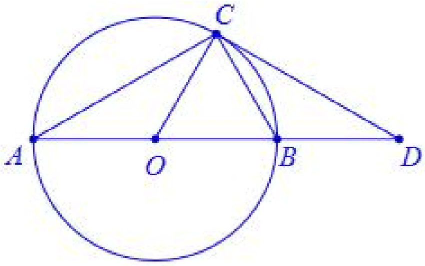


图 1-3-3-2

（三）探索$\triangle BEF$为直角三角形时 t 的值

【动感体验】

打开文件“例 1-3-3.dmr”，如图 1-3-3-3 所示，通过变量尺改变 t 的值或通过按钮设置它的值，观察$\triangle BEF$是否可能为直角三角形.若$\triangle BEF$为直角三角形时,点 E 和点 F 应满足什么关系？

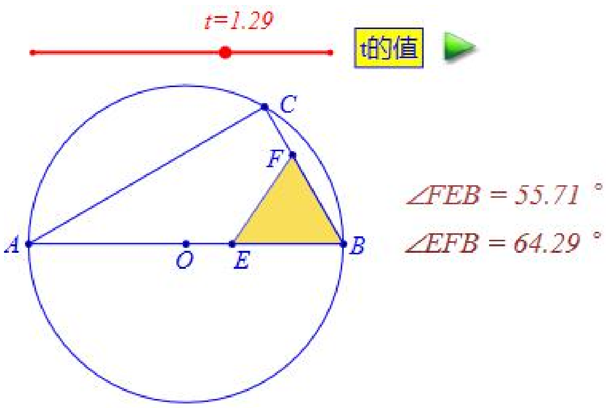


图 1-3-3-3

【思路点拨】

因为∠EBF=60°，所以只能考虑∠EFB=90°和∠FEB=90°两种情况.

就是因为∠EBF=60°，所以当∠EFB=90°或∠FEB=90°时$\triangle BEF$是一个特殊的直角三角形，那么只需要求出 BE 和 BF 的长度，然后通过它们之间的关系就可以求出时间t的值.

【动态解析】

线段 BE 的长度可表示为$4-2t$，线段 BF 的长度可表示为t.

当∠EFB=90°时，如图 1-3-3-4 所示，在直角$\triangle BEF$中，∠EBF=60°，则∠BEF=30°，所以有 BE=2BF，即$4-2t=2t$，解得：t=1.

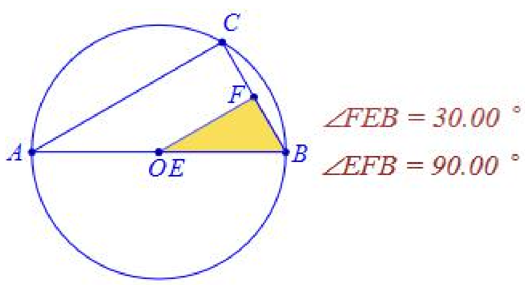


图 1-3-3-4

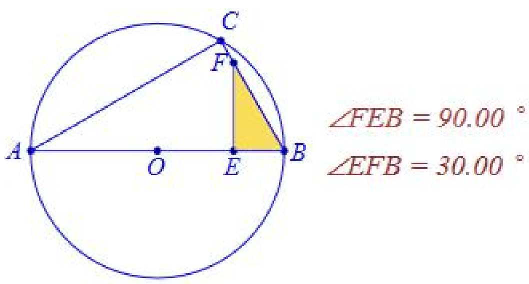


图 1-3-3-5

当∠BEF=90°时，如图 1-3-3-5 所示，在直角$\triangle BEF$中，∠EBF=60°，则∠BFE=30°，所以有 BF=2BE，即$t=2(4-2t)$，解得：t=8/5.

因此当t=1 或t=8/5 时，$\triangle BEF$为直角三角形.

【简要评注】

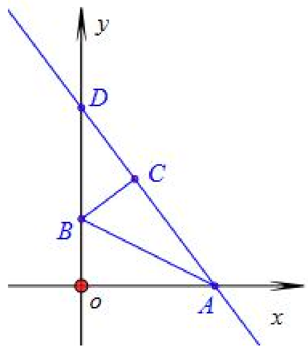
此题属于两动点产生的直角三角形问题，在解决此问题时，抓住一个解决问题的关键的因素就是$\angle B$的大小不变且等于$60°$.结合图形的动态变化，根据直角的不同情况画出相应的草图，然后根据直角三角形的基本知识就可以解决问题.

巩固练习（三）

练习 1-3-1：如下图，在平面直角坐标系，直线 $y=-\frac{4}{3}(x-6)$ 与 x 轴、y 轴分别相交于 A、D 两点，点 B 在 y 轴上，现将 $\triangle AOB$ 沿 AB 翻折 $180°$，使点 O 刚好落在直线 AD 的点 C 处.

（1）求 BD 的长.

（2）在 y 轴上是否存在点 M，使 $\triangle MAC$ 为直角三角形？若存在，请写出所有符合条件的点 M 的坐标，并选择一个写出其求解过程；若不存在，简述理由.



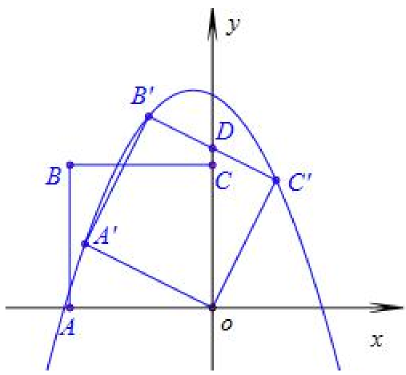
练习 1-3-2：如下图，正方形 $ABCO$ 的边长为 $\sqrt{5}$，以 O 为原点建立平面直角坐标系，点 A 在 x 轴的负半轴上，点 C 在 y 轴的正半轴上，把正方形 $ABCO$ 绕点 O 顺时针旋转 α 后得到正方形 $A_1B_1C_1O$(α ＜45º)，B_1C_1 交 y 轴于点 D，且 D 为 B_1C_1 的中点，抛物线 y＝ax^2＋bx＋c 过点 A'、B'、C'.

（1）求 $\tan\alpha$ 的值；

（2）求点 A_1 的坐标，并直接写出点 B'、点 C'的坐标；

（3）求抛物线的函数表达式及其对称轴；

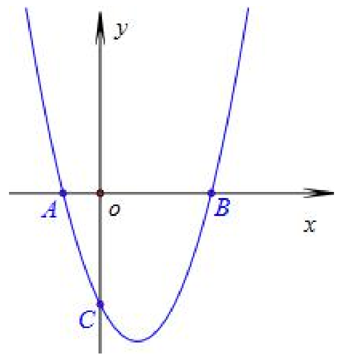
（4）在抛物线的对称轴上是否存在点 P，使 ΔPB_1C_1 为直角三角形？若存在，直接写出所有满足条件的点 P 的坐标；若不存在，请说明理由.



练习 1-3-3：如下图，抛物线 $y=x^2-2x+k$ 与 x 轴交于 A、B 两点，与 y 轴交于点 $C(0,-3)$.

（1） $k=$__________，点 A 的坐标为____________，点 B 的坐标为__________；

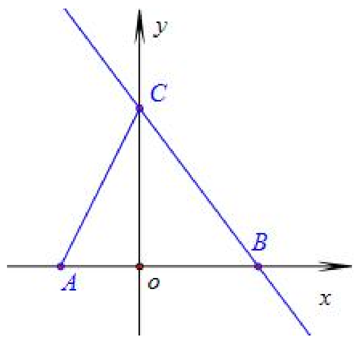
（2）在抛物线 $y=x^2-2x+k$ 上求点 Q，使$\triangle BCQ$ 是以 BC 为直角边的直角三角形.



练习 1-3-4：如下图，直线 y=$-\dfrac{4}{3}x+4$ 和 x 轴、y 轴的交点分别为 B，C，点 A 的坐标是（－2，0）.

（1）试说明$\triangle ABC$ 是等腰三角形；

（2）动点 M 从点 A 出发沿 x 轴向点 B 运动，同时动点 N 从点 B 出发沿线段 BC 向点 C 运动，运动的速度均为每秒 1 个单位长度，当其中一个动点到达终点时，它们都停止运动，设点运动 t 秒时，在运动过程中，当$\triangle MON$ 为直角三角形时，求 t 的值.



本节小结

在讨论直角三角形的存在性问题中，通常需要根据直角的不同分情况讨论.

一般来说，若能够根据点的坐标求出三边的长度，然后根据勾股定理列出代数方程，最终可求出满足条件的动点.但如果是方程过于复杂或者根本无法求出三条边的长度，则需要利用直角三角形的其他性质求出满足条件的动点.

第四节 相似三角形

1．一个角度已经确定的三角形

例 1-4-1．如图 1-4-1-1，在平面直角坐标系中，点 $C(-3,0)$，点 A，B 分别在 x 轴，y 轴的正半轴上，且满足 $\sqrt{OB^2-3}+|OA-1|=0$.

（1）求点 A，点 B 的坐标.

（2）若点 P 从 C 点出发，以每秒 1 个单位的速度沿射线 CB 运动，连结 AP. 是否存在点 P，使以点 A、B、P 为顶点的三角形与 ΔAOB 相似？若存在，请直接写出点 P 的坐标；若不存在，请说明理由.

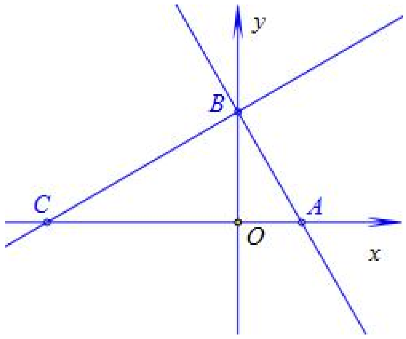


图 1-4-1-1

（一）求点 A、B 的坐标

由条件 $\sqrt{OB^2-3}+|OA-1|=0$，可知 $OB^2-3=0, OA-1=0$，所以 $OB=\sqrt{3}, OA=1$

因为点 A，B 分别在 x 轴，y 轴的正半轴上，所以 $A(1,0)$，$B(0,\sqrt{3})$.

（三）讨论相似三角形的存在性问题

【动感体验】

因为$\triangle AOB$ 与$\triangle ABP$ 都是直角三角形，所以只需要另外一组对应角相等，它们即为相似三角形.

因为在 Rt$\triangle ABC$ 中，AB=4、AB=2，所以∠OAB=60°.那么当∠APB 等于 60°或者 30°时，$\triangle AOB$ 与$\triangle ABP$ 就是相似三角形.

打开文件“例 1-4-1.dmr”，如图 1-4-1-2 所示，通过变量尺改变 m 的值或通过按钮设置它的值，改变点 P 的位置，观察是否存在∠APB 等于 30°或 60°的情形，并且有几种情况.

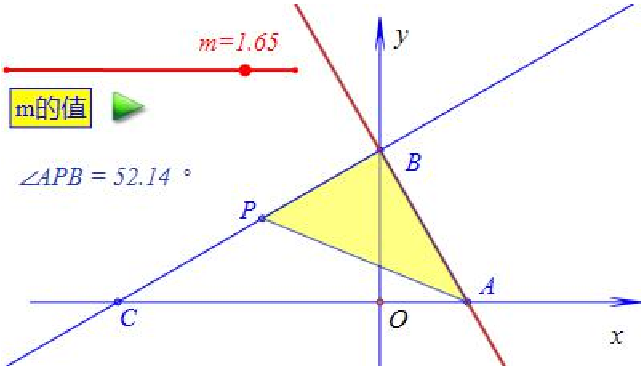


图 1-4-1-2

【思路点拨】

当点 P 从点 C 沿着射线 CB 的方向运动时，$\angle APB$ 的值由小变大，再由大变小.

【动态解析】

当点 P 在点 C 位置时，如图 1-4-1-3 所示，$\angle APB=\angle ACB$=30°，所以 $\Delta APB\backsim\Delta BAO$. 这时点 P 的坐标为（-3，0）.

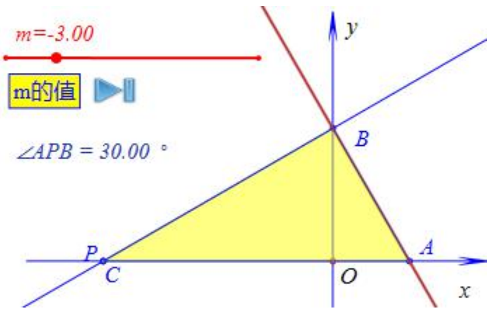


图 1-4-1-3

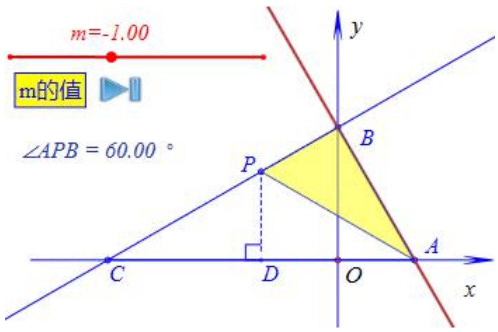


图 1-4-1-4

因为 $\angle ACB$=30°，$\angle ABC$=90°，所以当点 P 从点 C 运动到点 B 的过程中只有一个时刻使得 $\angle APB=60^{\circ}$，如图 1-4-1-4 所示，那么 $\Delta APB\backsim\Delta BAO$.

由于 $\angle PAC=\angle BAC-\angle BAP=30^{\circ}$，所以 ΔPCA 是等腰三角形，过点 P 作 x 轴的垂足 D，则点 D 是 CA 的中点，所以 CD=2，那么 OD=1、$PD=\dfrac{CD}{\sqrt{3}}=\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$，所以点 P 的坐标为（-1，$\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$）.

当点 P 从点 B 出发在线段 CB 的延长线上从左向右运动时，$\angle APB$ 的值由 90°逐渐变小，在这个过程中会先后出现 $\angle APB$=60°和 $\angle APB$=30°的时刻，如图 1-4-1-5、1-4-1-6 所示.

当 $\angle APB$ =60°时，如图 1-4-1-5 所示，$\angle BAP$ =30°，又因为 $\angle BAO$ =60°，所以 $\angle OAP$ =90°，所以 $PA \perp CA$.在直角 ΔPAB 中，$\angle BAP$ =30°，AB =2，所以 $PA = \frac{2}{\sqrt{3}}AB = \frac{4}{3}\sqrt{3}$，所以点 P 的坐标为（1，$\frac{4}{3}\sqrt{3}$）.

当 $\angle APB$ =30°时，$\angle BAP$ =60°.过点 P 作 x 轴的垂足 E，如图 1-4-1-6 所示，那么 $\angle PAE$ =180°- $\angle BAP$ - $\angle BAO$ =60°，又因为 $\angle PBA = \angle PEA, PA = PA$，所以 $\Delta PBA \cong \Delta PEA$，那么 $PE = PB = \sqrt{3}AB = 2\sqrt{3}$，$OE = OA + AE = OA + AB = 1 + 2 = 3$，所以点 P 的坐标为（3，$2\sqrt{3}$）.

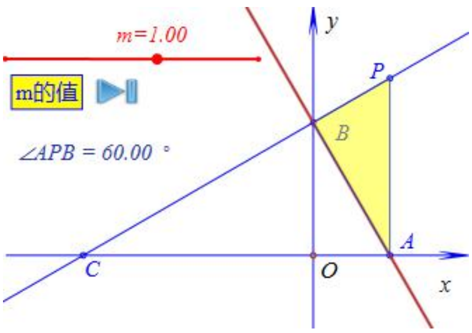


图 1-4-1-5

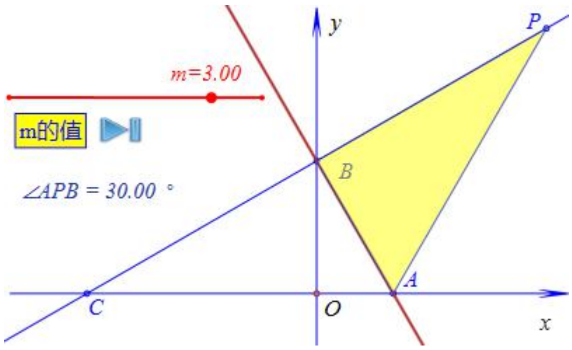


图 1-4-1-6

综上所述，当以点 A、B、P 为顶点的三角形与 ΔAOB 相似时，点 P 的坐标为：

（-3，0）或（-1，$\frac{2\sqrt{3}}{3}$）或（1，$\frac{4}{3}\sqrt{3}$）或（3，$2\sqrt{3}$）.

【简要评注】

本题的第（2）问的解决突出了分类讨论的思想，由于点 P 位置的不同，ΔABP 面积 S 的求法也不同，所以应根据点 P 的位置的不同分情况讨论.

第（3）问属于相似三角形的存在性问题，因为 $\angle ABP = \angle AOB$ =90°，所以讨论相似三角形存在性问题时，要根据对应角的不同而分情进行况讨论.

2．部分抛物线上的一个动点

例 1-4-2．如图 1-4-2-1 所示，已知抛物线 $y = x^2 - 1$ 与 x 轴交于 A、B 两点，与 y 轴交于点 C.

（1）求 A、B、C 三点的坐标.

（2）在 x 轴上方的抛物线上是否存在一点 M，过 M 作 $MG\perp x$ 轴于点 G，使以 A、M、G 三点为顶点的三角形与 $\triangle PCA$ 相似．若存在，请求出 M 点的坐标；否则，请说明理由．

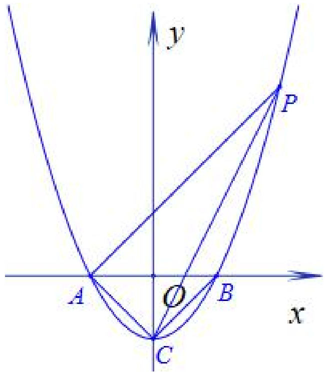


图 1-4-2-1

（一）求点 A、B、C 的坐标

此题为常规题，通过抛物线解析式可求的特殊点坐标.

令 $y = 0$，得 $x^2 - 1 = 0$，解得 $x = \pm 1$.令 $x = 0$，得 $y = -1$.

所以求得：A（-1，0）、B（1，0）、C（0，-1）.

（二）讨论$\triangle AMG$ 与$\triangle PCA$ 相似的问题

【动感体验】

打开文件“例 1-12.dmr”，如图 1-4-2-2 所示，因为$\angle CAO=\angle EAP=45°$，因此$\angle CAP=90°$. 又因为在$\triangle AMG$ 中$\angle MGA=90°$，那么当$\angle AMG=\angle ACP$ 或者$\angle AMG=\angle APC$ 时，$\triangle PCA$ 与$\triangle AMG$ 相似的条件就成立.

通过变量尺改变字母 m 的值或者通过按钮设置它的值，从而改变点 M 在抛物线上的位置，当点 M 在 x 轴上方时，观察是否存在$\angle AMG =\angle ACP$ 或者$\angle AMG =\angle APC$ 成立的情况.

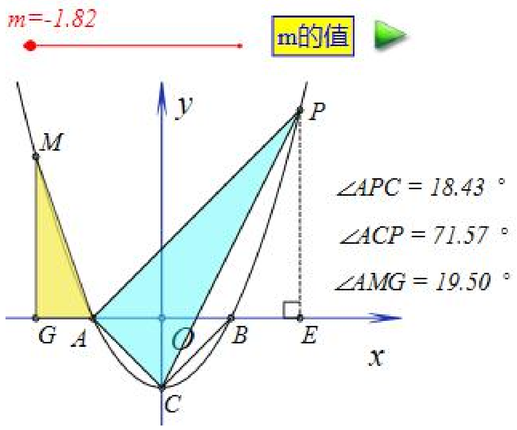


图 1-4-2-2

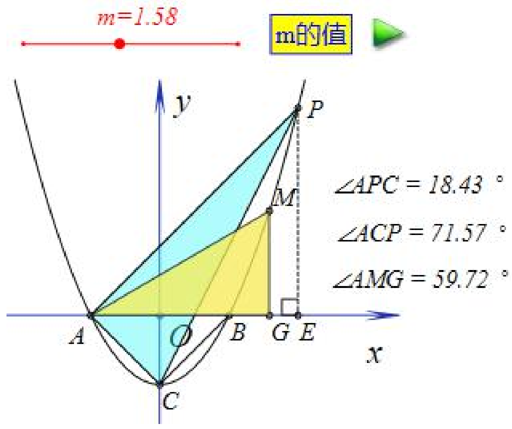


图 1-4-2-3

【思路点拨】

在△*PCA* 中，可以求出两条直角边的长度，继而求出两条直角边的比值，可设为 *k*.在△*AMG* 中，当对应的两条直角边之比等于比值 *k* 或者这个比值的倒数 $\frac{1}{k}$，即可决定点 *M* 的位置.

关于 *AG* 的长度可以对点 *M* 在对称轴左侧和在对称轴右侧两种情况分别讨论.

【动态解析】

在 Rt△*ACO* 中，*OA*=*OC*=1，所以 *AC*=$\sqrt{2}$；根据（2）知，在 Rt△*APE* 中，*PE*=*AE*=3，所以 *AP*=$3\sqrt{2}$.

则 $\frac{AP}{AC}=3$，$\frac{AC}{AP}=\frac{1}{3}$.

因为点 *M* 在抛物线上，因此可设点 *M* 的坐标为（m，m^2-1），那么 *MG*= m^2-1，而当 *M* 在点 *A* 左侧，如图 3 所示，即 m<-1 时 *GA*=-*m*-1；当 *M* 在点 *B* 右侧，如图 1-4-2-3 所示，即 m>1 时 *GA*=*m*+1.

当点 *M* 在点 *A* 的左侧时，若 $\frac{MG}{AG}=3$，如图 1-4-2-4 所示，由 $\frac{m^2-1}{-m-1}=1-m=3$ 得：$m=-2$，点 *M* 的坐标为（-2，3）；若 $\frac{MG}{AG}=\frac{1}{3}$，如图 1-4-2-5 所示，由 $\frac{m^2-1}{-m-1}=1-m=\frac{1}{3}$ 得：$m=\frac{2}{3}$（舍去）.

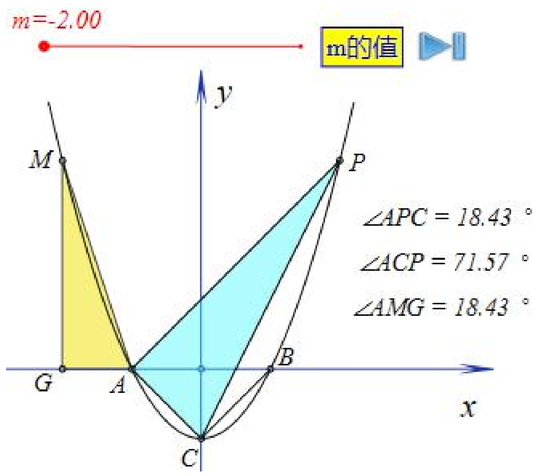


图 1-4-2-4

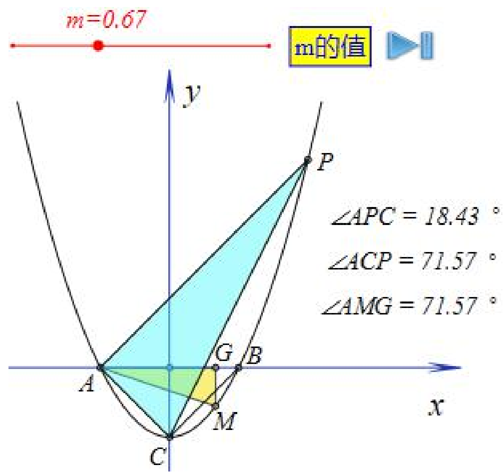


图 1-4-2-5

当点 M 在点 B 的右侧时，若 $\dfrac{MG}{AG}=3$，如图 1-4-2-6 所示，由 $\dfrac{m^2-1}{m+1}=m-1=3$ 得：$m=4$，点 M 的坐标为（4，15）；若 $\dfrac{MG}{AG}=\dfrac{1}{3}$，如图 1-4-2-7 所示，由 $\dfrac{m^2-1}{m+1}=m-1=\dfrac{1}{3}$ 得：$m=\dfrac{4}{3}$，点 M 的坐标为（$\dfrac{4}{3}$，$\dfrac{7}{9}$）.

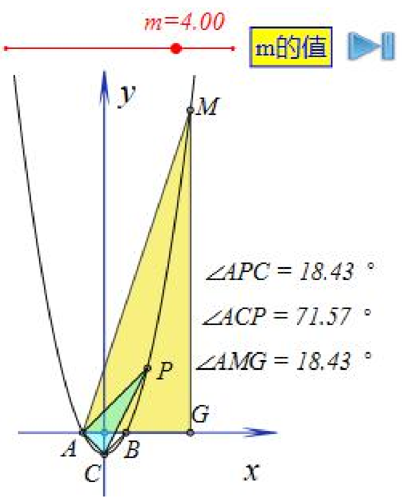


图 1-4-2-6

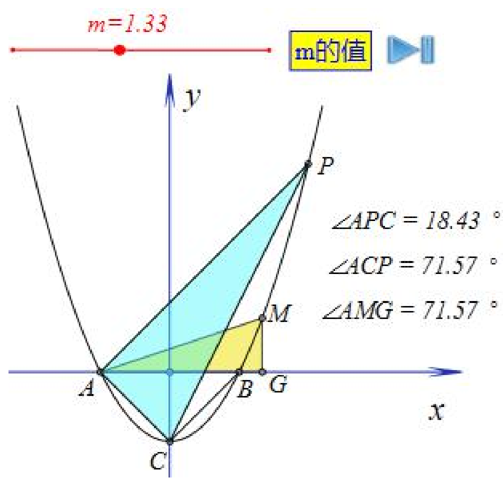


图 1-4-2-7

综上所述，当以 A、M、G 三点为顶点的三角形与△PCA 相似.时，点 M 的坐标为：（-2，3）或（4，15）或（$\dfrac{4}{3}$，$\dfrac{7}{9}$）.

【简要评注】

此题属于抛物线上的动点与相似三角形的存在性问题，因为∠PAC=∠MGA=90°，所以根据对应顶点的不同分有△AMG ∽△PCA 和△MAG ∽△PCA 两种情况讨论，其讨论方式与上面例 1—11 相同，通过比例式求 MG 的长，进而通过抛物线解析式求点 M 的坐标，值

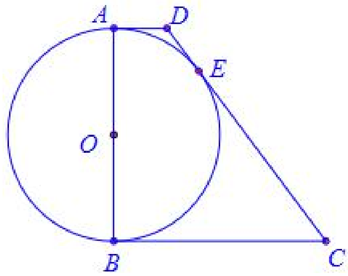
得注意的是由于点 M 在抛物线上，所以每种情况下还要再根据点 M 在抛物线对称轴左侧和右侧再次分情况讨论.

巩固练习（四）

练习 1-4-1：如下图，在梯形 $ABCD$ 中，$AD//BC$，$AB\perp BC$，以 AB 为直径的⊙O 与 DC 相切于 E．已知 AB=8，边 BC 比 AD 大 6

（1）求边 AD、BC 的长.

（2）在直径 AB 上是否存在一动点 P，使以 A、D、P 为顶点的三角形与△BCP 相似?若存在，求出 AP 的长；若不存在，请说明理由.

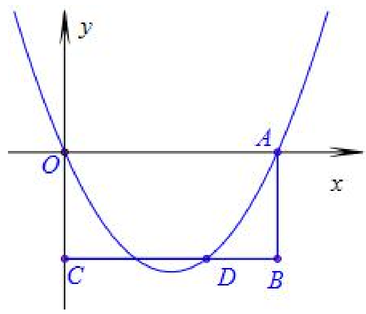


练习 1-4-2：矩形 $OABC$ 在平面直角坐标系中位置如下图所示，A、C 两点的坐标分别为 $A(6,0)$，$C(0,-3)$，D 点在 CB 上，并且 CD=4.

（1）求点 D 的坐标；

（2）若抛物线 $y=ax^2-\frac{9}{4}x$ 经过点 A，试确定此抛物线的表达式；

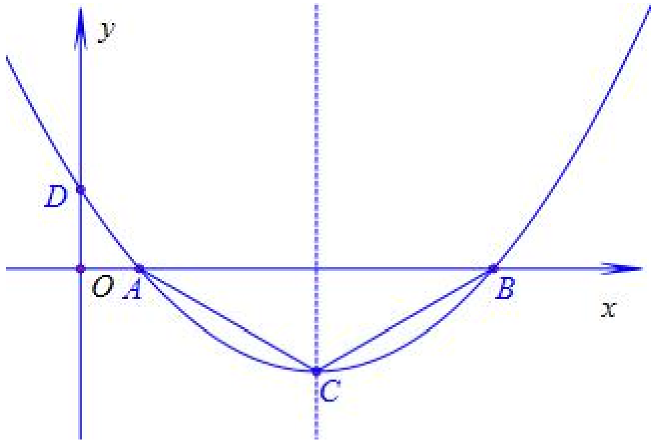
（3）设（2）中的抛物线的对称轴与直线 OD 交于点 M，点 P 为对称轴上一动点，以 P、O、M 为顶点的三角形与△OCD 相似，求符合条件的点 P 的坐标.



练习 1-4-3：如下图，二次函数的图象经过点 $D(0,\ \frac{7}{9}\sqrt{3})$，且顶点 C 的横坐标为 4，该图象在 x 轴上截得线段 AB 的长为 6.

（1）求二次函数的解析式；

（2）在抛物线上是否存在点 Q，使△QAB 与△ABC 相似？如果存在，求出点 Q 的坐标；如果不存在，请说明理由.


y
D
O
A
B
x
C

本节小结

当两个三角形有两组对应角分别相等时，这两个三角形就是相似三角形.因此，首先要确定一组相等的对应角，再去研究另外一组对应角相等关系成立的条件.

找第一组相等的对应角时，宜选择一组固定的角或者特殊的角（如直角）.

当一个三角形的两个角或者三个角都在变化时， 它的哪个角与另外一个三角形中的某个角是对应角，需要进行分类讨论.

第五节 平行四边形

1．抛物线上的一个动点

例 1-5-1． 已知抛物线 $y=x^2-2x+a$（$a<0$）与 y 轴相交于点 A，顶点为 M .直线 $y=\frac{1}{2}x-a$ 分别与 x 轴，y 轴相交于 B，C 两点，并且与直线 AM 相交于点 N .

（1）填空：试用含有 a 的代数式分别表示点 M 与 N 的坐标；

（2）如图 1-5-1-1，将△NAC 沿 y 轴翻折，若点 N 的对应点 N' 恰好落在抛物线上，AN' 与 x 轴交于点 D，连结 CD，求 a 的值和四边形 $ADCN$ 的面积；

（3）在抛物线 $y=x^2-2x+a$（$a<0$）上是否存在一点 P，使得以 P，A，C，N 为顶点的四边形是平行四边形？若存在，求出 P 点的坐标；若不存在，试说明理由.

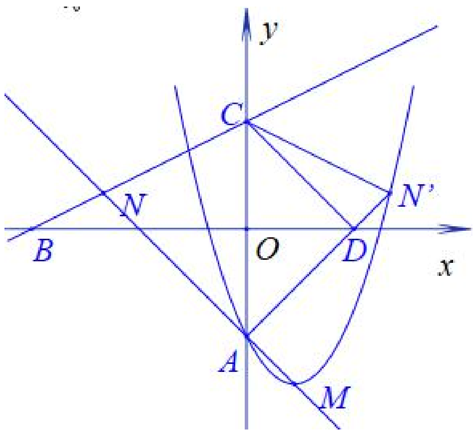


图 1-5-1-1

（一）求点 M、点 N 的坐标

将抛物线抛物线 $y=x^2-2x+a$ 化为顶点式可以直接求出点 M 的坐标，联立直线 $y=\frac{1}{2}x-a$ 和直线 AM 的解析式可求出交点 N 的坐标.

因为 $y=x^2-2x+a=(x-1)^2+a-1$，所以点 M 的坐标为（1，a-1）.因为点 A 的坐标为（0，a），所以直线 AM 的解析式为 $y=-x+a$，结合直线 $y=\frac{1}{2}x-a$，求出交点 N 的坐标为（$\frac{4}{3}a,-\frac{1}{3}a$）.

（二）求 a 的值和四边形 ADCN 的面积

因为点 N' 与点 N 关于 y 轴对称，所以点 N' 的坐标为 $\left(-\frac{4}{3}a,-\frac{1}{3}a\right)$，因为点 N' 在抛物线 $y=x^2-2x+a$ 上，所以将其坐标代入解析式得：$-\frac{1}{3}a=\frac{16}{9}a^2+\frac{8}{3}a+a$，求出 $a_1=0$（不合题意，舍去），$a_2=-\frac{9}{4}$，所以 $N\left(-3,\frac{3}{4}\right)$、$N'\left(3,\frac{3}{4}\right)$，由点 A 和点 N' 坐标可求出直线 AN' 的解析式为 $y=x-\frac{9}{4}$，从而求出 $D\left(\frac{9}{4},0\right)$，所以 $S_{\text{四边形ADCN}}=S_{\Delta ACN}+S_{\Delta ACD}=\frac{189}{16}$.

（三）探索以 P，A，C，N 为顶点的平行四边形的存在性问题

【动感体验】

打开文件"例 1-5-1.dmr"，如图 1-5-1-2 所示，点 P_1、P_2、P_3 分别是以 $\angle NAC$、$\angle CAN$、$\angle CAN$ 为内角的平行四边形的第四个顶点. 通过变量尺可以改变 a 的值或通过按钮设置它的值，从而使得点 A 可以上下拖动，观察点 P_1、P_2 和 P_3 是否能够出现在抛物线 $y=x^2-2x+a$ 上.

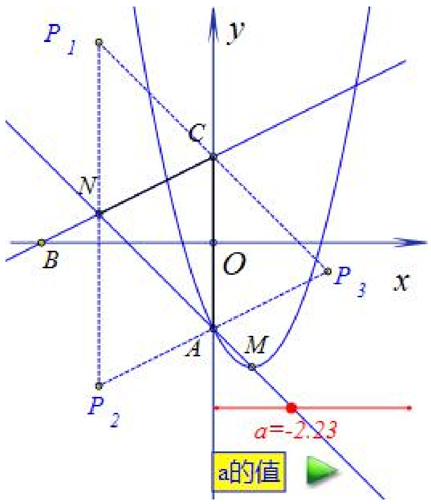


图 1-5-1-2

【思路点拨】

通过平行四边形对角线的性质，求出点 P_1、P_2、P_3 的坐标，然后检验这些点是否能够出现在抛物线上，即：求出的 a 的值是否满足题意.

【动态解析】

点 A（0，a）、C（0，$-a$）、N（$\frac{4}{3}a,-\frac{1}{3}a$）.

1.若点 $P_1(x_1，y_1)$是以$\angle NAC$为内角的平行四边形的顶点，则有$\begin{cases} x_1+0=0+\dfrac{4}{3}a \\ y_1+a=-a-\dfrac{1}{3}a \end{cases}$，解得：$x_1=\dfrac{4}{3}a$，$y_1=-\dfrac{7}{3}a$.若点 P_1 在抛物线上，则有$-\dfrac{7}{3}a=\dfrac{16}{9}a^2-\dfrac{8}{3}a+a$，解得：$a=0$（如图 1-5-1-3 所示，舍去）或$a=-\dfrac{3}{8}$，如图 1-5-1-4 所示，则点 P 的坐标为（$-\dfrac{1}{2}$，$\dfrac{7}{8}$）.

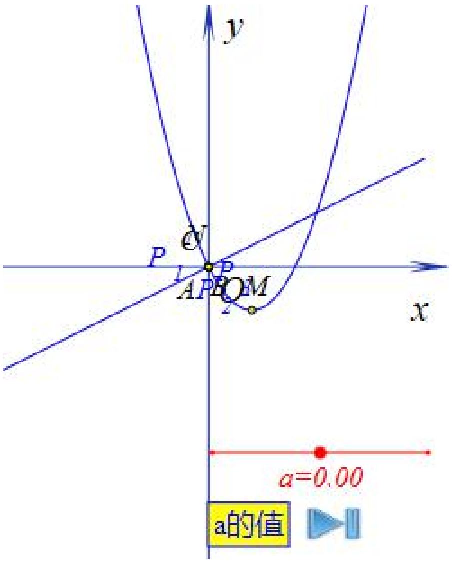


图 1-5-1-3

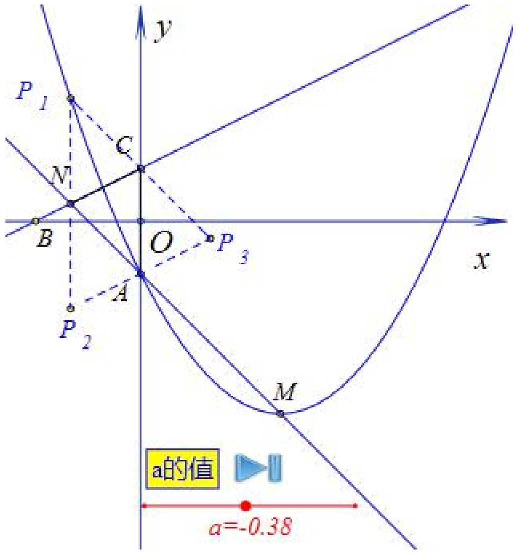


图 1-5-1-4

2.若点 $P_2(x_2，y_2)$是以$\angle NCA$为内角的平行四边形的顶点，则有$\begin{cases} x_2+0=0+\dfrac{4}{3}a \\ y_2-a=a-\dfrac{1}{3}a \end{cases}$，解得：$x_2=\dfrac{4}{3}a$，$y_1=\dfrac{5}{3}a$.若点 P_2 在抛物线上，则有$\dfrac{5}{3}a=\dfrac{16}{9}a^2-\dfrac{8}{3}a+a$，解得：$a=0$（舍去）或$a=\dfrac{15}{8}$（如图 1-5-1-5 所示，舍去）.

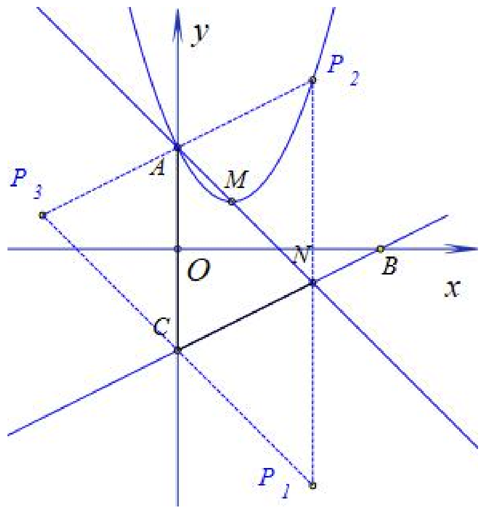


图 1-5-1-5

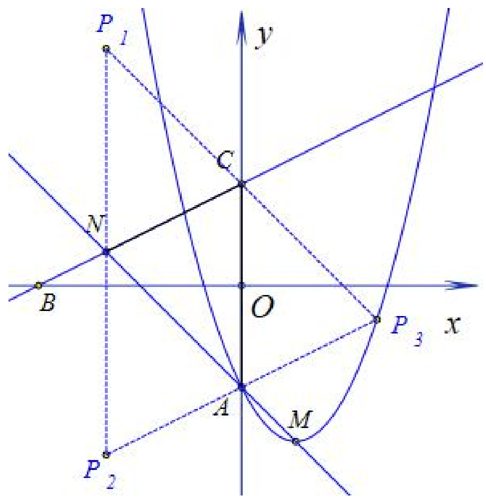


图 1-5-1-6

3.若点 $P_3(x_3$，$y_3)$是以∠CNA 为内角的平行四边形的顶点，则有$\begin{cases} x_3+\dfrac{4}{3}a=0+0 \\ y_3-\dfrac{1}{3}a=a-a \end{cases}$，解得：$x_3=-\dfrac{4}{3}a$，$y_3=\dfrac{1}{3}a$.若点 P_3 在抛物线上，则有$\dfrac{1}{3}a=\dfrac{16}{9}a^2+\dfrac{8}{3}a+a$，解得：$a=0$（舍去）或$a=-\dfrac{15}{8}$如图 1-5-1-6 所示.则点 P 的坐标为（$\dfrac{5}{2}$，$-\dfrac{5}{8}$）.

综上所述，当以 P，A，C，N 为顶点的四边形是平行四边形时，点 P 的坐标为（$-\dfrac{1}{2}$，$\dfrac{7}{8}$）或（$\dfrac{5}{2}$，$-\dfrac{5}{8}$），对应 a 的值分别为$a=-\dfrac{3}{8}$或$a=-\dfrac{15}{8}$.

【简要评注】

此题属于抛物线上一动点产生的平行四边形存在性问题.首先分别考虑以∠NAC、∠ANC、∠NCA 为内角时计算出平行四边形的第四个顶点 P 的坐标，再将点 P 的坐标代入抛物线的解析式，可讨论点 P 的存在性.

2．折线段上的一个动点

例 1-5-2．已知：如图 1-5-2-1，在直角梯形 *COAB* 中，*OC*∥*AB*，以 *O* 为原点建立平面直角坐标系，*A*、*B*、*C* 三点的坐标分别为 *A*（8，0），*B*（8，10），*C*（0，4），点 *D* 为线段 *BC* 的中点，动点 *P* 从点 *O* 出发，以每秒 1 个单位的速度，沿折线 *OABD* 的路线移动，移动的时间为 t 秒．

（1）求直线 *BC* 的解析式；

（2）若动点 *P* 在线段 *OA* 上移动，当 t 为何值时，四边形 *OPDC* 的面积是梯形 *COAB* 面积的 $\frac{2}{7}$？

（3）动点 *P* 从点 *O* 出发，沿折线 *OABD* 的路线移动过程中，设△*OPD* 的面积为 *S*，请直接写出 *S* 与 t 的函数关系式，并指出自变量 t 的取值范围；

（4）当动点 *P* 在线段 *AB* 上移动时，能否在线段 *OA* 上找到一点 *Q*，使四边形 *CQPD* 为矩形？请求出此时动点 *P* 的坐标；若不能，请说明理由．

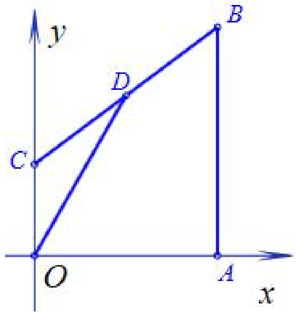


图 1-5-2-1

（一）求直线 *BC* 的解析式

此题为常规题，利用待定系数法即可求出直线 *BC* 的解析式.

设直线 *BC* 的解析式为 y=*kx*+*b*　依题意得：$\begin{cases}4=k\cdot 0+4\\10=8k+b\end{cases}$，解之得：$k=\frac{3}{4}$；　$b=4$.

所以直线 *BC* 的解析式为 y=$\frac{3}{4}x+4$.

（二）求当 t 为何值时，四边形 *OPDC* 的面积是梯形 *COAB* 面积的 $\frac{2}{7}$

在线段 *OA* 上拖动点 *P*，可以发现 $S_{四边形OPDC}=S_{\triangle OCD}+S_{\triangle OPD}$，如图 1-5-2-2 所示，随着点 *P* 的运动，△*OCD* 的形状不变，而△*OPD* 的形状发生变化.

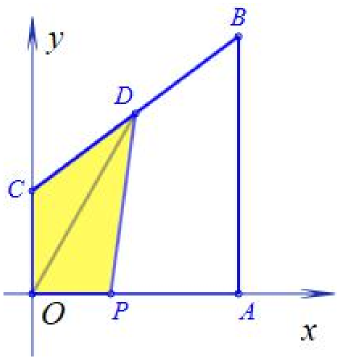


图 1-5-2-2

对于△*OCD*，若以 *OC* 为底边，则三角形的高为点 *D* 到直线 *OC* 的垂线段.因为 *OC*=4，*OC* 边上的高为$\frac{1}{2}OA$=4，所以$S_{\Delta COD}=8$；对于△*OPD*，若以 *OP* 为三角形的底边，则三角形的高为点 *D* 到 *OA* 的垂线段，即梯形 *OABC* 的中位线.由于 *OP*=t，*OP* 边上的高为$\frac{1}{2}(CO+AB)=7$，所以$S_{\Delta CDP}=\frac{7}{2}t$，根据$\frac{2}{7}S_{梯形COAB}=S_{四边形OPDC}$，可得$t=\frac{16}{7}$.

（三）求△*OPD* 的面积 *S* 与 *t* 的函数关系式

【动感体验】

打开文件“例 1-5-2.dmr”，如图 1-5-2-3 所示，通过变量尺改变字母 t 的值或者通过按钮设置它的值，即可使得点 *P* 沿着折线段 *OABD* 运动.观察点 *P* 在不同线段上时，△*OPD* 的形状有什么变化以及点 *P* 的运动时如何影响△*OPD* 的面积的.

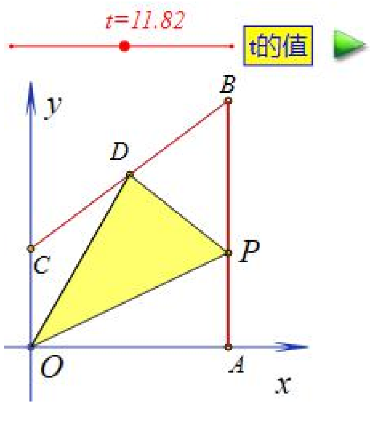


图 1-5-2-3

【思路点拨】

因为点 *P* 的位置不同，割补的方法不同,分三种情况讨论△*OPD* 的面积.

【动态解析】

1.当点 *P* 在线段 *OA* 上运动时，如图 1-5-2-4 所示，观察△*OPD* 的三边及对应边上的高.可以知道：*OP*=t（0＜t＜8），而 *OP* 边上的高不变，即点 *D* 到 *OA* 的距离，利用梯形中位线

定理易得 *OP* 边上的高为 7，所以 $S=\frac{7}{2}t$ （0＜t＜8）.

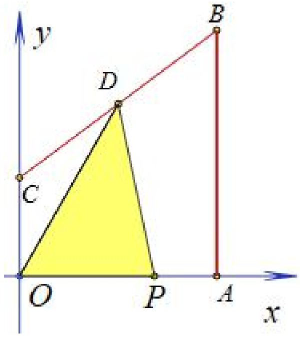


图 1-5-2-4

2.当点 *P* 在线段 *AB* 上运动时，如图 1-5-28 所示，观察△*OPD* 的三边及对应边上的高，发现随着 *P* 的运动，三边上的高都在发生变化，用直接法表示△*OPD* 的面积比较困难，因此考虑用间接法表示△*OPD* 的面积：即 $S=S_{梯形COAB}-S_{\Delta COD}-S_{\Delta OAP}-S_{\Delta BDP}$.由问题（2）可得 $S_{梯形COAB}$=56，$S_{\Delta COD}$=8，而 $S_{\Delta OAP}=\frac{1}{2}AO\cdot AP=\frac{1}{2}(t-8)\cdot 8=4t-32$；对于△*BOP*，若以 *BP* 为底边，则三角形的高为点 *D* 到 *AB* 的垂线段，而 *BP*=*OA*+*AB*-t=18-t，*BP* 边上的高=$\frac{1}{2}OA=4$，所以 $S_{\Delta BDP}=\frac{1}{2}(18-t)\times 4=36-2t$，所以

$S=S_{梯形COAB}-S_{\Delta COD}-S_{\Delta OAP}-S_{\Delta BDP}$=44-2t（8≤*x*＜18）.

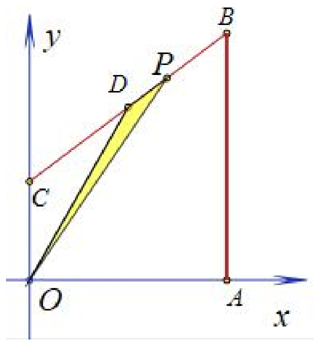


图 1-5-2-5

3.当点 *P* 在线段 *BD* 上运动时，如图 1-5-2-5 所示，观察△*OPD* 的形状与点 *P* 的关系，发现随着点 *P* 的运动，*BP* 边上的高不变，且△*OPD* 中 *BP* 边上的高与△*OCD* 中 *CD* 边上的高为同一条高.由 *B*（8，10），*C*（0，4），可得 *BC*=10，所以 *BD*=*CD*=5，所以 *DP*=*OA*+*AB*+*BC*-t=23-t，由问题（2）$S_{\Delta COD}$=8，利用等面积法求得 *CD* 边上的高（即 *BP* 边上的高）$h=\frac{16}{5}$，所以 $s=\frac{1}{2}(23-t)\times\frac{16}{5}=-\frac{8}{5}t+\frac{184}{5}$ （$23\le t<28$）

（四）探索是否存在点 *Q* 使得四边形 *CQPD* 为矩形

【动感体验】

单击“下一页”按钮，进入第二页，如图 1-5-2-6 所示，拖动点 P 和点 Q，观察四边形 $CQPD$ 是否可能为矩形.

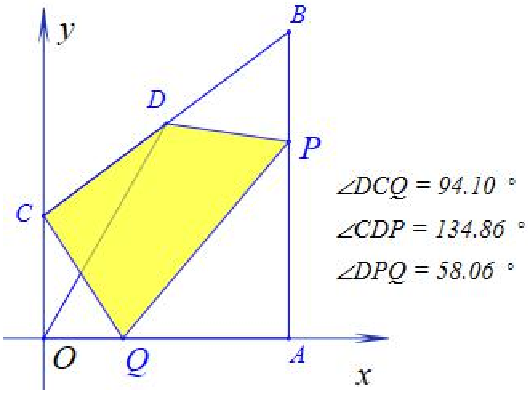


图 1-5-2-6

【思路点拨】

要使四边形 $CQPD$ 为矩形，先根据 $\angle PDC=90°$ 得到点 P 的位置，再考虑点 Q 的位置，从而判断点 Q 是否在 OA 上.

【动态解析】

在线段 AB 上拖动点 P 使得 $PD\perp CD$，若在 OA 上存在点 Q 使得四边形 $CQPD$ 为矩形，则有 $PQ=CD=BD=5$，$PQ\parallel CD$，$\angle QPD=90°$，所以 $\mathrm{Rt}\triangle PAQ\backsim\mathrm{Rt}\triangle BDP$，进而求得 $PB=5$，$PB=PD$，这与三角形 PBD 是直角三角形相矛盾，所以在 OA 上不存在点 Q，使四边形 $CQPD$ 为矩形.

【简要评注】

涉及求面积的问题时，对于规则图形要选择适当的底和高，对于不规则的图形通常利用割补法求面积. 在讨论矩形的存在性问题中，通常利用矩形的判定定理进行判定，特别是角和对角线的特殊性质.

3．速度不同的两个动点

例 1-5-3．如图 1-5-3-1，在平面直角坐标系 xOy 中，A（18，0）、B（0，-10）、C（8，-10）.现有两动点 *P*、*Q* 分别从 *O*、*C* 两点同时出发，点 *P* 以每秒 4 个单位的速度沿 *OA* 向终点 *A* 移动，点 *Q* 以每秒 1 个单位的速度沿 *CB* 向点 *B* 移动，点 *P* 停止运动时，点 *Q* 也同时停止运动.线段 *OC*，*PQ* 相交于点 *D*，过点 *D* 作 *DE*∥*OA*，交 *CA* 于点 *E*，射线 *QE* 交 *x* 轴于点 *F*.设动点 *P*、*Q* 移动的时间为 t (s)

当 t 为何值时，四边形 *PQCA* 为平行四边形？请写出计算过程。

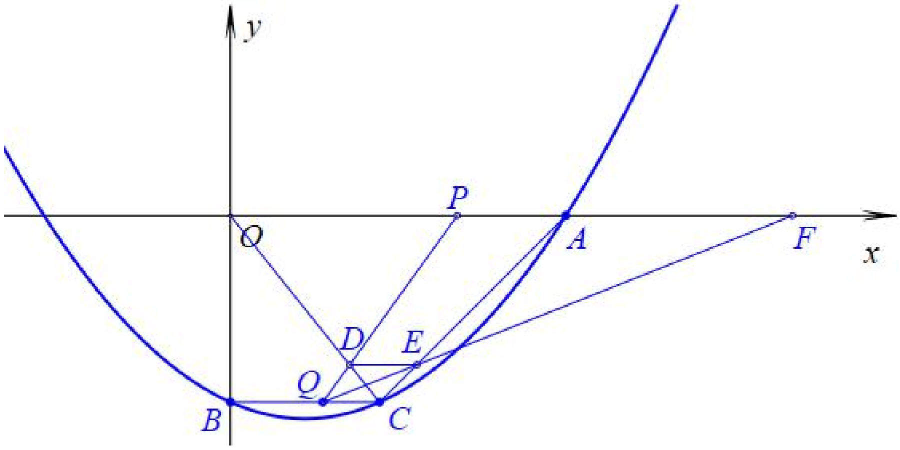


图 1-5-3-1

【动感体验】

打开文件“例 1-5-3.dmr”，如图 1-5-3-2 所示，通过变量尺改变 t 的值或通过按钮设置它的值，可以观察到始终有 $\dfrac{OP}{CQ}=4$ 成立.当点 *P* 从左向右运动的过程中，请你观察点 *P* 和点 *Q* 的运动对四边形 *PQCA* 的形状的影响.

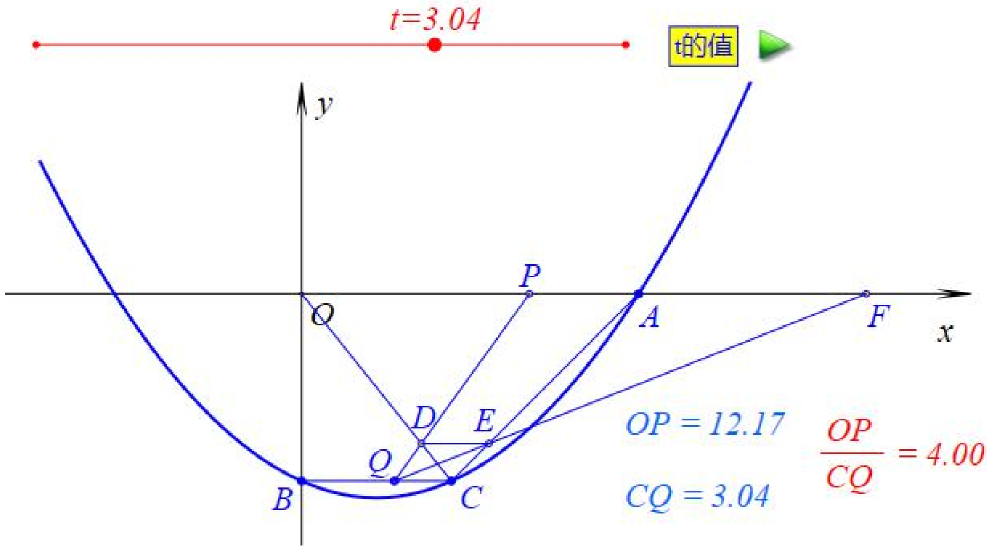


图 1-5-3-2

【思路点拨】

可以知道，当点 P 与点 O 和点 A 重合时,四边形 $PQCA$ 退化为三角形，其他时刻四边形 $PQCA$ 均为梯形.

因为梯形的上底和下底是平行的，那么只需要下面任何一个条件成立，梯形 $PQCA$ 就转化为平行四边形：

（1） $AC//PQ$;

（2） $CQ=PA$.

判断直线平行，需要通过角的关系.因此还是通过第（2）个条件，即 $CQ=OP$，探索平行四边形成立的过程更简单些.

【动态解析】

单机“t 的值”按钮，在弹出的对话框中输入：18/t，单击“确定”按钮，结果如图 1-5-3-3 所示，四边形 $PQCA$ 为平行四边形，因此这时有 $CQ=PA$.

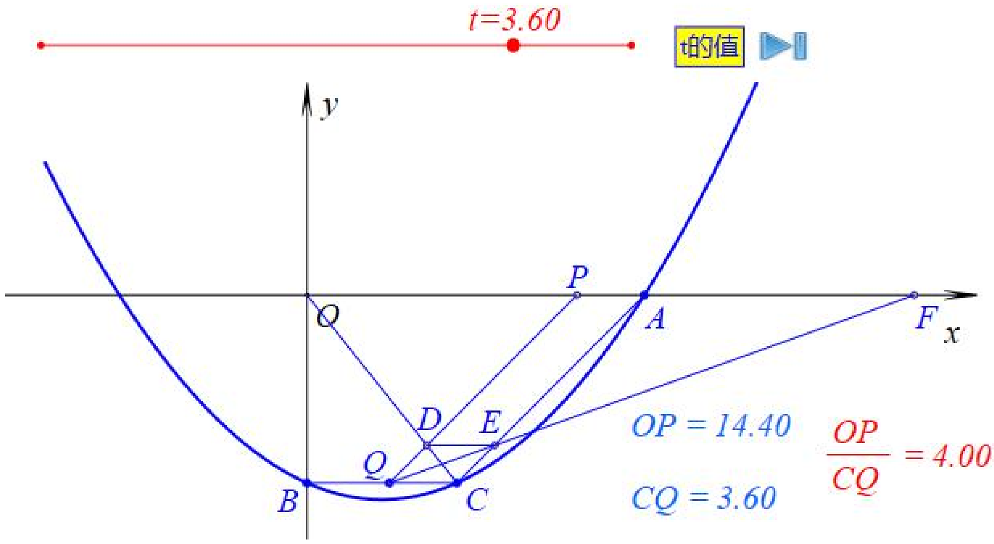


图 1-5-3-3

因为 $QC=t$，$PA=OA-OP=18-4t$，所以 $18-4t=t$，求出 $t=\dfrac{18}{5}$.

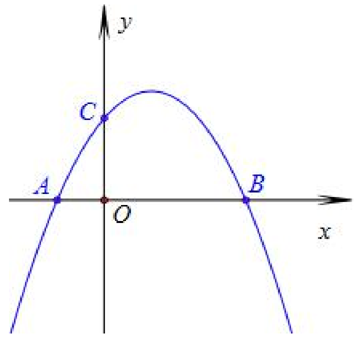
巩固练习（五）

练习 1-5-1： 如下图，已知抛物线 $y=-ax^2+2ax+b$ 与 x 轴的一个交点为 A(-1，0)，与 y 轴的正半轴交于点 C.

（1）直接写出抛物线的对称轴，及抛物线与 x 轴的另一个交点 B 的坐标；

（2）当点 C 在以 AB 为直径的⊙P 上时，求抛物线的解析式；

（3）坐标平面内是否存在点 M，使得以点 M 和⑵中抛物线上的三点 A、B、C 为顶点的四边形是平行四边形？若存在，请求出点 M 的坐标；若不存在，请说明理由.

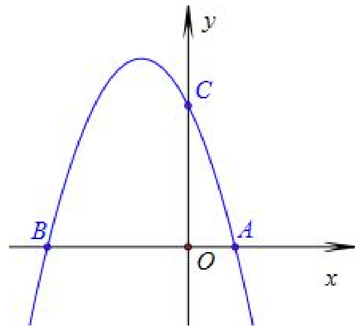


练习 1-5-2：如下图，抛物线 $y=ax^2+bx+3$ 与 y 轴交于点 C，与 x 轴交于 A、B 两点，$\tan\angle OCA=\frac{1}{3}$，$S_{\Delta ABC}$=6.

（1）求点 B 的坐标；

（2）求抛物线的解析式及顶点坐标；

（3）若点 E 在 x 轴上，F 点在抛物线上，如果 A、C、E、F 构成平行四边形，写出点 E 的坐标.

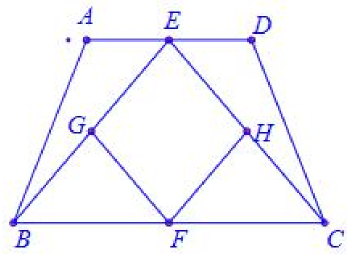


练习 1-5-3：如下图，等腰梯形 $ABCD$ 中，$AD\,//\,BC$，点 E 是线段 AD 上的一个动点(E 与 A、D 不重合)，G、F、H 分别是 BE、BC、CE 的中点.

（1）试探索四边形 $EGFH$ 的形状，并说明理由.

（2）当点 E 运动到什么位置时，四边形 $EGFH$ 是菱形?并加以证明.

（3）若（2）中的菱形 $EGFH$ 是正方形，请探索线段 EF 与线段 BC 的关系，并证明你的结论.



练习 1-5-4：已知双曲线 $y=\dfrac{k}{x}$ $(k>0)$与直线 $y=k'x$ 交于 A，B 两点，点 A 在第一象限. 过原点 O 作另一条直线 l，交双曲线 $y=\dfrac{k}{x}$ $(k>0)$于 P，Q 两点，点 P 在第一象限. 设点 A，P 的横坐标分别为 m，n，四边形 $APBQ$ 可能是矩形吗?可能是正方形吗?若可能，直接写出 m、n 应满足的条件；若不可能，请说明理由.

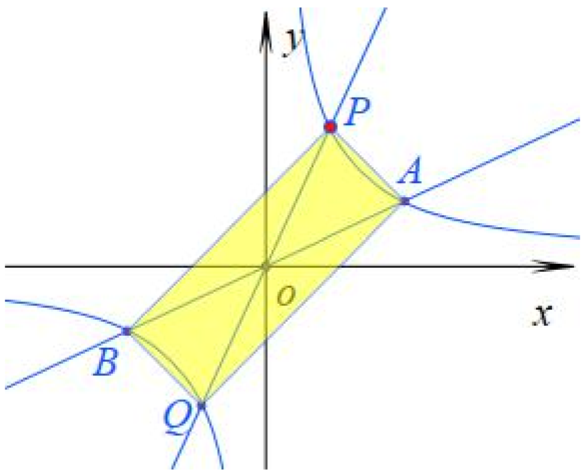


图 1-5-48

本节小结

对于平行四边形存在性问题的讨论，通常要根据已知边进行分类，分已知边是平行四边形的边或对角线两种情况讨论，对于不同情况画出所有符合题意的平行四边形，根据不同情况进一步分析求解.对于特殊平行四边形问题的讨论，要抓住这些图形的特殊特征，如对于菱形我们抓住四边相等或对角线互相垂直平分的条件，对于矩形我们抓住有一个角为直角的平行四边形或对角线相等且平分的条件；通过对边或角的分析得到解题方法.

第六节 梯形

1．运动速度不同的四个点

例 1-6-1.如图 1-6-1-1，在矩形 $ABCD$ 中，BC=20cm，P，Q，M，N 分别从 A，B，C，D 出发沿 AD，BC，CB，DA 方向在矩形的边上同时运动，当有一个点先到达所在运动边的另一个端点时，运动即停止．已知在相同时间内，若 $BQ=x$cm($x\neq 0$)，则 $AP=2x$cm，$CM=3x$cm，$DN=x^2$cm．

（1）当 x 为何值时，以 PQ，MN 为两边，以矩形的边（AD 或 BC）的一部分为第三边构成一个三角形；

（2）当 x 为何值时，以 P，Q，M，N 为顶点的四边形是平行四边形；

（3）以 P，Q，M，N 为顶点的四边形能否为等腰梯形?如果能，求 x 的值；如果不能，请说明理由．

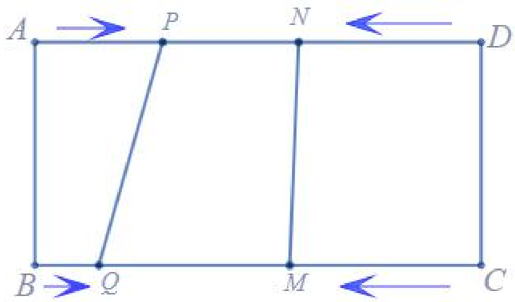


图 1-6-1-1

（一）讨论构成三角形时 x 的值

【动感体验】

打开文件“例 1-6-1.dmr”，如图 1-6-1-2 所示，通过变量尺改变 x 的值或通过按钮设置它的值，点 P、点 Q、点 M 和点 N 的位置会发生对应的改变，通过测量数据请验证下列关系：$AP=2BQ$、$CM=3BQ$、$DN=BQ^2$. 研究当以 PQ、MN 为两边，以矩形的边（AD 或 BC）的一部分为第三边构成一个三角形时，点 P、Q、M、N 应满足的条件.

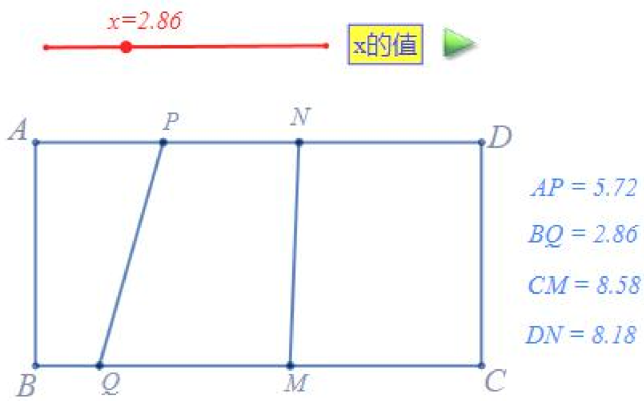


图 1-6-1-2

【思路点拨】

当点 P 与点 N 重合或点 Q 与点 M 重合时，P、Q、M、N 四个顶点构成一个三角形.

【动态解析】

1）若点 P 与点 N 重合，如图 1-6-1-3 所示，此时 $AP+ND=AD$，即 $2x+x^2=20$，解得，

$x_1=\sqrt{21}-1$，$x_2=-\sqrt{21}-1<0$（舍去）

当 $x=\sqrt{21}-1$ 时，$BQ+CM=x+3x=4\left(\sqrt{21}-1\right)<20$，此时点 Q 与点 M 不重合，所以以 PQ，MN 为两边，以矩形的边（AD 或 BC）的一部分为第三边能构成一个三角形.

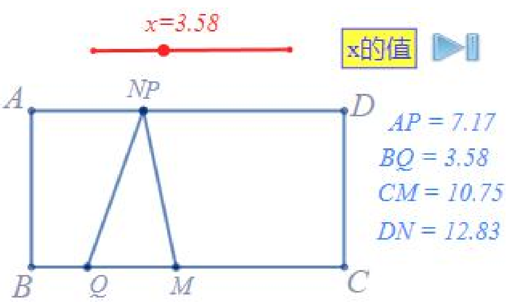


图 1-6-1-3

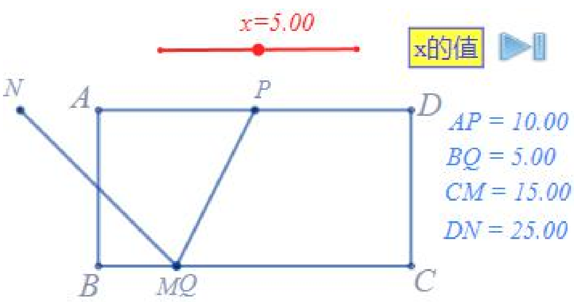


图 1-6-1-4

2）若点 Q 与点 M 重合，如图 1-6-1-4 所示，此时 $BQ+MC=AD$，同理求得 x=5，此时 $DN=x^2=25>20$，以 PQ，MN 为两边，以矩形的边（AD 或 BC）的一部分为第三边不能构成一个三角形.

（二）讨论以 P，Q，M，N 为顶点的四边形是平行四边形时 x 的值

【动感体验】

通过变量尺改变 x 的值或通过按钮设置它的值，点 P、点 Q、点 M 和点 N 的位置会发生对应的改变，观察以 *P*、*Q*、*M*、*N* 四个点构成的四边形能否构成平行四边形.并研究构成平行四边形是四个点之间的位置关系.

【思路点拨】

当 *PN*=*QM* 时，以 *P*，*Q*，*M*，*N* 为顶点的四边形是平行四边形.按照点 *P* 在点 *N* 的左侧和点 *P* 在点 *N* 的右侧两种情况进行分类讨论.

【动态解析】

在 *BC* 上拖动点 *Q*，发现点 *Q* 只能在点 *M* 的左侧，而点 *P* 可能在点 *N* 的左侧，也可能在点 *N* 的右侧，所以根据点 *P* 位置的不同分两种情况讨论.

1）若点 *P* 在点 *N* 的左侧，如图 1-6-1-5 所示，此时当 *PN*=*QM* 时，四边形 *PQMN* 是平行四边形.因为 $PN=AD-AP-ND=20-(2x+x^2)$，$QM=BC-BQ-MC=20-（x+3x）$，所以 $20-(x+3x)=20-(2x+x^2)$，求得 $x_1=0$（舍去），$x_2=2$，所以当 *x*=2 时四边形 *PQMN* 是平行四边形.

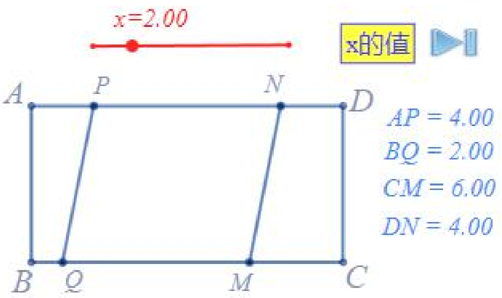


图 1-6-1-5

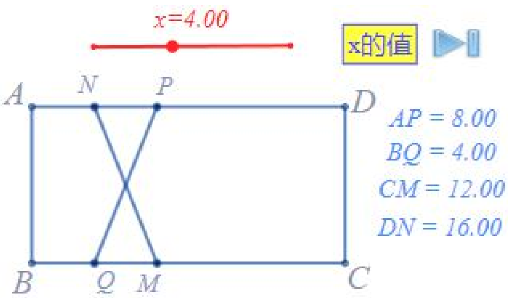


图 1-6-1-6

2）若点 *P* 在点 *N* 的右侧，如图 1-6-1-6 所示，此时当 *PN*=*QM* 时，四边形 *PQMN* 是平行四边形. $PN=AP+ND-AD=(2x+x^2)-20$，$QM=BC-BQ-MC=20-（x+3x）$，所以 $20-(x+3x)=(2x+x^2)-20$ 解得 $x_1=-10$（舍去），$x_2=4$，所以当 *x*=4 时四边形 *NQMP* 是平行四边形.

（三）讨论以 *P*，*Q*，*M*，*N* 为顶点的四边形能否为等腰梯形

【动感体验】

单击“下一页”按钮，进入第二页，如图 1-6-1-7 所示，点 *E*、*F* 分别是点 *Q*、*M* 到 *AD* 的垂足.拖动点 *P*，观察当 *PE*=*NF* 时，以 *P*、*Q*、*M*、*N* 四个点构成的四边形能否构成等腰梯形.

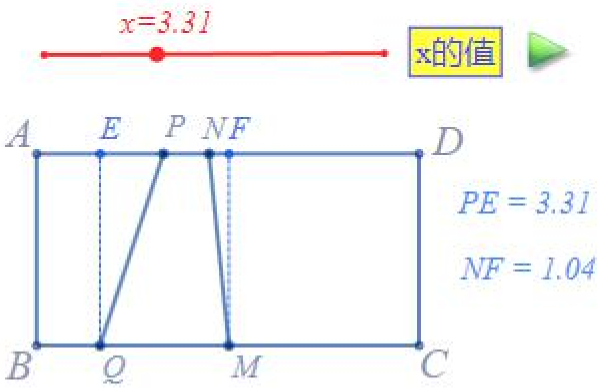


图 1-6-1-7

【动态解析】

因为 $AP>BQ$，所以点 P 在点 Q 的右侧，拖动点 Q 发现，以 P，Q，M，N 为顶点的四边形是等腰梯形，点 N 一定在点 M 的左侧。

过点 Q，M 分别作 AD 的垂线，垂足分别为点 E，F，则 $PE=NF$，由图可知 $PE=AP-BQ=2x-x$，$NF=DN-CM=x^2-3x$，所以 $2x-x=x^2-3x$，解得 $x_1=0$(舍去)，$x_2=4$．如图 1-6-1-7 所示

如图 1-6-1-8 所示，当 x=4 时， 以 P，Q，M，N 为顶点的四边形是平行四边形，所以以 P，Q，M，N 为顶点的四边形不能为等腰梯形.

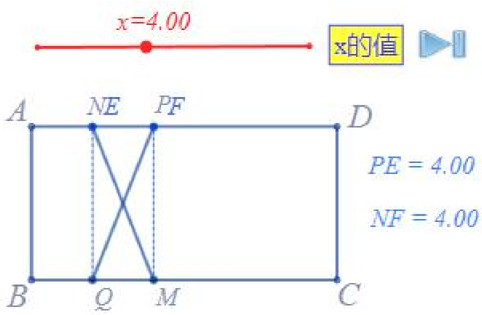


图 1-6-1-8

【简要评注】

本题属于多动点产生的等腰梯形问题，由于 PN 始终与 QM 平行，所以此问题不需要按边和腰的不同分情况讨论，只需要两腰满足 $PQ=MN$ 即可，但求解过程中，并没有用 x 表示出 PQ 和 MN，然后列方程求解，而是将条件 $PQ=MN$ 转换成 $PE=NF$，用 x 表示出 PE 和 NF，然后列方程求解，这样将条件进行转化大大降低了计算的繁琐程度.

2．抛物线上的一个动点

例 1-6-2．如图 1-6-2-1，二次函数 $y=x^2+px+q(p<0)$ 的图象与 x 轴交于 A、B 两点，与 y 轴交于点 C（0，－1），ΔABC 的面积为 $\dfrac{5}{4}$.

（1）求该二次函数的关系式；

（2）过 y 轴上的一点 M（0，m）作 y 轴的垂线，若该垂线与ΔABC 的外接圆有公共点，求 m 的取值范围；

（3）在该二次函数的图象上是否存在点 D，使得以 A、B、C、D 为顶点的四边形（以下简称：四边形 $ABCD$）为直角梯形？若存在，求出点 D 的坐标；若不存在，请说明理由.

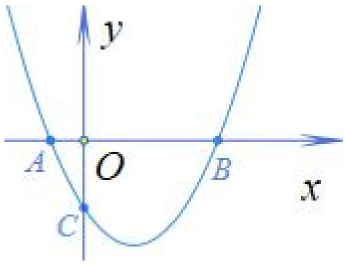


图 1-6-2-1

（一）求二次函数的关系式

因为 C（0，－1），所以 q=－1.由于ΔABC 的面积可以表示为$\dfrac{1}{2}AB\cdot OC$，而 OC=1，ΔABC 的面积为$\dfrac{5}{4}$，所以得到 AB=$\dfrac{5}{2}$.

设点 A（a，0）、B(b，0)，则 AB= b-a=$\sqrt{(b-a)^2}=\sqrt{(a+b)^2-4ab}$，由根与系数的关系：$a$+$b$=－$p$,$ab$ =q=－1，所以$\sqrt{(-p)^2+4}=\dfrac{5}{2}$，解得 P=±$\dfrac{3}{2}$，由对称轴可知 P＜0，所以 P=$-\dfrac{3}{2}$，所以解析式为：$y=x^2-\dfrac{3}{2}x-1$.

（二）求 m 的取值范围

【动感体验】

打开文件“例 1-6-2.dmr”，如图 1-6-2-2 所示，通过变量尺改变 m 的值或者通过按钮设置它的值，观察当经过点 M 的直线与经过 A、B、C 三点的圆有公共点时，点 M 应该满足条件.

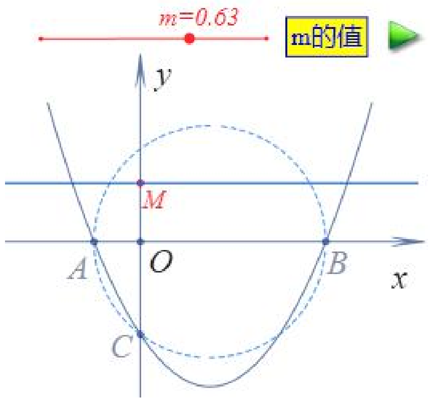


图 1-6-2-2

【思路点拨】

关键在于求出ΔABC外接圆的半径以及圆心的坐标.

【动态解析】

由问题（1）的结论得到$A(-\frac{1}{2}，0)$，$B(2，0)$，而 C（0，-1），所以求出 $AC=\frac{\sqrt{5}}{2}$，

$BC=\sqrt{5}$，因为满足 $AC^2+BC^2=AB^2$，所以ΔABC为直角三角形，外接圆的直径为 $AB=\frac{5}{2}$.

由对称性知 m 的取值范围为$-\frac{5}{4}\le m\le\frac{5}{4}$.

（三）讨论四边形 *ABCD* 为直角梯形时点 *D* 的存在性

【动感体验】

单击"下一页"按钮，进入第二页，如图 1-6-2-3 所示，因为$\angle ACB$为直角，所以当$\angle DAC$或$\angle DBC$为直角时，四边形 *ACBD* 就是直角梯形.通过变量尺改变 m 的值或者通过按钮设置它的值，从而改变点 *D* 的位置，观察当以 *A*、*B*、*C*、*D* 四个点组成的四边形为梯形时，点 *D* 应满足的条件.

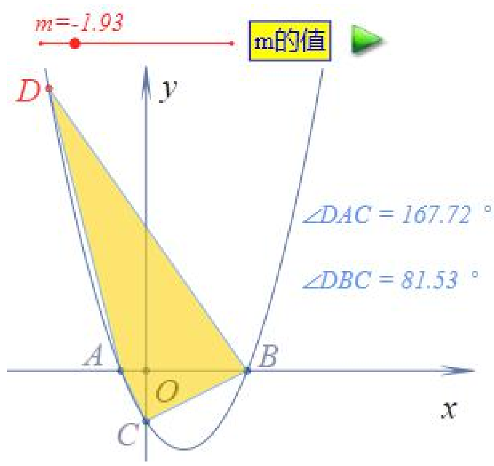


图 1-6-2-3

【思路点拨】

分 AC 为直角梯形底边和 BC 为直角梯形底边两种情况讨论.

【动态解析】

由问题（2）知 $AC \perp BC$，所以当 AC 为直角梯形底边和 BC 为直角梯形底边时，四边形 $ACBD$ 为直角梯形.因此本小题分两种情况讨论：

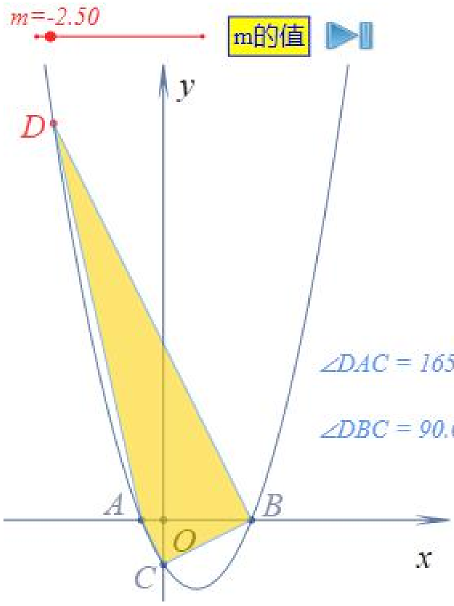


图 1-6-2-4

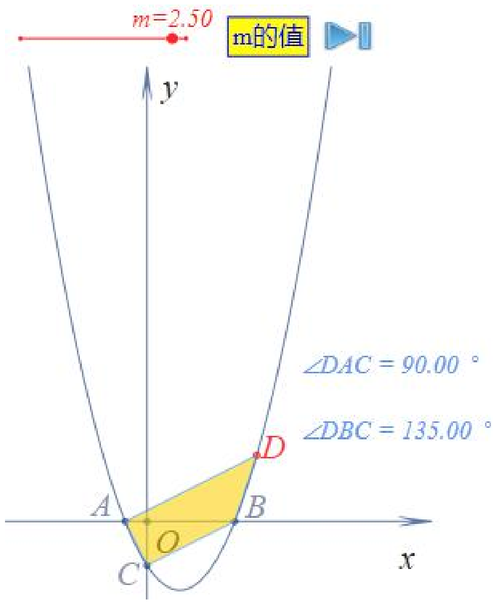


图 1-6-2-5

1.首先考虑 AC 为直角梯形底边时，拖动点 D，发现当 $BD \parallel AC$，四边形 $ACBD$ 为直角梯形，如图 1-6-2-4 所示.易求 AC 的解析式为 $y=-2x-1$，因为 $BD \parallel AC$，所以可设 BD 的解析式为 $y=-2x+b$ 由点 B（2，0），可得 $b=-4$，所以 BD 解析式为 $y=-2x+4$，由 $y=-2x+4$ 和 $y=x^2-\frac{3}{2}x-1$，求出点 D 的坐标为 D（$-\frac{5}{2}$，9）.

2.其次考虑 BC 为直角梯形的底边时，拖动点 D，发现当 $BC//AD$ 时，四边形 $ACBD$ 为直角梯形，如图 1-6-2-5 所示.同理求得点 D 的坐标为 $D(\frac{5}{2},\frac{3}{2})$.

【简要评注】

此题为一动点产生的直角梯形存在性问题，可先讨论以点 A、B、C、D 为顶点的四边形是梯形时点 D 的位置，讨论时分 AB、BC、AC 为梯形的底边三种情况讨论，由于直角梯形是特殊的梯形，所以再结合每种情况下是否存在腰与底垂直的情况进一步讨论分析.

3．沿折线段各自运动的两个点

例 1-6-3．如图 1-6-3-1，在 Rt△*ABC* 中，$\angle C=90°$，$AC=3$，$AB=5$．点 *P* 从点 *C* 出发沿 *CA* 以每秒 1 个单位长的速度向点 *A* 匀速运动，到达点 *A* 后立刻以原来的速度沿 *AC* 返回；点 *Q* 从点 *A* 出发沿 *AB* 以每秒 1 个单位长的速度向点 *B* 匀速运动．伴随着 *P*、*Q* 的运动，*DE* 保持垂直平分 *PQ*，且交 *PQ* 于点 *D*，交折线 *QB-BC-CP* 于点 *E*．点 *P*、*Q* 同时出发，当点 *Q* 到达点 *B* 时停止运动，点 *P* 也随之停止．设点 *P*、*Q* 运动的时间是 t 秒（t>0）．

（1）当 t = 2 时，*AP* =______，点 *Q* 到 *AC* 的距离是______；

（2）在点 *P* 从 *C* 向 *A* 运动的过程中，求△*APQ* 的面积 *S* 与 t 的函数关系式；（不必写出 t 的取值范围）

（3）在点 *E* 从 *B* 向 *C* 运动的过程中，四边形 *QBED* 能否成为直角梯形？若能，求 t 的值．若不能，请说明理由；

（4）当 *DE* 经过点 *C* 时，请直接写出 t 的值．

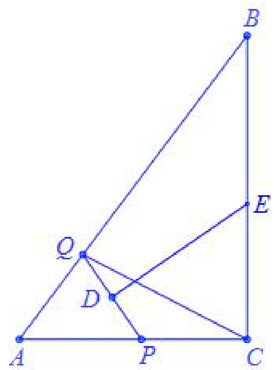


图 1-6-3-1

（一）求 *AP* 及 *Q* 到 *AC* 的距离

当 t=2 时，*CP*=2，*AQ*=2，此时 *AP*=*AC*－*CP*=3－2=1；过 *Q* 作 *QF*⊥*AC* 于点 *F*，如图 1-6-3-2 所示，因为$\angle BCA=90°$，所以 *QF*∥*BC*，△*AFQ*∽△*ACB*，$\dfrac{QF}{BC}=\dfrac{AQ}{AB}$，因为 *AB*=5，*AC*=3，所以 *BC*=4， 所以可求出 $QF=\dfrac{8}{5}$，即 *Q* 到 *AC* 距离为$\dfrac{8}{5}$．

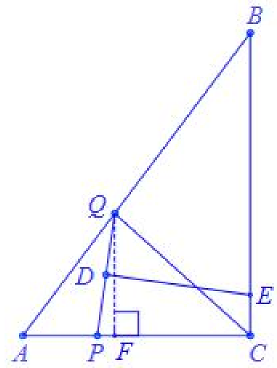


图 1-6-3-2

（二）求$\triangle APQ$的面积 S 与 t 的函数关系式

利用问题（1）的方法，可用 t 表示出 AP 及 AP 边上的高 QF，从而得到$\triangle APQ$ 的面积 S 与 t 的函数关系.

过点 Q 作 AC 的垂足 F，如图 1-6-3-3 所示，AP=3-t， $QF=\dfrac{4}{5}t$，所以$\triangle APQ$ 的面积 $S=\dfrac{1}{2}AP\cdot QF=\dfrac{1}{2}(3-t)\cdot\dfrac{4}{5}t=-\dfrac{2}{5}t^2+\dfrac{6}{5}t$.

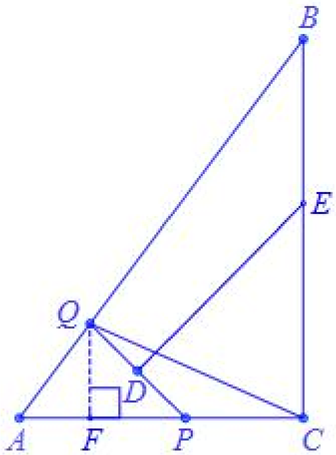


图 1-6-3-3

（三）讨论四边形 $QBED$ 能否成为直角梯形

【动感体验】

打开文件“例 1-6-3.dmr”，如图 1-6-3-4 所示，因为$\angle QDE$=90°，所以当$\angle DQB$ 或$\angle DEB$ 为直角时，四边形 $QDEB$ 即为直角梯形.拖动点 Q，观察四边形 $QDEB$ 是否可能为直角梯形.

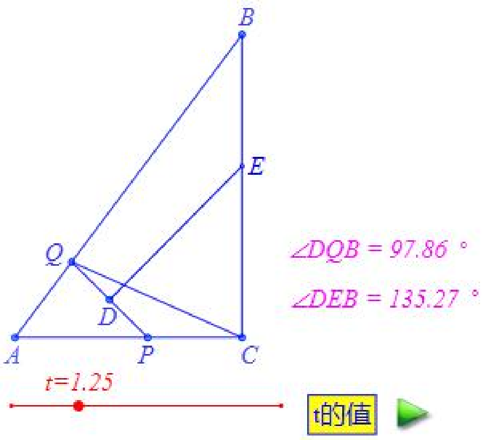


图 1-6-3-4

【思路点拨】

分类讨论直角梯形 *QBED* 的存在性，分 *QB* 为底边和 *BE* 为底边两种情况进行讨论.

【动态解析】

通过对四边形 QBED 的分析，发现点 Q、点 P 在运动过程中，BQ 和 BE 边的位置不变，所以讨论直角梯形 QBED 的存在性时，可以根据底边的不同分 QB 为底边和 BE 为底边两种情况讨论.

1）当 *QB* 为直角梯形 *QBED* 的底边时，拖动点去 *Q* 在线段 *AB* 上运动使得 *ED*∥*BQ*，如图 1-6-3-5 所示，此时∠*AQP*=90°，所以 Rt△*AQP*∽Rt△*ACB*，利用相似比得到 $\frac{AP}{AB}=\frac{AQ}{AC}$，因为 *AP*=3-t，*AB*=5，*AQ*=t，*AC*=3，所以可求出 t=$\frac{9}{8}$.

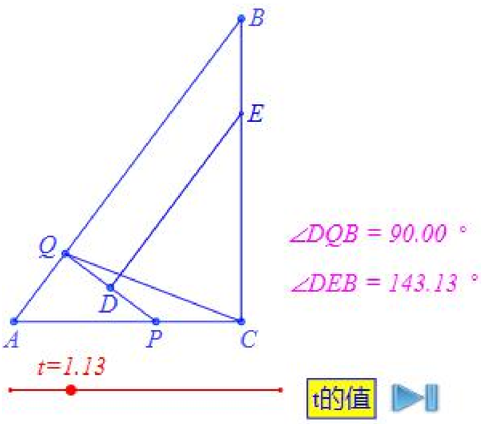


图 1-6-3-5

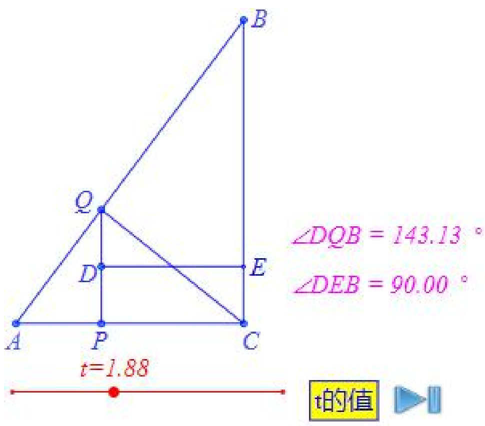


图 1-6-3-6

2）当 *BE* 为直角梯形 *QBED* 的底边时，拖动点 *Q* 在线段 *AB* 上运动使得 *QD*∥*BE*，如图 1-6-3-6 所示，此时 *DE*∥*AC*，∠*APQ*=90°，所以 Rt△*AQP*∽Rt△*ABC*，利用形似比得到 $\frac{AP}{AC}=\frac{AQ}{AB}$，因为 *AP*=3-t，*AB*=5，*AQ*=t，*AC*=3，所以可求出 t=$\frac{15}{8}$.

（四）讨论 *DE* 经过点 *C* 时的 *t* 值

【动感体验】

拖动点 Q，有几个时刻能让 DE 经过点 C.当 DE 经过点 C 时，点 P 和点 Q 应满足什么条件?

【思路点拨】

DE 经过点 C 时，按照点 P 运动的方向分两种情况讨论，两种情况下都要满足 $QC=PC$.

【动态解析】

拖动点 Q 在线段 AB 上运动，发现存在两种情况使得 DE 经过点 C，一种情况是点 P 从点 C 到点 A 的运动过程中，另一种情况是点 P 从点 A 到点 C 的运动过程中.

1.当点 P 由 C 向 A 运动，DE 经过点 C 时，如图 1-6-3-7 所示，此时 PC=t，因为 DE 垂直评分 QP，所以 $QC=PC$，若能用含有 t 的式子表示 QC，则可利用 $QC=PC$ 得到关于 t 的方程.构造直角三角形求 QC：过 Q 作 $QG\perp BC$ 于 G，那么 $\triangle BQG\backsim\triangle BAC$，所以 $\frac{QB}{AB}=\frac{QG}{AC}=\frac{BG}{BC}$，因为 QB=5-t，可求出 QG= $\frac{3}{5}(5-t)$，BG= $\frac{4}{5}(5-t)$，所以 $GC=BC-BG=4-\frac{4}{5}(5-t)=\frac{4}{5}t$，所以 $QC^2=QG^2+GC^2=\left[\frac{3}{5}(5-t)\right]^2+\left(\frac{4}{5}t\right)^2=t^2-\frac{18}{5}t+9$. 由 $QC^2=PC^2$，得到 $t^2-\frac{18}{5}t+9=t^2$，解得 $t=\frac{5}{2}$.

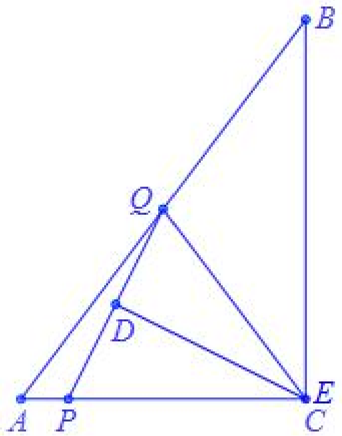


图 1-6-3-7

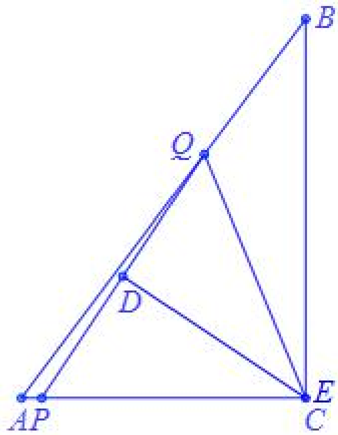


图 1-6-3-8

2.当点 P 由 A 向 C 运动，DE 经过点 C 时，如图 1-6-3-8 所示，此时 PC=6-t，因为 DE 垂直平分 QP，所以 $QC=PC$.求 QC 的方法同上，所以 $QC^2=t^2-\frac{18}{5}t+9$，由 $QC^2=PC^2$，得到 $t^2-\frac{18}{5}t+9=(6-t)^2$，解得 $t=\frac{45}{14}$.

综上所述满足条件的 t 有 2 个，分别是 $t=\dfrac{5}{2}$ 或 $t=\dfrac{45}{14}$.

【简要评注】

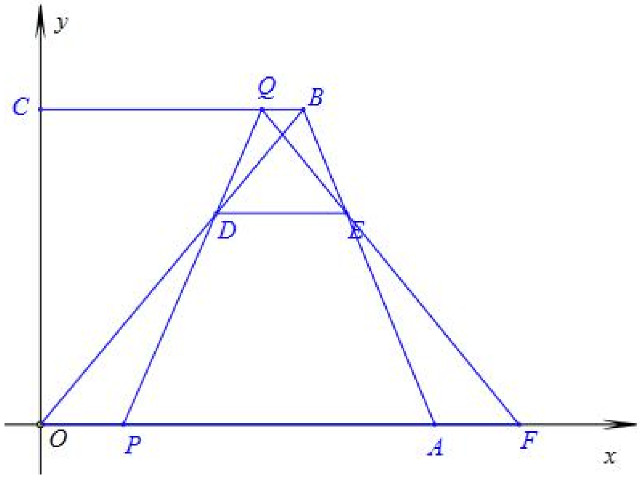
本题涉及的是多动点的直角梯形存在性问题，在分析图形时，要找到变量和不变的量，从而确定讨论的依据，问题中虽然 Q、P 在运动，但 BQ 和 BE 边的位置不变，所以根据底边的不同分 QB 和 BE 两种情况讨论，讨论过程中根据不同的情况画出草图，根据草图找寻图形中满足的条件，从而确定求法.

巩固练习（六）

练习 1-6-1：如下图，在直角梯形 $OABC$ 中， $OA // CB$，A、B 两点的坐标分别为 A（15，0），B（10，12），动点 P、Q 分别从 O、B 两点出发，点 P 以每秒 2 个单位的速度沿 OA 向终点 A 运动，点 Q 以每秒 1 个单位的速度沿 BC 向 C 运动，当点 P 停止运动时，点 Q 也同时停止运动．线段 OB、PQ 相交于点 D，过点 D 作 $DE // OA$，交 AB 于点 E，射线 QE 交 x 轴于点 F．设动点 P、Q 运动时间为 t（单位：s）.

（1）当 t 为何值时，四边形 $PABQ$ 是等腰梯形，请写出推理过程；

（2）当 t=2s 时，求梯形 $OFBC$ 的面积；

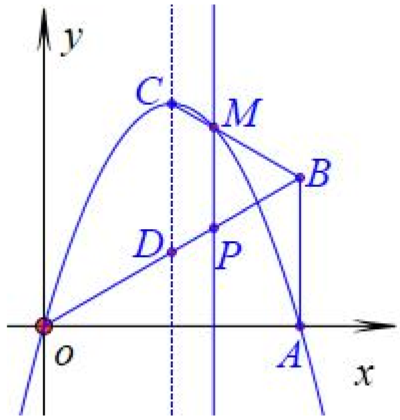


练习 1-6-2：如下图，已知，在 Rt△OAB 中，∠OAB＝90°，∠BOA＝30°，AB＝2.若以 O 为坐标原点，OA 所在直线为 x 轴，建立如图所示的平面直角坐标系，点 B 在第一象限内.将 Rt△OAB 沿 OB 折叠后，点 A 落在第一象限内的点 C 处.

（1）求点 C 的坐标；

（2）若抛物线 $y=ax^2+bx$ （A≠0）经过 C、A 两点，求此抛物线的解析式；

（3）若抛物线的对称轴与 OB 交于点 D，点 P 为线段 DB 上一点，过 P 作 y 轴的平行线，交抛物线于点 M.问：是否存在这样的点 P，使得四边形 $CDPM$ 为等腰梯形？若存在，请求出此时点 P 的坐标；若不存在，请说明理由.

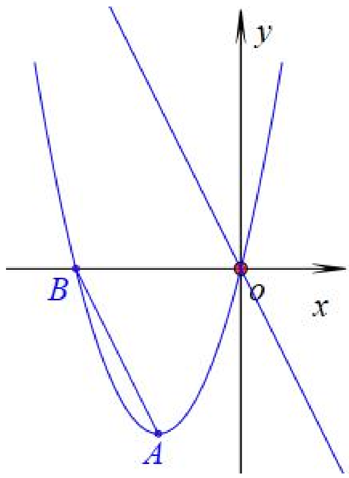


练习 1-6-3：如下图，抛物线 $y = x^2 + 4x$ 与 x 轴分别相交于点 B、O，它的顶点为 A，连接 AB，把 AB 所在的直线沿 y 轴向上平移，使它经过原点 O，得到直线 l，设 P 是直线 l 上一动点.

（1）求点 A 的坐标；

（2）以点 A、B、O、P 为顶点的四边形中，有菱形、等腰梯形、直角梯形，请分别直接写出这些特殊四边形的顶点 P 的坐标；

（3）设以点 A、B、O、P 为顶点的四边形的面积为 S，点 P 的横坐标为 x，当 $4+6\sqrt{2} \le S \le 6+8\sqrt{2}$ 时，求 x 的取值范围..

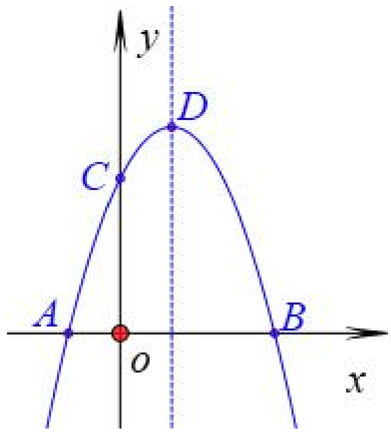


练习 1-6-4：如下图，已知抛物线与 x 轴交于 A（－1，0）、B（3，0）两点，与 y 轴交于点 C（0，3）.

（1）求抛物线的解析式；

（2）设抛物线的顶点为 D，在其对称轴的右侧的抛物线上是否存在点 P，使得$\triangle PDC$是等腰三角形？若存在，求出符合条件的点 P 的坐标;若不存在，请说明理由；

（3）若点 M 是抛物线上一点，以 B、C、D、M 为顶点的四边形是直角梯形，试求出点 M 的坐标.



本节小结

讨论梯形的存在性问题时，通常要用到分类思想，而分类的原则是根据边和腰的不同确定所需讨论的情况数；接着根据不同的情况画出相应的草图，这也是解决问题的关键，往往解题思路就在草图中；最后结合草图确定解题思路和方法.对于特殊的梯形，要抓住这些梯形的特殊特征，如等腰梯形抓住两腰相等，直角梯形抓住直角这个条件，利用这些特殊特征可以找到等量关系，从而确定解题思路.

第七节 相切关系 3

1．圆心在抛物线上运动

例 1-7-1．如图 1-7-1-1，已知平面直角坐标系中，有一矩形纸片 $OABC$，O 为坐标原点，$AB \parallel x$ 轴，$B(-3,\sqrt{3})$，现将纸片按如图折叠，AD、DE 为折痕，$\angle OAD=30°$．折叠后，点 O 落在点 O_1，点 C 落在线段 AB 上的 C_1 处，并且 DO_1 与 DC_1 在同一直线上．

（1）求 C_1 的坐标；

（2）求经过三点 O，C_1，C 的抛物线的解析式；

（3）若⊙P 的半径为 R，圆心 P 在（2）的抛物线上运动，⊙P 与两坐标轴都相切时，求⊙P 半径 R 的值．

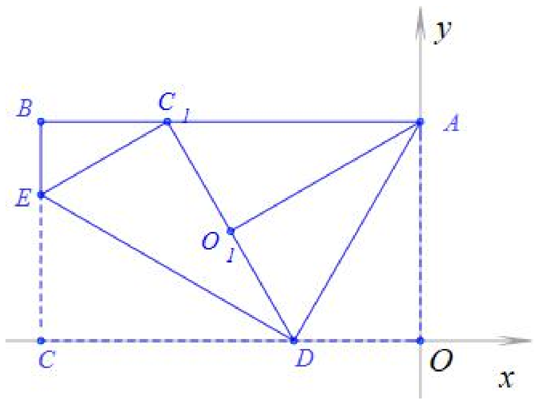


图 1-7-1-1

（一）求 C_1 的坐标

求 C_1 的坐标关键是求 AC_1 的长，AC_1 可放在 $\mathrm{Rt}\Delta \mathrm{AO_1C_1}$ 中求得.

由折叠的性质可知

$AO = AO_1 = \sqrt{3}$，$\angle \mathrm{OAD} = \angle \mathrm{O_1}AD = 30°$，$\angle \mathrm{AOD} = \angle \mathrm{AO_1}D = 90°$，所以在 $\mathrm{Rt}\Delta \mathrm{AO_1C_1}$ 中，$\angle \mathrm{O_1AC_1} = 30°$，$\mathrm{AO_1} = \sqrt{3}$，所以 $AC_1 = \dfrac{AO_1}{\cos 30°} = 2$，因此点 C_1 的坐标为（－2，$\sqrt{3}$).

（二）求抛物线解析式

此题为常规题，用待定系数法可求解.

设经过 O，C_1，C 的抛物线的解析式为 $y=ax^2+bx+c$，则

$\begin{cases} c=0 \\ (-2)^2a-2b+c=\sqrt{3} \\ (-3)^2a-3b+c=0 \end{cases}$，解得 $\begin{cases} a=-\dfrac{\sqrt{3}}{2} \\ b=-\dfrac{3\sqrt{3}}{2} \\ c=0 \end{cases}$，所以抛物线的解析式为：

$y=-\dfrac{\sqrt{3}}{2}x^2-\dfrac{3\sqrt{3}}{2}x$.

（三）⊙P 与两坐标轴都相切时半径的值

【动感体验】

打开文件“例 1-7-1.dmr”，如图 1-7-1-2 所示，与 x 轴和 y 轴同时相切的圆，其圆心一定在直线 y=x 或 y=-x 上.拖动点 P 或点 Q，可以观察到与两个坐标轴都相切的圆.

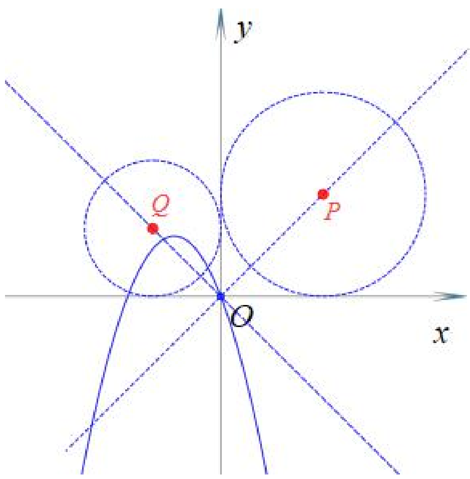


图 1-7-1-2

【思路点拨】

抛物线与直线 y=x 或 y=-x 的交点即为所求.

【动态解析】

在抛物线上拖动点 P，使⊙P 与两坐标轴相切，可以观察到满足条件的⊙P 在第二和第三象限各有 1 个，如图 1-7-1-3 和图 1-7-1-4 所示.

1.考虑⊙P 在第二象限时，点 P 为 y=-x 与抛物线的交点；所以求得点 P 坐标为 $(-3+\dfrac{2\sqrt{3}}{3},3-\dfrac{2\sqrt{3}}{3})$，所以⊙$P$ 的半径为 $3-\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$，如图 1-7-1-3 所示.

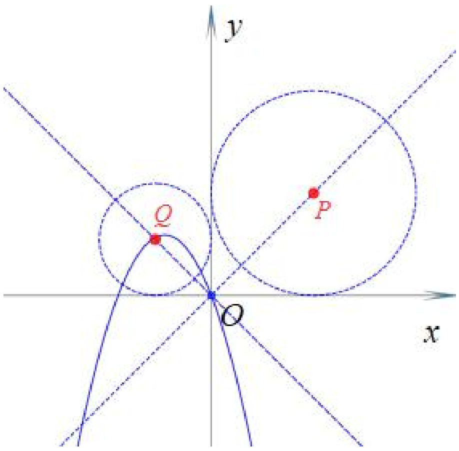


图 1-7-1-3

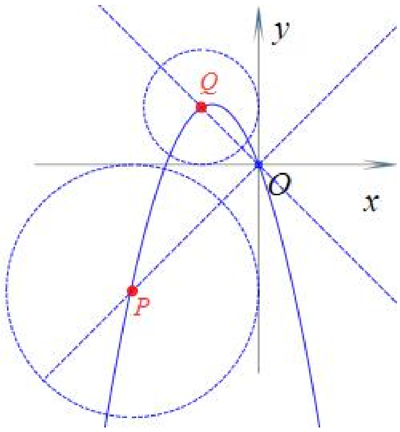


图 1-7-1-4

2.考虑⊙P 在第三象限时，点 P 为 $y=x$ 与抛物线的交点.所以求得点 P 坐标为 $(-3-\frac{2\sqrt{3}}{3},-3-\frac{2\sqrt{3}}{3})$，所以⊙$P$ 的半径为$3+\frac{2\sqrt{3}}{3}$，如图 1-7-4.

【简要评注】

解决折叠问题关键抓住折叠前后的图形对应边、对应角相等的条件.考虑到⊙P 与坐标轴相切时，圆心 P 到坐标轴的距离等于半径，从而得到点 P 的横坐标和纵坐标之间的关系.

2．运动速度不同的两个点

例 1-7-2.如图 1-7-2-1，已知⊙O 的半径为 6cm，射线 PM 经过点 O，OP=10cm，射线 PN 与⊙O 相切于点 Q．A、B 两点同时从点 P 出发，点 A 以 5cm/s 的速度沿射线 PM 方向运动，点 B 以 4cm/s 的速度沿射线 PN 方向运动．设运动时间为 t．

（1）求 PQ 的长；

（2）当 t 为何值时，直线 AB 与⊙O 相切？

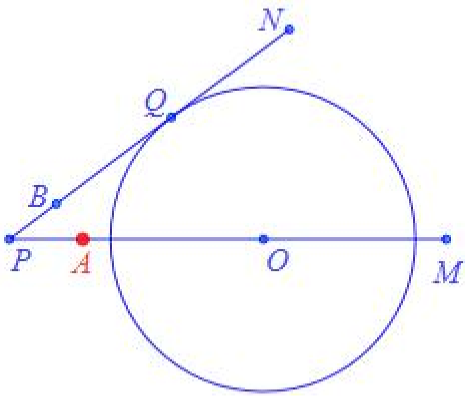


图 1-7-2-1

（一）求 PQ 的长

利用切线的基本性质求 PQ 的长度.

连接 OQ，如图 1-7-2-2 所示.因为 PN 与⊙O 相切于点 Q，所以 $OQ\perp PN$，

即 $\angle OQP=90^\circ$，因为 OP=10 cm，$OQ=6$ cm ，所以 $PQ=\sqrt{10^2-6^2}=8$（cm）.

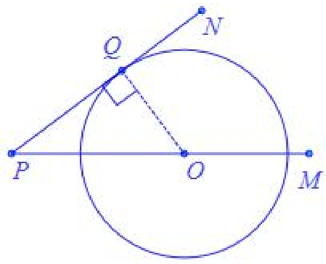


图 1-7-2-2

（二）讨论直线 AB 与⊙O 相切时 t 的值

【动感体验】

打开文件“例 1-7-2.dmr”，如图 1-7-2-3 所示，通过变量尺改变 t 的值或通过按钮设置它的值，观察直线 AB 何时与圆能够相切？

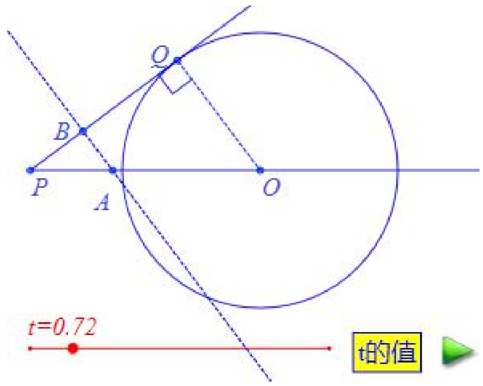


图 1-7-2-3

【思路点拨】

有两种相切的情况：*AB* 与⊙*O* 相切于⊙*O* 的左侧；*AB* 与⊙*O* 相切于⊙*O* 的右侧.

【动态解析】

点 *A* 在运动过程中 $\dfrac{PA}{PB}=\dfrac{5}{4}$，而由问题（1）知道 $\dfrac{PO}{PQ}=\dfrac{10}{8}=\dfrac{5}{4}$，所以 $\dfrac{PA}{PB}=\dfrac{PO}{PQ}$，所以 $AB // OQ$.在射线 *PM* 上拖动点 *A*，发现直线 *AB* 与⊙*O* 有两种相切的情况：

1.若 *AB* 与⊙*O* 相切于⊙*O* 的左侧，如图 1-7-2-4 所示，此时过点 O 作 $OC\perp AB$，垂足为 C，因为⊙*O* 的半径为 6，*AB* 与⊙*O* 相切与点 *C*，所以 *CO*=*OQ*=6，易证明四边形 *OCBQ* 为矩形，所以 *BQ*=*CO*=6，而 $BQ=PQ-PB=8-4t$，所以 $8-4t=6$，解得 $t=0.5(\mathrm{s})$.

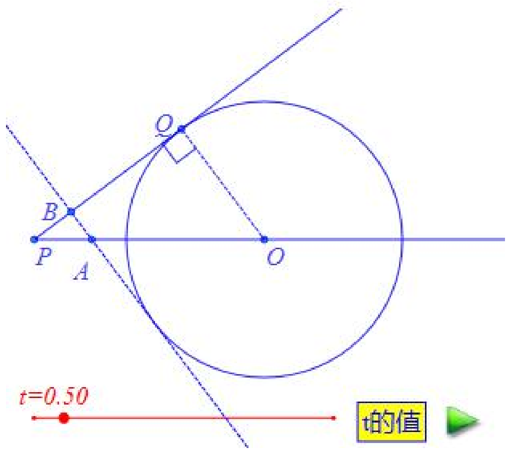


图 1-7-2-4

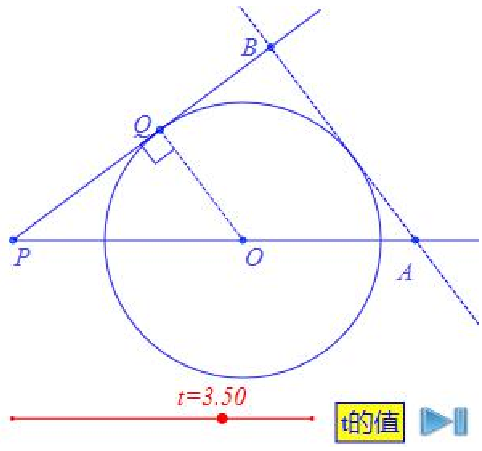


图 1-7-2-5

2.若 *AB* 与⊙*O* 相切于⊙*O* 的右侧，如图 1-7-2-5 所示，此时过点 O 作 $OC\perp AB$，垂足为 C，此时 $BQ=PB-PQ=4t-8$，同理有 $4t-8=6$，解得 $t=3.5(\mathrm{s})$.

【简要评注】

本题考虑到直线 *AB* 的位置可能在⊙*O* 的两侧，所以要分两种情况讨论相切的情况.

3．半径变化的两个圆

例 1-7-3．如图 1-7-3-1，△ABC 中，$AB=AC=10$，$BC=12$，点 D 在边 BC 上，且 $BD=4$，以点 D 为顶点作∠EDF=∠B，分别交边 AB 于点 E，交射线 CA 于点 F.

（1）当 $AE=6$ 时，求 AF 的长；

（2）当以点 C 为圆心 CF 长为半径的⊙C 和以点 A 为圆心 AE 长为半径的⊙A 相切时，求 BE 的长；

（3）当以边 AC 为直径的⊙O 与线段 DE 相切时，求 BE 的长.

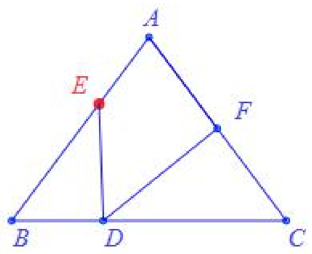


图 1-7-3-2

（一）求 AF 的长

因为 $AB=AC$，所以∠B=∠C，因为∠EDC=∠EDF+∠FDC，∠EDC=∠B+∠DEB，∠EDF=∠B，所以∠FDC=∠DEB，所以△FDC∽△DEB，所以 $\dfrac{CF}{BD}=\dfrac{CD}{BE}$，即 $\dfrac{CF}{4}=\dfrac{8}{10-6}$，所以 $CF=8$，$AF=AC-CF=2$

（二）求⊙C 和⊙A 相切时 BE 的长

【动感体验】

打开文件“例 1-7-3.dmr”，如图 1-7-3-2 所示，通过变量尺改变 x 的值或者通过按钮设置它的值，观察当两圆相切时，研究点 E 和点 F 应满足的关系.

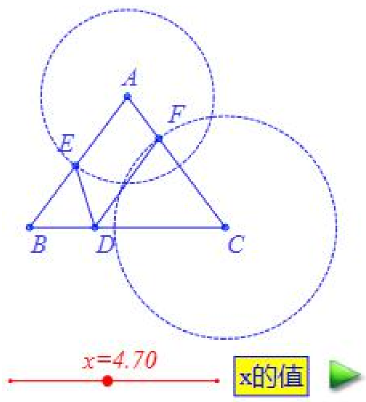


图 1-7-3-2

【思路点拨】

分内切和外切两种情况讨论两圆相切的情况.

【动态解析】

分别拖动点 F 和点 E 的过程中发现，⊙C 和⊙A 存在外切和内切两种情况，所以此题应分两种情况讨论.不妨设 $BE=x$，$CF=y$，由△FDC∽△DEB，得 $\frac{CF}{BD}=\frac{CD}{BE}$，即 $\frac{y}{4}=\frac{8}{x}$，所以 $CF=y=\frac{32}{x}$，在⊙A 中，$AE=10-x$.

1.当⊙A 与⊙C 外切时，如图 1-7-3-3 所示，此时 $10-x+\frac{32}{x}=10$，解得 $x=BE=4\sqrt{2}$.

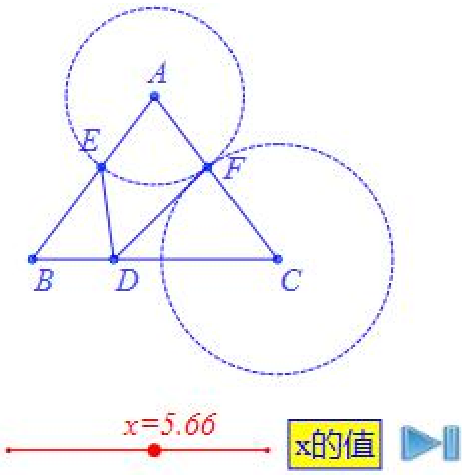


图 1-7-3-3

2.当⊙A 与⊙C 内切时，如图 1-7-3-4 所示，此时 $\frac{32}{x}-(10-x)=10$，解得 $x_1=10-2\sqrt{17}$，$x_2=10+2\sqrt{17}>AC=10$（舍去）.

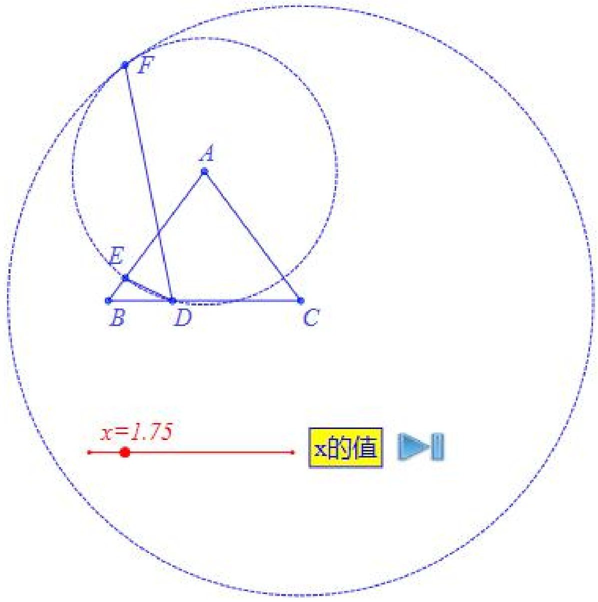


图 1-7-3-4

综上所述，当⊙C 和⊙A 相切时 BE 的长为 $4\sqrt{2}$ 或 $10-2\sqrt{17}$.

（三）求线段 DE 与⊙O 相切时 BE 的长

【动感体验】

单击“下一页”按钮，进入第二页，如图 1-7-3-5 所示，拖动点 E，观察当 DE 与以 AC 为直径的圆相切时，DE 与 BC 的位置关系.

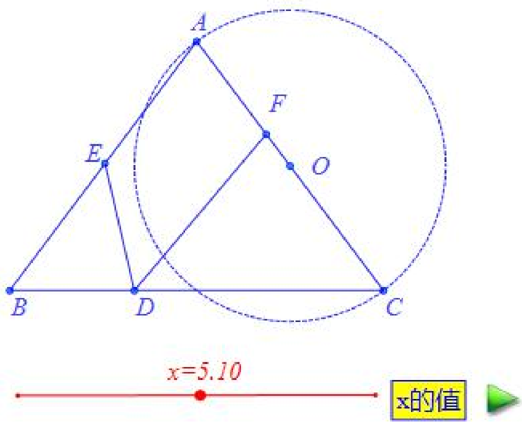


图 1-7-3-5

【思路点拨】

通过动态观察，当线段 DE 与⊙O 相切时 ED 与 BC 垂直，不妨从这入手求 BE 的长.

【动态解析】

拖动点 E 观察线段 DE 与⊙O 的位置情况，发现当线段 DE 与⊙O 相切时，ED 与 BC 垂直，如图 1-7-3-6 所示.

现通过构造全等三角形，从而根据对应角相等得到两直线平行，从理论上说明线段 DE 与⊙O 相切时 ED 与 BC 垂直.

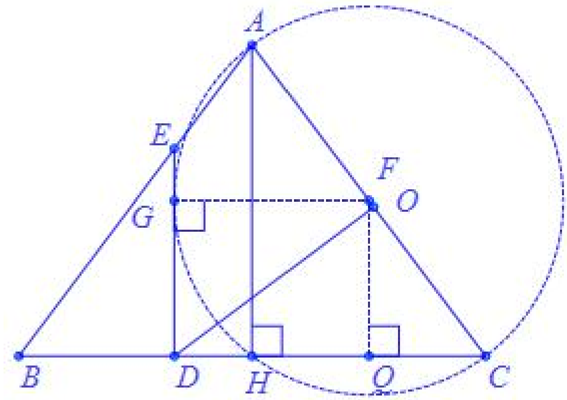


图 1-7-3-6

过 A 点作 $AI\perp BC$ 于点 H，设 AC 的中点为 O，过 O 分别作 $OG\perp DE$，$OQ\perp BC$，垂足分别为 G、Q，因为线段 DE 与⊙O 相切，所以 OG==5，在 Rt△CAI 中，$\cos\angle C=\dfrac{CI}{AC}=\dfrac{6}{10}=\dfrac{3}{5}$，在 Rt△$COQ$ 中，$\cos\angle C=\dfrac{CQ}{CO}=\dfrac{3}{5}$，$CO$=5，所以 CQ=3，所以 DQ=5，所以 OG=DQ，因为 OD=DO， 所以 Rt△OGD≌Rt△DQO，所以∠GOD=∠QDO，因此 OG∥BC，所以∠EDB=∠OGD=90°.

利用解直角三角形的知识求 BE，在 Rt△BDE 中，$\cos\angle B=\dfrac{BD}{BE}=\dfrac{3}{5}$，$BD$=4，所以 BE=$\dfrac{20}{3}$.

所以当线段 DE 与⊙O 相切时，BE=$\dfrac{20}{3}$.

【简要评注】

通常考虑两圆相切的位置关系时，分内切和外切两种情况讨论，再利用两圆的半径和圆心距的关系得到方程求解.

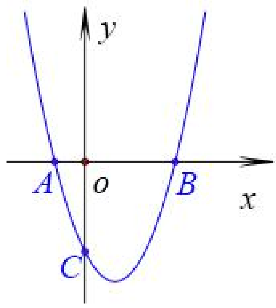
巩固练习（七）

练习 1-7-1：如下图，二次函数 $y=Ax^2+Bx+C(A>0)$ 与坐标轴交于点 A、B、C 且 $OA=1$，$OB=OC=3$.

（1）求此二次函数的解析式.

（2）写出顶点坐标和对称轴方程.

（3）点 M、N 在 $y=Ax^2+Bx+C$ 的图像上(点 N 在点 M 的右边)，且 $MN\parallel x$ 轴，求以 MN 为直径且与 x 轴相切的圆的半径.

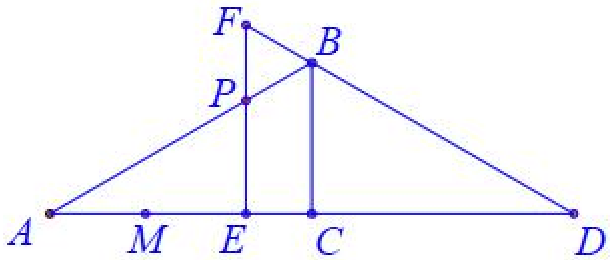


练习 1-7-2：形如三角板的△ABC 和△DEF 按如下图所示位置摆放，点 A、E、C、D 在同一条直线上，点 B 在 DF 上，AB 与 EF 交于点 P，$\angle ACB=\angle DEF=90°$，$\angle A=\angle D=30°$，$AE=3$cm，$AC=DC=4$cm．点 M 从 A 点出发以 1cm/s 速度沿 AD 向 D 点运动，过点 M 作直线垂直于 AD，交直线 AB 于点 H，交直线 DF 于点 N，⊙H 的半径为 2 cm.

（1）$\angle FBP$ 的度数是____度，$BC=$____cm；

（2）当⊙H 和直线 DF 相切时，比较点 B 到直线 MN 的距离与⊙H 半径之间的大小关系，并求出此时点 M 运动时间 t 的值；

（3）当⊙H 和直线 DF 有公共点时，四边形 $PEMN$ 的面积 S 是否存在最大值？若存在，求出这个最大值及此时点 M 运动时间 t 的值；若不存在，请说明理由.



本节小结

讨论因动点产生的直线和圆相切的问题时，首先根据直线的位置确定直线与圆有几种相切的可能性，再连半径（已知切点时），利用切线的性质解直角三角形求解，或作圆心距（未知切点时），利用直线与圆相切时圆心距与半径的关系求解. 讨论因动点产生的两圆相切的问题时，通常分内切和外切两种情况讨论，利用两圆的半径和圆心距的关系列方程求解..

第二章　函数关系问题

关系是数学中所研究的重要内容，包括：相等关系或不相等关系、包含关系或不包含关系、确定关系或不确定关系.

在初中阶段，我们所学习和研究的主要关系有：多边形面积与线段长度（或时间）之间函数关系、一条线段的长度与另一条线段长度（或时间）之间的函数关系.

这些问题均可归结为：因变量与自变量的关系.在解决这类问题的过程中，通过其他中间变量构造两个目标变量之间的函数关系是解决问题的关键.本章以一些典型问题为例，帮助学生理解和掌握解决此类问题的基本方法.

第一节 比例线段之间的关系

1．在一边上运动的一个点

例 2-1-1．已知：$\angle MAN=60°$，点 B 在射线 AM 上，$AB=4$（如图 2-1-1-1）．P 为直线 AN 上一动点，以 BP 为边作等边三角形 BPQ（点 B、P、Q 按顺时针排列），O 是$\triangle BPQ$ 的外心．

（1）当点 P 在射线 AN 上运动时，求证：点 O 在$\angle MAN$ 的平分线上；

（2）当点 P 在射线 AN 上运动（点 P 与点 A 不重合）时，AO 与 BP 交于点 C，设 $AP=x$，$AC\cdot AO=y$，求 y 关于 x 的函数解析式，并写出函数的定义域；

（3）若点 D 在射线 AN 上，$AD=2$，圆 I 为$\triangle ABD$ 的内切圆．当$\triangle BPQ$ 的边 BP 或 BQ 与圆 I 相切时，请直接写出点 A 与点 O 的距离．

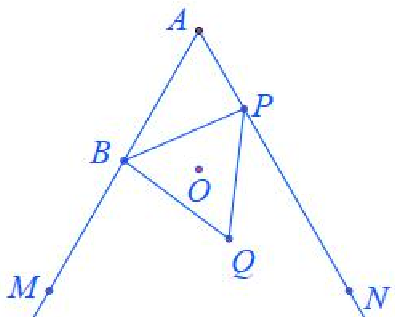


图 2-1-1-1

（一）证明点 O 在$\angle MAN$ 的平分线上

【动感体验】

打开文件“例 2-1-1.dmr”，通过变量尺改变 t 的值或通过按钮设置它的值，从而改变点 P 的位置，如图 2-1-1-2 所示，可以观察到点 O 经过的路径，思考如何证明点 O 在$\angle MAN$ 的角平分线上.

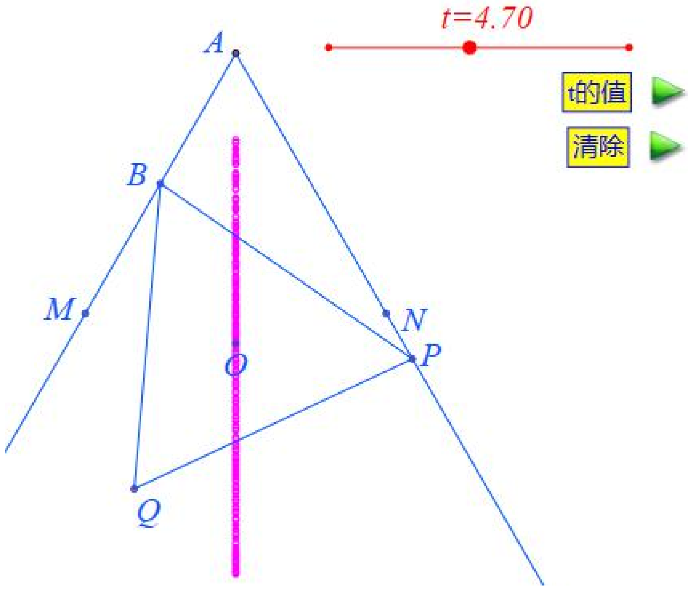


图 2-1-1-2

【思路点拨】

根据角平分线的基本性质考虑解决问题的方法.

【动态解析】

过点 O 向 AM、AN 作垂线段 OG、OH.因此，只需要证明 $OG=OH$ 即可证明点 O 在$\angle MAN$ 的平分线上.

我们证明两条线段常用的方法之一是：若两条线段不在同一个三角形中，那么需要将它们放在两个三角形中，然后证明这两个三角形全等即可.

因为点 O 是正三角形 BPQ 的外心，因此连接 OB、OP，如图 2-1-1-3 所示，则有 OB=0P 成了.那么在$\triangle OGB$ 和$\triangle OGP$ 中，$\angle OGB=\angle OHP=90°$，因此只需要再寻找一对相等的角即可.

在四边形 $OGHA$ 中，因为$\angle OGA=\angle OHA=90°$，$\angle GAH=60°$，因此$\angle GOH=120°$.同时因为$\triangle BPQ$ 是正三角形，所以$\angle BOP=120°$，所以$\angle BOG=\angle POH$.所以$\triangle OGB\cong\triangle OHP$，因此 $OG=OH$，所以点 O 在$\angle MAN$ 的平分线上.

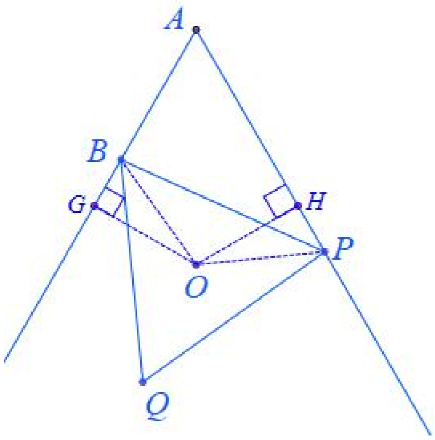


图 2-1-1-3

（二）求函数关系式及定义域

【思路点拨】

因为 $AP=x$，$AC\cdot AO=y$，若要求 y 关于 x 的表达式，常见的处理方式将 AP、AC 和 AO 放在两个相似的三角形中考虑问题.

【动态解析】

因为 $AB=4$ 是已知的，所以可以在 $\triangle ABO$ 和 $\triangle ACP$ 中考虑四条线段 AB、AP、AC 和 AO 的比例关系.连接 OB，如图 2-1-1-4 所示.

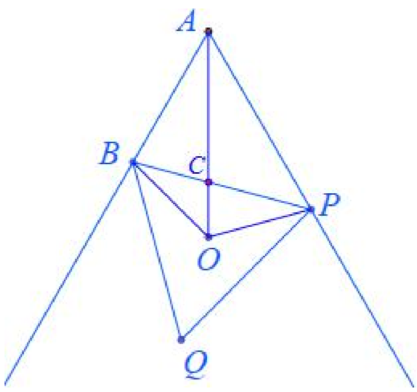


图 2-1-1-4

由（1）知，$\angle BPO=BAO=30°$，所以点 A、B、O、P 四点共圆，所以 $\angle AOB=\angle APC$.

又因为 $\angle BAO=\angle CAP$，所以 $\triangle BAO\backsim\triangle CAP$，所以有 $\dfrac{AB}{AO}=\dfrac{AC}{AP}$，即 $AC\cdot AO=AB\cdot AP$，所以有：$y=4x$.

（三）求 AO 的长

【思路点拨】

因为 AB、BD 与⊙I 相切，所以，当点 P 或点 Q 与点 D 或点 A 重合时，BP 或 BQ 与⊙I 相切.

【动态解析】

在△ABD 中，由 AB=4，AD=2，∠MAN=60°，可证明△ABD 为直角三角形，所以∠ABD=30°.

1.当点 P 与点 D 重合时，BP 与⊙I 切于下方，连接 BO，如图 2-1-1-5 所示.∠PBO=∠ABD=∠BAO=30°，∠AOB=90°，所以在 Rt△ABO 中，$AO=\dfrac{AB}{\sqrt{3}}=2\sqrt{3}$.

2.当点 P 与点 A 重合时，BP 与⊙I 切于上方，如图 2-1-1-6 所示，同理△AOD 为直角三角形，可求出 $AO=\dfrac{AD}{\frac{\sqrt{3}}{2}}=\dfrac{4}{3}\sqrt{3}$.

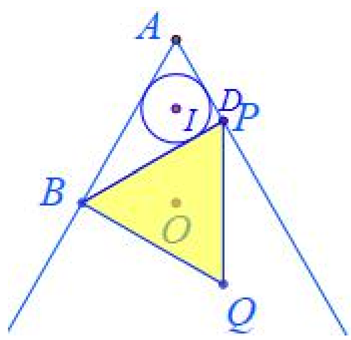


图 2-1-1-5

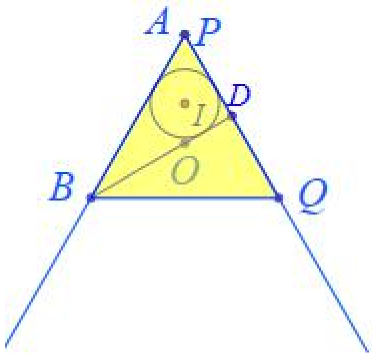


图 2-1-1-6

3.当 BQ 与 BD 重合时，如图 2-1-1-7 所示，此时 BQ 与⊙I 相切于下方.因为∠OBQ=∠ABD=30°，所以点 O 在直线 AB 上，又因为点 O 在∠MAN 的平分线上，所以点 O 与点 A 重合，因此此时 AO=0.

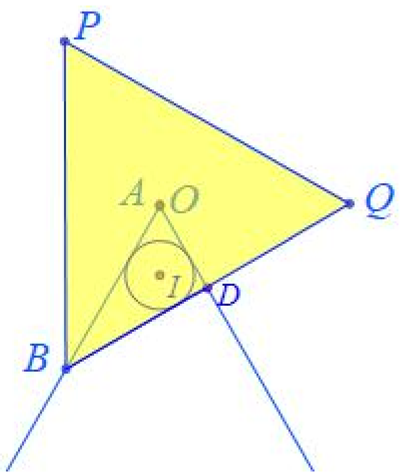


图 2-1-1-7

有可能 BQ 与⊙I 相切于上方吗？假如存在一种情况使得 BQ 与⊙I 相切于上方，那么点 Q 在射线 BA 上，则由∠DAB=∠QBP=60°，可知 $PB//AD$，因此点 P 在经过点 B 与 AD 平行的直线上.又因为点 A 和点.B 不重合，所以点 P 不可能在直线 AD 上，这与题设相矛盾.因此 BQ 不可能与⊙I 相切于上方.

【简要评注】

本题（2）在求函数关系式时，利用△ABO∽△ACP，将得到的比例线段从比例式转化成等积式，从而找寻到 y 与 x 的函数关系. 对于问题（3），在画草图分析时，应考虑到 BP、BQ 与⊙I 所有相切的方式，确定所需讨论的所有情况.

【拓展延伸】

在△ABD 中，由 AB=4，AD=2，∠MAN=60°，如何证明△ABD 为直角三角形？

2．与动点相关的固定大小的角

例 2-1-2．已知梯形 $ABCD$ 中，$AD//BC$，$AD<BC$，且 $BC=6$，$AB=DC=4$，点 E 是 AB 的中点.

（1）如图 2-1-2-1，P 为 BC 上的一点，且 $BP=2$，求证：$\triangle BEP\backsim\triangle CPD$

（2）如果点 P 在 BC 边上移动（点 P 与点 B 不重合），且满足$\angle EPF=\angle C$，PF 交直线 CD 于点 F，同时交直线 AD 于点 M，那么：

①当点 F 在线段 CD 的延长线时，设 $BP=x$，$DF=y$，求 y 关于 x 的函数关系式，并写出函数的定义域；②当 $S_{\triangle DMF}=\dfrac{9}{4}S_{\triangle BEP}$ 时，求 BP 的长.

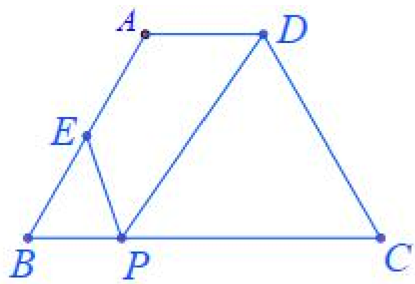


图 2-1-2-1

（一）证明$\triangle BEP\backsim\triangle CPD$

此题为常规题，根据题目所给条件确定判断相似的方法为两边对应成比例，且夹角相等.

在梯形 $ABCD$ 中，$AD//BC$， $AB=DC$，所以$\angle B=\angle C$，因为 $BE=2$， $BP=2$，$CP=4$，$CD=4$，所以$\dfrac{EB}{CP}=\dfrac{BP}{CD}$，所以有$\triangle BEP\backsim\triangle CPD$.

（二）求 y 关于 x 的函数关系式及函数定义域

【动感体验】

打开文件“例 2-1-2.dmr”，如图 2-1-2-2 所示，通过变量尺改变 x 的值或者通过按钮设置它的值，从而改变点 P 的位置，观察当 P 在 BC 上运动的过程中，对点 F 影响的规律.

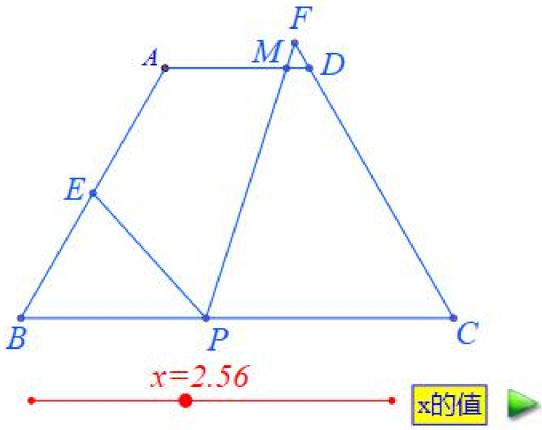


图 2-1-2-2

【思路点拨】

在 BP 的长度变化过程中，线段 DF 的长度同时也在变化，因此，可以将 BP、DF（或 CF）分别放在两个相似三角形中研究问题.

【动态解析】

因为始终有 $\angle B=\angle C$，所以可以考察 $\triangle PEB$ 与 $\triangle FPC$ 是否具有相似关系.

由外角的性质可知，$\angle EPC=\angle B+\angle PEB$，又因为 $\angle EPC=\angle FPC+\angle EPF$、$\angle EPF=\angle C=\angle B$，所以有 $\angle PEB=\angle FPC$，所以 $\triangle PEB\backsim\triangle FPC$，则有：$\frac{BP}{BE}=\frac{CF}{CP}$，即：$\frac{x}{2}=\frac{y+4}{6-x}$，整理得：$y=-\frac{1}{2}x^2+3x-4$.

因为点 F 在 CD 的延长线上，所以 $y>0$，即 $-\frac{1}{2}x^2+3x-4>0$，解得：$2<x<4$.

（三）当 $S_{\Delta DMF}=\frac{9}{4}S_{\Delta BEP}$ 时，求 BP 的长

【思路点拨】

因为 $DM//BC$，所以 $\triangle DMF\backsim\triangle CPF$，而又知 $\triangle CPF\backsim\triangle BPE$，因此 $\triangle FMD\backsim\triangle PEB$.所以可以将三角形的面积之比转换为对应边的比例关系.

另外需要注意的是需要按照点 F 在点 D 上方和下方两种情况分类讨论.

【动态解析】

根据点 F 位置的不同分情况讨论：

1.当点 F 在线段 CD 的延长线上时，如图 2-1-2-3 所示，由 $\triangle FMD\backsim\triangle PEB$ 知 $\frac{S_{\Delta DMF}}{S_{\Delta BEP}}=\left(\frac{DF}{BP}\right)^2=\frac{9}{4}$，即 $\frac{DF}{BP}=\frac{3}{2}=\frac{y}{x}$，于是得到：$y=-\frac{1}{2}x^2+3x-4=\frac{3}{2}x$，整理得 $x^2-3x+8=0$，此方程无实数根，因此当点 F 在线段 CD 的延长线时，不存在点 P 使得

$S_{\Delta DMF}=\frac{9}{4}S_{\Delta BEP}$.

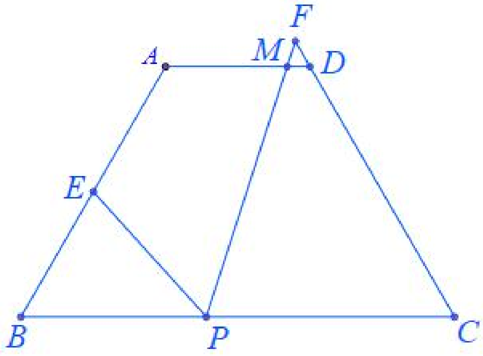


图 2-1-2-3

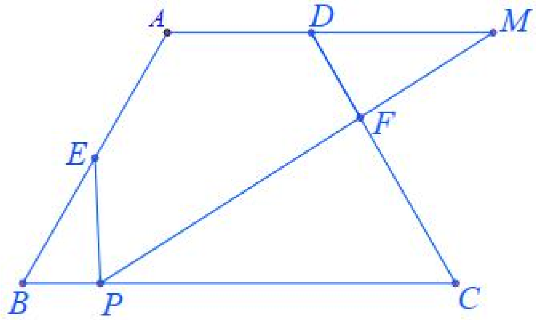


图 2-1-2-4

2. 当点 F 在线段 CD 上时，如图 2-1-2-4 所示，同理 $\Delta BEP\backsim\Delta DMF$，$\frac{S_{\Delta DMF}}{S_{\Delta BEP}}=\left(\frac{DF}{BP}\right)^2=\frac{9}{4}$，$\frac{DF}{BP}=\frac{3}{2}=\frac{y}{x}$，而此时由$\Delta BEP\backsim\Delta CPF$，得$\frac{2}{6-x}=\frac{x}{4-y}$，此时 $y=\frac{1}{2}x^2-3x+4$，于是得到 $y=\frac{1}{2}x^2-3x+4=\frac{3}{2}x$，整理 $x^2-9x+8=0$，解得 $x_1=1,x_2=8$，由于 $x_2=8$ 不合题意，舍去.所以当 $S_{\Delta DMF}=\frac{9}{4}S_{\Delta BEP}$ 时，BP 的长为 1.

【简要评注】

此题建立 y 与 x 的函数关系用到了相似三角形对应边成比例的性质，考虑函数定义域时，通过对 F 位置变化的分析，确定临界点位置.对于最后一问，首先根据点 F 位置的不同确定分两种情况讨论，求 BP 的长时，利用了相似三角形的面积比等于对应边比的平方的性质.

3．动点与三角形的周长问题

例 2-1-3．在等腰梯形 $ABCD$ 中，$AD // BC$，E 是 AB 的中点，过点 E 作 $EF // BC$ 交 CD 于点 F．$AB = 4$，$BC = 6$，$\angle B = 60°$．点 P 为线段 EF 上的一个动点，过 P 作 $PM \perp EF$ 交 BC 于点 M，过 M 作 $MN // AB$ 交折线 ADC 于点 N，连结 PN，设 $EP = x$．

（1）求点 E 到 BC 的距离；

（2）当点 N 在线段 AD 上时 $\triangle PMN$ 的形状是否发生改变？若不变，求出 $\triangle PMN$ 的周长；若改变，请说明理由．

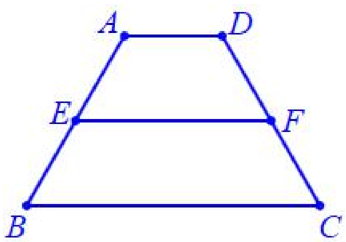


图 2-1-3-1

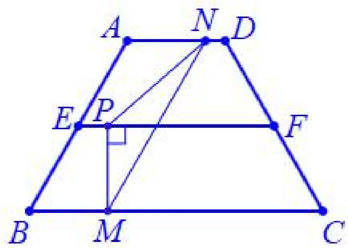


图 2-1-3-2

（一）求点 E 到 BC 的距离

此题通过构造直角三角形，利用解直角三角形的知识直接求解即可．

过点 E 作 $EG \perp BC$ 于点 G，如图 2-1-3-3 所示．因为 E 为 AB 的中点，所以 $BE = \frac{1}{2}AB = 2.$ 在 $Rt\triangle EBG$ 中，$\angle B = 60°$，所以 $\angle BEG = 30°.$ 所以 $BG = \frac{1}{2}BE = 1$，$EG = \sqrt{2^2 - 1^2} = \sqrt{3}.$ 即点 E 到 BC 的距离为 $\sqrt{3}.$

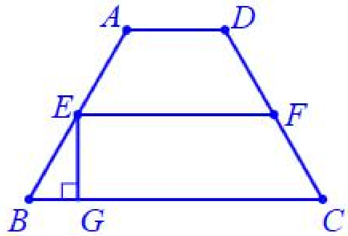


图 2-1-3-3

二、探索 ΔPMN 的形状

【动感体验】

因为 $EF // BC$、$PM \perp BC$，所以 PM 的长度保持不变；因为 $AN // BM$、$MN // AB$，所以四边形 $ABMN$ 是平行四边形，因此 MN 的长度不变；因为 $\angle PMB = 90°$，$\angle NMC = \angle B = 60°$，所以 $\angle PMN = 180° - \angle NMC - \angle PMB = 30°$．

因此当点在 EF 上运动的过程中，点 N 在 AD 上时，$\triangle ABC$ 的形状和大小均不改变.

打开文件“例 2-1-3.dmr”，通过变量尺改变字母 t 的值或通过按钮设置它的值，可以改变点 P 的位置，观察测量值的变化规律，结果如图 2-1-3-4 所示.

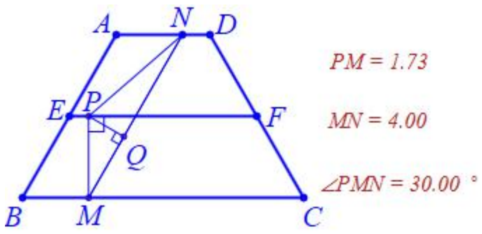


图 2-1-3-4（1）

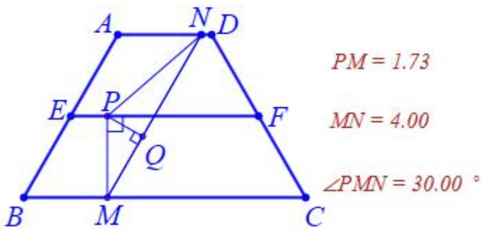


图 2-1-3-4（2）

【思路点拨】

将$\triangle PMN$ 的每条边都放在一个直角三角形中，求出每条边的长度.

【动态解析】

当点 P 与点 E 重合时，如图 2-1-3-5 所示，这时 $PM=EB\bullet\sin 60^{\circ}=\frac{1}{2}AB\bullet\frac{\sqrt{3}}{2}=\sqrt{3}$.

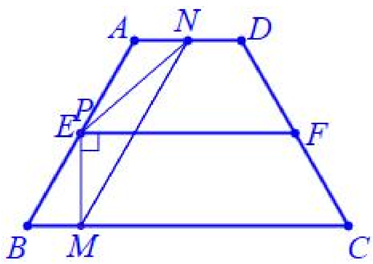


图 2-1-3-5

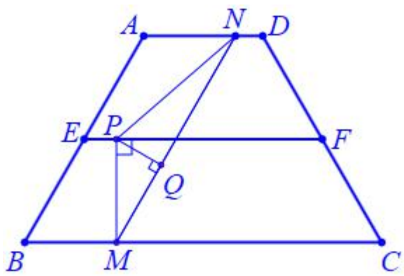


图 2-1-3-6

因为 $ABMN$ 是平行四边形，所以 $MN=AB=4$.

因为$\angle PNM$ 和$\angle MPN$ 的大小不容易求出，因此我们可以利用勾股定理求出边 PN 的长度.过点 P 作线段 MN 的垂足 Q，如图 2-1-3-6 所示.

在 $Rt\triangle PMQ$ 中，$\angle PMQ=30°$、$PM=\sqrt{3}$，所以 $PQ=\sqrt{3}\sin 30^{\circ}=\frac{\sqrt{3}}{2}$、$MQ=\sqrt{3}\cos 30^{\circ}=\frac{3}{2}$.

在 $Rt\triangle PNQ$中，$PN=\sqrt{PQ^2+QN^2}=\sqrt{\frac{3}{4}+(4-\frac{3}{2})^2}=\sqrt{7}$.

所以，$\triangle PMN$ 的周长为$\sqrt{7}+\sqrt{3}+4$，为定值.

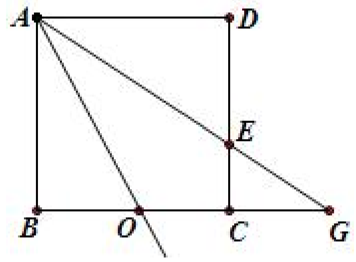
巩固练习（一）

练习 2-1-1：正方形 $ABCD$ 的边长为 2，E 是射线 CD 上的动点（不与点 D 重合），直线 AE 交直线 BC 于点 G，$\angle BAE$ 的平分线交射线 BC 于点 O.

（1）如下图，当 $CE=P_1\left(-2,1\right)$ $P_2\left(-2,-3\right)$ $P_3\left(4,3\right)$时，求线段 BG 的长；

（2）当点 O 在线段 BC 上时，设 $y=-x^2+2x+3$，$BO=y$，求 y 关于 x 的函数解析式；

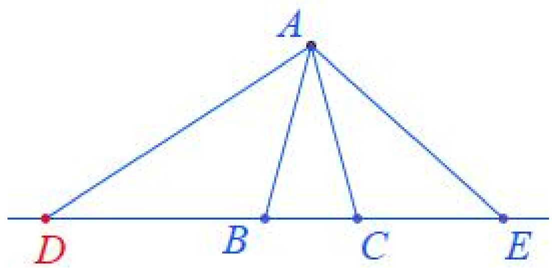
（3）当 $CE=2ED$ 时，求线段 BO 的长.



练习 2-1-2：如下图，在ΔABC 中，$AB=AC=1$，点 D，E 在直线 BC 上运动．设 $BD=x$，$CE=y$

（1）如果$\angle BAC=30°$，$\angle DAE=105°$，试确定 y 与 x 之间的函数关系式；

（2）如果$\angle BAC=\alpha$，$\angle DAE=\beta$，当α， β满足怎样的关系时，（1）中 y 与 x 之间的函数关系式还成立？试说明理由．



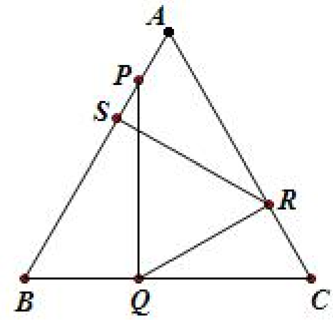
练习 2-1-3：如下图，等边三角形 ABC 的边长为 1 ，P 为 AB 边上的一个动点(不包括 A、B)，过 P 作 $PQ\perp BC$ 于 Q，过 Q 作 $QR\perp AC$ 于 R，再过 R 作 $RS\perp AB$ 于 S .设 $AP=x$，$AS=y$.

（1）求 y 与 x 之间的函数关系式，并写出自变量取值范围.

（2）若 $SP=1/4$，求 AP 的长.

（3）若 S、P 重合点为 T，试说明当 P、S 不重合时，P、S 中的哪一个更接近 T 点？将上述操作，即按逆时针方向，过垂足作相邻边的垂线，若操作不断进行，试依据你的结论，猜想无论 P 的初始位置如何，P、S……等这些点最终将会出现怎样的趋势?(只要直接写出结

果)



本节小结

这类试题的主要要素是几何图形，因此，解决此类问题时首先要观察几何图形的特征，然后依据相关图形性质（如直角三角形性质、特殊四边形性质、平行线分线段成比例定理及其推论、相似三角形性质、圆基本性质、圆中比例线段等等）找出几何元素之间的联系，最后将它们的联系用数学式子表示出来，并整理成函数关系式，在此函数关系式的基础上再来解决其它的问题；解决此类问题时，要特别注意自变量取值范围.

第二节 动点与面积关系

1．两个区域重合部分的面积

例 2-2-1. 在$\triangle ABC$中，$\angle A=90°$，$AB=4$，$AC=3$，M是AB上的动点（不与A，B重合），过M点作$MN//BC$交AC于点N. 以MN为直径作⊙O，并在⊙O内作内接矩形$AMPN$. 令$AM=x$.

（1）用含x的代数式表示$\triangle MNP$的面积S;

（2）当x为何值时，⊙O与直线BC相切？

（3）如图 2-2-1-3，在动点M的运动过程中，记$\triangle MNP$与梯形$BCNM$重合的面积为y，试求y关于x的函数表达式，并求x为何值时，y的值最大，最大值是多少？

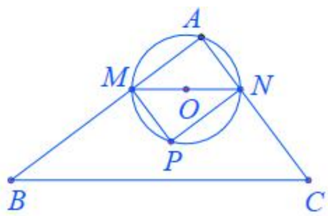


图 2-2-1-1

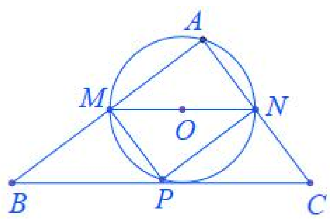


图 2-2-1-2

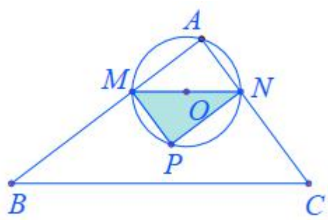


图 2-2-1-3

（一）用含x的代数式表示$\triangle MNP$的面积S

如图 2-2-1-1 所示，在矩形$AMPN$中，$\triangle AMN≌\triangle PNM$，又因为$MN// BC$，所以$\triangle AMN \backsim \triangle ABC$，此时有$\dfrac{S_{\triangle AMN}}{S_{\triangle ABC}}=(\dfrac{AM}{AB})^2=\dfrac{x^2}{16}$，又因为$S_{\triangle ABC}=\dfrac{1}{2}\cdot 3\cdot 4=6$，所以$S_{\triangle AMN}=\dfrac{3}{8}x^2$，因此$S_{\triangle MNP}=\dfrac{3}{8}x^2$.

（二）求⊙O与直线BC相切时x的值

如图 2-2-1-4 所示过A作$AH\perp BC$于点H，交MN于点G.因为$MN//BC$，所以，点O到BC的距离即为GH的长度.

如图 2-2-1-4 所示，当⊙O与BC相切时，GH等于圆的半径，所以$GH=\dfrac{1}{2}MN$.因为$S_{\triangle ABC}=\dfrac{1}{2}AB\times AC=\dfrac{1}{2}BC\times AH$，所以$AH=\dfrac{12}{5}$，因为$\triangle AMN \backsim \triangle ABC$，所以$\dfrac{AG}{AH}=\dfrac{MN}{BC}=\dfrac{AM}{AB}$，可求得$AG=\dfrac{3}{5}x$，$MN=\dfrac{5}{4}x$，因为$MN=2GH$，$GH=AH-AG=\dfrac{12}{5}-\dfrac{3}{5}x$，所以求得$x=\dfrac{96}{49}$.

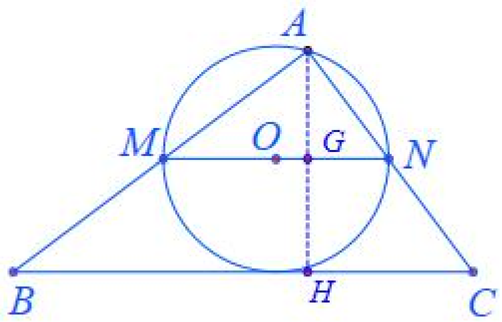


图 2-2-1-4

（三）求 y 关于 x 的函数表达式及最大值

【动感体验】

打开文件“例 2-2-1.dmr”，如图 2-2-1-5 所示，通过变量尺改变 x 的值或者通过按钮设置它的值，从而改变点 M 的位置，观察记△MNP 与梯形 $BCNM$ 重合的面积随点 M 运动的变化规律.

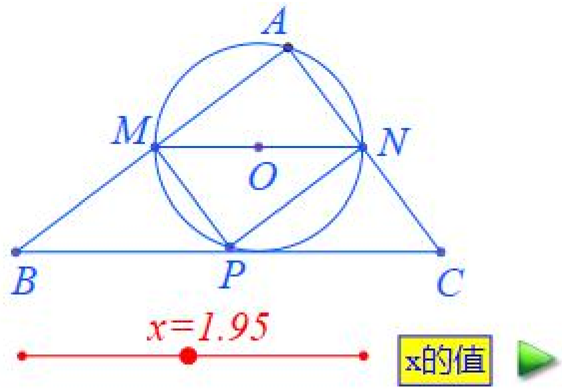


图 2-2-1-5

【思路点拨】

根据重合部分图形形状的不同，分两种情况讨论：当点 P 在 BC 上和 BC 的上方时，△MNP 与梯形 $BCNM$ 重合部分就是△MNP；当点 P 在 BC 的下方时，△MNP 与梯形 $BCNM$ 重合部分就是梯形.

【动态解析】

1.当点 P 落在 BC 边上及 BC 的上方时，△MPN 与梯形 $BCNM$ 重合部分为就是△MNP，如图 2-2-1-5、图 2-2-1-6 所示，利用问题（1）可求得 $y=\dfrac{3}{8}x^2$，当点 P 落在 BC 边上时，MN 是△ABC 的中位线，此时 x=2，所以 x 的取值范围为 $0<x\leq 2$.这种情况下，当 x=2 时，y 有最大值 $\dfrac{3}{2}$.

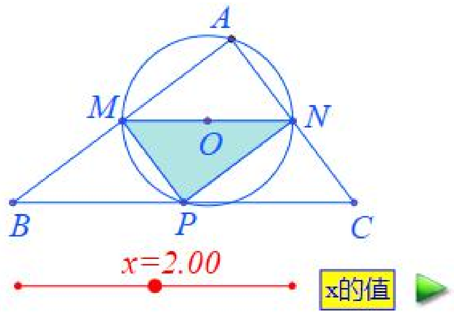


图 2-2-1-6

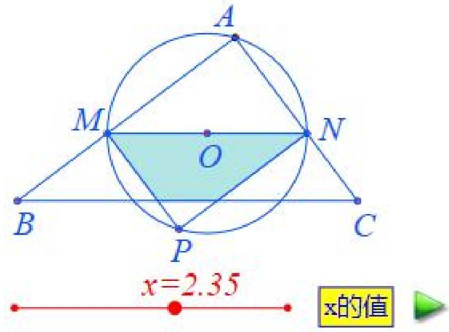


图 2-2-1-7

2.当点 P 落在 BC 的下方时，设 PM 与 BC 交于点 E，PN 与 BC 交与点 F，△MNP 与梯形 $BCNM$ 重合部分就是梯形 $MNFE$，如图 2-2-1-7 所示.由问题（1）$S_{\Delta MNP}=\dfrac{3}{8}x^2$，因为 PN // AM，MN // BC，所以四边形 $MBFN$ 是平行四边形，所以 $PF=PN\text{-}NF=AM\text{-}BM=x-(4-x)=2x-4$，又因为 $\Delta PEF\backsim\Delta ACB$，所以，$\left(\dfrac{PF}{AB}\right)^2=\dfrac{S_{\Delta PEF}}{S_{\Delta ABC}}$，所以 $S_{\Delta PEF}=\dfrac{3}{2}(x-2)^2$，因为 $y=S_{\Delta MNP}-S_{\Delta PEF}$，所以当 $2<x<4$ 时，$y=-\dfrac{9}{8}x^2+6x-6=-\dfrac{9}{8}\left(x-\dfrac{8}{3}\right)^2+2$. 所以在这种情况下，当 $x=\dfrac{8}{3}$ 时，$y_{最大}=2$.

综合两种情况得当 $x=\dfrac{8}{3}$ 时 $y_{最大}=2$.

【简要评注】

当⊙O 与直线 BC 相切时，不能认为点 M 为 AB 的中点，此时通过作高，利用相似三角形的对应高之比等于相似比求 AM 的长.在求 y 与 x 的函数关系时，要分析点 M 的运动对重叠部分图形的影响，根据图形的不同确定所需讨论的情况数，同时通过临界点确定自变量的取值范围，在求重叠部分图形的面积时，利用了利用相似三角形的面积比等于相似比的平方这一性质求面积，比直接根据面积公式求面积要简便的多.

2．点的坐标与正方形的面积关系

例 2-2-2. 如图 2-2-2-1，⊙O 的半径为 1，正方形 $ABCD$ 顶点 B 坐标为（5，0），顶点 D 在⊙O 上运动.

（1）当点 D 运动到与点 A、O 在同一条直线上时，试证明直线 CD 与⊙O 相切；

（2）当直线 CD 与⊙O 相切时，求 CD 所在直线对应的函数关系式；

（3）设点 D 的横坐标为 x，正方形 $ABCD$ 的面积为 S，求 S 与 x 之间的函数关系式，并求出 S 的最大值与最小值.

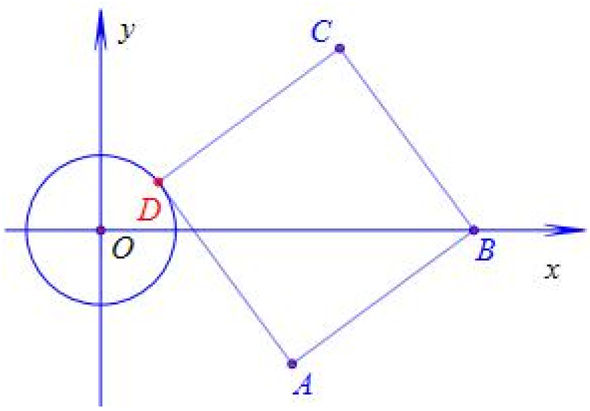


图 2-2-2-1

（一）当 D、A、O 三点共线时，证明直线 CD 与⊙O 相切

【动感体验】

打开文件“例 2-2-2.dmr”，如图 2-2-2-1 所示，拖动点 D，观察当点 A、点 O 和点 D 在同一条直线上时，观察直线 CD 与⊙O 的关系.

【思路点拨】

按照点 D 在线段 OA 上和点 D 在 AO 的延长线上两种情况讨论.

【动态解析】

当 D、A、O 三点共线时，点 D 的位置有两种情形，如图 2-2-2-2 和图 2-2-2-3 所示，这两种情况下都有∠ADC=90°，即半径 OD 与直线 DC 垂直，所以直线 CD 与⊙O 相切.

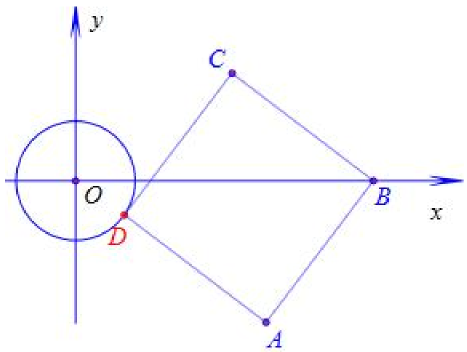


图 2-2-2-2

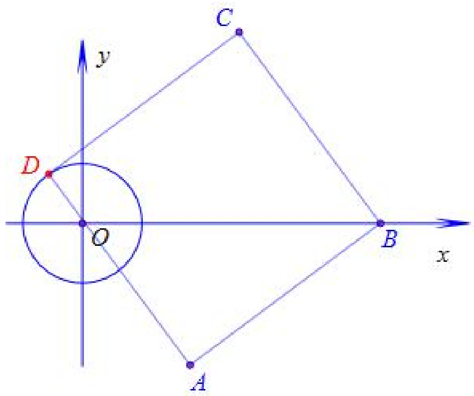


图 2-2-2-3

（二）求与⊙O 相切时直线 CD 的解析式

由问题（1）知此题分两种情况进行讨论.假设 E、F 分别为直线 CD 与 x 轴、y 轴的交点，则：

1.当点 D 在第二象限时，如图 2-2-2-4 所示，设正方形 $ABCD$ 的边长为 a，在 Rt△ABO 中，因为 $AO^2+AB^2=BO^2$，AO=a-1，BO=5，AB=a，所以$(a-1)^2+a^2=5^2$，于是求得 a=4，那么 AB=4、OA=3、OB=5.

容易知道，Rt△ABO∽Rt△DEO∽△DOF，所以$\dfrac{OF}{OD}=\dfrac{OB}{AB}$、$\dfrac{OE}{OD}=\dfrac{OB}{OA}$，可求得：$OF$=$\dfrac{5}{4}$、$OE$=$\dfrac{5}{3}$，所以可求得点 E、点 F 的坐标 $E(-\dfrac{5}{3}$，0)、F(0，$\dfrac{5}{4}$)，因此直线 CD 的解析式为 $y=\dfrac{3}{4}x+\dfrac{5}{4}$.

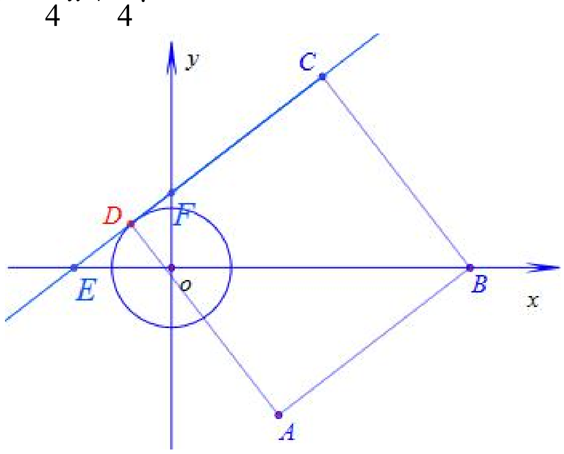


图 2-2-2-4

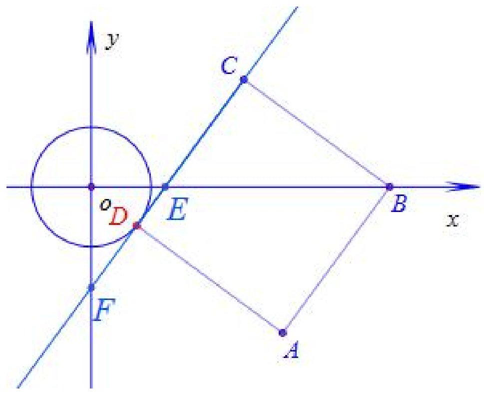


图 2-2-2-5

2.当点 D 在第四象限时，如图 2-2-2-5 所示，同理可得直线 CD 的解析式为 $y=\dfrac{4}{3}x-\dfrac{5}{3}$.

（三）求 S 与 x 之间的函数关系式及其最值

【动感体验】

单击“下一页”按钮，进入下一页，如图 2-2-2-6 所示，拖动点 D，观察正方形 $ABCD$ 的面积随点 D 的位置变化而变化的规律.

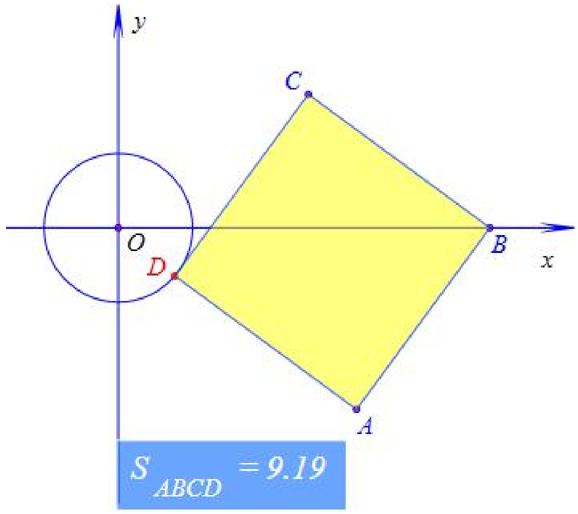


图 2-2-2-6

【思路点拨】

点 D 的位置直接影响正方形的对角线 BD 的长度，利用 BD 的长度表示正方形的面积.

【动态解析】

正方形 $ABCD$ 的面积 $S = AB^2 = \dfrac{1}{2}BD^2$.过点 D 做 DH 垂直于 x 轴于点 H,如图 2-2-2-7 所示，则 $BD^2 = BH^2 + DH^2$.

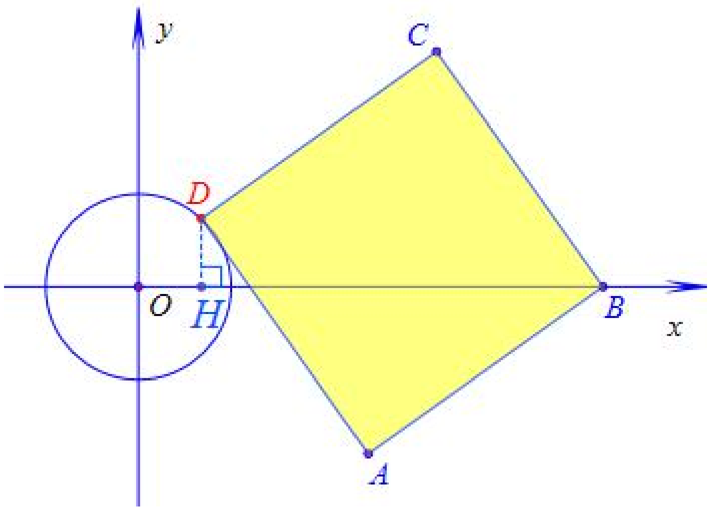


图 2-2-2-7

又因为 $BH^2 = (5-x)^2$、$DH^2 = 1-x^2$，所以 $BD^2 = (5-x)^2 + 1 - x^2 = 26 - 10x$，所以 $S = 13 - 5x$.

而 $-1 \le x \le 1$，所以当 x=-1 时 $S_{最大} = 18$，当 x=1 时 $S_{最小} = 8$.

【简要评注】

点 D 运动时，正方形的顶点 A、D、C 的位置发生变化，边长也发生变化，所以此题要求学生具有对动态图形的分析的较高能力.在求正方形的面积时，如果通过正方形面积公式求边长，其计算相当复杂，对于一般学生很难求出，但若考虑正方形是特殊的菱形，利用菱形面积公式——两对角线积的一半，便可把复杂的问题简单化，此问题就转变成求正方形的对角线 BD 的长即可.

3．直线与折线段的交点所影响的区域

例 2-2-3．如图 2-2-3-1，在直角梯形 $OABD$ 中，$DB\parallel OA$，$\angle OAB=90°$，点 O 为坐标原点，点 A 在 x 轴的正半轴上，对角线 OB、AD 相交于点 M．$OA=2$，$AB=2\sqrt{3}$，BM∶$MO=1$∶2．

（1）求 OB 和 OM 的值；

（2）求直线 OD 所对应的函数关系式；

（3）已知点 P 在线段 OB 上（P 不与点 O、B 重合），经过点 A 和点 P 的直线交梯形 $OABD$ 的边于点 E（E 异于点 A），设 $OP=t$，梯形 $OABD$ 被夹在 $\angle OAE$ 内的部分的面积为 S，求 S 关于 t 的函数关系式．

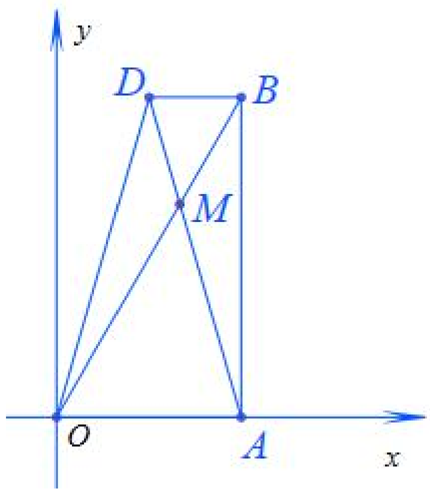


图 2-2-3-1

（一）求 OB 和 OM 的值

根据$\angle OAB=90°$ $OA=2$，$AB=2\sqrt{3}$，用勾股定理直接求出 $OB=4$，又根据 BM∶$MO=1$∶2，所以 $OM=\frac{8}{3}$．

（二）求 OD 的解析式

因为 $DB\parallel OA$，所以$\triangle BDM\backsim\triangle OAM$，所以有$\frac{DB}{OA}=\frac{BM}{OM}=\frac{1}{2}$，直接求出 $DB=1$，所以 D（1，$2\sqrt{3}$），用待定系数法直接求出 OD 的解析式为$y=2\sqrt{3}x$．

（三）求 S 关于 t 的函数关系式

【动感体验】

打开文件"例 2-2-3.dmr"，如图 2-2-3-2 所示，通过变量尺改变 t 的值或者通过按钮设置 t 的值，从而改变点 P 的位置，观察点 P 从点 O 运动到点 B 的过程中，梯形 $OABD$ 被夹在 $\angle OAE$ 内的多边形的变化规律.

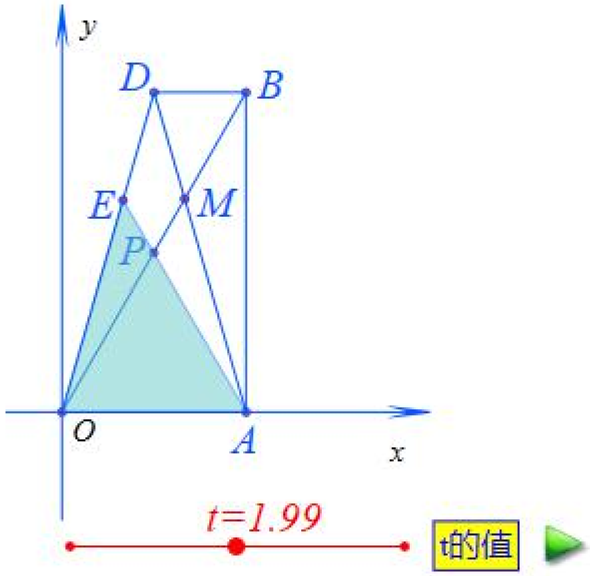


图 2-2-3-2

【思路点拨】

分两种情况讨论：当点 P 在 OM 上时，梯形 $OABD$ 被夹在 $\angle OAE$ 内的多边形是三角形；当点 P 在 MB 上时，梯形 $OABD$ 被夹在 $\angle OAE$ 内的多边形是一个梯形.

【动态解析】

1.首先考虑梯形 $OABD$ 被夹在 $\angle OAE$ 内的多边形是 ΔEOA，如图 2-2-3-2 所示，此时点 P 在 OM 上，所以 t 的取值范围为 $0 < t \le \dfrac{8}{3}$.拖动点 P，可以观察到，$\angle EOA$ 的大小和边 OA 的长度都不变.因此可以以 OA 为三角形的底边，以点 E 的纵坐标的绝对值为三角形的高.

分别过 E、P 作 $EF\perp OA$，$PN\perp OA$，垂足分别为 F 和 N，如图 2-2-3-3 所示.此时 $\angle OPN=\angle OBA=30°$，因为 $OP=t$，所以可求出 $P(\dfrac{1}{2}t,\dfrac{\sqrt{3}}{2}t)$，又因为 A（2，0），设经过 A、P 的直线所对应的函数关系式是 $y=kx+b$，可求得 $k=-\dfrac{\sqrt{3}t}{4-t}$，$b=\dfrac{2\sqrt{3}t}{4-t}$，所以经过 A、P 的直线所对应的函数关系式是 $y=-\dfrac{\sqrt{3}t}{4-t}x+\dfrac{2\sqrt{3}t}{4-t}$，而直线 OD 的解析式为 $y=2\sqrt{3}x$，因为

当$0<t\le\dfrac{8}{3}$时，点 E 在直线 OD 上，所以可设 E（$n,2\sqrt{3}n$），因为点 E 在直线 AP 上，所以 $-\dfrac{\sqrt{3}t}{4-t}n+\dfrac{2\sqrt{3}t}{4-t}=2\sqrt{3}n$，求出 $n=\dfrac{2t}{8-t}$，所以 $EF=\dfrac{4\sqrt{3}t}{8-t}$，所以 $S_{\Delta OEA}=\dfrac{1}{2}OA\cdot EF=\dfrac{4\sqrt{3}t}{8-t}$（$0<t\le\dfrac{8}{3}$）.

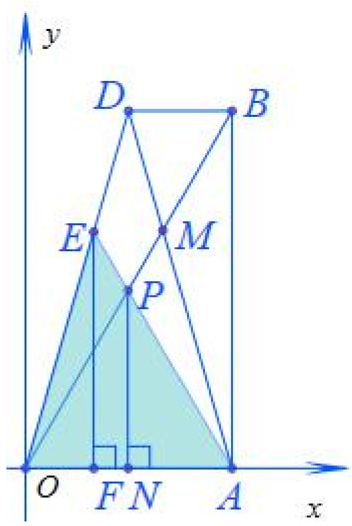


图 2-2-3-3

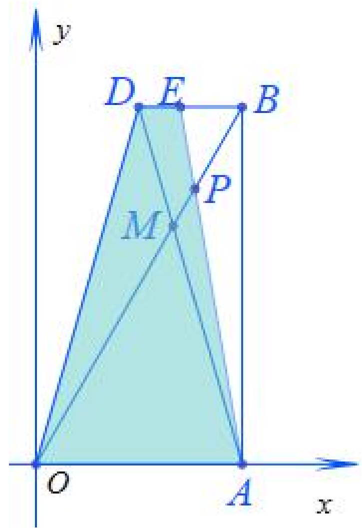


图 2-2-3-4

2.接着考虑梯形 $OABD$ 被夹在$\angle OAE$ 内的多边形是一个梯形，如图 2-2-3-4 所示，此时点 P 在 MB 上时，所以 t 的取值范围为$\dfrac{8}{3}<t<4$.拖动点 P，发现梯形 $OABD$ 的面积不变，RtΔAEB 中 AB 边不变，所以梯形 $OAED$ 的面积可用$S_{梯形OABD}-\mathrm{S}_{\Delta ABE}$得到.

因为 $BD\,//\,OA$，所以$\Delta EPB\backsim\Delta APO$，因为 $OP=t$，所以可求出$\mathrm{BE}=\dfrac{2(4-t)}{t}$，

所以$S_{\Delta ABE}=\dfrac{1}{2}BE\cdot AB=\dfrac{4-t}{t}\times 2\sqrt{3}$，

因为$S_{梯形OABD}=\dfrac{1}{2}(OA+BD)\cdot AB=\dfrac{1}{2}(1+2)\times 2\sqrt{3}=3\sqrt{3}$，所以

$$S=S_{梯形OABD}-\mathrm{S}_{\Delta ABE}=-\frac{8\sqrt{3}}{t}+5\sqrt{3}\ \left(\frac{8}{3}<t<4\right).$$

所以，综上所述：$S=\begin{cases}\dfrac{4\sqrt{3}t}{8-t}\left(0<t\le\dfrac{8}{3}\right)\\[2ex]-\dfrac{8\sqrt{3}}{t}+5\sqrt{3}\left(\dfrac{8}{3}<t<4\right)\end{cases}$

【简要评注】

根据梯形 $OABD$ 被夹在$\angle OAE$ 内的图形确定所需要讨论的所有情况数.在表示坐标系内

图形的面积时，通常会选择平行于坐标轴的边作底边，其对应边上的高通过相似或解直角三角形即可得到.对于不规则图形面积的求法，一般采用间接的方法求解.

4．因折叠而产生的公共区域

例 2-2-4． 已知直角梯形纸片 $OABC$ 在平面直角坐标系中的位置如图 2-2-4-1 所示，四个顶点的坐标分别为 $O(0, 0)$，$A(10, 0)$，$B(8, 2\sqrt{3})$，$C(0, 2\sqrt{3})$，点 T 在线段 OA 上(不与线段端点重合)，将纸片折叠，使点 A 落在射线 AB 上(记为点 A')，折痕经过点 T，折痕 TP 与射线 AB 交于点 P，设点 T 的横坐标为 t，折叠后纸片重叠部分(图中的阴影部分)的面积为 S；

(1)求$\angle OAB$ 的度数，并求当点 A'在线段 AB 上时，S 关于 t 的函数关系式；

(2)当纸片重叠部分的图形是四边形时，求 t 的取值范围；

(3)S 存在最大值吗？若存在，求出这个最大值，并求此时 t 的值；若不存在，请说明理由．

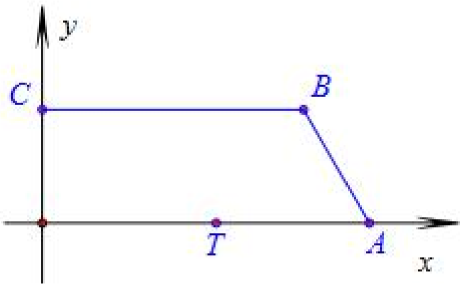


图 2-2-4-1

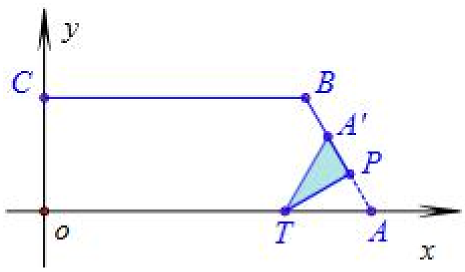


图 2-2-4-2

（一）求$\angle OAB$ 的度数及 S 关于 t 的函数关系式

根据已知条件，可$\angle OAB=60°$，$AB=4$，由折叠的性质可知 $AP=A'P$，$AT=A'T$，且 $TP\perp AA'$，所以当点 A'落在 AB 上时，重叠部分是 Rt$\Delta A'PT$，如图 2-2-4-2 所示.

因为 $AT=10-t$，$\angle OAB=60°$，所以 Rt$\Delta A'PT$ 中 $AP=\frac{1}{2}AT=\frac{1}{2}(10-t)$，$TP=\sqrt{3}AP=\frac{\sqrt{3}}{2}(10-t)$，而 $AP=A'P$，$S_{\Delta A'TP}=\frac{1}{2}A'P\cdot TP=\frac{\sqrt{3}}{8}(10-t)^2$.

其中，当点 A'与点 B 重合时，$AP=\frac{1}{2}AB=2$，$OT=6$，即 $t=6$，所以 t 的取值范围为 $6\le t<10$.

（二）求当纸片重叠部分的图形是四边形时 t 的取值范围

【动感体验】

打开文件“例 2-2-4.dmr”，如图 2-2-4-3 所示，通过变量尺改变 t 的值或者通过按钮设置它的值，从而可以改变点 T 的位置，观察当纸片重叠部分的图形是四边形时，点 T 所要满足的条件.

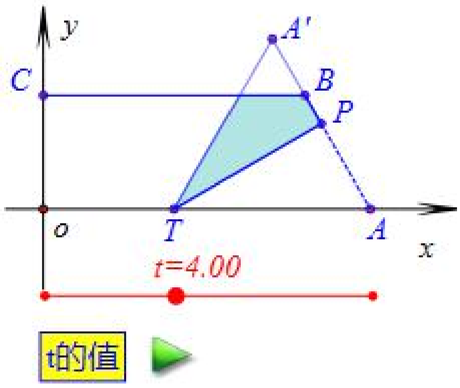


图 2-2-4-3

【思路点拨】

当点 A' 从线段 AB 上移动到 AB 的延长线上的过程中，重叠部分图形的形状由三角形变为四边形；

当点 P 从线段 AB 上移动到 AB 的延长线上的过程中，重叠部分图形的形状由四边形变为三角形.

【动态解析】

1）当点 A' 与点 B 重合时，如图 2-2-4-4 所示，由问题（1）知这时 t=6.

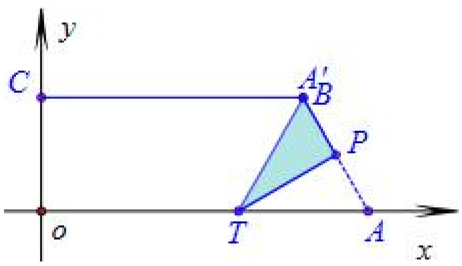


图 2-2-4-4

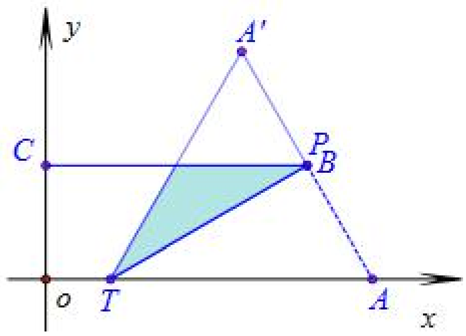


图 2-2-4-5

2）当点 P 与点 B 重合时，如图 2-2-4-5 所示，这时 AP=AB=4，所以 AT=2AB=8，所以 OT=10-AT=2.

所以，当纸片重叠部分的图形是四边形时 t 的取值范围是：$2<t<6$.

（三）讨论 S 是否存在最大值

【动感体验】

单击“下一页”按钮，进入第二页，如图 2-2-4-6 所示，拖动点 T 观察重叠部分面积的变化规律.

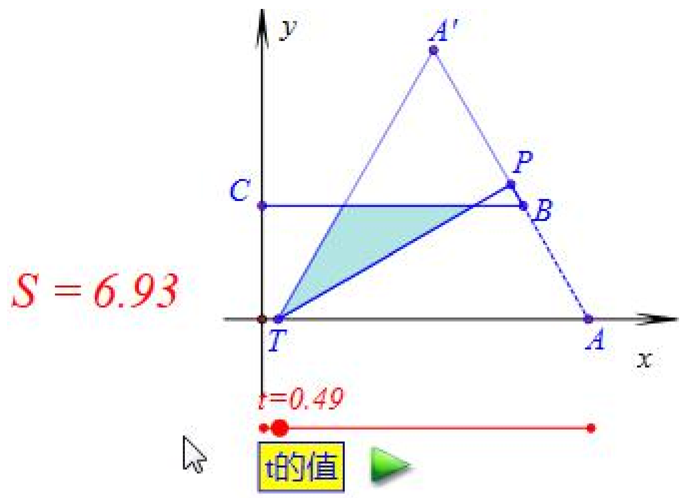


图 2-2-4-6

【思路点拨】

根据重叠部分形状的不同分三种情况讨论：①点 A'在线段 AB 上、折痕 TP 与线段 AB 相交；②当点 A' 在线段 AB 的延长线上、折痕 TP 与线段 AB 相交；③当折痕 TP 与线段 AB 的延长线相交.

【动态解析】

拖动点 T 运动过程中，发现当点 A' 在线段 AB 上、折痕 TP 与线段 AB 相交，重叠部分是直角三角形；当点 A' 在线段 AB 的延长线上、折痕 TP 与线段 AB 相交时，重叠部分是四边形；当折痕 TP 与线段 AB 的延长线相交时，重叠部分是等腰三角形，所以分三种情况讨论 S 的最大值.

1.当点 A' 在线段 AB 上、折痕 TP 与线段 AB 相交，重叠部分是 Rt$\Delta A'PT$.如图 2-2-4-7 所示，由问题（1）的分析 $S=\frac{\sqrt{3}}{8}(10-t)^2$（$6\le t<10$）在对称轴 t=10 的左边，S 的值随 t 的增大而减小，所以当 t=6 时，S 有最大值，最大值为 $2\sqrt{3}$.

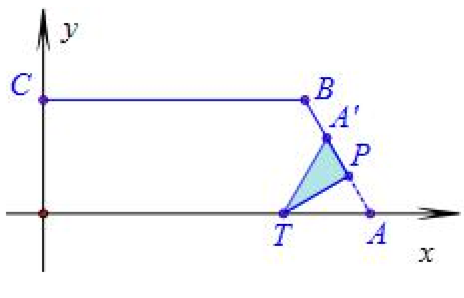


图 2-2-4-7

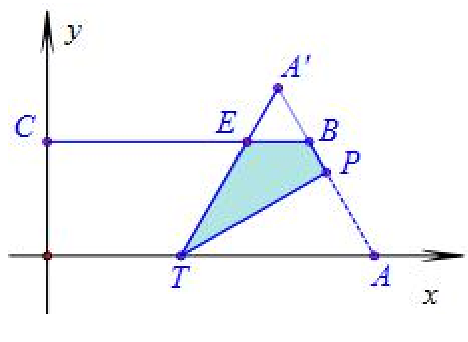


图 2-2-4-8

2.当点 A' 在线段 AB 的延长线上、折痕 TP 与线段 AB 相交时，假设重叠部分是四边形 $TEBP$，如图 2-2-4-8 所示，此时重叠部分面积 $S=S_{\Delta A'TP}-S_{\Delta A'EB}$，因为$\Delta A'AT$ 为等边三角形，所以 $A'A=AT=10-t$，而 $AB=4$，所以 $A'B=10-t-4=6-t$，而$\Delta A'EB$ 为等边三角形，所以 $S_{\Delta A'EB}=\frac{\sqrt{3}}{4}A'B=\frac{\sqrt{3}}{4}(6-t)^2$.而 $S_{\Delta A'TP}=\frac{\sqrt{3}}{8}(10-t)^2$，所以

$S=\frac{\sqrt{3}}{8}(10-t)^2-\frac{\sqrt{3}}{4}(6-t)^2=-\frac{\sqrt{3}}{8}(t-2)^2+4\sqrt{3}$，由问题（2）知 t 的取值范围 $2<t<6$，所以 $S<4\sqrt{3}$.

3.当折痕 TP 与线段 AB 的延长线相交时，假设重叠部分是三角形 EFE.此时$\angle ETF=\angle FTA=\angle EFT$，所以$\Delta EFT$ 是等腰三角形，如图 2-2-4-9 所示.因为$\Delta A'AT$ 和$\Delta A'EB$ 都为等边三角形，所以 $ET=AB=4$，而 $OC=2\sqrt{3}$，所以 $S=\frac{1}{2}EF\cdot CO=4\sqrt{3}$，此时 t 的取值范围为 $0<t\le 2$.

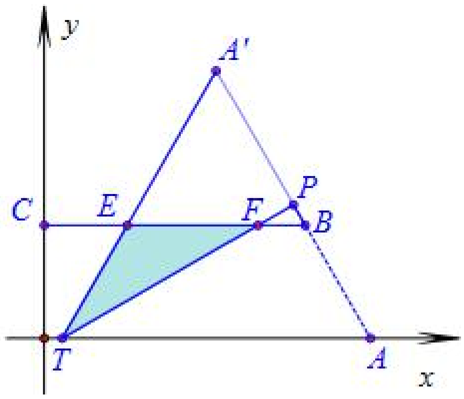


图 2-2-4-9

综上，S 的最大值为 $4\sqrt{3}$，此时 t 的值为 $0<t\le 2$.

【简要评注】

这道题根据重叠部分图形形状的不同确定所需讨论的情况数，其关键是确定 T 的两个临界点，确定点 T 的位置后，要根据不同的情况画出图形，其方法是先画对称轴，再画点 A 的对称点 A'.再求面积 S 与 t 的函数关系式时，根据图形的形状利用面积公式选择直接或间接法.

5．两动点影响下的区域

例 2-2-5．如图 2-2-5-1，在平面直角坐标系 xOy 中，A（18，0）、B（0，-10）、C（8，-10）.现有两动点 P、Q 分别从 O、C 两点同时出发，点 P 以每秒 4 个单位的速度沿 OA 向终点 A 移动，点 Q 以每秒 1 个单位的速度沿 CB 向点 B 移动，点 P 停止运动时，点 Q 也同时停止运动.线段 OC，PQ 相交于点 D，过点 D 作 $DE // OA$，交 CA 于点 E，射线 QE 交 x 轴于点 F.设动点 P、Q 移动的时间为 t（s）. 当 $0<t<\dfrac{9}{2}$ 时，$\triangle PQF$ 的面积是否总为定值？若是，求出此定值；若不是，请说明理由.

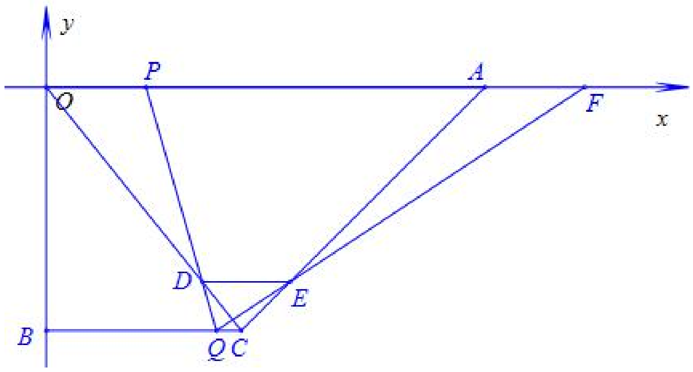


图 2-2-5-1

【动感体验】

打开文件“例 2-2-5.dmr”，如图 2-2-5-2 所示. 通过变量尺改变 t 的值或者通过按钮设置它的值，从而改变点 P 的位置，观察和总结$\triangle PQF$ 的形状以及它的面积测量值的变化规律.

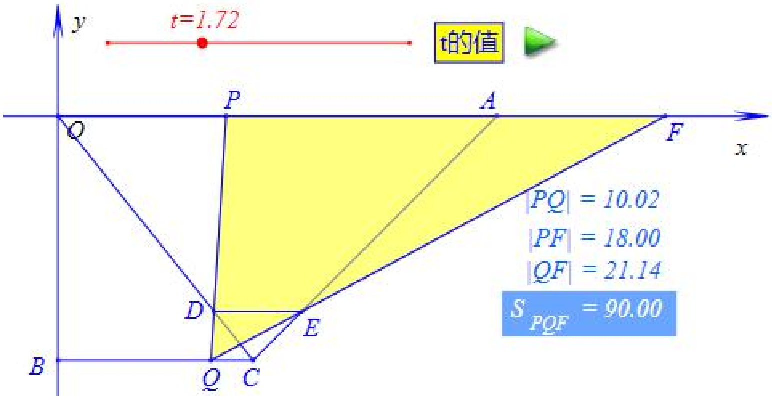


图 2-2-5-2

【思路点拨】

通过操作也许你观察到了$\triangle PQF$ 的面积是否为定值.

实际上，是否通过操作预先知道了它的面积为定值，后面的思考过程都是一样的：

若用 PF 表示△PQF 的底边，则它的高就是两条平行线 BC 与 OA 之间的距离，即 OB 的长度.因此，在点 P 在 OA 上运动的过程中，若 PF 的长度保持不变，则△PQF 的面积就是定值，否则就不是定值.

【动态解析】

因为 $PF=PA+AF$，$PA=18-4t$.所以，只需要求出利用 t 表示的关于 AF 长度的表达式即可.

因为 $BC//OA$，所以△AEF ∽△CEQ，则：$\dfrac{AF}{CQ}=\dfrac{AE}{EC}$.

因为 $DE//OA$，所以△CAO ∽△CDE，则：$\dfrac{AE}{EC}=\dfrac{OD}{DC}$.

因为 $BC//OA$，所以△OPD ∽△ CQD，则：$\dfrac{OD}{DC}=\dfrac{OP}{CQ}$.

所以，$\dfrac{AF}{CQ}=\dfrac{OP}{CQ}$，即：$AF=OP$.

所以 $PF=PA+OP=OA=18$，为定值.

因此 $S_{\triangle PQF}=\dfrac{1}{2}\times PF\times OB=90$，为定值. 如图 2-2-5-3、2-2-5-4 所示，为其中的两种情景。

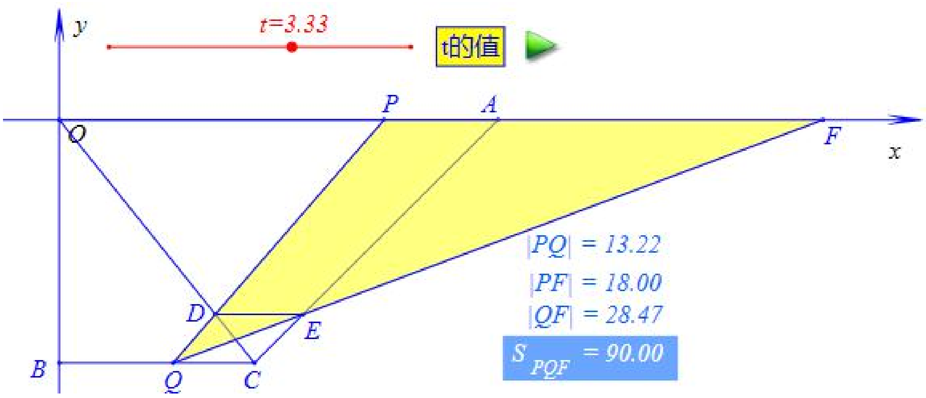


图 2-2-5-3

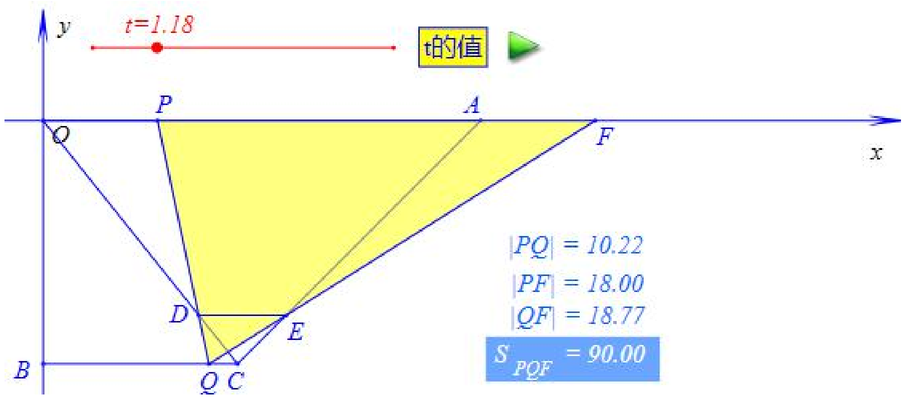


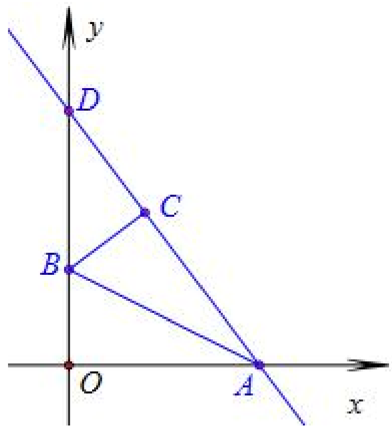
图 2-2-5-4

巩固练习（二）

练习 2-2-1：如下图，在平面直角坐标系，直线 $y=-\frac{4}{3}(x-6)$ 与 x 轴、y 轴分别相交于 A、D 两点，点 B 在 y 轴上，现将 $\triangle AOB$ 沿 AB 翻折 $180°$，使点 O 刚好落在直线 AD 的点 C 处.

（1）求 BD 的长.

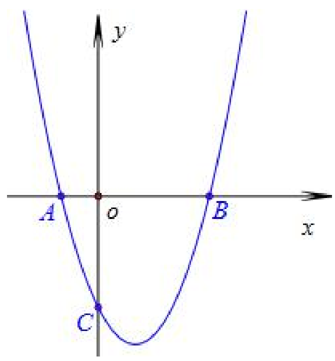
（2）设点 N 是线段 AD 上的一个动点（与点 A、D 不重合），$S_{\triangle NBD}=S_1$，$S_{\triangle NOA}=S_2$，当点 N 运动到什么位置时，$S_1 \bullet S_2$ 的值最大，并求出此时点 N 的坐标.



练习 2-2-2：如下图，抛物线 $y=x^2-2x+k$ 与 x 轴交于 A、B 两点，与 y 轴交于点 $C(0,-3)$.

（1）$k=$__________，点 A 的坐标为____________，点 B 的坐标为__________；

（2）在 x 轴下方的抛物线上是否存在一点 D，使四边形 $ABDC$ 的面积最大？若存在，请求出点 D 的坐标；若不存在，请说明理由；

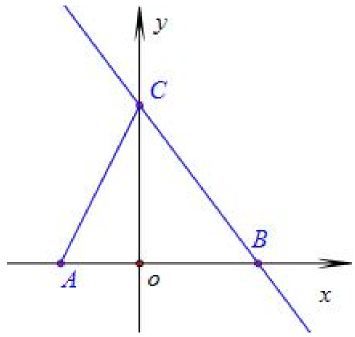


练习 2-2-3：如下图 41，直线 y=$-\dfrac{4}{3}x+4$ 和 x 轴、y 轴的交点分别为 B，C，点 A 的坐标是（－2，0）.

（1）试说明△ABC 是等腰三角形；

（2）动点 M 从点 A 出发沿 x 轴向点 B 运动，同时动点 N 从点 B 出发沿线段 BC 向点 C 运动，运动的速度均为每秒 1 个单位长度，当其中一个动点到达终点时，它们都停止运动，设点运动 t 秒时，△MON 的面积为 S.求 S 与 t 的函数关系式；

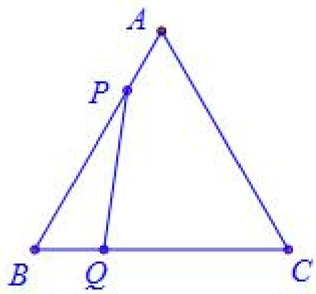
（3）当点 M 在线段 OB 上运动时，是否存在 S=4 的情形？若存在，求出对应的 t 值；若不存在，说明理由；



练习 2-2-4：已知：如下图，△ABC 是边长 3cm 的等边三角形，动点 P、Q 同时从 A、B 两点出发，分别沿 AB、BC 方向匀速移动，它们的速度都是 1cm/s，当点 P 到达点 B 时，P、Q 两点停止运动．设点 P 的运动时间为 t（s），解答下列问题：

（1）设四边形 $APQC$ 的面积为 y（cm^2），求 y 与 t 的关系式；是否存在某一时刻 t，使四边形 $APQC$ 的面积是△ABC 面积的三分之二？如果存在，求出相应的 t 值；不存在，说明理由；

（3）设 PQ 的长为 x（cm），试确定 y 与 x 之间的关系式.

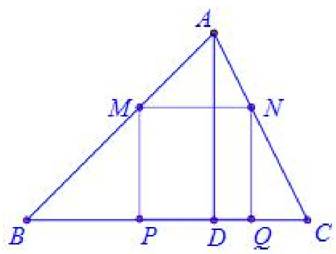


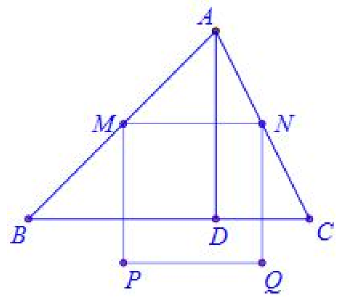
练习 2-2-5：锐角$\triangle ABC$中，BC=6，$S_{\triangle ABC}=12$，两动点M、N分别在边AB、AC上滑动，且MN∥BC，以MN为边向下作正方形$MPQN$，设其边长为x，正方形$MPQN$与$\triangle ABC$公共部分的面积为$y(y>0)$.

（1）$\triangle ABC$中边BC上高AD=_______；

（2）当x=__________时，PQ恰好落在边BC上（如左下图）；

（3）当PQ在$\triangle ABC$外部时（如右下图），求y关于x的函数关系式（注明x的取值范围），并求出x为何值时y最大，最大值是多少？





练习 2-2-6：如下图，有一张形状为梯形的纸片$ABCD$，上底AD长为4cm，下底BC长为8cm，高为8cm，点M是腰AB上的一个动点，过点M作MN∥BC，交DC于点N，设MN=$x$cm，

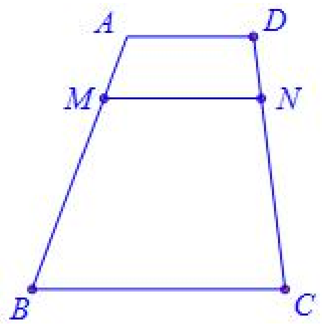
（1）点M是AB的中点，那么MN=_________；

（2）若梯形$AMND$的高为h_1，梯形$MBCN$的高为$h2$，则$\dfrac{h_1}{h_2}$=_________（用含有x的式子表示）；

（3）将梯形$AMND$沿MN折叠，点A落在平面$MBCN$内的点记为E，点D落在平面$MBCN$内的点记为F，梯形$EFNM$与梯形$BCNM$的重叠面积为S.

① S与x的关系式，并写出x的取值范围.

② x为何值时，重叠部分的面积S最大，最大值是多少？


A
D
M
N
B
C

本节小结

解决此类问题除了掌握第一节的知识外，还要注意到以下两点：(1) 常见图形面积公式，（2）学会灵活地将非特殊图形的面积转化为特殊图形的面积，将同底（或等高）的两个三角形的面积之比转化为它们高（或底）之比，将相似三角形面积之比转化为相似比（或周长的比、对应边上的高的比、对应边上的中线的比等）的平方.

第三节 由运动产生的重叠区域

1．求重叠区域面积的最大值

例 2-3-1．如图 2-3-1-1，在梯形 $ABCD$ 中，$AD∥BC$，$AB=AD=DC=2$cm，$BC=4$cm，在等腰△PQR 中，∠$QPR=120°$，底边 $QR=6$cm，点 B、C、Q、R 在同一直线 l 上，且 C、Q 两点重合，如果等腰△PQR 以 1cm/秒的速度沿射线 CB 的箭头所示方向匀速运动，t 秒时梯形 $ABCD$ 与等腰△PQR 重合部分的面积记为 S 平方厘米

（1）当 $t=4$ 时，求 S 的值；

（2）当 $4\le t\le 10$ 时，求 S 与 t 的函数关系式，并求出 S 的最大值.

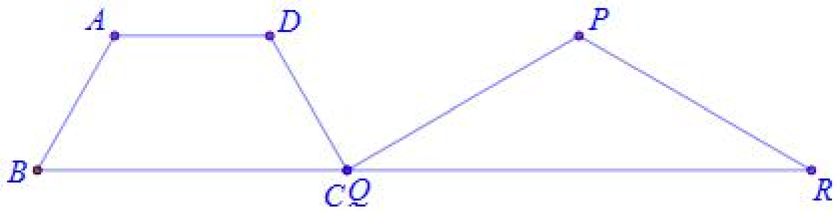


图 2-3-1-1

（一）求 $t=4$ 时 S 的值

如图 2-3-1-2 所示，当 $t=4$ 时，点 Q 与点 B 重合，点 P 与点 D 重合，重合部分为△BCD，由条件易得∠$DCB=60°$，∠$DCB=30°$，所以△BCD 为直角三角形，又因为 $CD=2$，所以 $BD=2\sqrt{3}$，所以 $S=\frac{1}{2}CD\times BD=2\sqrt{3}$.

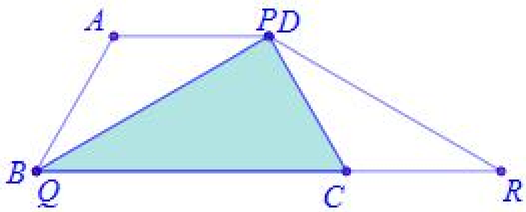


图 2-3-1-2

（二）求当 $4\le t\le 10$ 时，S 与 t 的函数关系式及 S 的最大值

【动感体验】

打开文件“2-3-1.dmr”，如图 2-3-1-3 所示，拖到点 Q 或者单击“动画”按钮，观察点 Q 在从右向左运动的过程中，梯形 $ABCD$ 与等腰△PQR 重合部分图形的变化规律.

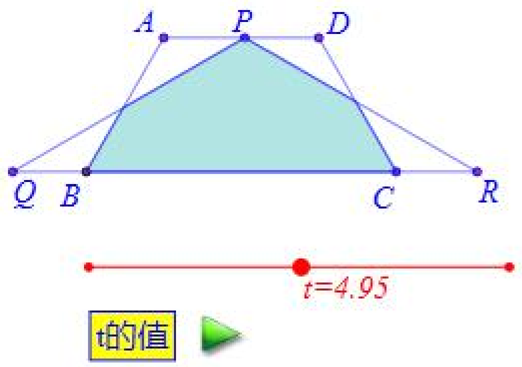


图 2-3-1-3

【思路点拨】

将$4 \le t \le 10$分为$4 \le t < 6$与$6 \le t \le 10$两段进行讨论：当$4 \le t < 6$时，重合部分为五边形，用面积的和差求该五边形的面积；当$6 \le t \le 10$时，重合部分是60°角的直角三角形.

【动态解析】

1.当$4 \le t < 6$时,重叠部分是五边形,设*PQ*交*AB*于点*E*,*PR*交*CD*于点*F*,如图2-3-1-4所示.因为∠*PQR*=∠*CRP*=30°、∠*QPR*=∠*QBE*=∠*RCR*=120°，所以△*PQR*∽△*BQE*∽△*CRF*，因此：$\frac{S_{\Delta BQE}}{S_{\Delta PQR}} = \left(\frac{BQ}{PR}\right)^2$、$\frac{S_{\Delta CRF}}{S_{\Delta PQR}} = \left(\frac{CR}{PR}\right)^2$.

此时 *BQ*=*QC*-*BC*=*t*-4，*CR*=*QR*-*QC*=6-*t*. 另外，可求得$S_{\Delta PQR} = 3\sqrt{3}$，所以

$S_{\Delta BQE} = \frac{\sqrt{3}}{4}(t-4)^2$，$S_{\Delta CRF} = \frac{\sqrt{3}}{4}(6-t)^2$，所以重叠部分面积

$$S = S_{\Delta PQR} - S_{\Delta BQE} - S_{\Delta CRF} = -\frac{\sqrt{3}}{2}(t-5)^2 + \frac{5}{2}\sqrt{3}.$$

所以当*t*=5时，*S*有最大值$\frac{5}{2}\sqrt{3}$.

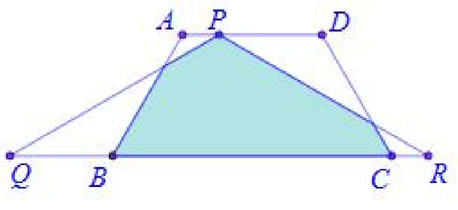


图 2-3-1-4

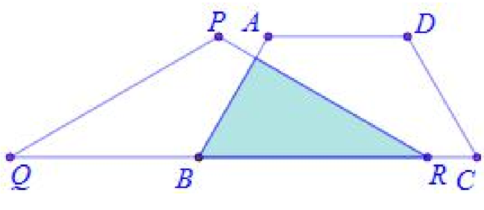


图 2-3-1-5

3.当$6 \le t \le 10$时，*P*在*DA*的延长线上，设*PR*交*AB*于点*H*，如图2-3-1-5所示，因为∠*ABC*=60°、∠*PRQ*=30°，所以重叠部分是直角三角形.此时

$BR=QC-BQ-RC=t-(t-4)-(t-6)=10-t$，所以 $BH=\dfrac{1}{2}BR$，$RH=\dfrac{\sqrt{3}}{2}BR$，所以

$S=\dfrac{1}{2}BH\times RH=\dfrac{\sqrt{3}}{8}BR^2=\dfrac{\sqrt{3}}{8}(10-t)^2$，当 $t=6$ 时，S 有最大值 $2\sqrt{3}$.

综上所述，当 $t=5$ 时，S 有最大值 $\dfrac{5}{2}\sqrt{3}$.

【简要评注】

此题在讨论当 $4\le t\le 10$ 时，S 与 t 的函数关系式时，根据重叠部分图形形状的不同确定所需分类讨论的情况数，关键找到一个临界位置，从而确定不同情况下 t 的取值范围.再求 $4\le t<6$ 式 S 的面积时，利用相似三角形的面积比等于相似比的平方，计算$\triangle BQE$ 和$\triangle CRF$ 的面积，再用间接法求 S 比较简便.

2．求重叠区域面积与时间的函数关系

例 2-3-2．如图 2-3-2-1，等腰直角三角形纸片 ABC 中，$AC=BC=4$，$\angle ACB=90^{\circ}$，直角边 AC 在 x 轴上，B 点在第二象限，A（1，0），AB 交 y 轴于 E，将纸片过 E 点折叠使 BE 与 EA 所在直线重合，得到折痕 EF（F 在 x 轴上），再展开还原沿 EF 剪开得到四边形 $BCFE$，然后把四边形 $BCFE$ 从 E 点开始沿射线 EA 平移，至 B 点到达 A 点停止.设平移时间为 $t(s)$，移动速度为每秒 1 个单位长度，平移中四边形 $BCFE$ 与△AEF 重叠的面积为 S.

（1）求折痕 EF 的长；

（2）是否存在某一时刻 t 使平移中直角顶点 C 经过抛物线 $y=x^2+4x+3$ 的顶点？若存在，求出 t 值；若不存在，请说明理由；

（3）直接写出 S 与 t 的函数关系式及自变量 t 的取值范围.

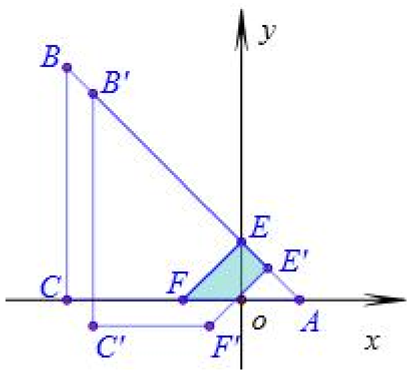


图 2-3-2-1

（一）求折痕 EF 的长

因为折叠后 BE 与 EA 所在直线重合，所以 $EF\perp EA$，又因为在 Rt△ABC 中 $AC=BC$，所以$\angle CAB=45°$，所以 $EF=EA$，因为 A（1，0），所以 $OA=OE=1$，$EA=\sqrt{2}$，所以折痕 $EF=\sqrt{2}$.

（二）讨论是否存在某一时刻 t 使点 C 经过抛物线 $y=x^2+4x+3$ 的顶点

点 C 运动的轨迹是过点 C 且与直线 AB 平行的一条直线利用 AB 的斜率和点 C 的坐标可求得该直线的解析式为 $y=-x-3$.因为抛物线的顶点坐标为 P（-2，-1），满足方程 $y=-x-3$，所以平移过程中直角顶点 C 能够经过抛物线 $y=x^2+4x+3$ 的顶点，如图 2-3-2-2 所示.

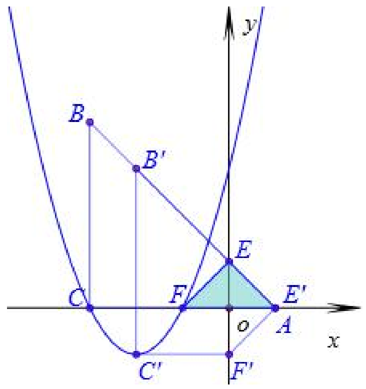


图 2-3-2-2

通过解直角三角形可求得$CC'=\sqrt{2}$，因为 $CC'/\!/BB'$，$CC'=BB'$，所以点 C 运动的速度和点 B 运动的速度相同，所以直角顶点 C 从开始到经过抛物线的顶点所移动的时间为 $t=\dfrac{\sqrt{2}}{1}=\sqrt{2}$.

（三）写出 S 与 t 的函数关系式及自变量 t 的取值范围

【动感体验】

打开文件“例 2-3-2.dmr”，拖动点 $E1$，观察当纸片沿着 BA 的方向平移的过程中，四边形 $BCFE$ 与△AEF 重叠部分图形的形状的变化规律.

【思路点拨】

按重叠部分图形的形状分四种情况讨论 S，通过特殊点讨论不同情况下自变量 t 的取值范围.

【动态解析】

1.若点 E' 在线段 EA 上（不包含端点 E、A），那么重叠部分为直角梯形，如图 2-3-2-3 所示，此时 $EE'=t$，所以 t 的取值范围为 $0<t<\sqrt{2}$，梯形上底的长等于 $AE'=AE-EE'=\sqrt{2}-t$，所以重叠部分的面积 $S=\dfrac{1}{2}(AE'+EF)EF'=-\dfrac{1}{2}t^2+\sqrt{2}t$，因为当 t=0 时，S=0，也满足 $S=-\dfrac{1}{2}t^2+\sqrt{2}t$，所以 t 的取值范围为 $0\le t<\sqrt{2}$.

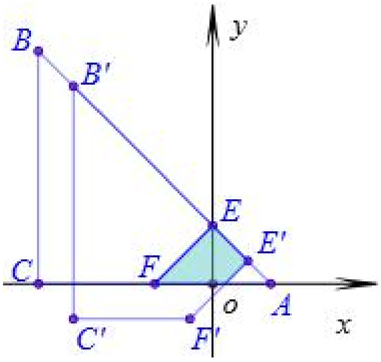


图 2-3-2-3

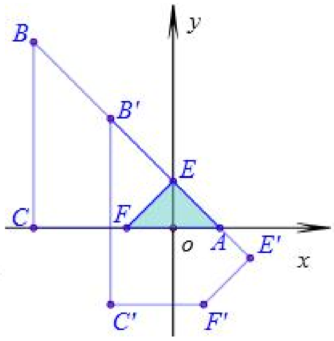


图 2-3-2-4

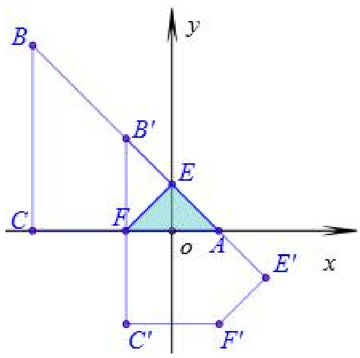


图 2-3-2-5

2.点 E' 在 EA 的延长线上并且线段 $B'C'$ 在点 F 左侧时，重叠部分为△AEF，如图 2-3-2-4 所示.当 $B'C'$ 经过点 F 时，如图 2-3-2-5 所示，此时 $B'E=EF=\sqrt{2}$， $EE'=2\sqrt{2}$，所以 t 的取值范围为 $\sqrt{2}<t\le 2\sqrt{2}$，此时重叠部分△AEF 的面积为 $S=1$.

3.当线段 $B'C'$ 在点 F 与点 O 之间时，重叠部分为不规则四边形，如图 2-3-2-6 所示.当点 B' 和点 E 重合时，如图 2-3-2-7 所示， $EE'=B'E'=3\sqrt{2}$ ，所以 t 的取值范围为 $2\sqrt{2}<t<3\sqrt{2}$.设 $B'C'$ 交 EF 于点 M，交 AC 于点 N，则重叠部分的面积等于△ $AB'N$ 的面积减去△ $B'ME$ 的面积，容易证明△ $AB'N$ 为等腰直角三角形，且 $B'A=4\sqrt{2}-t$，所以△ $AB'N$ 的面积为 $\dfrac{(4\sqrt{2}-t)^2}{4}$；△ $B'ME$ 为等腰直角三角形，且 $B'E=3\sqrt{2}-t$，所以△ $B'ME$ 的面积为 $\dfrac{B'E^2}{2}=\dfrac{(3\sqrt{2}-t)^2}{2}$，所以重叠部分的面积

$$S=\frac{(4\sqrt{2}-t)^2}{4}-\frac{(3\sqrt{2}-t)^2}{2}=-\frac{1}{4}t^2+\sqrt{2}t-1.$$

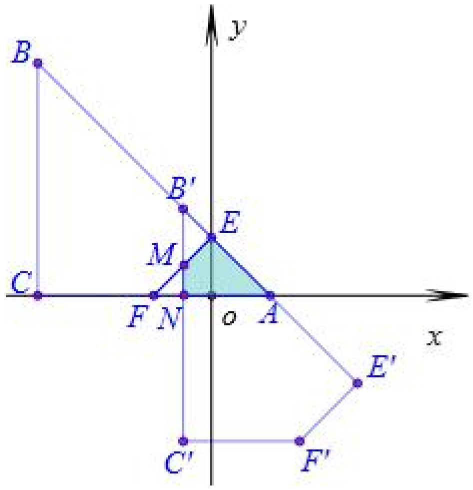


图 2-3-2-6

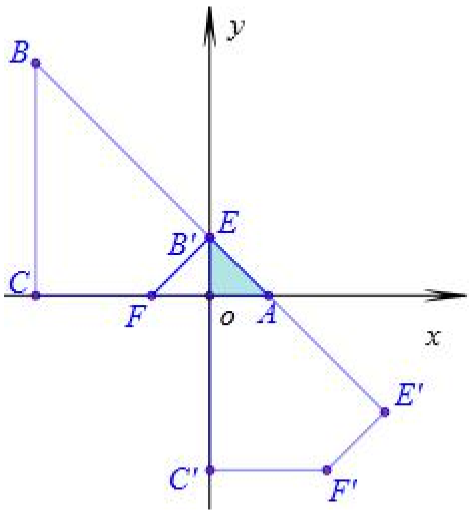


图 2-3-2-7

4.当线段 $B'C'$ 在点 O 右侧时，重叠部分为直角三角形，如图 2-3-2-8 所示.当点 B' 与点 E 重合时，$t=3\sqrt{2}$；当点 B' 与点 A 重合时，$t=4\sqrt{2}$，所以 t 的取值范围为 $3\sqrt{2}\le t\le 4\sqrt{2}$，设 $B'C'$ 交 AC 于点 N，重叠部分为等腰直角$\triangle B'NA$，因为 $B'A=4\sqrt{2}-t$，所以

$$S=\frac{B'A^2}{4}=\frac{1}{4}t^2-2\sqrt{2}t+8.$$

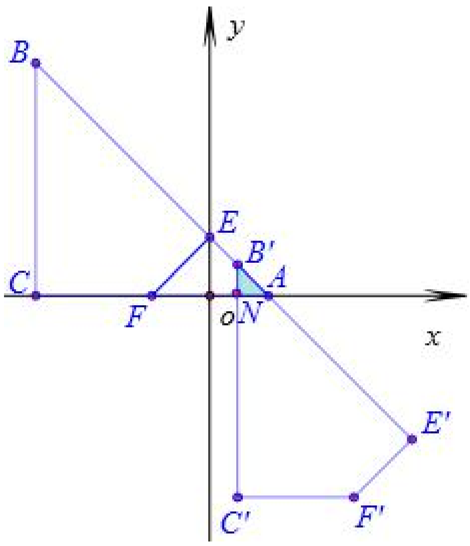


图 2-3-2-8

【简要评注】

此题在求 S 与 t 的函数关系式时，按重叠部分图形的形状分四种情况讨论 S，通过确定临界点讨论不同情况下自变量 t 的取值范围.由于图形中存在较多的等腰直角三角形，选择面积的求法时可根据图形的形状是否规则选择直接法或间接法，若重叠部分是规则的三角形，可用直接法；若是不规则的四边形，可用间接法求.

3．正方形在 x 轴下方的区域

例 2-3-3．如图 2-3-3-1，已知直线 $y=-\frac{1}{2}x+1$ 交坐标轴于 A、B 两点，以线段 AB 为边向上作正方形 $ABCD$，过点 A、D、C 的抛物线与直线另一个交点为 E.

（1）请直接写出点 C、D 的坐标；

（2）求抛物线的解析式；

（3）若正方形以每秒 $\sqrt{5}$ 个单位长度的速度沿射线 AB 下滑，直至顶点 D 落在 x 轴上时停止．设正方形落在 x 轴下方部分的面积为 S，求 S 关于滑行时间 t 的函数关系式，并写出相应自变量 t 的取值范围；

（4）在（3）的条件下，抛物线与正方形一起平移，同时 D 停止，求抛物线上 C、E 两点间的抛物线弧所扫过的面积．

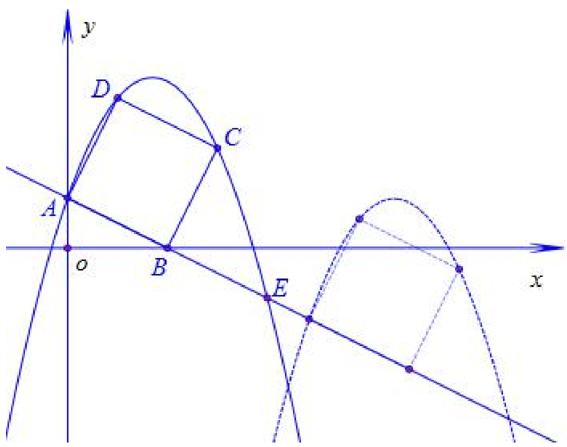


图 2-3-3-1

（一）求点 C、点 D 的坐标

由直线的方程 $y=-\frac{1}{2}x+1$ 容易得到：A（0，1），B（2，0）.过点 C、D 分别作 x 轴、y 轴的垂足 M、N，如图 2-3-3-2 所示.可以证明$\triangle AOB\cong\triangle BMC\cong DNA$.所以：$BM$=$ND$=1、CM=$NA$=2，所以点 C、D 的坐标为：C（3，2）、D（1，3）.

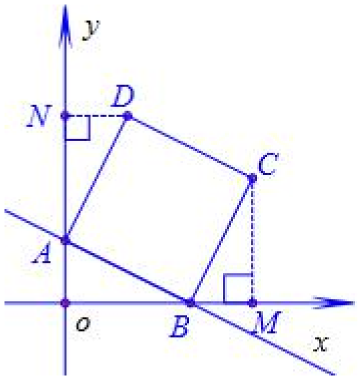


图 2-3-3-2

（二）求抛物线的解析式

此题为常规题，直接用待定系数法求出抛物线解析式.

设抛物线为 $y=ax^2+bx+c$，抛物线过（0，1）、（3，2）、（1，3），

$$\begin{cases} c=1 \\ a+b+c=3 \\ 9a+3b+c=2 \end{cases} \text{解得} \begin{cases} a=-\dfrac{5}{6} \\ b=\dfrac{17}{6} \\ c=1 \end{cases}，\text{所以抛物线解析式为 } y=-\frac{5}{6}x^2+\frac{17}{6}x+1.$$

（三）求 S 关于 t 的函数关系式及 t 的取值范围

【动感体验】

打开文件“例 2-3-3.dmr”，如图 2-3-3-3，拖动点 A'，观察平移的正方形落在 x 轴下方部分图形随点 A'的位置而变化的规律.

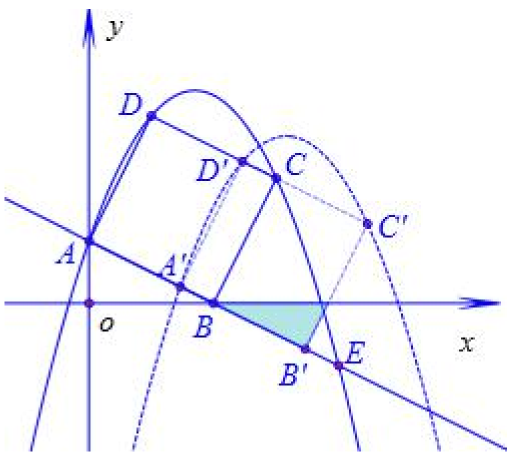


图 2-3-3-3

【思路点拨】

分三种情况讨论：当$0<t\le 1$时正方形落在x轴下方部分为直角三角形；当$1<t\le 2$时，正方形落在x轴下方部分为直角梯形；当$2<t\le 3$时正方形落在x轴下方部分为五边形，通过临界点定取值范围.

【动态解析】

1.当点A'在线段AB之间时，如图2-3-3-4所示，正方形落在x轴下方部分为Rt$\triangle BB'G$. 当点A'运动到B时，如图2-3-3-5所示，因为A点运动的距离为$AB=\sqrt{5}$，所以点A运动的时间为t=1，所以正方形落在x轴下方部分为Rt$\triangle BB'G$时，t的取值范围为$0<t\le 1$.观察图形发现点B运动的路程为$BB'=\sqrt{5}t$，而$\triangle OAB\backsim\triangle B'GB$，所以$\dfrac{S_{\triangle B'GB}}{S_{\triangle OAB}}=\left(\dfrac{BB'}{OB}\right)^2$，所以

$$S=S_{\triangle B'GB}=\left(\frac{\sqrt{5}t}{2}\right)^2\times 1=\frac{5t^2}{4}.$$

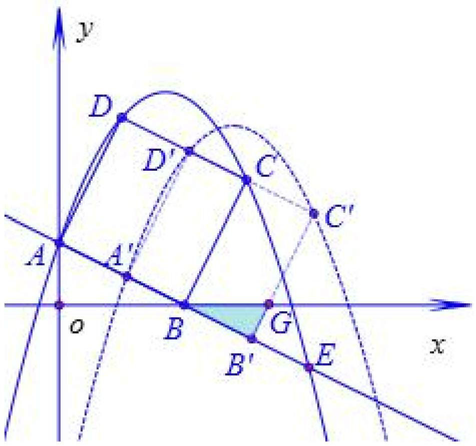


图 2-3-3-4

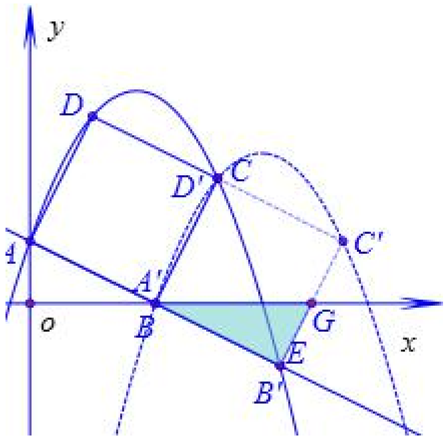


图 2-3-3-5

2.当点A'在线段BE之间时，如图2-3-3-6所示，正方形落在x轴下方部分为直角梯形$A'B'GH$.而当点A'运动到点E位置时，点C'运动到x轴上，如图2-3-3-7所示，这时因为$\triangle OAB\backsim\triangle B'C'B$，$B'C'=AB=\sqrt{5}$，$\dfrac{BB'}{B'C'}=\dfrac{OB}{OA}=\dfrac{2}{1}$，所以$BB'=2\sqrt{5}$，所以点$B$运动的时间为$t$=2，所以正方形落在$x$轴下方部分为直角梯形$A'B'HG$时，$t$的取值范围为$1<t\le 2$.观察图形发现$\triangle OAB\backsim\triangle B'GB\backsim\triangle A'HB$，同情况1的分析得到$S_{\triangle B'GB}=\dfrac{5t^2}{4}$，$S_{\triangle A'HB}=\dfrac{1}{4}\left(\sqrt{5}t-\sqrt{5}\right)^2$，

所以直角梯形$A'B'GH$的面积为$S=S_{\triangle B'GB}-S_{\triangle AHB}=\dfrac{10t-5}{4}$.

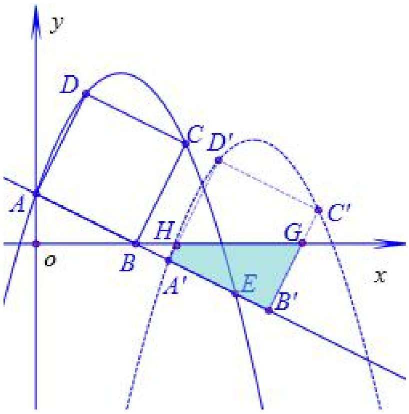


图 2-3-3-6

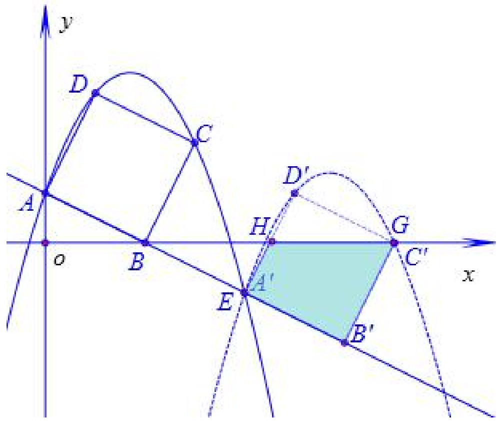


图 2-3-3-7

3.当点 A'处在线段 BE 的延长线上时，如图 2-3-3-8 所示，正方形落在 x 轴的下方部分为五边形 $A'B'C'GH$.当点 D'落在 x 轴上时，如图 2-3-3-9 所示，此时$\triangle BAO \backsim \triangle BD'A'$，$AD'=\sqrt{5}$，$\dfrac{A'B}{AD'}=\dfrac{OB}{OA}=\dfrac{2}{1}$，所以求出 $A'B=2\sqrt{5}$，所以点 A 运动的路程为 $AA'=3\sqrt{5}$，点 A 运动的时间为 $t=3$，所以正方形落在 x 轴下方部分为五边形 $A'B'C'HG$ 时，t 的取值范围为$2<t\le 3$.

观察图形发现$\triangle OAB \backsim \triangle A'HB \backsim \triangle D'HG$，而 $A'B=\sqrt{5}t-\sqrt{5}$，所以 $A'H=\dfrac{1}{2}A'B=\dfrac{\sqrt{5}t-\sqrt{5}}{2}$，

所以可求出 $D'H=A'D'-A'H=\dfrac{3\sqrt{5}-\sqrt{5}t}{2}$，所以 $\triangle D'HG$ 的面积可表示为

$$S_{\triangle D'HG}=\left(\frac{D'H}{OA}\right)^2 S_{\triangle OAB}=\left(\frac{3\sqrt{5}-\sqrt{5}t}{2}\right)^2.$$

所以正方形落在 x 轴下方部分五边形 $A'B'C'GH$ 的面积可表示为

$$S=S_{\text{正方形A'B'C'D'}}-S_{\triangle D'HG}=5-\left(\frac{3\sqrt{5}-\sqrt{5}t}{2}\right)^2=-\frac{5}{4}t^2+\frac{15}{2}t-\frac{25}{4}.$$

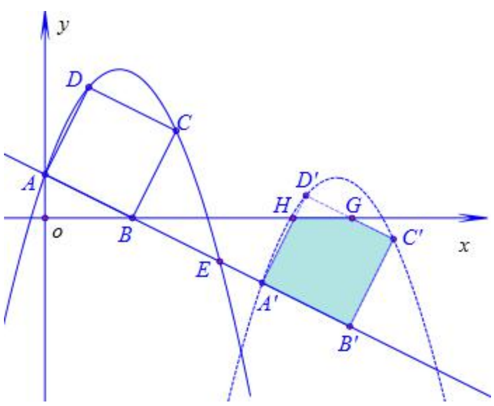


图 2-3-3-8

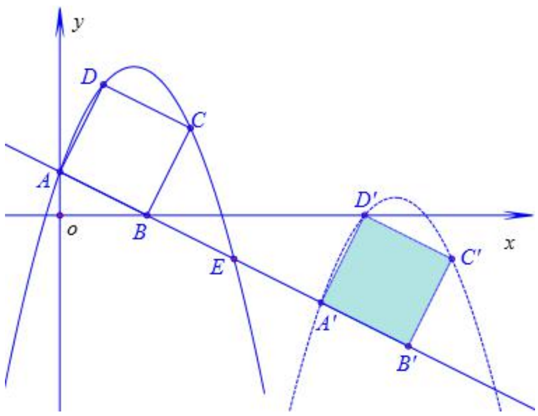


图 2-3-3-9

（四）求 C、E 两点间的抛物线弧所扫过的面积

【动感体验】

单击“下一页”按钮，进入第二页，如图 2-3-3-10 所示，单击“动画”按钮，观察抛物线弧线所扫描过的区域.

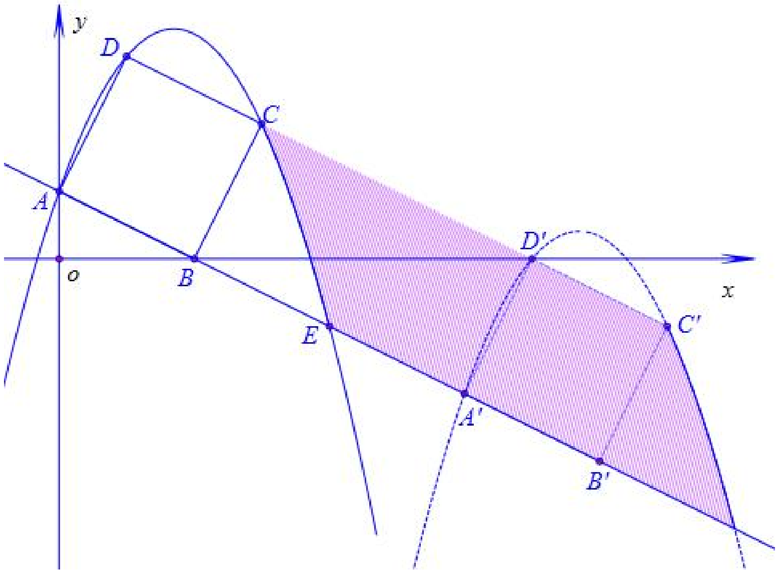


图 2-3-3-10

【思路点拨】

C、E 两点间的抛物线扫过的部分的面积等于矩形 $BB'C'C$ 的面积.

【动态解析】

观察 C、E 两点间的抛物线弧扫过的部分，发现通过割补法，阴影部分即为矩形 $BB'C'C$ 的面积，如图 2-3-23 所示.由上述分析，当顶点 D 落在 x 轴上时，$AA'=BB'=3\sqrt{5}$，所以矩形 $BB'C'C$ 的面积为 $BB'\times BC=15$，即 C、E 两点间的抛物线扫过的部分面积为 15.

【简要评注】

求 S 与 t 的函数关系式时，根据落在 x 轴下方部分图形的不同确定分类讨论的情况数，其关键是找临界点：正方形在下滑的过程中，点 A'、 C'、D'先后落在 x 轴上，这三个时刻是分段函数的临界点.再求面积时，抓住图形中所有直角三角形的三边之比都是 $1:2:\sqrt{5}$，可方便解题.求抛物线弧所扫过的面积时，由于弧不是直线，可利用图形平移过程中，对应点的连线平行且相等，所以弧 CE 扫过的面积通过割补成矩形才能计算.

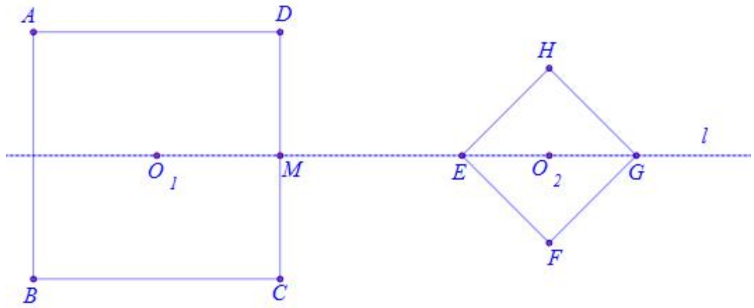
巩固练习（三）

练习 2-3-1：如下图，已知正方形 $ABCD$ 与正方形 $EFGH$ 的边长分别是 $4\sqrt{2}$ 和 $2\sqrt{2}$，它们的中心 O_1, O_2 都在直线 l 上，$AD // l$，EG 在直线 l 上，l 与 DC 相交于点 M，$ME=7-2\sqrt{2}$，当正方形 $EFGH$ 沿直线 l 以每秒 1 个单位的速度向左平移时，正方形 $ABCD$ 也绕 O_1 以每秒 45°顺时针方向开始旋转，在运动变化过程中，它们的形状和大小都不改变.

（1）在开始运动前，O_1O_2=__________；

（2）当两个正方形按照各自的运动方式同时运动 3 秒时，正方形 $ABCD$ 停止旋转，这时 AE=__________， O_1O_2=__________；

（3）当正方形 $ABCD$ 停止旋转后，正方形 $EFGH$ 继续向左平移的时间为 x 秒，两正方形重叠部分的面积为 y，求 y 与 x 之间的函数表达式.

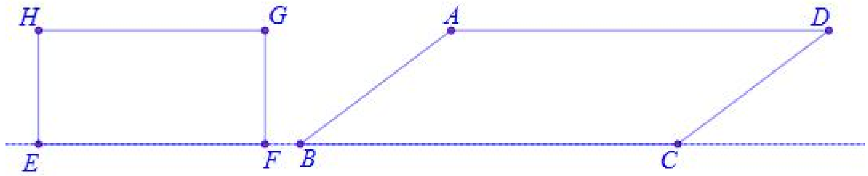


练习 2-3-2：如下图，矩形 $EFGH$ 的边 EF＝6cm，EH＝3cm，在▱$ABCD$ 中，BC＝10cm，AB＝5cm，$\sin\angle ABC=\dfrac{3}{5}$，点 E、F、B、C 在同一直线上，且 FB＝1cm，矩形从 F 点开始以 1cm/s 的速度沿直线 FC 向右运动，当边 GF 所在直线到达 D 点时即停止.

（1）在矩形运动过程中，何时矩形的一边恰好通过▱$ABCD$ 的边 AB 或 CD 的中点？

（2）若矩形运动的同时，点 Q 从点 C 出发沿 $C-D-A-B$ 的路线，以 $\dfrac{1}{2}$ cm/s 的速度运动，矩形停止时点 Q 也即停止运动，则点 Q 在矩形一边上运动的时间为多少 s？

（3）在矩形运动过程中，当矩形与平行四边形重叠部分为五边形时，求出重叠部分面积 S（cm^2）与运动时间 t（s）之间的函数关系式，并写出时间 t 的范围.是否存在某一时刻，使得重叠部分的面积 S＝16．5cm^2？若存在，求出时间 t，若不存在，说明理由.



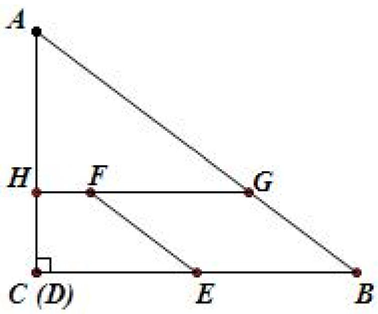
练习 2-3-3：如左下图，在△ABC 中，∠C=90°，BC=8，AC=6，另有一直角梯形 $DEFH$（HF∥DE，∠HDE=90°）的底边 DE 落在 CB 上，腰 DH 落在 CA 上，且 DE=4，∠DEF=∠CBA，AH∶AC=2∶3.

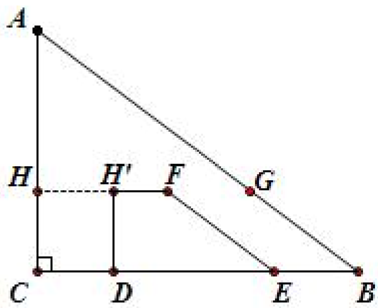
（1）延长 HF 交 AB 于 G，求△AHG 的面积.

（2）操作：固定△ABC，将直角梯形 $DEFH$ 以每秒 1 个单位的速度沿 CB 方向向右移动，直到点 D 与点 B 重合时停止，设运动的时间为 t 秒，运动后的直角梯形为 $DEFH'$（如右下图）.

探究 1：在运动中，四边形 $CDH'H$ 能否为正方形？若能，请求出此时 t 的值；若不能，请说明理由.

探究 2：在运动过程中，△ABC 与直角梯形 $DEFH'$重叠部分的面积为 y，求 y 与 t 的函数关系.





练习 2-3-4：如下图，直线 $y=-\dfrac{3}{4}x+6$ 分别与 x 轴、y 轴交于 A、B 两点；直线 $y=\dfrac{5}{4}x$ 与 AB 交于点 C，与过点 A 且平行于 y 轴的直线交于点 D.点 E 从点 A 出发，以每秒 1 个单位的速度沿 x 轴向左运动.过点 E 作 x 轴的垂线，分别交直线 AB、OD 于 P、Q 两点，以 PQ 为边向右作正方形 $PQMN$.设正方形 $PQMN$ 与△ACD 重叠部分（阴影部分）的面积为 S（平方单位），点 E 的运动时间为 t（秒）.

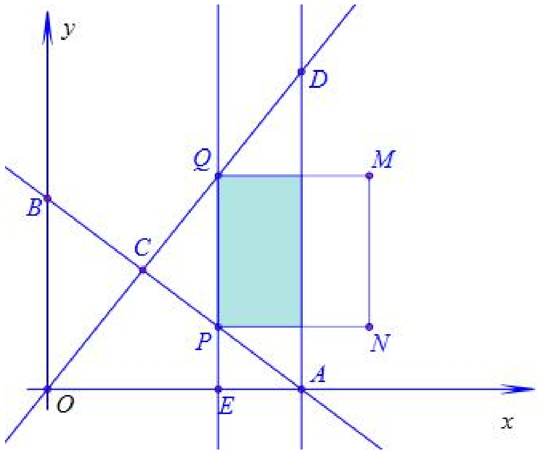
（1）求点 C 的坐标.

（2）当 $0<t<5$ 时，求 S 与 t 之间的函数关系式.

（3）求（2）中 S 的最大值.

（4）当 $t>0$ 时，直接写出点（4，$\frac{9}{2}$）在正方形 $PQMN$ 内部时 t 的取值范围.

参考公式：二次函数 $y=ax^2+bx+c$ 图象的顶点坐标为（$-\frac{b}{2a},\frac{4ac-b^2}{4a}$）.



本章小结

在解决图形运动中的函数关系问题时，首先分析整个运动过程，通过找寻临界点，确定所需讨论的情况数及不同情况下自变量的取值范围，其次针对不同的情况，利用有关的几何性质建立变量之间的关系式，最后再整理成函数关系式.在建立函数关系式时，常常用到的几何定理有：勾股定理、三角形及梯形中位线定理、相似三角形的性质定理及几何图形的面积公式等.

第三章 求最值问题

最值问题是一类综合性很强的问题.这类问题涉及到的题型较多、解题方法灵活、涉及的知识广泛，是很多学生学习中的一大难点，也是近年来中考命题的热点，尤其是随着新课程改革的逐步推进和不断深入，各类与求最值有关的问题在各地中考试题中层出不穷.这类试题往往能考查学生的观察分析、归纳猜想和分类讨论等方面的能力.

第一节 线段和差的最值

1．求抛物线对称轴上使得线段之和最小的动点

例 3-1-1. 如图 3-1-1-1：抛物线经过 A（-3，0）、B（0，4）、C（4，0）三点.

（1）求抛物线的解析式.

（2）已知 $AD=AB$（D 在线段 AC 上），有一动点 P 从点 A 沿线段 AC 以每秒 1 个单位长度的速度移动；同时另一个动点 Q 以某一速度从点 B 沿线段 BC 移动，经过 t 秒的移动，线段 PQ 被 BD 垂直平分，求 t 的值；

（3）在（2）的情况下，抛物线的对称轴上是否存在一点 M，使 $MQ+MC$ 的值最小？若存在，请求出点 M 的坐标；若不存在，请说明理由.

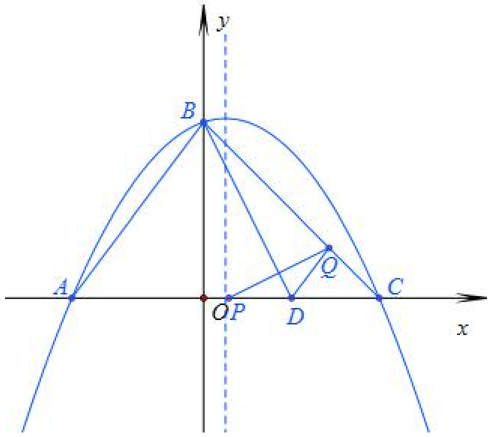


图 3-1-1-1

一、求抛物线的解析式

此题为常规题，利用待定系数法即可求出抛物线的解析式，根据已知点的特点，用交点式设函数解析式.

设抛物线的解析式为 $y=a(x+3)(x-4)$，因为 B（0，4）在抛物线上，所以 $4=a(0+3)(0-4)$解得 $a=-\frac{1}{3}$， 所以抛物线解析式为 $y=-\frac{1}{3}(x+3)(x-4)=-\frac{1}{3}x^2+\frac{1}{3}x+4$.

二、求满足条件的时间 t

（一）思路点拨

已知 $AB=AD$ 可求出点 D 的坐标，因此求出 PD 的长度即可求得点 AP 的长度，从而求得 t 的大小.

（二）动态解析

由 $AB=AD$ 可知$\angle ABD=\angle ADB$.因为 PQ 被 BD 垂直平分，所以 $PD=QD$，$\angle PDB=\angle QDB$，如图 3-1-1-2 所示.

因此$\angle ABD=\angle QDB$，所以 $AB//DQ$，所以由 $\dfrac{DQ}{AB}=\dfrac{CD}{CA}$ 可求得：$DQ=\dfrac{10}{7}$，所以求得 $AP=AD-DQ=\dfrac{25}{7}$，即 $t=\dfrac{25}{7}$.

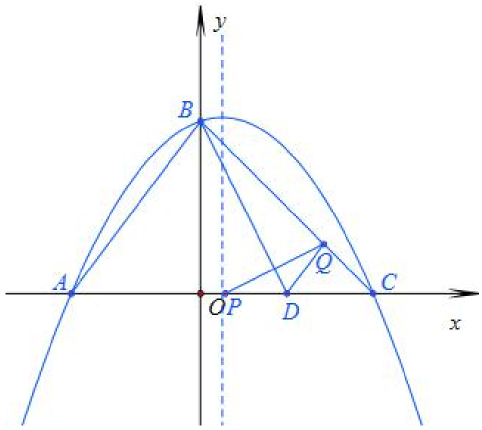


图 3-1-1-2

三、讨论 $MQ+MC$ 是否存在最小值

（一）动感体验

打开文件“例 3-1-1.dmr”，如图 3-1-1-3 所示，通过变量尺改变字母 y 的值或通过按钮【y】设置它的值，从而可以改变点 M 在抛物线对称轴上的位置，观察 $MQ+MC$ 的变化规律，研究当 $MQ+MC$ 最小时点 M 应满足的条件.

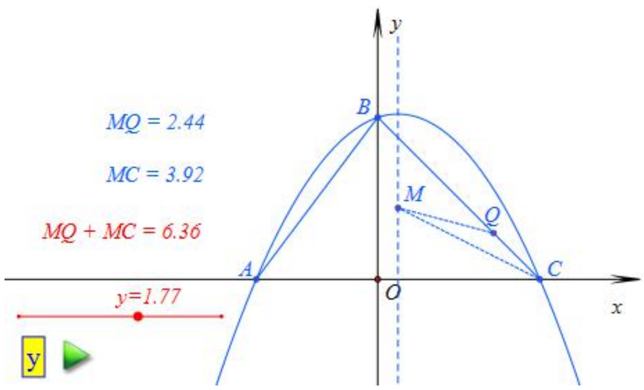


图 3-1-1-3

（二）思路点拨

点 A 和点 C 关于抛物线的对称轴 $x=\dfrac{1}{2}$ 对称，因此 $MC=MA$，如图 3-1-1-4 所示，由三角形两边之和（$MA+MQ$）大于第三边（AQ）性质可知，当点 A、点 M、点 Q 三点共线时，$MQ+MC$ 有最小值.

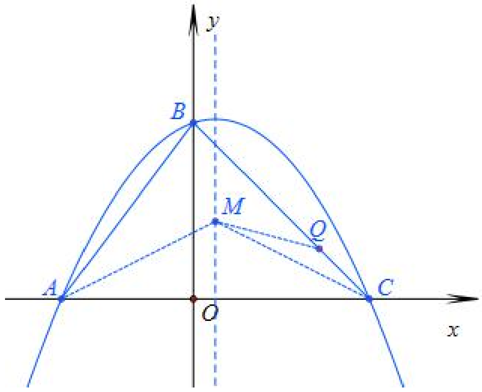


图 3-1-1-4

（三）动态解析

因为点 A、点 C 是抛物线与 x 轴的两个交点，因此点 A 和点 C 关于抛物线的对称轴对称，所以 $MA=MC$.所以当 A、M、Q 三点共线，即点 M 为 AQ 与直线 $x=\dfrac{1}{2}$ 的交点时，$MQ+MC$ 的值最小，如图 3-1-1-5 所示.

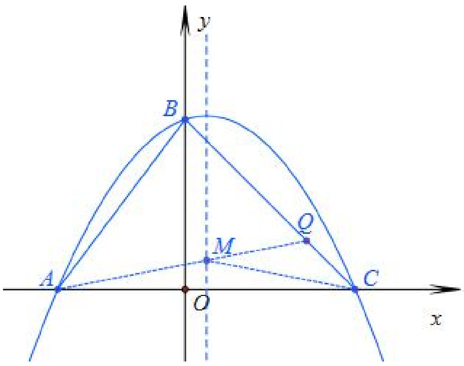


图 3-1-1-5

由问题（2）中 $DQ//AB$ 得：$\dfrac{CQ}{CB}=\dfrac{CD}{CA}$，可求得 $CQ=\dfrac{8}{7}\sqrt{2}$.由点 B 和点 C 坐标可知，$\angle BCA=45°$，

所以点 Q 的纵坐标为 $\dfrac{8}{7}$、横坐标为 $4-\dfrac{8}{7}=\dfrac{20}{7}$，因此点 Q 的坐标为（$\dfrac{20}{7}$，$\dfrac{8}{7}$），所以直线 AQ 的解析式为 $y=\dfrac{8}{41}x+\dfrac{24}{41}$，将 $x=\dfrac{1}{2}$ 带入直线方程可求得：$y=\dfrac{28}{41}$.

所以当 $MQ+MC$ 的值最小时，点 M 的坐标为：$(\dfrac{1}{2},\dfrac{28}{41})$.

单击【y】按钮，在弹出的对话框中输入：28/41，单击【确定】按钮，即可观察到 $MQ+MC$ 的值最小时的情形。

（四）简要评注

此题求 $MQ+MC$ 的最小值的问题是教材中比较典型的距离和最短的问题，其解题思想主要利用了对称的性质，将对称轴同侧线段 MQ、MC 转化成对称轴异侧的两条线段 MQ、MA，利用三角形两边和大于第三边的基本性质可知：当 M、Q、A 三点共线时 $MQ+MA$ 的值最小.

2．求抛物线对称轴上到两点距离之差最大的动点

例 3-2. 如图 3-1-2-1，已知直线 $y=\frac{1}{2}x+1$ 与 y 轴交于点 A，与 x 轴交于点 D，抛物线 $y=\frac{1}{2}x^2+bx+c$ 与直线交于 A、E 两点，与 x 轴交于 B、C 两点，且 B 点坐标为 (1，0).

（1）求该抛物线的解析式；

（2）动点 P 在 x 轴上移动，当$\triangle PAE$ 是直角三角形时，求点 P 的坐标.

（3）在抛物线的对称轴上找一点 M，使 $|MA-MC|$ 的值最大，求出点 M 的坐标.

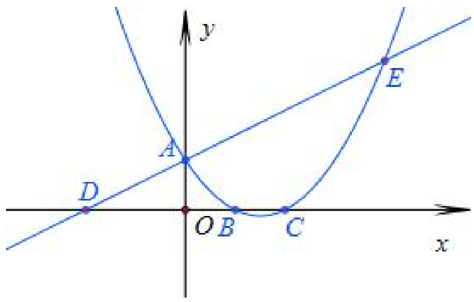


图 3-1-2-1

一、求抛物线解析式

利用待定系数法直接求抛物线解析式.

将 A（0，1）、B（1，0）坐标代入 $y=\frac{1}{2}x^2+bx+c$ 得 $\begin{cases} c=1 \\ \frac{1}{2}+b+c=0 \end{cases}$，解得 $\begin{cases} b=-\frac{3}{2} \\ c=1 \end{cases}$，

所以抛物线的解析式为 $y=\frac{1}{2}x^2-\frac{3}{2}x+1$.

二、求点 P 的坐标

（一）动感体验

打开文件"例 3-1-2.dmr"，如图 3-1-2-1 所示，拖动点 P，研究当$\triangle PAE$ 为直角三角形时点 P 满足的条件.

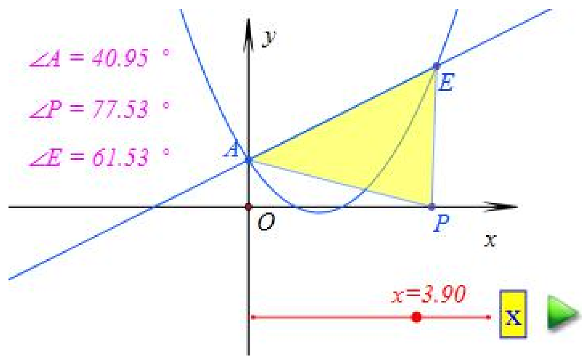


图 3-1-2-1

（二）思路点拨

按照$\angle P$为直角、$\angle A$为直角和$\angle E$为直角，三种情况分别讨论.

（三）动态解析

由方程组$\begin{cases} y=\dfrac{1}{2}x+1 \\ y=\dfrac{1}{2}x^2-\dfrac{3}{2}x+1 \end{cases}$可求得点$E$的坐标为（4，3）.设点$P$的坐标为（$x$，0），

1．若$\angle P$为直角，则点P是以AE为直径的圆与x轴的交点，设过E点且与x轴垂直的直线交x轴于点F，如图3-1-2-2、图3-1-2-3所示，由$\angle APO=\angle PEF$可知Rt$\triangle AOP\backsim$Rt$\triangle PFE$，从而得到$\dfrac{OA}{AP}=\dfrac{PF}{EF}$，即：$\dfrac{1}{x}=\dfrac{4-x}{3}$，解得：$x$=1或$x$=3，所以点$P$的坐标为（1，0）或（3，0）.

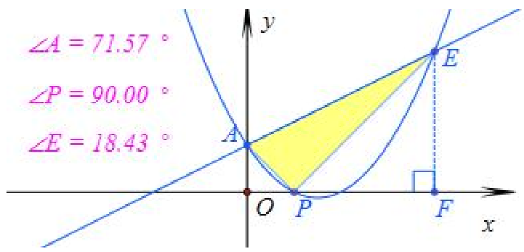


图 3-1-2-2

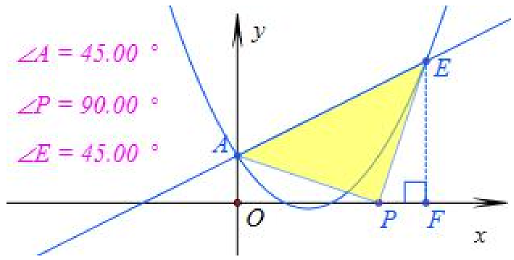


图 3-1-2-3

2．若$\angle A$为直角，点P在过点A且与AE垂直的直线上，如图3-1-2-4所示，由$\angle ADO=\angle OAP$可知Rt$\triangle AOD\backsim$Rt$\triangle POA$，从而得到$\dfrac{OA}{OD}=\dfrac{OP}{OA}$，即：$\dfrac{1}{2}=\dfrac{x}{1}$，解得：$x=\dfrac{1}{2}$，所以点$P$的坐标为$P$（$\dfrac{1}{2}$，0）.

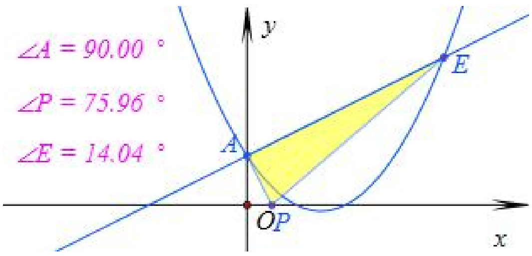


图 3-1-2-4

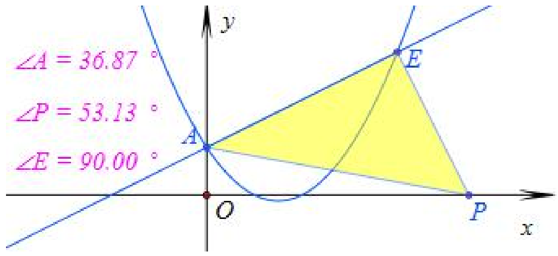


图 3-1-2-5

3．若$\angle E$为直角，点P在过点E且与AE垂直的直线上，如图3-1-2-5所示，由$\angle ADO=\angle EDP$可知Rt$\triangle ADO\backsim$Rt$\triangle PDE$，从而得到$\dfrac{DO}{DA}=\dfrac{DE}{DP}$，即：$\dfrac{2}{\sqrt{5}}=\dfrac{3\sqrt{5}}{2+x}$，解得：$x=\dfrac{11}{2}$，所以点$P$的坐标为$P$（$\dfrac{11}{2}$，0）.

三、求 $|MA-MC|$ 的值最大时点 M 的坐标

（一）动感体验

单击“下一页”按钮，进入第二页，如图 3-1-2-6 所示，拖动点 M，观察 $|MA\text{-}MC|$ 的变化规律，研究当 $|MA\text{-}MC|$ 最大时点 M 应满足的条件.

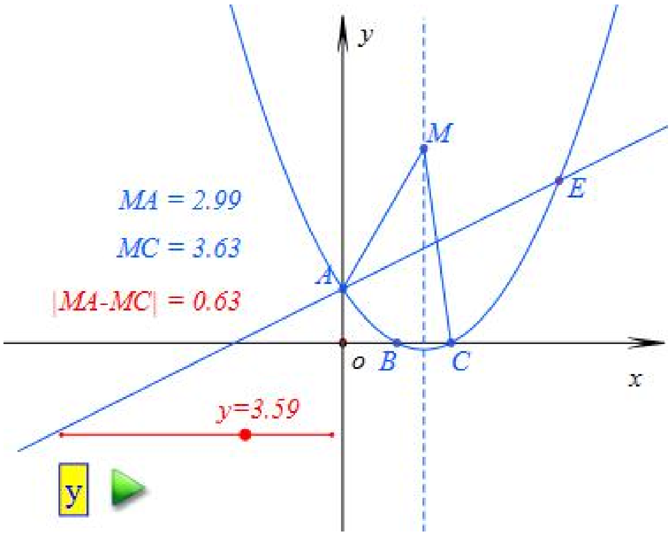


图 3-1-2-6

（二）思路点拨

抛物线的对称轴方程为：$x=\dfrac{3}{2}$.点 B 和点 C 关于直线 $x=\dfrac{1}{2}$ 对称，因此 $MB=MC$.由三角形两边之差（$|MA\text{-}MB|$）小于第三边（AB）的性质可知：当点 A、点 M、点 B 三点共线时，$|MA\text{-}MB|$ 具有最大值.

（三）动态解析

因为点 B、点 C 是抛物线与 x 轴的两个交点，因此点 B 和点 C 关于抛物线的对称轴对称，所以 $MB=MC$.所以当 A、M、B 三点共线，即点 M 为 AB 与直线 $x=\dfrac{3}{2}$ 的交点时，$|MA\text{-}MB|$ 的值最大，等于 AB 的长度，如图 3-1-2-7 所示.

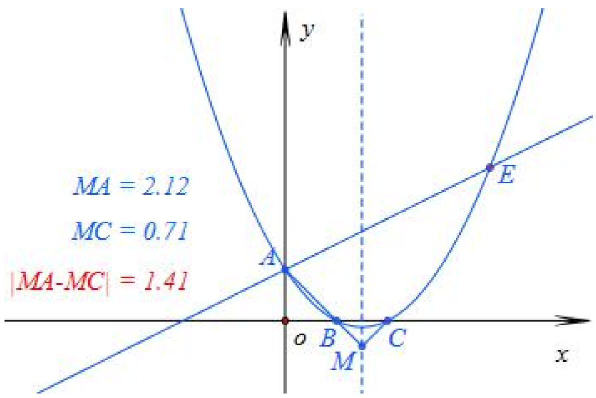


图 3-1-2-7

点 A 的坐标为(0，1)、点 B 的坐标为（1，0），因此直线 AB 的方程为 $y=-x+1$.将 $x=\frac{3}{2}$ 带入直线方程可求得：$y=-\frac{1}{2}$.

所以当$|MA-MC|$的值最大时，点 M 的坐标为：$(\frac{3}{2},-\frac{1}{2})$.

（四）简要评注

此题是求线段之差的最大值问题，其解题思想主要利用了轴对称的基本性质.将对称轴异侧线段 AM、MC 转化成对称轴同侧的两条线段 AM、MB，利用三角形两边之差小于第三边的性质得到当 A、B、M 三点共线时 $|MA-MC|$ 的值最大.求线段差的最大值问题解题思路与求线段和的最小值问题的解题思路是都是利用了三角形三边关系的基本性质，这也是解决这类问题的基本思路和朴实的方法.

3．求到一点和一直线的距离之和最小值

例 3-1-3.定义一种变换：平移抛物线 F_1 得到抛物线 F_2，使 F_2 经过 F_1 的顶点 A.设 F_2 的对称轴分别交 F_1、F_2 于点 D、B，点 C 是点 A 关于直线 BD 的对称点.

（1）如图 3-1-3-1，若 $F_1: y=x^2$，经过变换后，得到 $F_2: y=x^2+bx$，点 C 的坐标为（2，0），则：①b 的值等于_________；②四边形 $ABCD$ 为（　　）

A.平行四边形　　B.矩形　　C.菱形　　D.正方形

（2）如图 3-1-3-2，若 $F_1: y=ax^2+c$，经过变换后，点 B 的坐标为（2，c—1），求 △ABD 的面积；

（3）如图 3-1-3-3，若 $F_1: y=\frac{1}{3}x^2-\frac{2}{3}x+\frac{7}{3}$，经过变换后，$AC=2\sqrt{3}$，点 P 是直线 AC 上的动点，求点 P 到点 D 的距离和到直线 AD 的距离之和的最小值.

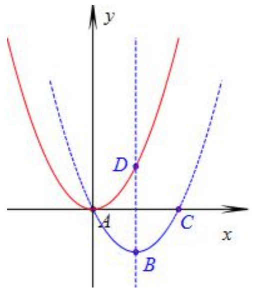


图 3-1-3-1

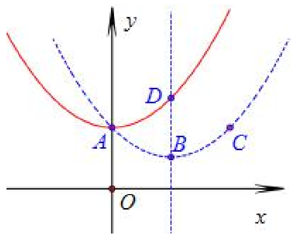


图 3-1-3-2

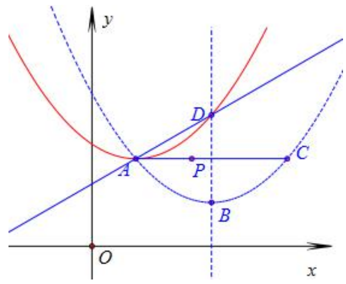


图 3-1-3-3

一、由 F_1 的表达式推到得到 F_2 的表达式

（一）动感体验

将抛物线 F_1 平移得到抛物线 F_2，使得 F_2 经过 F_1 的顶点，那么 F_1、F_2 在表达式方面有什么联系呢？

为了简便起见，假设 F_1 的顶点的坐标为：$A(m,h)$，那么可设 F_1 的表达式为：$y=a(x-m)^2+h$，则 F_2 的表达式可表示为：$y=a(x-m)(x-n)+h$，其中 a、m、n、h 是任意实数，并且 $a\neq0$.

打开文件“例 3-1-3.dmr”，如图 3-1-3-4 所示，任意改变实数 a、m、n、h 的值，可以体验一下虚线表示的抛物线 F_2 总是经过实线表示的抛物线 F_1 的顶点.

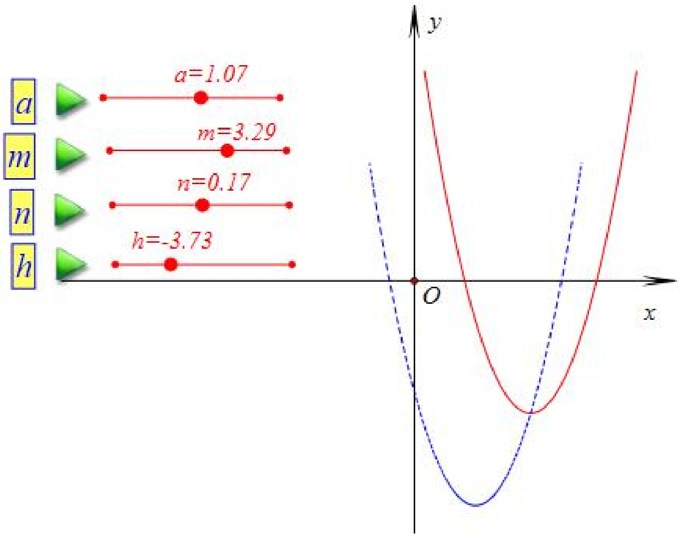


图 3-1-3-4

$y=a(x-m)(x-n)+h$ 整理得：$y=a(x-\frac{m+n}{2})^2+amn+h-\frac{a(m+n)^2}{4}$，所以点 B 的坐标为：$(\frac{m+n}{2}$，$amn+h-\frac{a(m+n)^2}{4})$.

将 $x=\frac{m+n}{2}$ 代入 $y=a(x-m)^2+h$ 得 $y=\frac{a(m-n)^2}{4}+h$，所以点 D 的坐标为（$\frac{m+n}{2}$，$\frac{a(m-n)^2}{4}+h$）.

由点 A 的坐标（m，h）和抛物线 F_2 的对称轴方程可得点 C 的坐标为（n，h）.

二、求 b 的值，并判断四边形 $ABCD$ 的形状

由 $F_1:y=x^2$ 可知点 A 的坐标为（0，0）.因为点 A（0，0）和点 C（2，0）关于抛物线 $F_2:y=x^2+bx$ 的对称轴对称，所以有：0+2=-b，解得：b=-2.

将 x=1 代入 $F_1:y=x^2$，求出点 D 的坐标为（1，1）.而 $F_2:y=x^2-2x$ 的顶点 B 的坐标为（1，－1），所以 AC=2，BD=2，由对称性可知 AC 与 BD 相等且互相垂直平分，所以四边形 $ABCD$ 为正方形，如图 3-1-3-5 所示.

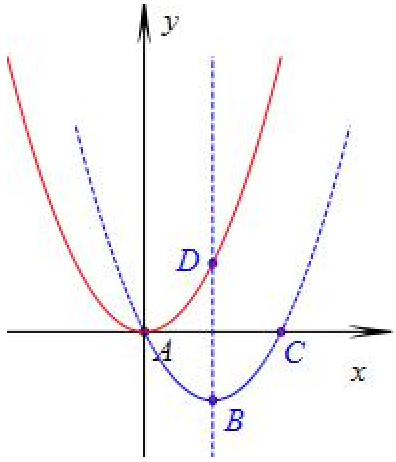


图 3-1-3-5

三、求△ABD的面积

通过$F_1: y=ax^2+c$可知点A的坐标为（0，c），又因为点B的坐标为（2，c-1），因此可知点A到直线BD的距离为2.那么以BD为底的△ABD的高为2.

将x=2带入$F_1: y=ax^2+c$得：y=4a-c，则点D的坐标为（2，4a-c），所以BD的长度为：|4a+1|.

因为F_2顶点B的坐标为（2，c—1），因此可设F_2的解析式为$y=a(x-2)^2+c-1$，又因为$F_1: y=ax^2+c$与y轴的交点$A(0,c)$，而$A(0,c)$在F_2上，代入$y=a(x-2)^2+c-1$可得$a=\frac{1}{4}$.

所以BD=2，因此$S_{\Delta ABD}=2$.

四、求距离之和的最小值

（一）动感体验

不妨假设点C在点A的右侧，则由点A的坐标（1，2）可知点C的坐标为（$1+2\sqrt{3}$，2），因此抛物线F_2的对称轴方程为$x=1+\sqrt{3}$.将$x=1+\sqrt{3}$代入$F_1: y=\frac{1}{3}x^2-\frac{2}{3}x+\frac{7}{3}$得：$y$=3，所以点$D$的坐标为（$1+\sqrt{3}$，3）.

单击“下一页”按钮，进入第二页，如图3-1-3-6所示，点Q为直线AC上的点P到AD的垂足，观察线段PQ与PD及其长度之和的变化规律，研究当PD+PQ最小时点P应该满足的条件.

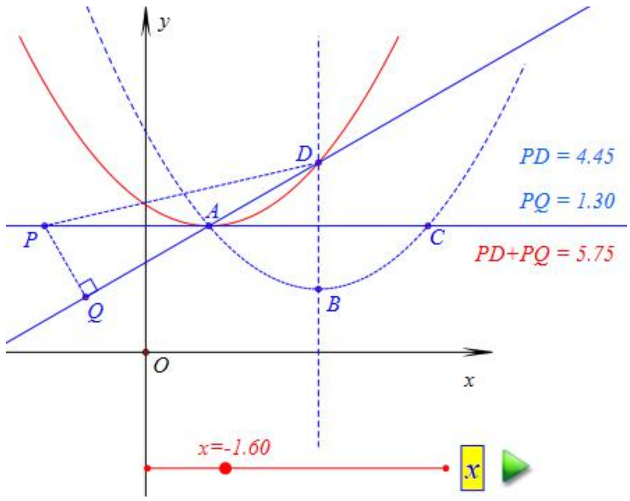


图 3-1-3-6

（二）思路点拨

我们熟悉的情况是点 Q 和点 D 在动点 P 的两侧，而目前的情况是点 Q 和点 D 总在动点 P 的同一侧，点 B 就是点 D 关于直线 AC 的对称点，其坐标为：$(1+\sqrt{3}, 1)$，如图 3-1-3-7 所示，那么就将求 $PQ+PD$ 最小值的问题转化为求 $PQ+PB$ 最小值的问题.那么就转化为在 $\triangle PQB$ 中，求两边之和 $PQ+PB$ 的最小值问题.

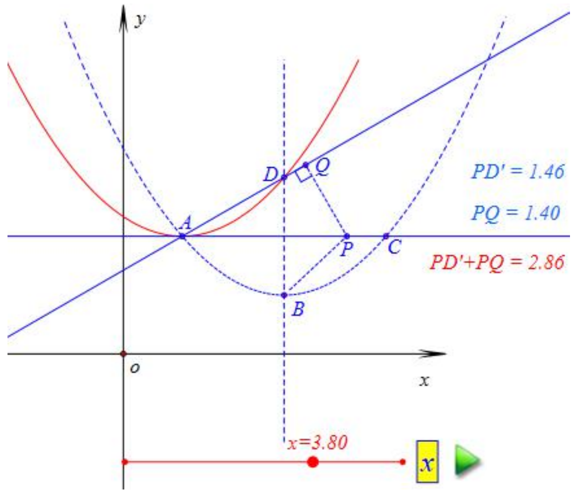


图 3-1-3-7

（三）动态解析

如图 3-1-3-7，在$\triangle PQB$ 中，因为 $PQ+PB>QB$，因此当 PB 最小并且点 P、点 Q 和点 B 共线时，$PQ+PB$ 有最小值.

过点 B 做直线 AD 的垂足 E，那么当点 P 在 BE 与直线 AC 的交点位置时，如图 3-1-3-8 所示，点 P、点 Q 和点 B 共线，此时 $PQ+PB$ 有最小值，等于 BE 的长度.

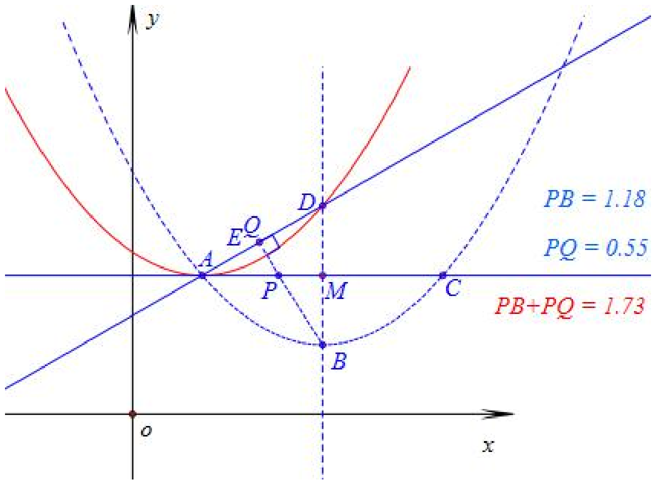


图 3-1-3-8

假设 M 为直线 DB 与直线 AC 的交点，则 $DM\perp AC$，点 M 的坐标为（$1+\sqrt{3}$，2）.

由$\angle ADM=\angle BDE$ 知 Rt$\triangle ADM\backsim$Rt$\triangle BED$，所以$\dfrac{AM}{AD}=\dfrac{BE}{DB}$.由 $A(1,2)$、D（$1+\sqrt{3}$，3）、M（$1+\sqrt{3}$，1）知 $AM=\sqrt{3}$，$AD=2$，$DB=2$，所以 $BE=\sqrt{3}$.

所以点 P 到点 D 的距离和到直线 AD 的距离之和的最小值为$\sqrt{3}$.

（四）简要评注

此题是求一点到另外一点的距离与该点到一条直线的距离之和最小值问题.虽然在形式上与前面的两个问题不同，但是解题的基本思路仍然不变.利用对称性将 PD 转化成 PD'，当 P、Q、D'三点共线时，它们的距离之和最小.

4．探索运动时间最短对应动点的位置

例 3-1-4.如图 3-1-4-1，在平面直角坐标系 xOy 中，$\triangle ABC$ 三个顶点的坐标分别为 A（－6，0）、B（6，0）、$C(0,4\sqrt{3})$，延长 AC 到点 D，使 $CD=\dfrac{1}{2}AC$，过点 D 作 DE∥AB 交 BC 的延长线于点 E.

（1）求 D 点的坐标；

（2）作点 C 关于直线 DE 的对称点 F，分别连结 DF、EF，若过 B 点的直线 $y=kx+b$ 将四边形 $CDFE$ 分成周长相等的两个四边形，请确定此直线的解析式；

（3）设 G 为 y 轴上一点，点 P 从 DE 与 y 轴的交点出发，先沿 y 轴到达 G 点，再沿 GA 到达 A 点，若 P 点在 y 轴上运动的速度是它在直线 GA 上运动速度的 2 倍，试确定 G 点的位置，使 P 点按照上述要求到达 A 点所用的时间最短.（要求：简述确定 G 点位置的方法，但不要求证明）

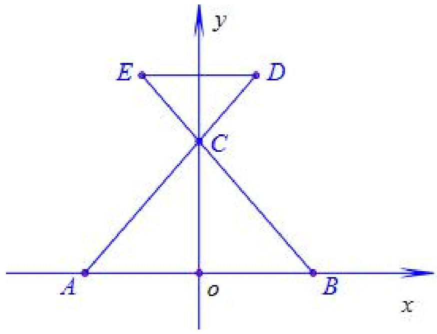


图 3-1-4-1

一、求 D 点坐标

设 DE 与 y 轴交于点 I，求出 DI 和 OI 的长即可的到点 D 坐标..

如图 3-1-4-2 所示，因为 A（－6，0）、$C(0,4\sqrt{3})$，所以 OA=6，$OC=4\sqrt{3}$，由 DE∥AB 可得$\triangle DIC$∽△AOC，因为 $CD=\dfrac{1}{2}AC$，所以 $\dfrac{ID}{OA}=\dfrac{CI}{CO}=\dfrac{CD}{CA}=\dfrac{1}{2}$，所以 $CI=2\sqrt{3}$，ID=3，$OI=6\sqrt{3}$，所以 D 点的坐标为（3，$6\sqrt{3}$）.

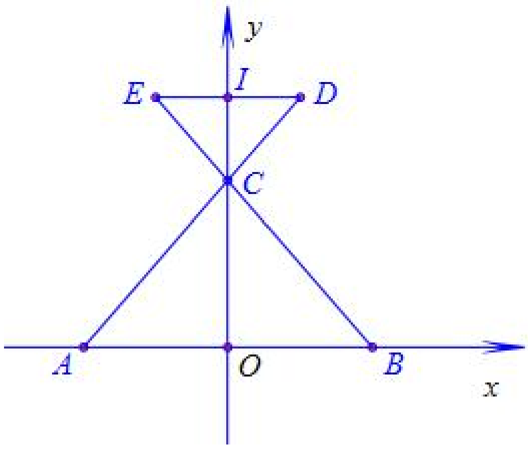


图 3-1-4-2

二、求直线解析式

（一）动感体验

因为 *CD*=*CE*、点 *F* 与点 *C* 关于 *DE* 对称，所以四边形 *CDFE* 是菱形，则 *EF*=*CD*、*CE*=*DF*.

打开文件“例 3-1-4.dmr”，如图 3-1-4-3 所示，设过点 *B* 的直线为 *BK*，其中点 *K* 是平面上的任意点.假设点 *M*、点 *N* 分别为直线 *BK* 与直线 *CD*、直线 *EF* 的交点.拖动点 *K*，观察直线 *BK* 的切割四边形 *CDFE* 的变化规律，研究当直线 *BK* 将四边形 *CDFE* 的周长平分时，点 *M*、点 *N* 应满足的条件.

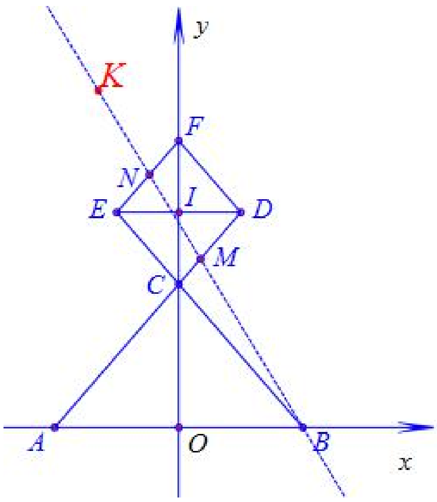


图 3-1-4-3

（二）思路点拨

可以发现当直线 *BK* 将四边形 *CDFE* 的周长平分时，点 *M*、点 *N* 应分别在线段 *CD*、*EF* 上，且 CM+*EN*=*MD*+*NF*=*CD*.否则，若点 *M* 在线段 *CD* 之外或点 *N* 在线段 *EF* 之外时，直线 *BK* 不可能将四边形 *CDFE* 的周长平分，如图 3-1-4-4、3-1-4-5 所示.

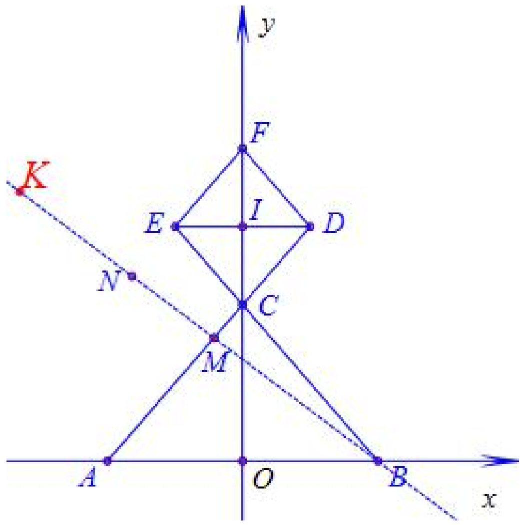


图 3-1-4-4

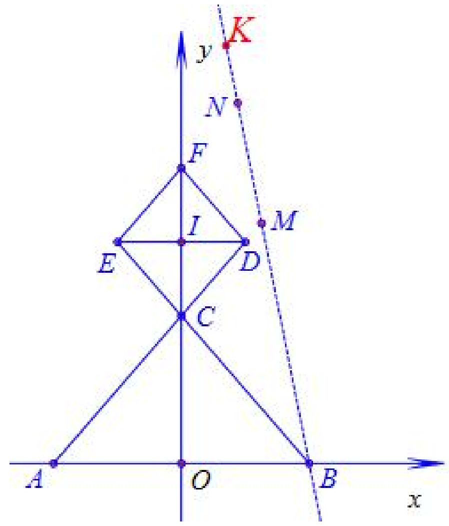


图 3-1-4-5

过 B 点的直线 $y = kx + b$ 过菱形 *CDFE* 对角线的交点时，可将四边形 *CDFE* 分成周长相等的两个四边形.

（三）动态解析

当 CM+*EN*=*MD*+*NF*=*CD* 时，又因为 CM+*MD*=*EN*+*NF*=*CD*，所以，*EN*=*MD*、*NF*=CM.

设直线 *BK* 与线段 *ED* 交于点 *I*，如图 3-1-4-6 所示，由 *EF*//*CD* 得∠*NEI*=∠*MDI*、∠*ENI*=∠*DMI*，所以△*NEI*≌△*MDI*，所以 *EI*=*DI*，因此 点 *I* 是线段 *DI* 的中点.由点 *D* 的坐标（3，$6\sqrt{3}$）可知点 *I* 的坐标为（0，$6\sqrt{3}$）.

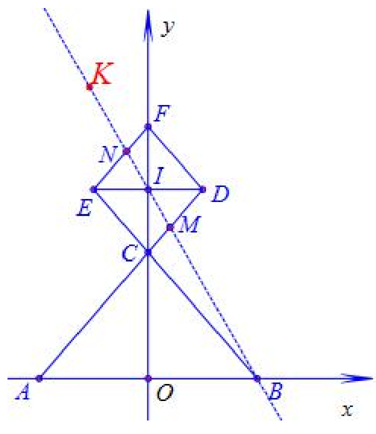


图 3-1-4-6

又点 *B* 的坐标为（6，0），所以通过点 *M* 和点 *B* 的直线解析式为 $y = -\sqrt{3}x + 6\sqrt{3}$.

三、求 *P* 点到达 *A* 点时间最短时点 *G* 的位置

（一）动感体验

设点 *V* 为 *IG* 的中点.假设点 *P* 在 *IG* 上运行的速度为 2 个单位/秒，则点 *P* 在 *GA* 上的运

动速度就是 1 个单位/秒，那么点 P 从点 I 运动到点 G 再运动到点 A 的过程中所用的时间可以用 VG+GA 表示.

打开文件“例 3-1-4.dmr”，如图 3-1-4-7 所示，拖动点 G 改变点 G 在 y 轴上的位置，观察 VG+GA 取最小值时点 G 应满足的条件.

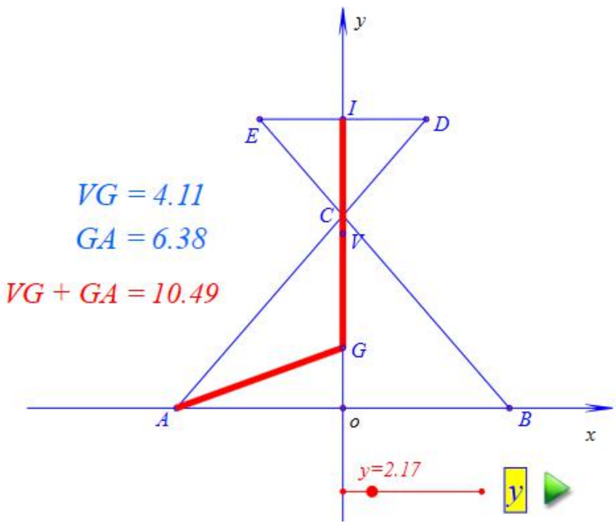


图 3-1-4-7

（二）思路点拨

如图 3-1-4-8 所示，连接线段 BI，由点 B（6，0）、I（0，$6\sqrt{3}$）知在 Rt△BOI 中∠BIO=30°. 过点 G 做 BI 的垂线段，垂足为 W，那么始终有 GW=VG 成立，则 VG+GA=GW+GA.

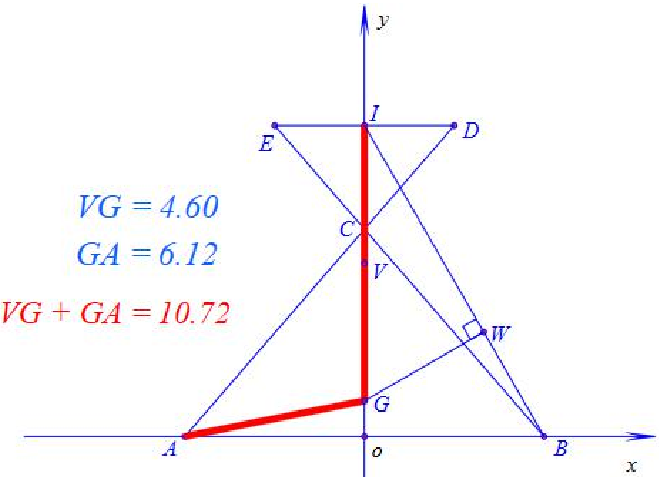


图 3-1-4-8

（三）动态解析

可以判断，当点 A、点 G 和点 W 三点共线，即 AG 垂直 IB 时，GW+GA 有最小值，如图 3-1-4-9 所示.

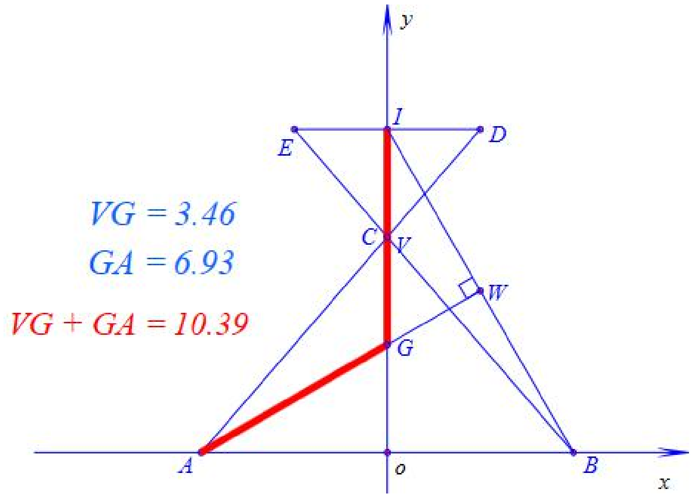


图 3-1-4-9

这时有∠WAB=30°，在 Rt△AOG 中，$OG=\dfrac{OA}{\sqrt{3}}=2\sqrt{3}$.

因此当点 P 从点 I 运动到点 G 再运动到点 A 的过程中，若运动的时间最短，则点 G 的坐标为（0，$2\sqrt{3}$）.

（四）简要评注

这个问题在形式上是求时间的最小值问题，但本质上仍然是求线段之和的最小值问题.即转化为，要求在 OI 上确定点 G，使得 $\dfrac{IG}{2}+GA$ 具有最小值.因为 I 点和 A 点为定点，所以问题实质上还是例 3-1-1 中典型的求距离之的最小值问题，解题思路也与例 3-1-1 大同小异.

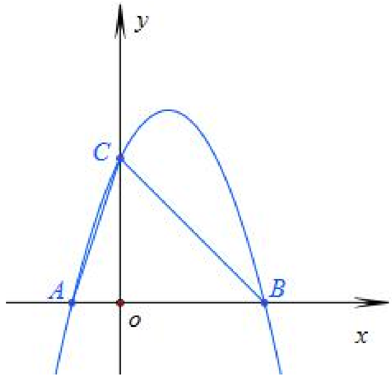
巩固练习（一）

练习 3-1-1：如下图所示，已知点 A（－1，0），B（3，0），C（O，t），且 t>0，tan∠BAC=3，抛物线经过 A、B、C 三点，点 P（2，m）是抛物线与直线 $l: y=k(x+1)$ 的一个交点.

（1）求抛物线的解析式；

（2）对于动点 Q（1，n），求 $PQ+QB$ 的最小值；

（3）若动点 M 在直线 l 上方的抛物线上运动，求△AMP 的边 AP 上的高 h 的最大值.



练习 3-1-2：如下图，A、B 分别为 x 轴和 y 轴正半轴上的点.OA、OB 的长分别是方程 $x^2-14x+48=0$ 的两根($OA>OB$)，直线 BC 平分∠ABO 交 x 轴于 C 点，P 为 BC 上一动点，P 点以每秒 1 个单位的速度从 B 点开始沿 BC 方向移动.

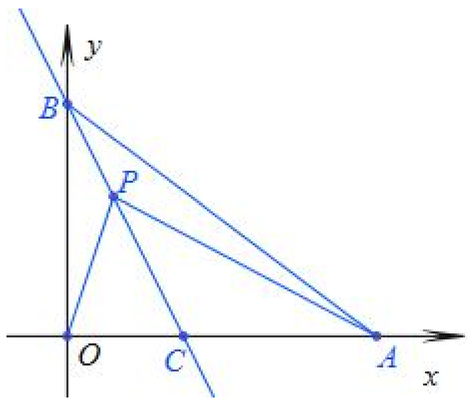
（1）设△APB 和△OPB 的面积分别为 S_1、S_2，求 S_1∶S_2 的值；

（2）求直线 BC 的解析式；

（3）设 $PA-PO=m$，P 点的移动时间为 t.

①当 $0<t\leq 4\sqrt{5}$ 时，试求出 m 的取值范围；

②当 $t>4\sqrt{5}$ 时，你认为 m 的取值范围如何(只要求写出结论)？

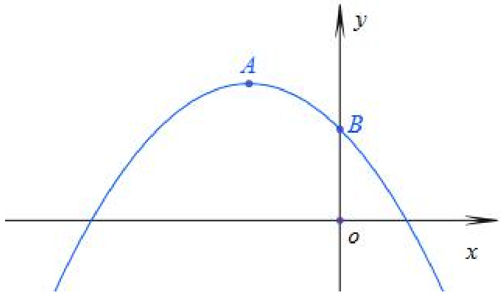


练习 3-1-3：如下图，抛物线 $y=-\frac{1}{4}x^2-x+2$ 的顶点为 A，与 y 轴交于点 B.

（1）求点 A、点 B 的坐标.

（2）若点 P 是 x 轴上任意一点，求证：$PA-PB\leqslant AB$.

（3）当 $PA-PB$ 最大时，求点 P 的坐标.



本节小结

线段和（或差）的最值问题是初中数学中的典型问题，经常出现，解决此类问题通常利用“轴对称”和“两点之间线段最短”的知识，通过构造轴对称图形，把两条线段和（或差）的问题转化为求某一条线段的长度问题，从而使问题获解.

第二节 多边形周长的最值

1．求直线上满足三角形周长最小的动点

例 3-2-1. 如图 3-2-1-1，在平面直角坐标系中，直线 $y=-\sqrt{3}x-\sqrt{3}$ 与 x 轴交于点 A，与 y 轴交于点 C，抛物线 $y=ax^2-\frac{2\sqrt{3}}{3}x+c(a\neq 0)$ 经过 A、B、C 三点.

（1）求过 A、B、C 三点抛物线的解析式并求出顶点 F 的坐标；

（2）在抛物线上是否存在点 P，使 $\triangle ABP$ 为直角三角形，若存在，直接写出 P 点坐标；若不存在，请说明理由；

（3）试探究在直线 AC 上是否存在一点 M，使得 $\triangle MBF$ 的周长最小，若存在，求出 M 点的坐标；若不存在，请说明理由.

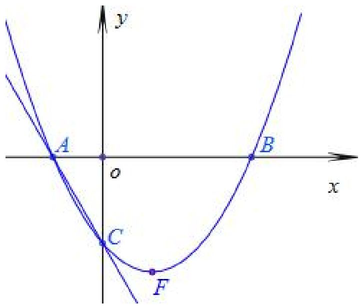


图 3-2-1-1

一、求抛物线解析式及顶点坐标

因为直线 $y=-\sqrt{3}x-\sqrt{3}$ 与 x 轴交于点 A，与 y 轴交于点 C，所以 A（－1，0），$C(0,-\sqrt{3})$，将 A、C 坐标代入 $y=ax^2-\frac{2\sqrt{3}}{3}x+c(a\neq 0)$，得：$\begin{cases}0=a+\frac{2\sqrt{3}}{3}+c\\-\sqrt{3}=c\end{cases}$，解得 $\begin{cases}a=\frac{\sqrt{3}}{3}\\c=-\sqrt{3}\end{cases}$.

所以抛物线的解析式为 $y=\frac{\sqrt{3}}{3}x^2-\frac{2\sqrt{3}}{3}x-\sqrt{3}$，其顶点坐标为 $F(1,-\frac{4\sqrt{3}}{3})$

二、求 $\triangle ABP$ 为直角三角形时点 P 的坐标

（一）动感体验

打开文件“例 3-2-1.dmr”，如图 3-2-1-2 所示，拖动点 P 观察△PAB 是否可能为直角三角形；研究当△PAB 为直角三角形时，点 P 满足的条件.

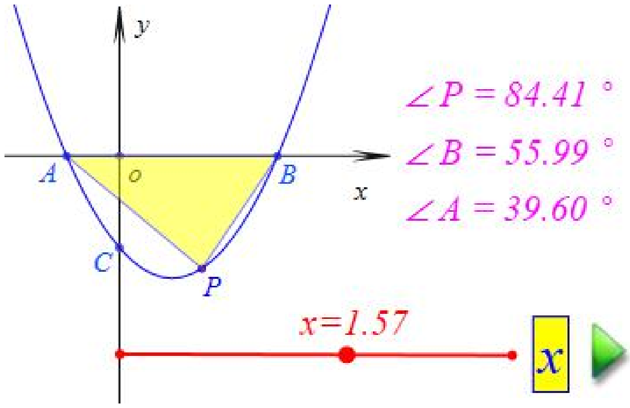


图 3-2-1-2

（二）思路点拨

只可能∠APB=90°时，△ABP 为直角三角形，此时点 P 为以 AB 直径的圆与抛物线的交点，满足条件的点 P 有 2 个.

（三）动态解析

由问题（1）通过点 A、点 B 和点 C 的坐标，可证明△ABC 为∠ACB=90°的直角三角形，所以当点 P 与点 C 重合时，△ABP 为直角三角形，如图 3-2-1-3 所示.

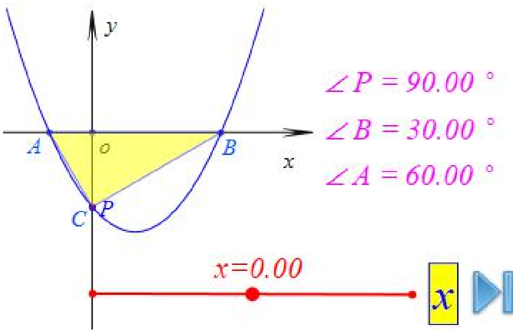


图 3-2-1-3

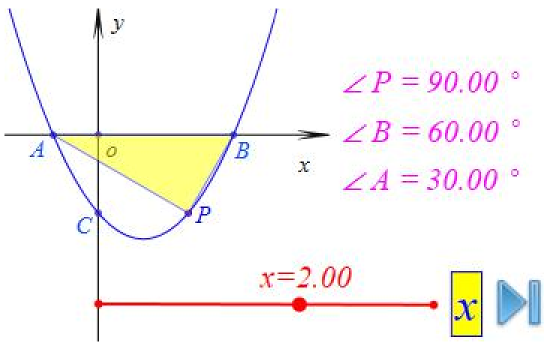


图 3-2-1-4

利用对称性，当点 P 位于点 C 关于抛物线对称轴的对称点时，△ABP 也为直角三角形，如图 3-2-1-4 所示，所以满足条件的点 P 的坐标为：$(0,-\sqrt{3})$ 或 $(2,-\sqrt{3})$.

三、讨论是否存在点 M 使得△MBF 的周长最小

（一）动感体验

因为△MBF 中，边 BF 的长度是固定的，所以只需要研究 MB+MF 的最小值即可.单击“下一页”按钮，进入第二页，如图 3-2-1-5 所示，拖动点 M，观察 MB+MF 的变化规律，研究当

MB+*MF* 具有最小值时点 *M* 应满足的规律.

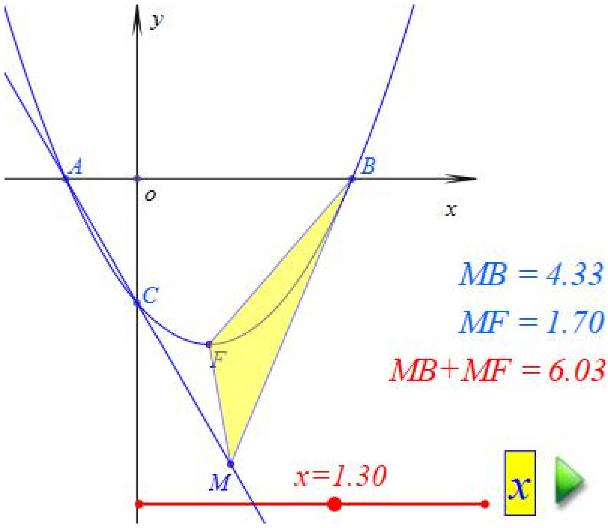


图 3-2-1-5

（二）思路点拨

将点 *B* 放在直线 *AC* 的另一侧考虑问题：作点 *B* 关于直线 *AC* 的对称点 *B′*，那么当点 *B′*、点 *M* 和点 *F* 共线时，*MB′*+*MF* 即 *MB*+*MF* 有最小值.

（三）动态解析

因为∠*ACB*=90°，所以通过点 *C* 的坐标（0，$-\sqrt{3}$）和点 *B* 的坐标（3，0）可求出点 *B* 关于直线 *AC* 的对称点 *B′*的坐标为：（-3，$-2\sqrt{3}$），如图 3-2-1-6 所示.

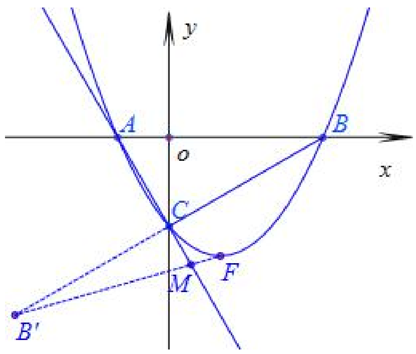


图 3-2-1-6

由点 *F* 的坐标 $(1,-\dfrac{4\sqrt{3}}{3})$ 可求出直线 *B′F* 的解析式方程为：$y=\dfrac{\sqrt{3}}{6}x-\dfrac{3\sqrt{3}}{2}$，而直线 *AC* 的解析式为 $y=-\sqrt{3}x-\sqrt{3}$，可求出点 *M* 的坐标为 $(\dfrac{3}{7},-\dfrac{10\sqrt{3}}{7})$.

所以当$\triangle MBF$的周长最小时，点M的坐标为$(\frac{3}{7},-\frac{10\sqrt{3}}{7})$.

（四）简要评注

因为BF的长度不变，所以求$\triangle MBF$周长的最小问题就转化成为求$BM+MF$的最小值问题.

2．求坐标轴上满足四边形周长最小的两动点

例 3-2-1. 如图 3-2-2-1，以矩形 $OABC$ 的顶点 O 为原点，OA 所在的直线为 x 轴，OC 所在的直线为 y 轴，建立平面直角坐标系．已知 OA＝3，OC＝2，点 E 是 AB 的中点，在 OA 上取一点 D，将△BDA 沿 BD 翻折，使点 A 落在 BC 边上的点 F 处．

（1）直接写出点 E、F 的坐标；

（2）设顶点为 F 的抛物线交 y 轴正半轴于点 P，且以点 E、F、P 为顶点的三角形是等腰三角形，求该抛物线的解析式；

（3）在 x 轴、y 轴上是否分别存在点 M、N，使得四边形 $MNFE$ 的周长最小？如果存在，求出周长的最小值；如果不存在，请说明理由．

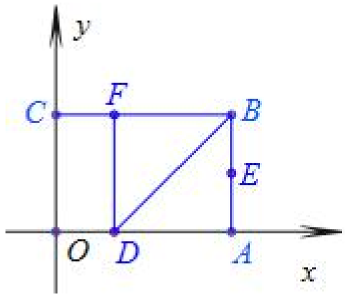


图 3-2-2-1

一、点 E、F 的坐标

由题目条件易求得点 E 坐标为(3，1).

因为△BDF≌△BAD，所以 BF=BA=2.又因为∠BFD=∠BAD=90°，所以 FD=DA=BA=2，所以点 F 的坐标为（1，2）.

二、求抛物线解析式

（一）动感体验

打开文件“例 3-2-2.dmr”，如图 3-2-2-2 所示，拖动点 F，观察△PEF 是否可能为等腰三角形，研究当三角形 PEF 为等腰三角形时点 P 应满足的条件.

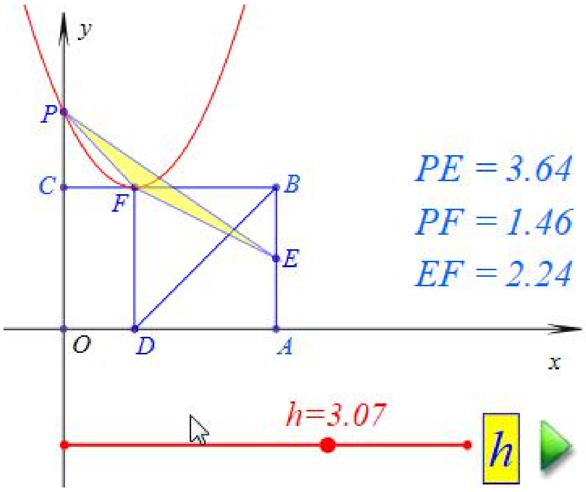


图 3-2-2-2

（二）思路点拨

分别考虑 $PE=PF$、$PE=EF$、$PF=EF$ 的情况下点 P 对应的位置.

（三）动态解析

设点 P 的坐标为（0，h）.可设以点 F 为顶点的抛物线的方程为：$y=a(x-1)^2+2$，将因为点 P 在抛物线上，可解得 $a=h-2$，因此抛物线的解析式可表示为：$y=(h-2)(x-1)^2+2$.

1.首先考虑以 EF 为底边的等腰三角形时，这就要求 $PE=PF$.当 $PE=PF$ 时，点 P（即 EF 的中垂线与 y 轴的交点）一定在点 O 的下方，如图 3-2-2-3 所示.这时因为当点 P 在点 O 位置处时，如图 3-2-2-4 所示，在△PEF 中，可求得：$PF=EF=\sqrt{5}$，而 $PE=\sqrt{10}$，这说明△PEF 是一个等腰直角三角形，所以∠FPM 为锐角，其中点 M 是线段 EF 的中点.因此线段 EF 的中垂线一定交 y 轴于原点 O 的下方.

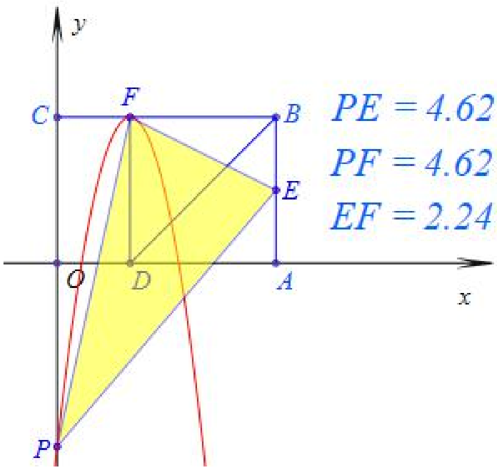


图 3-2-2-3

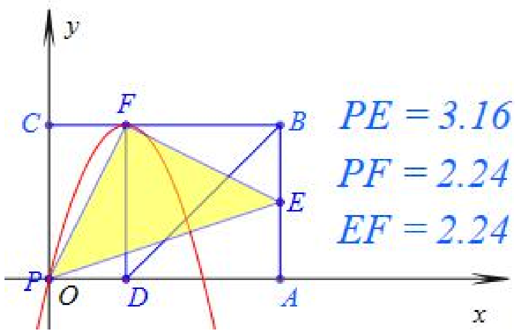


图 3-2-2-4

2.其次考虑以 EF 为腰且 $\angle F$ 为顶角的等腰三角形，这就要求 $PF = EF$.因为 $PF^2 = CF^2 + PC^2 = 1 + (h-2)^2$，而 $EF=\sqrt{5}$，由 $PF^2 = EF^2$，解得：h=0（舍去，如图 3-2-2-4 所示）或 h=4（如图 3-2-2-5 所示）.所以，这时抛物线的解析式为：$y = 2(x-1)^2 + 2$.

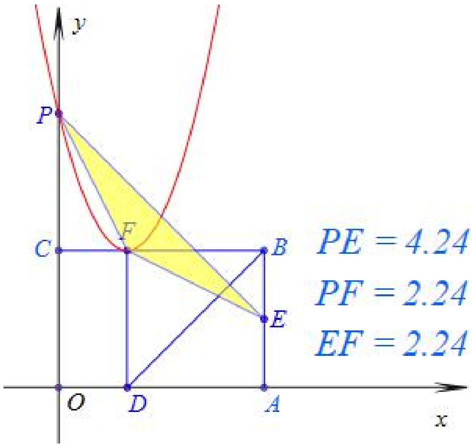


图 3-2-2-5

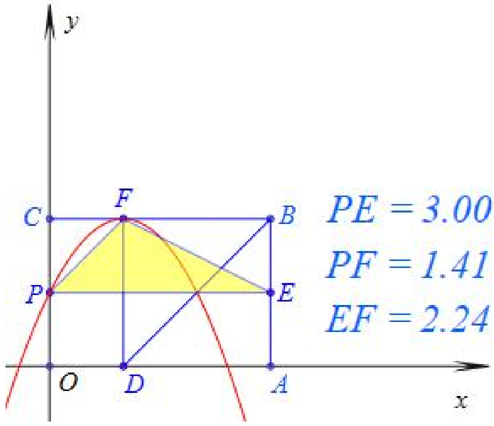


图 3-2-2-6

3.最后考虑以 EF 为腰且 $\angle E$ 为顶角的等腰三角形，这就要求 $PE = EF$.但是这是不可能的，因为当 PE 平行于 x 轴时，如图 3-2-2-6 所示，PE 的值最小且大于 EF 的值 $\sqrt{5}$，因此无论点 P 在 y 轴上任何位置都不可能有 $PE = EF$ 成立.

综上所述，当△PEF 为等腰三角形时，抛物线的解析式为： $y = 2(x-1)^2 + 2$.

三、求四边形 *MNFE* 的周长最小值

（一）动感体验

单击“下一页”按钮，进入第二页，如图 3-2-2-7 所示，拖动点 M 和点 N 观察四边形 $MNFE$ 的周长的变化规律，研究当周长最小时，点 M 和点 N 应满足的条件.

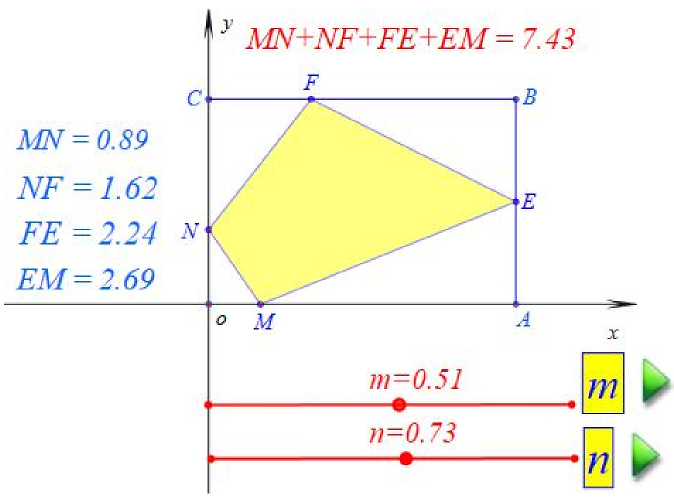


图 3-2-2-7

（二）思路点拨

作点 E 关于 x 轴的对称点 E'、作点 F 关于 y 轴的对称点 F'，如图 3-2-2-8 所示，那么显然当点 E'、点 M、点 N 和点 F'在同一条直线上时，$ME+MN+MF$ 有最小值，对应四边形 $MNFE$ 的周长也最小.

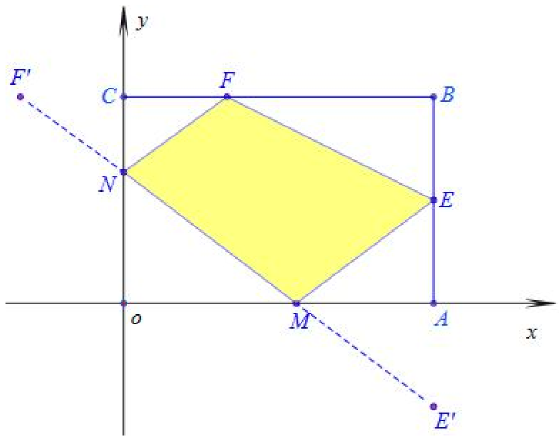


图 3-2-2-8

（三）动态解析

因为点 $E(3，1)$、$F(1，2)$，可知 $E'(3，-1)$、F' $(-1，2)$，所以 $E'F'=\sqrt{(3+1)^2+(-1-2)^2}=5$.

而 $EF=\sqrt{5}$.

所以四边形 $MNFE$ 的最小值为 $5+\sqrt{5}$.

（四）简要评注

EF 的长度不变，四边形 $MNFE$ 的周长最小问题就转化成 $NF+MN+ME$ 的值最小问题. 利用对称性，将 ME 转化到 ME'，NF 转化到 NF'，利用两点之间线段最短，当 $NF'+MN+ME'$ 最小，点 M、N、E'、F'四点共线，从而可以确定点 M、N 的位置，进而求解.

四边形的四个顶点中有两个顶点都在变化，看起来非常复杂的问题，如果抓住了处理问题的基本思路，就能迅速化难为易.

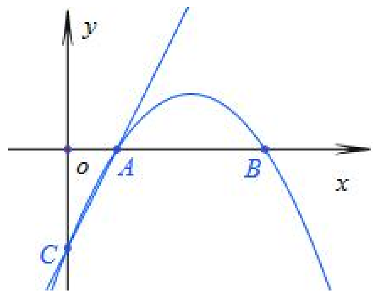
巩固练习(二)

练习 3-2-1：如下图，已知二次函数 $y=-\frac{1}{2}x^2+bx+c\ (c<0)$ 的图象与 x 轴的正半轴相交于点 A、B，与 y 轴相交于点 C，且 $OC^2=OA\cdot OB$.

（1）求 c 的值；

（2）若 $\triangle ABC$ 的面积为 3，求该二次函数的解析式；

（3）设 D 是(2)中所确定的二次函数图象的顶点，试问在直线 AC 上是否存在一点 P 使 $\triangle PBD$ 的周长最小?若存在，求出点 P 的坐标；若不存在，请说明理由.

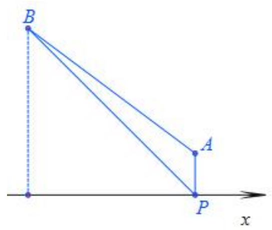


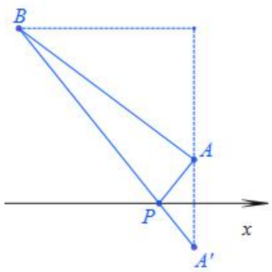
练习 3-2-2：恩施州自然风光无限，特别是以“雄、奇、秀、幽、险”著称于世.著名的恩施大峡谷（A）和世界级自然保护区星斗山（B）位于笔直的沪渝高速公路 X 同侧，AB=50km，A、B 到直线 X 的距离分别为 10km 和 40km，要在沪渝高速公路旁修建一服务区 P，向 A、B 两景区运送游客.小民设计了两种方案，下图（左）是方案一的示意图(AP 与直线 X 垂直，垂足为 P)，P 到 A、B 的距离之和 $S1=PA+PB$；下图（中）是方案二的示意图(点 A 关于直线 X 的对称点是 A'，连接 BA'交直线 X 于点 P)，P 到 A、B 的距离之和 $S2=PA+PB$.

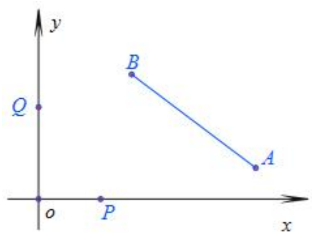
（1）求 $S1$ 、$S2$ ，并比较它们的大小.

（2）请你说明 $S2=PA+PB$ 的值为最小.

（3）拟建的恩施到张家界高速公路 Y 与沪渝高速公路垂直，建立如下图（右）的直角坐标系，B 到直线 Y 的距离为 30km，请你在 X 旁和 Y 旁各修建一服务区 P、Q，使 P、A、B、Q 组成的四边形的周长最小.并求出这个最小值.





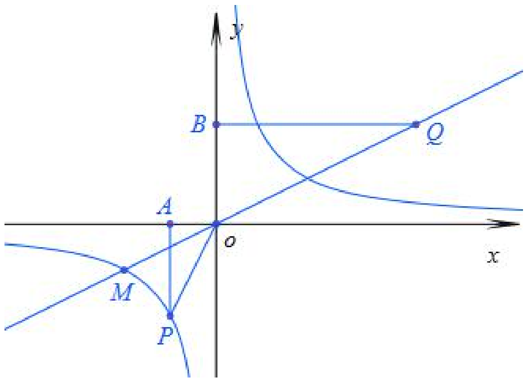


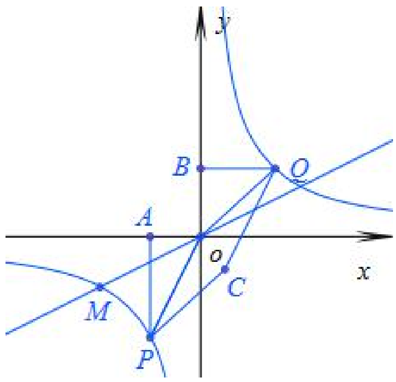
练习 3-2-3：如左下图，已知正比例函数和反比例函数的图像都经过点 M（－2，- 1），且 P（- 1，－2）为双曲线上的一点，Q 为坐标平面上一动点，PA 垂直于 x 轴，QB 垂直于 y 轴，垂足分别是 A、B.

（1）写出正比例函数和反比例函数的关系式；

（2）当点 Q 在直线 MO 上运动时，直线 MO 上是否存在这样的点 Q，使得△OBQ 与△OAP 面积相等？如果存在，请求出点的坐标，如果不存在，请说明理由；

（3）如右下图，当点 Q 在第一象限中的双曲线上运动时，作以 OP、OQ 为邻边的平行四边形 $OPCQ$，求平行四边形 $OPCQ$ 周长的最小值.





本节小结

周长的最值问题是上述线段和差最值问题的一个延伸:将两条线段的和差问题扩展为多条线段的和差问题.解决这类问题的基本思路仍然不变，通过三角形三边之间的基本性质以及轴对称图形的基本关系就能顺利解决问题.

第三节 多边形面积的最值

1．求正方形面积的最大值和最小值

例 3-3-1. 如图 3-3-1-1，在 Rt△*ABC* 中，*AB*＝*AC*，*P* 是边 *AB*（含端点）上的动点．过 *P* 作 *BC* 的垂线 *PR*，*R* 为垂足，∠*PRB* 的平分线与 *AB* 相交于点 *S*，在线段 *RS* 上存在一点 *T*，若以线段 *PT* 为一边作正方形 *PTEF*，其顶点 *E*，*F* 恰好分别在边 *BC*，*AC* 上．

（1）△*ABC* 与△*SBR* 是否相似，说明理由；

（2）请你探索线段 *TS* 与 *PA* 的长度之间的关系；

（3）设边 *AB*＝1，当 *P* 在边 *AB*（含端点）上运动时，请你探索正方形 *PTEF* 的面积 *y* 的最小值和最大值．

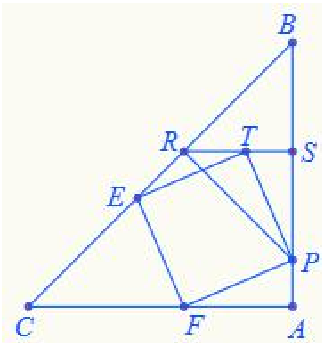


图 3-3-1-1

一、证明△*ABC* 与△*SBR* 相似

在 Rt△*ABC* 中，*AB*=*AC*，所以∠*B*=∠*C*=45°.

因为 *RS* 是直角∠*PRB* 的平分线，所以∠*PRS*＝∠*B*=∠*C*=45°，所以 Rt△*ABC*∽Rt△*SBR*.

二、探索 *TS* 和 *PA* 之间的长度关系

在 Rt△*PAF* 与 Rt△*TSP* 中，∠*PFA*+∠*APF*=∠*TPS*+∠*APF*=90°，所以∠*TPS*=∠*PFA*.又因为 *TP*=*FP*，所以 Rt△*PAF*≌Rt△*TSP*，所以 *TS*=*PA*.

三、求正方形 *PTEF* 面积的最大值和最小值

（一）动感体验

打开文件“例 3-3-1.dmr”，如图 3-3-1-2 所示，拖动点 *P*，观察正方形 *PTEF* 的面积 *y* 的变化规律，研究当 *y* 点 *P* 位置的关系.

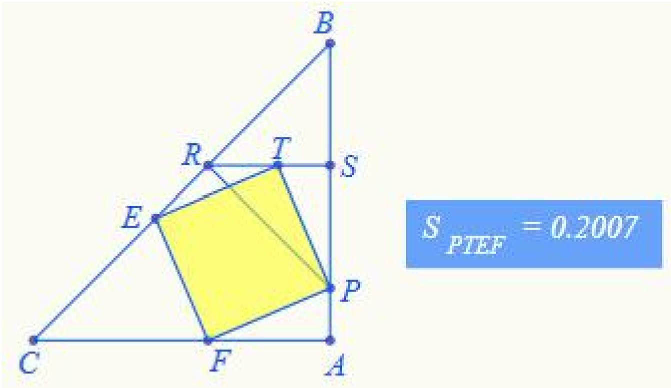


图 3-3-1-2

（二）思路点拨

利用 PA 的长度恰当地表示正方形 $PTEF$ 的面积.

（三）动态解析

正方形 $PTEF$ 的面积 $y=PF^2=PA^2+AF^2$.设 $PA=x$，因为△BRP∽△BAC，所以有 $\frac{BP}{BC}=\frac{BR}{BA}$，即 $\frac{1-x}{\sqrt{2}}=\frac{BR}{1}$，所以 $BR=\frac{\sqrt{2}}{2}(1-x)$.又因为 $AF=SP=\frac{\sqrt{2}}{2}BR$，所以 $AF=\frac{1}{2}(1-x)$，所以 $y=x^2+\frac{1}{4}(1-x)^2=\frac{5}{4}(x-\frac{1}{5})^2+\frac{1}{5}$.

而当点 T 与点 R 重合时，PA 的值 x 最大，如图 3-3-1-3 所示.这时有 $PF=PT=\sqrt{2}SP$，即 $x^2+\frac{1}{4}(1-x)^2=2\cdot\frac{1}{4}\cdot(1-x)^2$，解得：$x=-1$（舍去）或 $x=\frac{1}{3}$.

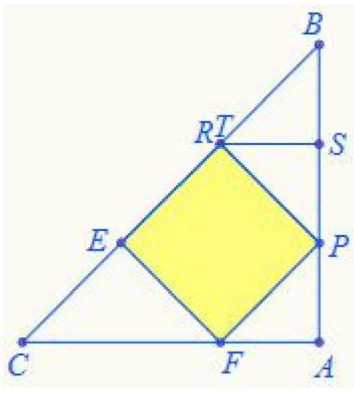


图 3-3-1-3

所以自变量 x 的取值范围为 $0\le x\le\frac{1}{3}$.

因此，当 $x=\frac{1}{5}$ 时，正方形 $PREF$ 的面积有最小值 $\frac{1}{5}$；当 $x=\frac{1}{3}$ 时，正方形 $PREF$ 的面积有最大值 $\frac{2}{9}$.

（四）简要评注

此题建立 y 与 x 的函数关系时，利用了勾股定理，将正方形 $PTEF$ 的面积表示成 $y=PA^2+AF^2$，利用 $\triangle PFA$ 和 $\triangle PTS$ 全等的关系，将 AF 转化成 PS，这样就可以用 x 表示 PA 和 AF，从而建立 y 与 x 之间的函数关系.求最值时，通过点的运动范围得到自变量的取值范围，利用函数性质得到最值.

2．求线段上使三角形面积最大时的动点

例 3-3-2. 已知：如图 3-3-2-1 所示，抛物线 $y=ax^2-2ax+c(a\neq 0)$ 与 y 轴交于点 C（0，4），与 x 轴交于点 A、B，点 A 的坐标为（4，0）.

（1）求该抛物线的解析式；

（2）点 Q 是线段 AB 上的动点，过点 Q 作 QE∥AC，交 BC 于点 E，连接 CQ.当△CQE 的面积最大时，求点 Q 的坐标；

（3）若平行于 x 轴的动直线 l 与该抛物线交于点 P，与直线 AC 交于点 F，点 D 的坐标为（2，0）.问：是否存在这样的直线 l，使得△ODF 是等腰三角形？若存在，请求出点 P 的坐标；若不存在，请说明理由.

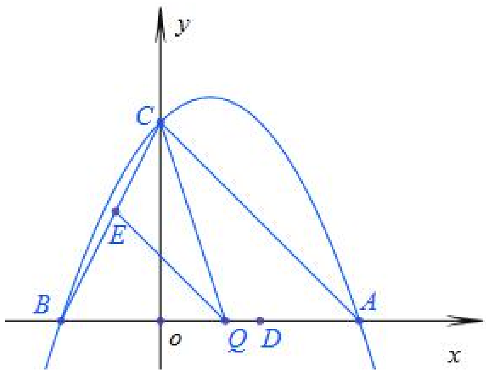


图 3-3-2-1

一、求抛物线解析式

将点 C（0，4），A（4，0）代入 $y=ax^2-2ax+c(a\neq 0)$ 得：

$\begin{cases} c=4 \\ 16a-8c+c=0 \end{cases}$，解得 $\begin{cases} a=-\dfrac{1}{2} \\ c=4 \end{cases}$，所以抛物线解析式为 $y=-\dfrac{1}{2}x^2+x+4$

二、求△CQE 的面积最大时点 Q 的坐标

（一）动感体验

打开文件“例 3-3-2.dmr”，如图 3-3-2-2 所示，拖动点 Q，观察点 Q 的位置对△CQE 面积的影响，研究如何利用 AQ 的长度表示△CQE 的面积.

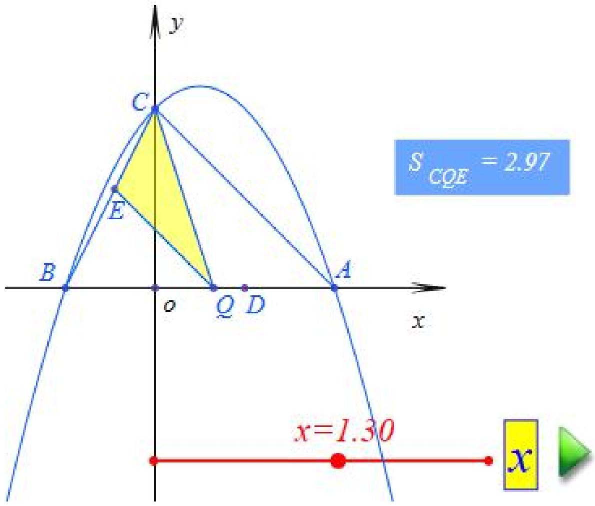


图 3-3-2-2

（二）思路点拨

当点 Q 的位置变化时，$\triangle CQE$ 的各条边的长度和各个角的大小都在变化，因此利用恰当的方式表示$\triangle CQE$ 的面积是解决问题的关键.

因为 $EQ//AC$，所以可以利用 AQ 表示 CE 的长度，将 CE 作为$\triangle CQE$ 的底边；而$\angle B$ 的大小不变，因此可以利用 BQ 的长度和$\angle B$ 的三角函数值表示$\triangle CQE$ 的底边 CE 上的高.

当然，我也可以借助$\triangle CQA$（或$\triangle CQB$）与$\triangle BQE$ 的面积通过间接的方法表示表示$\triangle CQE$ 的面积.

（三）动态解析

由于 A（4，0）、B（-2，0）、C（0，4），所以 AB=6、AC=$4\sqrt{2}$、BC=$2\sqrt{5}$.用 x 表示 AQ 的长，用 y 表示$\triangle CQE$ 的面积：

方法一：用直接法求$\triangle CQE$ 的面积

因为 $EQ//AC$ 所以有 $\dfrac{CE}{AQ}=\dfrac{BE}{BQ}$. 而 $BE=BC-CE=$ $2\sqrt{5}$ $-CE$，那么可以得到 $\dfrac{CE}{x}=\dfrac{2\sqrt{5}-CE}{6-x}$，解得：$CE=\dfrac{\sqrt{5}x}{3}$.

过点 Q 作 $QT\perp BC$ 于点 T，如图 3-3-2-3 所示，那么 QT 就是$\triangle CEQ$ 的底边 CE 上的高，那么在 Rt$\triangle BQT$ 中，有 $QT=BQ\cdot\sin\angle B=(6-x)\cdot\sin\angle B$.

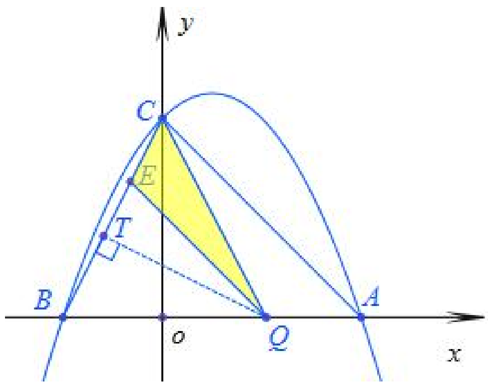


图 3-3-2-3

又因为在 Rt△BOC 中，$\sin\angle B=\dfrac{OC}{BC}=\dfrac{4}{2\sqrt{5}}=\dfrac{2\sqrt{5}}{5}$，所以 $QT=\dfrac{2\sqrt{5}(6-x)}{5}$，因此△$CQE$ 的面积 y 可表示为：$y=\dfrac{1}{2}CE\cdot QT=\dfrac{1}{3}x(6-x)=-\dfrac{1}{3}(x-3)^2+3$.

所以当 x=3，即点 P 的坐标为（1，0）时，△CQE 的面积有最大值 3.

方法二：用间接法求△CQE 的面积

1.△ABC 的面积等于 $\dfrac{1}{2}AB\cdot OC=12$.

2.△AQC 的面积等于 $\dfrac{1}{2}AQ\cdot OC=2x$.

3.过点 E 作 AB 的垂足 S，如图 3-3-2-4 所示，则 $ES//OC$，所以有 $\dfrac{ES}{OC}=\dfrac{BE}{BC}$，又因为 $EQ//AC$，所以有 $\dfrac{BE}{BC}=\dfrac{BQ}{AB}$，所以 $\dfrac{ES}{OC}=\dfrac{BQ}{AB}$，即 $\dfrac{ES}{4}=\dfrac{6-x}{6}$，解得：$ES=\dfrac{2}{3}(6-x)$. 所以△$BQE$ 的面积可表示为 $\dfrac{1}{2}BQ\cdot ES=\dfrac{1}{3}(6-x)^2$.

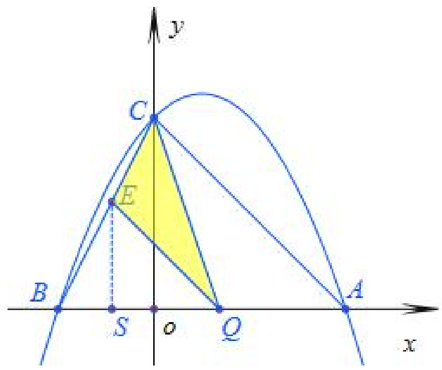


图 3-3-2-4

综合 1、2、3 得△CQE 的面积 y 可表示为：$y=12-2x-\dfrac{1}{3}(6-x)^2=-\dfrac{1}{3}(x-3)^2+3$.

所以当 x=3，即点 P 的坐标为（1，0）时，△CQE 的面积有最大值 3.

三、当△ODF 是等腰三角形时求点 P 的坐标

（一）动感体验

单击"下一页"按钮，如图 3-3-2-5 所示，拖动 y 轴上的点 M 可以上下改变直线 l 的位置，观察△ODF 是否可能为等腰三角形，研究当△ODF 为等腰三角形时点 F 应满足的条件.

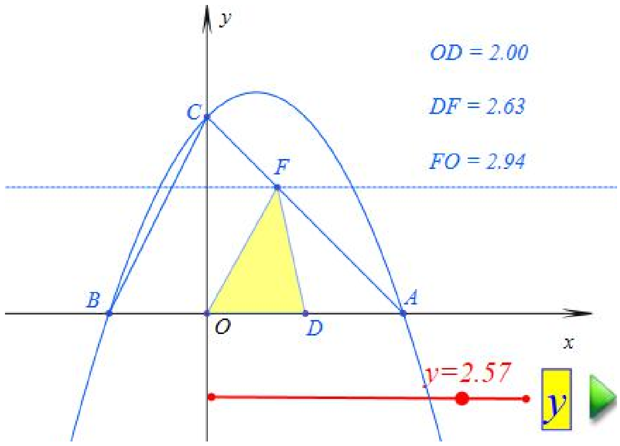


图 3-3-2-5

（二）思路点拨

分别考虑 $OF=OD$、$OF=FD$、$FD=OD$ 的情况下点 F 对应的位置，通过点 F 点纵坐标得到点 P 的纵坐标，从而得到点 P 坐标.

（三）动态解析

1.首先考虑以 OD 为底边的等腰三角形时，这就要求 $DF=OF$，那么点 F 为 DO 的中垂线和 AC 的交点，如图 3-3-2-6 所示，此时点 F 的横坐标 $x_F=1$，而直线 AC 的解析式为 $y=-x+4$，求得点 F 的坐标为（1，3），所以点 P 纵坐标为 $y_P=3$，代入 $y=-\dfrac{1}{2}x^2+x+4$，得点 P 的坐标为 $(1-\sqrt{3},3)$ 或 $(1+\sqrt{3},3)$.

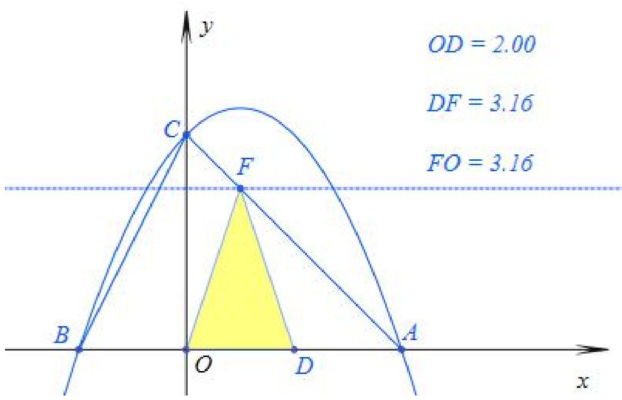


图 3-3-2-6

2.然后考虑以 OD 为腰，且∠O 为顶角的等腰三角形，这就要求 $OF=OD$.因为点 D 到

直线 AC 到距离 d＝$2\sqrt{2}$ ＞OD=2，如图 3-3-2-7 所示，所以不存在满足条件的点 F.

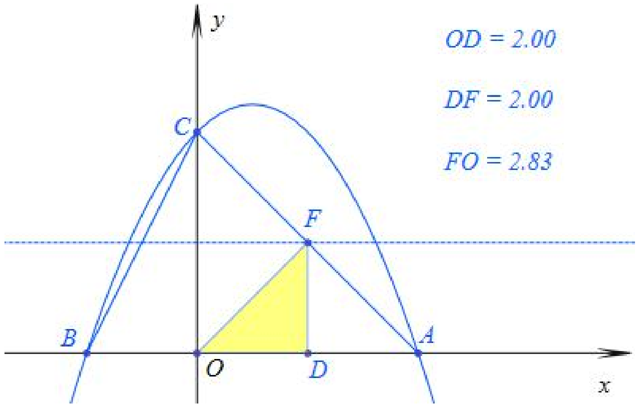


图 3-3-2-7

3.最后考虑以 OD 为腰，且∠D 为顶角时的等腰三角形，这就要求 $DF=OD$.此时点 F 是以 D 为圆心，OD 长为半径的圆与直线 AC 的交点，满足条件的点 F 有两个：一个是点 A，这种情况舍去；一个是点 O 到 AC 的垂足，如图 3-3-2-8 所示，这时点 F 的坐标为（2，2），所以点 P 纵坐标为 $y_P=2$，代入 $y=-\frac{1}{2}x^2+x+4$，得点 P 的坐标为 $(1-\sqrt{5},2)$ 或 $(1+\sqrt{5},2)$.

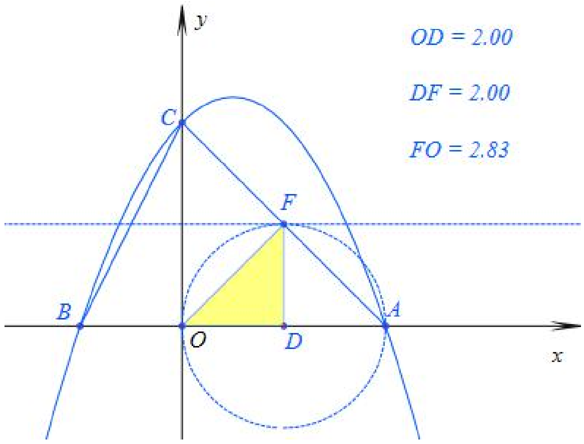


图 3-3-2-8

（四）简要评注

此题（2）利用三角形的面积公式建立了点 Q 的横坐标与△CQE 面积之间的函数关系.在坐标系内求三角形面积时，通常将三角形在坐标轴上的一条边当做计算面积的底边，这样能够比较容易地用一些特殊点的坐标来表示三角形的底边长和高，从而方便求解三角形的面积.

3．求抛物线上使得四边形面积最大时的动点

例 3-3-3. 如图 3-3-3-1，在平面直角坐标系中放置一直角三角板，其顶点为 $A(-1,0)$，$B(0,\sqrt{3})$，$O(0,0)$，将此三角板绕原点 O 顺时针旋转 $90°$，得到 $\triangle A'B'O$.

（1）如图 3-3-12，一抛物线经过点 A、B、B'，求该抛物线解析式；

（2）设点 P 是在第一象限内抛物线上一动点，求使四边形 $PBAB'$ 的面积达到最大时点 P 的坐标及面积的最大值.

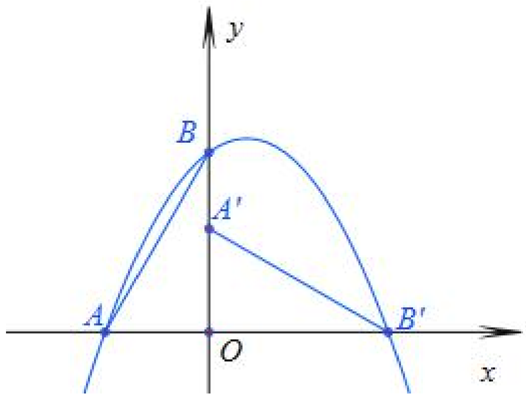


图 3-3-3-1

一、求抛物线解析式

因为将此三角板绕原点 O 顺时针旋转 $90°$，得到 $\triangle A'B'O$，所以 $B'O$=BO，所以点 B' 的坐标为（$\sqrt{3}$,0），因为抛物线过点 A、B、B'，所以用交点式设抛物线解析式为 $y=a(x+1)(x-\sqrt{3})$，将点 $B(0,\sqrt{3})$ 代入得 a=-1，所以抛物线解析式为

$$y=-(x+1)(x-\sqrt{3})=-x^2+(\sqrt{3}-1)x+\sqrt{3}.$$

二、求四边形 $PBAB'$ 面积达到最大时点 P 的坐标

（一）动感体验

打开文件“例 3-3-3.dmr”，如图 3-3-3-2 所示，拖动点 P，观察点 P 对四边形 $PBAB'$的形状的影响，并研究点 P 在第一象限内抛物线上变化时四边形 $PBAB'$面积的变化规律.

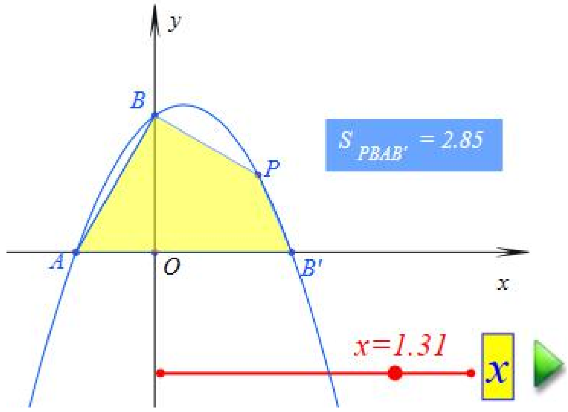


图 3-3-3-2

（二）思路点拨

因为无论点 P 在第一象限内抛物线上如何运动，四边形 $PBAB'$总是可以分割为$\triangle ABB'$和$\triangle BB'P$，如图 3-3-3-3 所示，因此关键是求出$\triangle BB'P$ 的面积的最大值.而 BB'的长度不变，因此求出点 P 到 BB'的距离的最大值即可求出四边形 $PBAB'$的最大值.

另外，也可以将四边形 $PBAB'$按照如图 3-3-3-4 所示情形分割为三个三角形，然后利用点 P 的坐标表示四边形的面积，通过二次方程求出最值.

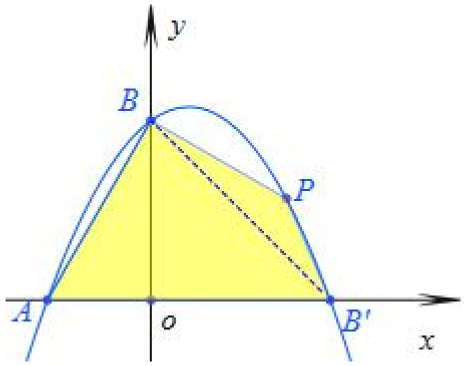


图 3-3-3-3

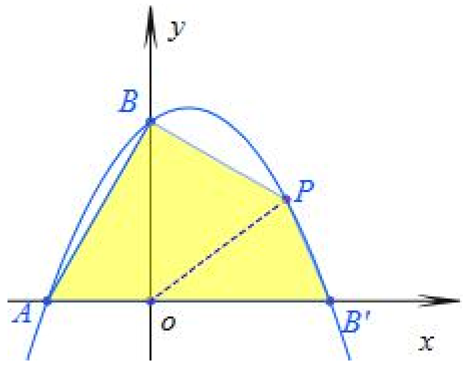


图 3-3-3-4

（三）动态解析

解法一：过点 P 作线段 BB'的平行线 l，那么当 l 与抛物线只有一个交点时，$\triangle BB'P$ 具有最大值.因为直线 BB'的斜率为-1，所以可设与直线 BB'平行的直线 l 的解析式为：$y=-x+m$，联立$\begin{cases} y=-x^2+(\sqrt{3}-1)x+\sqrt{3} \\ y=-x+m \end{cases}$，得到：$x^2-\sqrt{3}x+m-\sqrt{3}=0$.

令$\Delta=\left(\sqrt{3}\right)^2-4(m-\sqrt{3})=0$，解得 $m=\dfrac{3}{4}+\sqrt{3}$，所以 $l: y=-x+\dfrac{3}{4}+\sqrt{3}$.解方程

$\begin{cases} y=-x^2+(\sqrt{3}-1)x+\sqrt{3} \\ y=-x+\dfrac{3}{4}+\sqrt{3} \end{cases}$ 得 $\begin{cases} x=\dfrac{\sqrt{3}}{2} \\ y=\dfrac{3+2\sqrt{3}}{4} \end{cases}$，所以直线与抛物线唯一交点 P（$\dfrac{\sqrt{3}}{2},\dfrac{3+2\sqrt{3}}{4}$）.

设 l 与 x 轴交于点 M，则 $OM=\dfrac{3}{4}+\sqrt{3}$.过点 B'作 l 的垂足 Q，如图 3-3-3-5 所示则 $B'Q$ 即为△$BB'P$ 的底边 BB'对应的高.在 Rt△BOB'中，$OB=OB'$，所以∠$BB'O$=45°.因为 BB'//PM、$B'Q$ ⊥ PM，所以∠$BB'Q$=90°，所以∠$QB'M$=45°，因此 $B'Q=\dfrac{\sqrt{2}}{2}B'M=\dfrac{\sqrt{2}}{2}(OM-OB')=\dfrac{3\sqrt{2}}{8}$.

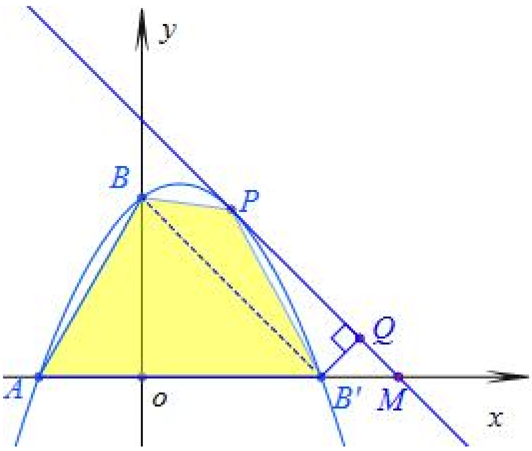


图 3-3-3-5

所以△$BB'P$ 的最大值为 $\dfrac{1}{2}\sqrt{6}\cdot\dfrac{3\sqrt{2}}{8}=\dfrac{3\sqrt{3}}{8}$.而△$AB'B$ 的面积为

$\dfrac{1}{2}(1+\sqrt{3})\cdot\sqrt{3}=\dfrac{1}{2}(3+\sqrt{3})$，所以四边形 $PBAB'$的面积最大值为

$\dfrac{3\sqrt{3}}{8}+\dfrac{1}{2}(3+\sqrt{3})=\dfrac{3}{2}+\dfrac{7\sqrt{3}}{8}$.

因此当点 P 的坐标为（$\dfrac{\sqrt{3}}{2},\dfrac{3+2\sqrt{3}}{4}$）时，四边形 $PBAB'$有最大值 $\dfrac{3}{2}+\dfrac{7\sqrt{3}}{8}$.

解法二：连接线段 OP，可以设点 P 的坐标为（x，$(x+1)(\sqrt{3}-x)$）（其中 $0<x<\sqrt{3}$），则四边形 $PBAB'$可以分割成三个三角形：△AOB、△BOP 和△$OB'P$.过点 P 分别向 x 轴、y 轴作垂足 G、H，如图 3-3-3-6 所示，则 PG=$(x+1)(\sqrt{3}-x)$、PH=x.

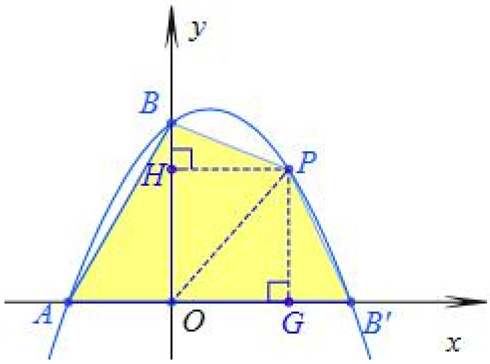


图 3-3-3-6

$\triangle OAB$ 的面积等于 $\frac{1}{2}OA\cdot OB=\frac{\sqrt{3}}{2}$，$\triangle BOP$ 的面积等于 $\frac{1}{2}OB\cdot PH=\frac{\sqrt{3}}{2}x$，$\triangle OB'P$ 的面积等于 $\frac{1}{2}OB'\cdot PG=\frac{\sqrt{3}}{2}(x+1)(\sqrt{3}-x)$.所以四边形 $PBAB'$的面积可表示为：

$\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}x+\frac{\sqrt{3}}{2}(x+1)(\sqrt{3}-x)=-\frac{\sqrt{3}}{2}(x-\frac{\sqrt{3}}{2})^2+\frac{7\sqrt{3}}{8}+\frac{3}{2}$.因此当 $x=\frac{\sqrt{3}}{2}$ 时四边形 $PBAB'$的面积具有最大值 $\frac{3}{2}+\frac{7\sqrt{3}}{8}$.

（四）简要评注

本题是求面积的最大值问题，其常规方法就是建立四边形 $PBAB'$的面积和点 P 横坐标之间的函数关系，再利用函数的性质求最值.由于四边形 $PBAB'$是不规则的四边形，所以只能将其分割成规则的图形，再利用面积公式求.再对四边形 $PBAB'$的面积进行分割时，通常分割的原则是分割后的图形面积较容易用点的坐标表示，所以往往用平行坐标轴的直线进行分割比较容易表示面积.

4．求双曲线上使多边形面积之差有最值时的动点

例 3-3-4. 如图 3-3-4-1，点 P 是双曲线 $y=\dfrac{k}{x}(k<0,\ x<0)$ 上一动点，过点 P 作 x 轴、y 轴的垂线，分别交 x 轴、y 轴于 A、B 两点，交双曲线 $y=\dfrac{k'}{x}(0<k'<|k|)$ 于 E、F 两点.

（1）图 3-3-4-1 中，四边形 $PEOF$ 的面积 S_1=________(用含 k_1、k_2 的式子表示);

（2）图 3-3-4-2 中，设 P 点坐标为（—4，3）.

①判断 EF 与 AB 的位置关系，并证明你的结论； ②记 $S_2=S_{\Delta PEF}-S_{\Delta OEF}$，$S_2$ 是否有最小值？若有，求出其最小值；若没有，请说明理由.

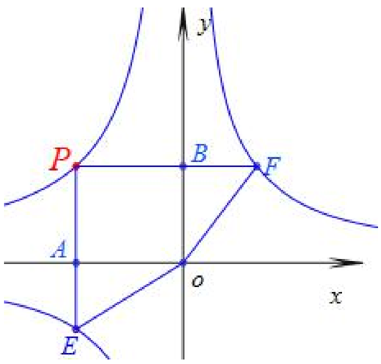


图 3-3-4-1

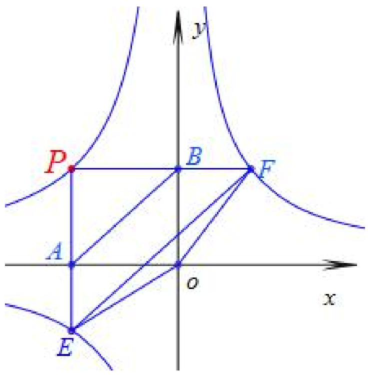


图 3-3-4-2

一、求四边形 $PEOF$ 的面积 S_1

由双曲线的性质可知，$S_{四边形PAOB}=|x_p|\cdot|y_p|=|k_1|$，$S_{\Delta AOE}=\dfrac{1}{2}x_E\cdot y_E=\dfrac{|k_2|}{2}$，

$S_{\Delta BOF}=\dfrac{1}{2}x_F\cdot y_F=\dfrac{|k_2|}{2}$，因为 $k_1<0,k_2>0$，所以：

$$S_1=S_{四边形PAOB}+S_{\Delta AOE}+S_{\Delta BOF}=-k_1+\frac{k_2}{2}+\frac{k_2}{2}=k_2-k_1.$$

二、判断 EF 与 AB 的位置关系

通过证明△PAB 与△PEF 相似，得到 AB 与 EF 平行.

由题意可得 A（–4，0），B（0，3），$E(-4,-\dfrac{k_2}{4})$，$F(\dfrac{k_2}{3},3)$，所以 PA=3，PE=$3+\dfrac{k_2}{4}$，PB=4，PF=$4+\dfrac{k_2}{3}$，所以 $\dfrac{PA}{PE}=\dfrac{3}{3+\frac{k_2}{4}}=\dfrac{12}{12+k_2}$，$\dfrac{PB}{PF}=\dfrac{4}{4+\frac{k_2}{3}}=\dfrac{12}{12+k_2}$，所以 $\dfrac{PA}{PE}=\dfrac{PB}{PF}$，

又因为∠APB=∠EPF，所以△APB ∽△EPF，所以∠PAB=∠PEF．所以 EF∥AB.

三、判断 S_2 是否有最小值

（一）动感体验

打开文件“例 3-3-4.dmr”，如图 3-3-4-3 所示，拖动点 k_2 可以改变 k_2 的值，观察 $S_2=S_{\triangle PEF}-S_{\triangle OEF}$ 的变化规律.

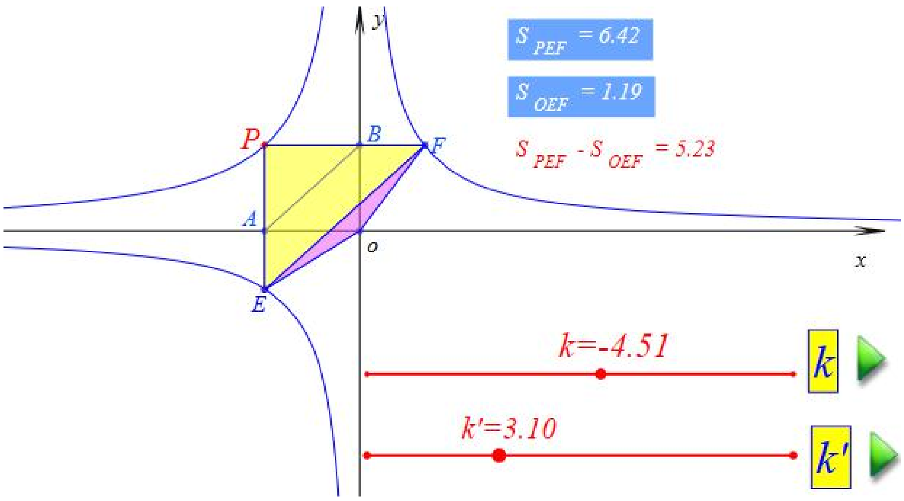


图 3-3-4-3

（二）思路点拨

由含有 k_2 的式子表示 S_2，利用函数知识判断是否有最小值.

（三）动态解析

因为△OEF 的面积不太容易求出，因此考虑将△PEF 补成矩形：过 E 作 $EM\perp y$ 轴于点 M，过 F 作 $FN\perp x$ 轴于点 N，两线交于点 Q，如图 3-3-4-5 所示.

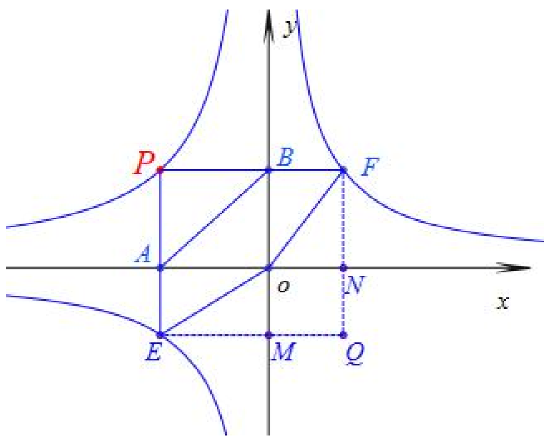


图 3-3-4-5

此时 $S_{\triangle EFQ}=S_{\triangle PEF}$，由上述问题可知 M（0，$-\frac{k_2}{4}$），N（$\frac{k_2}{3}$，0），Q（$\frac{k_2}{3}$，$-\frac{k_2}{4}$）. 所

以 $S_2=S_{\triangle PEF}-S_{\triangle OEF}=S_{\triangle EFQ}-S_{\triangle OEF}=S_{\triangle EOM}+S_{\triangle FON}+S_{矩形OMQN}=\frac{1}{2}k_2+\frac{1}{2}k_2+\frac{k_2}{3}\cdot\frac{k_2}{4}=$ $k_2+\frac{1}{12}k_2^2=\frac{1}{12}(k_2+6)^2-3$．当 $k_2>-6$ 时，S_2 的值随 k_2 的增大而增大，而 $0<k_2<12$，所以 $0<S_2<24$，因此 S_2 没有最小值.

（四）简要评注

此题在证明 $EF/\!/AB$ 过程中，利用了“同位角相等则两条直线平行”的判定定理.此外还可利用以下三种方法：①分别求出经过 A、B 两点和经过 E、F 两点的直线解析式，利用这两个解析式中 x 的系数相等来证明 $AB/\!/EF$；②利用 $\tan\angle PAB=\tan\angle PEF$ 来证明 $AB/\!/EF$；③连接 AF、BE，利用 $S_{\triangle AEF}=S_{\triangle BFE}$ 得到点 A、点 B 到直线 EF 的距离相等，再由 A、B 两点在直线 EF 同侧可得到 $AB/\!/EF$.

5．求与圆的切线有关的多边形面积最小的问题

例 3-3-5. 如图 3-3-5-1，已知在平面直角坐标系中，四边形 $OABC$ 是矩形，点 A、C 的坐标分别为 $A(3，0)$、$C(0,4)$，点 D 的坐标为 $\mathrm{D}(-5,0)$，点 P 是直线 AC 上的一动点，直线 DP 与 y 轴交于点 M．问：

（1）当点 P 运动到何位置时，直线 DP 平分矩形 $OABC$ 的面积，请简要说明理由，并求出此时直线 DP 的函数解析式；

（2）当点 P 沿直线 AC 移动时，是否存在使 $\triangle DOM$ 与 $\triangle ABC$ 相似的点 M，若存在，请求出点 M 的坐标；若不存在，请说明理由；

（3）当点 P 沿直线 AC 移动时，以点 P 为圆心、半径长为 R（$R>0$）画圆，所得到的圆称为动圆 P．若设动圆 P 的直径长为 AC，过点 D 作动圆 P 的两条切线，切点分别为点 E、F．请探求是否存在四边形 $DEPF$ 的最小面积 S，若存在，请求出 S 的值；若不存在，请说明理由．

注：第（3）问请用 3-3-5-1 备用图解答．

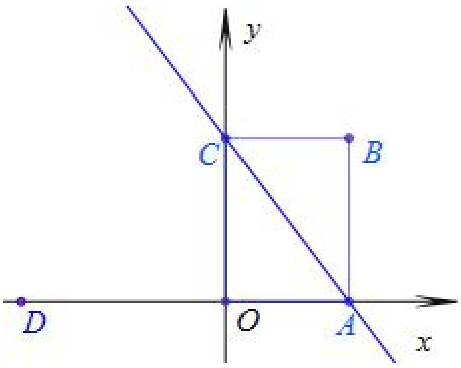
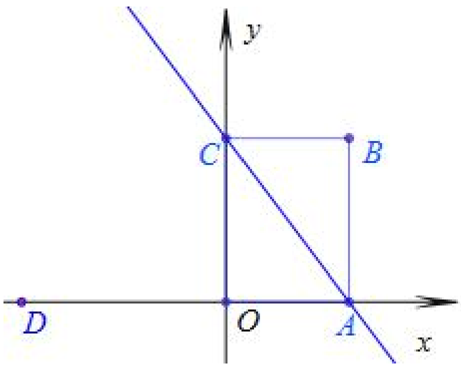


图 3-3-5-1



3-3-5-1 备用图

一、求直线 DP 平分矩形 $OABC$ 面积时的函数解析式

设 DP 交 AB 于点 N，过点 M 作 $MT\perp AB$ 于点 T，过点 N 作 $NS\perp OC$ 于点 S，如图 3-3-5-2 所示，则容易证明 $\mathrm{Rt}\triangle MTN\cong\mathrm{Rt}\triangle NSM$.所以若 DP 平分矩形 $OABC$，则有 $OM=BN$，即 $S_{矩形\mathrm{OATM}}=S_{矩形\mathrm{BC}SN}$.

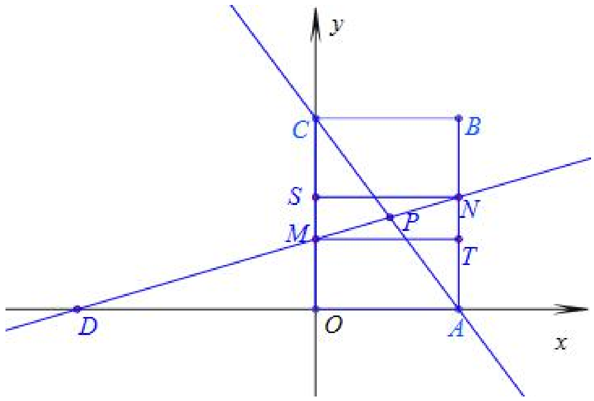


图 3-3-5-2

可设直线 DP 的解析式为: $y=k(x+5)$. 当 $x=0$ 时,得 $y=5k$,当 $x=3$ 时,得 $y=8k$,由 $OM=BN$ 即 $5k=4-8k$,解得: $k=\dfrac{4}{13}$,所以这时直线 DP 的解析式为: $y=\dfrac{4}{13}(x+5)$.

另外，其实我们知道，对于中心对称图形，平分其面积的直线必过其对称中心，那么对于这道题，矩形是中心对称图形，我们也可以通过求出其对称中心的坐标代入直线解析式求解.

二、判断是否存在点 M 使△DOM 与△ABC 相似

因为 $\angle DOM=\angle ABC$，若 $\triangle DOM$ 与 $\triangle ABC$ 相似，则有 $\triangle DOM\backsim\triangle ABC$ 和 $\triangle MOD\backsim\triangle ABC$ 两种情况.

1. 当 $\triangle DOM\backsim\triangle ABC$ 时，若点 M 在 y 轴的正半轴上，如图 3-3-5-3 所示，因为 $\angle DOM=\angle ABC$，则有 $\dfrac{OM}{OD}=\dfrac{BC}{AB}$：即 $\dfrac{y_m}{5}=\dfrac{3}{4}$ 解得 $y_m=\dfrac{15}{4}$. 所以点 $M_1(0,\dfrac{15}{4})$ 满足条件. 由对称性知，当点 M 为 M_1 关于原点 O 的对称点 M_3 时，此时 $M_3(0,-\dfrac{15}{4})$，如图 3-3-5-4 所示，因为 DM 不与 AC 平行，所以也满足条件.

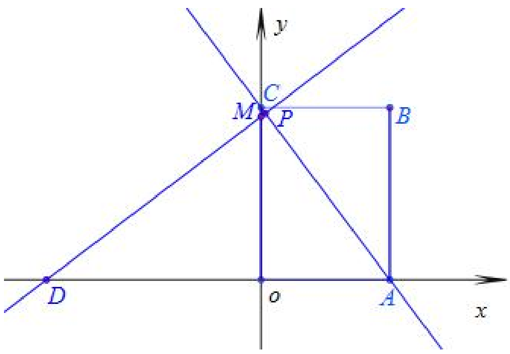


图 3-3-5-3

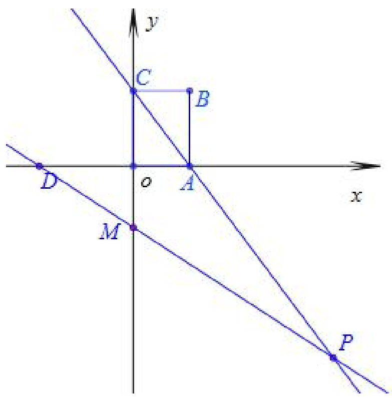


图 3-3-5-4

2. 当 $\triangle MOD\backsim\triangle ABC$ 时，若点 M 在 y 轴的正半轴上，如图 3-3-5-5 所示，因为

$\angle DOM=\angle ABC$，则有$\dfrac{OM}{OD}=\dfrac{AB}{BC}$时，即$\dfrac{y_m}{5}=\dfrac{4}{3}$，解得$y_m=\dfrac{20}{3}$．所以点$M_2(0,\dfrac{20}{3})$满足条件．由对称性知，当点$M$ 为M_2关原点O的对称点M_4时，此时$M_4(0,-\dfrac{20}{3})$，如图 3-3-5-6 所示，此时DM与AC平行，因为点P在直线AC上，所以点M 不可能是DP与y轴的交点，此情况不可能.

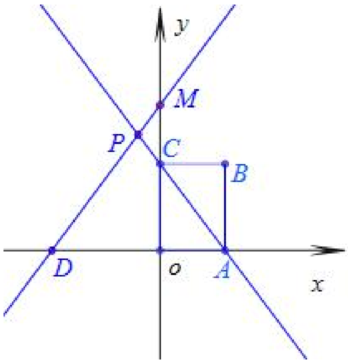


图 3-3-5-5

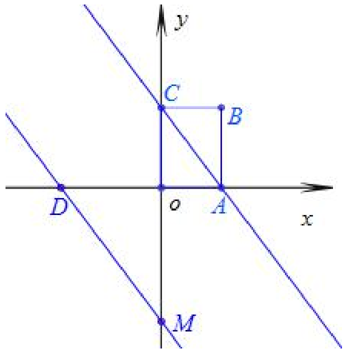


图 3-3-5-6

综上所述，满足使△DOM 与△ABC 相似的点M 有 3 个，分别为$M_1(0,\dfrac{15}{4})$、$M_2(0,\dfrac{20}{3})$、$M_3(0,-\dfrac{15}{4})$.

三、探求是否存在四边形 *DEPF* 的最小面积 *S*

（一）动感体验

打开文件“例 3-3-5.dmr”，如图 3-3-5-7 所示，拖动点P观察四边形$DEPF$的形状的变化规律，研究点P的位置对四边形$DEPF$的面积的影响.

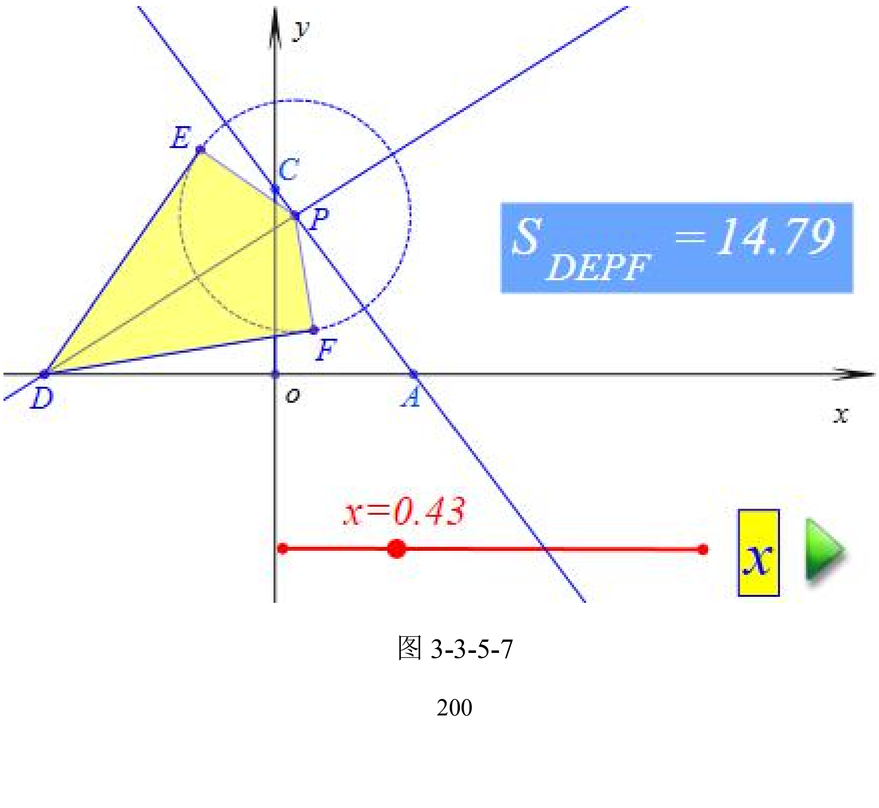


图 3-3-5-7

（二）思路点拨

可以将四边形 $DFPE$ 看作是两个全等的直角$\triangle DFP$ 与 DEP 组合而成的，因此 $S_{四边形DFPE}=2S_{\triangle DFP}=PF\cdot DF$.而在 Rt$\triangle DFP$ 中，$PF=\dfrac{5}{2}$是常数，因此当 DP 的值最小时，DF 有最小值，从而四边形 $DFPE$ 的面积最小.

（三）动态解析

当 $DP\perp AC$ 时，DP 长最短，此时四边形 $DEPF$ 的面积 S 有最小值.

当 $DP\perp AC$ 时，如图 3-3-5-8 所示，在 Rt$\triangle OAC$ 和 Rt$\triangle PAD$ 中，$\sin\angle A=\dfrac{OC}{AC}=\dfrac{DP}{DA}$，

即：$\dfrac{4}{5}=\dfrac{DP}{8}$，所以 $DP=\dfrac{32}{5}$，则 $DF=\sqrt{DP^2-PF^2}=\dfrac{\sqrt{3471}}{10}$.

这时 $S_{四边形DFPE}=PF\cdot DF=\dfrac{5}{2}\times\dfrac{\sqrt{3471}}{10}=\dfrac{\sqrt{3471}}{4}$，即 S 的最小值为 $S=\dfrac{\sqrt{3471}}{4}$.

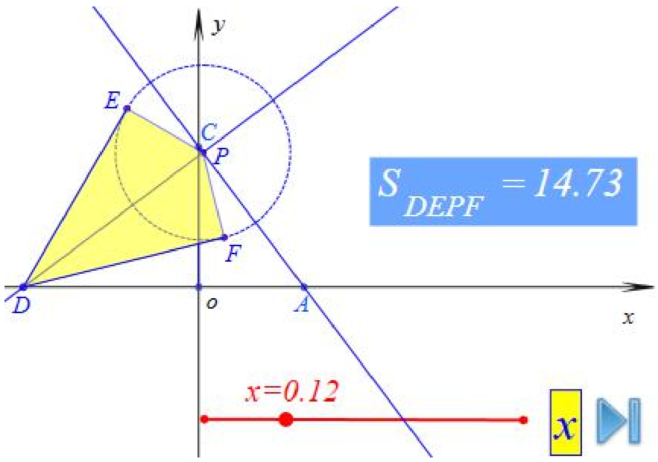


图 3-3-5-8

（四）简要评注

此题求面积最值时，没有根据求函数最值的方法求解.因为 E、P、F 都为动点，所以要建立面积与动点间的函数关系比较困难.通过对图形的分析，利用切线的相关性质，可以得到四边形 $DEPF$ 的面积 S 有最小值，即切线长 DE 最小，再利用勾股定理进一步得到 DE 最小即 DP 最小.所以当 $DP\perp AC$ 时，DP 有最小值，此时四边形 $DEPF$ 的面积 S 对应也有最小值.

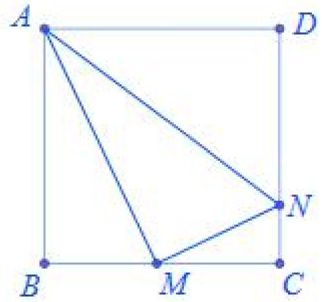
巩固练习(三)

练习 3-3-1：如下图，正方形 $ABCD$ 边长为 4，M、N 分别是 BC、CD 上的两个动点，当 M 点在 BC 上运动时，保持 AM 和 MN 垂直，

（1）证明：$Rt\triangle ABM \backsim Rt\triangle MCN$；

（2）设 $BM=x$，梯形 $ABCN$ 的面积为 y，求 y 与 x 之间的函数关系式；当 M 点运动到什么位置时，四边形 $ABCN$ 的面积最大，并求出最大面积；

（3）当 M 点运动到什么位置时 $Rt\triangle ABM \backsim Rt\triangle AMN$，求此时 x 的值.



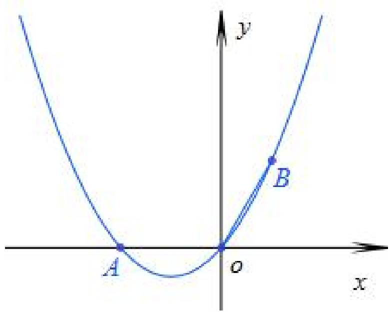
练习 3-3-2：如下图，在直角坐标系中，点 A 的坐标为（－2，0），连结 OA，将线段 OA 绕原点 O 顺时针旋转 120°，得到线段 OB.

（1）求点 B 的坐标；

（2）求经过 A、O、B 三点的抛物线的解析式；

（3）在（2）中抛物线的对称轴上是否存在点 C，使$\triangle BOC$ 的周长最小？若存在，求出点 C 的坐标；若不存在，请说明理由.

（4）如果点 P 是（2）中的抛物线上的动点，且在 x 轴的下方，那么$\triangle PAB$ 是否有最大面积？若有，求出此时 P 点的坐标及$\triangle PAB$ 的最大面积；若没有，请说明理由.

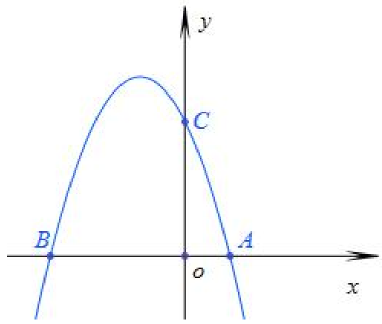


练习 3-3-3：抛物线 $y=-x^2+bx+c$ 与 x 轴交与 A(1，0)，B(- 3，0)两点.

（1）求该抛物线的解析式；

（2）设（1）中的抛物线交 y 轴与 C 点，在该抛物线的对称轴上是否存在点 Q，使得 $\triangle QAC$ 的周长最小？若存在，求出 Q 点的坐标；若不存在，请说明理由.

（3）在（1）中的抛物线上的第二象限上是否存在一点 P，使$\triangle PBC$ 的面积最大？，若存在，求出点 P 的坐标及$\triangle PBC$ 的面积最大值.若没有，请说明理由.



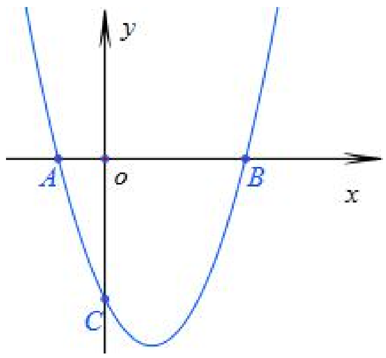
练习 3-3-4：如下图，抛物线 $y=x^2-2x+k$ 与 x 轴交于 A、B 两点，与 y 轴交于点 C（0，-3）.

（1）$k=$________，点 A 的坐标为_______，点 B 的坐标为________；

（2）设抛物线 $y=x^2-2x+k$ 的顶点为 M，求四边形 $ABMC$ 的面积；

（3）在 x 轴下方的抛物线上是否存在一点 D，使四边形 $ABDC$ 的面积最大？若存在，请求出点 D 的坐标；若不存在，请说明理由；

（4）在抛物线 $y=x^2-2x+k$ 上求点 Q，使$\triangle BCQ$ 是以 BC 为直角边的直角三角形.

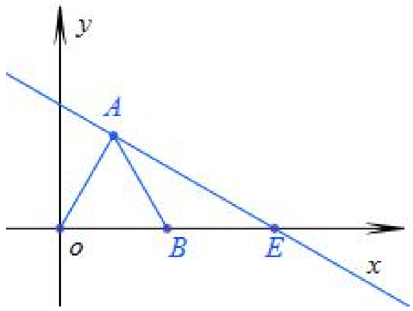


练习 3-3-5：如下图，$\triangle OAB$ 是边长为 2 的等边三角形，过点 A 的直线 $y=-\frac{\sqrt{3}}{3}x+m$ 与 x 轴交于点 E。

（1）求点 E 的坐标；

（2）求过 A、O、E 三点的抛物线解析式；

（3）若点 P 是（2）中求出的抛物线 AE 段上一动点（不与 A、E 重合），设四边形 $OAPE$ 的面积为 S，求 S 的最大值.

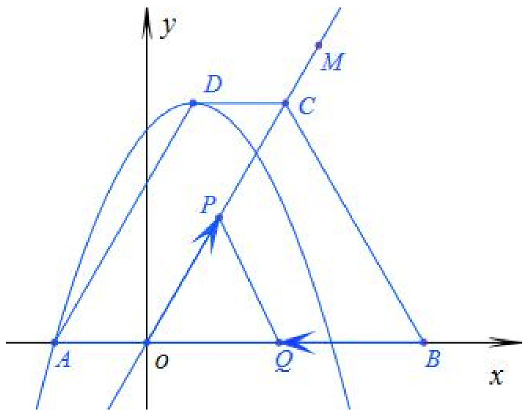


练习 3-3-6：如下图，已知抛物线 $y=a(x-1)^2+3\sqrt{3}(a\neq 0)$ 经过点 $A(-2,\ 0)$，抛物线的顶点为 D，过 O 作射线 $OM\ /\!/\ AD$．过顶点 D 平行于 x 轴的直线交射线 OM 于点 C，B 在 x 轴正半轴上，连结 BC．

（1）求该抛物线的解析式；

（2）若动点 P 从点 O 出发，以每秒 1 个长度单位的速度沿射线 OM 运动，设点 P 运动的时间为 $t(s)$．问当 t 为何值时，四边形 $DAOP$ 分别为平行四边形？直角梯形？等腰梯形？

（3）若 $OC=OB$，动点 P 和动点 Q 分别从点 O 和点 B 同时出发，分别以每秒 1 个长度单位和 2 个长度单位的速度沿 OC 和 BO 运动，当其中一个点停止运动时另一个点也随之停止运动．设它们的运动的时间为 $t\ (s)$，连接 PQ，当 t 为何值时，四边形 $BCPQ$ 的面积最小？并求出最小值及此时 PQ 的长．



本节小结

求面积最值的过程中通常要利用函数知识，在表示图形的面积时，有时需要对图形进行割补，割补的原则是能利用动点和一些定点的坐标表示图形的底边长和对应的高.然后利用面积公式建立变量之间的函数关系，再利用函数的知识求解最值问题.