

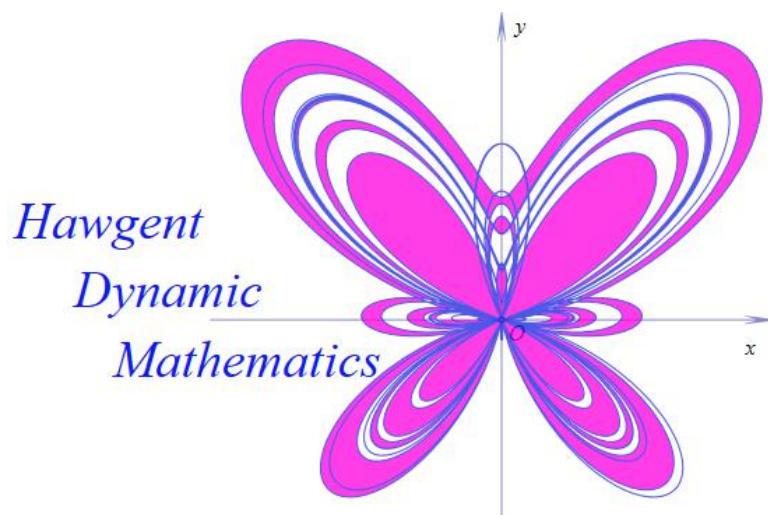


Hawgent 皓骏动态数学课程系列

计算与推理

(下册)

深入学科，彻底突破数学教学和数学学习中的重点难点问题
开展数学实验、数学教学、数学学习和数学研究的必备工具



皓骏（广州）数学技术中心

Hawgent Technology Centre in Mathematics

内容介绍

在学习数学过程中,有许多问题在查看了详细的解答或听到了老师的讲解之后,很多学生仍然不得其解,即使他们在下一次遇到同一个问题也未必能够给出正确或完整的解答.

这是因为,在学习过程中,数学更加需要理解.

本课程收集并整理了一些综合性很高的数学问题,它们让老师感到难教,让学生感到难学.就是说,对于这类问题许多数学老师都反应他们在花费了很大力气、很多时间的讲解之后,很多学生仍然是似懂非懂.

同样是学习,但方法有优劣之分,效率有高低之分.把看似复杂、抽象的问题变得更容易一些,抓住数学的本质使学生多一些理性思考而少一些机械记忆,让学生感悟到自然朴实的数学思想方法从而能够举一反三,这是我们追求的理念.

Hawgent 皓骏团队利用动态数学技术将这类问题呈现在学生面前,为他们提供了一个动手、观察、探索、猜想和验证的机会与平台,帮助他们利用变化的图形和数据发现问题内在的关系,并逐渐形成真正属于他们自己的解决问题的思路,这是我们追求的目标.

如果这种方式能够得到大家的认同,对我们是一种鼓励,并将激发我们更加努力工作的热情,同时希望有更多志同道合者加入我们的队伍,将这项工作持续下去,越做越好.当然也欢迎各种不同的声音,甚至是批评的意见,从而帮助我们得到提高和成长.

欢迎联系: 11033149@qq.com

第二部分 几何证明及通过几何计算进行说理问题.....	5
例 1 (2008 年北京市中考第 25 题)	5
例 2 (2008 年东营市中考第 22 题)	7
例 3 (2008 年广州市中考第 24 题)	9
例 4 (2008 年哈尔滨市中考第 27 题)	10
例 5 (2008 年武汉市中考第 24 题)	12
例 6 (2008 年义乌市中考第 23 题)	13
例 7 (2009 年宁波市中考第 26 题)	15
例 8 (2009 年日照市中考第 24 题)	18
例 9 (2010 年河北省中考第 25 题)	21
例 10 (2010 年宁波市中考第 26 题)	22
例 11 (2010 年苏州市中考第 28 题)	24
例 12 (2011 年北京市中考第 24 题)	26
例 13 (2011 年北京市中考第 25 题)	28
例 14 (2011 年宁波市中考第 26 题)	30
例 15 (2011 年陕西省中考第 25 题)	33
例 16 (2011 年扬州市中考第 28 题)	36
例 17 (2011 年浙江省中考第 24 题)	38
例 18 (2012 年上海市中考第 24 题)	40
例 19 (2012 年温州市中考第 24 题)	42
例 20 (2012 年南通市中考第 28 题)	44
例 21 (2012 年陕西省中考第 25 题)	46
例 22 (2012 年绍兴市中考第 25 题)	48
例 23 (2012 年义乌市中考第 24 题)	51
例 24 (2012 年抚顺市中考第 25 题)	53
例 25 (2012 年吉林省中考第 26 题)	55
例 26 (2012 年沈阳市中考第 25 题)	58
例 27 (2013 年安徽省中考第 23 题)	60
例 28 (2013 年乐山市中考第 25 题)	62
例 29 (2013 年乐山市中考第 26 题)	64
例 30 (2013 年江西省中考第 24 题)	67
例 31 (2013 年宜宾市中考第 24 题)	72
例 32 (2013 年武汉市中考第 25 题)	74
例 33 (2013 年北京市中考第 25 题)	76
例 34 (2014 年绍兴市中考第 23 题)	79
例 35 (2014 年金华市中考第 23 题)	81
例 36 (2014 年扬州市中考第 28 题)	83
例 37 (2014 年徐州市中考第 28 题)	86
例 38 (2014 年温州市中考第 24 题)	90
例 39 (2014 年苏州市中考第 28 题)	94
例 40 (2014 年安徽省中考第 23 题)	97
例 41 (2014 年河北省中考第 25 题)	100
例 42 (2014 年北京市中考第 24 题)	102
例 43 (2014 年沈阳市中考第 24 题)	104

例 44 (2014 年沈阳市中考第 25 题)	106
例 45 (2014 年济南市中考第 28 题)	111
例 46 (2014 年长春市中考第 23 题)	114
例 47 (2015 年安徽省中考第 23 题)	116
例 48 (2015 年北京市中考第 28 题)	117
例 49 (2015 年杭州市中考第 22 题)	119
例 50 (2015 年河南省中考第 22 题)	121
例 51 (2015 年厦门市中考第 27 题)	123
例 52 (2015 年武汉市中考第 24 题)	124
例 53 (2015 年徐州市中考第 26 题)	126
例 54 (2015 年烟台市中考第 25 题)	128
例 55 (2015 年珠海市中考第 22 题)	130
例 56 (2015 年沈阳市中考第 24 题)	133
例 57 (2016 年安徽省中考第 23 题)	137
例 58 (2016 年北京市中考第 28 题)	140
例 59 (2016 年成都市中考第 27 题)	141
例 60 (2016 年广州市中考第 25 题)	143
例 61 (2016 年江西省中考第 22 题)	145
例 62 (2016 年南京市中考第 26 题)	147
例 63 (2016 年宁波市中考第 26 题)	149
例 64 (2016 年上海市中考第 24 题)	152
例 65 (2016 年沈阳市中考第 24 题)	154
例 66 (2016 年泰州市中考第 25 题)	156
例 67 (2016 年湘潭市中考第 25 题)	158

第二部分 几何证明及通过几何计算进行说理问题

例 1 (2008 年北京市中考第 25 题) 请阅读下列材料: 问题: 如图 1, 在菱形 $ABCD$ 和菱形 $BEFG$ 中, 点 A, B, E 在同一条直线上, P 是线段 DF 的中点, 连结 PG , PC . 若 $\angle ABC = \angle BEF = 60^\circ$, 探究 PG 与 PC 的位置关系及 PG/PC 的值.

小聪同学的思路是: 延长 GP 交 DC 于点 H , 构造全等三角形, 经过推理使问题得到解决.

请你参考小聪同学的思路, 探究并解决下列问题:

- (1) 写出上面问题中线段 PG 与 PC 的位置关系及 PG/PC 的值;
- (2) 将图 1 中的菱形 $BEFG$ 绕点 B 顺时针旋转, 使菱形 $BEFG$ 的对角线 BF 恰好与菱形 $ABCD$ 的边 AB 在同一直线上, 原问题中的其他条件不变 (如图 2).
- (3) 你在 (1) 中得到的两个结论是否发生变化? 写出你的猜想并加以证明.

若图 1 中 $\angle ABC = \angle BEF = 2\alpha$ ($0 < \alpha < 90^\circ$), 将菱形 $BEFG$ 绕点 B 顺时针旋转任意角度, 原问题中的其他条件不变, 请你直接写出 PG/PC 的值 (用含 α 的式子表示).

【解答】

- (1) 线段 PG 与 PC 的位置关系是 $PG \perp PC$;

$$\frac{PG}{PC} = \sqrt{3}.$$

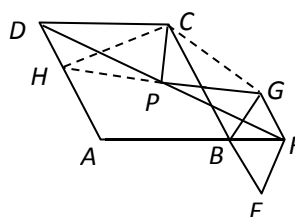
- (2) 猜想: (1) 中的结论没有发生变化.

证明: 如图, 延长 GP 交 AD 于点 H , 连结 CH, CG .

$\because P$ 是线段 DF 的中点,

$$\therefore FP = DP.$$

由题意可知 $AD \parallel FG$.



$$\therefore \angle GFP = \angle HDP .$$

$$\because \angle GPF = \angle HPD ,$$

$$\therefore \triangle GFP \cong \triangle HDP .$$

$$\therefore GP = HP , \quad GF = HD .$$

$\because$ 四边形 $ABCD$ 是菱形,

$$\therefore CD = CB , \quad \angle HDC = \angle ABC = 60^\circ .$$

由 $\angle ABC = \angle BEF = 60^\circ$, 且菱形 $BEFG$ 的对角线 BF 恰好与菱形 $ABCD$ 的边 AB 在同一条直线上,

$$\text{可得 } \angle GBC = 60^\circ .$$

$$\therefore \angle HDC = \angle GBC .$$

$\because$ 四边形 $BEFG$ 是菱形,

$$\therefore GF = GB .$$

$$\therefore HD = GB .$$

$$\therefore \triangle HDC \cong \triangle GBC .$$

$$\therefore CH = CG , \quad \angle DCH = \angle BCG .$$

$$\therefore \angle DCH + \angle HCB = \angle BCG + \angle HCB = 120^\circ .$$

$$\text{即 } \angle HCG = 120^\circ .$$

$$\because CH = CG , \quad PH = PG ,$$

$$\therefore PG \perp PC , \quad \angle GCP = \angle HCP = 60^\circ .$$

$$\therefore \frac{PG}{PC} = \sqrt{3} .$$

$$(3) \quad \frac{PG}{PC} = \tan(90^\circ - \alpha) .$$

例 2 (2008 年东营市中考第 22 题) (1) 探究新知: 如图 1, 已知 $\triangle ABC$ 与 $\triangle ABD$ 的面积相等, 试判断 AB 与 CD 的位置关系, 并说明理由.

(1) 结论应用: ①如图 2, 点 M, N 在反比例函数 $y=k/x$ ($k>0$) 的图像上, 过点 M 作 $ME \perp y$ 轴, 过点 N 作 $NF \perp x$ 轴, 垂足分别为 E, F .

(2) 试证明: $MN \parallel EF$.

②若①中的其他条件不变, 只改变点 M, N 的位置, 如图 3 所示, 请判断 MN 与 EF 是否平行.

【解答】

(1) 证明: 分别过点 C, D , 作 $CG \perp AB, DH \perp AB$, 垂足为 G, H , 则 $\angle CGA = \angle DHB = 90^\circ$.

$$\therefore CG \parallel DH.$$

$\because \triangle ABC$ 与 $\triangle ABD$ 的面积相等,

$$\therefore CG = DH.$$

$\therefore$ 四边形 $CGHD$ 为平行四边形.

$$\therefore AB \parallel CD.$$

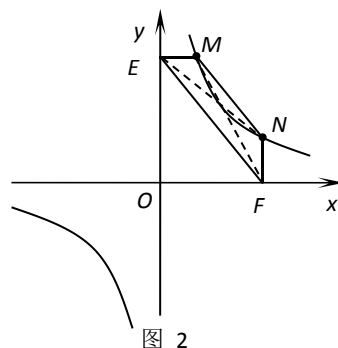


图 2

(2) ①证明: 连结 MF, NE .

设点 M 的坐标为 (x_1, y_1) , 点 N 的坐标为 (x_2, y_2) .

$\because$ 点 M, N 在反比例函数 $y = \frac{k}{x}$ ($k>0$) 的图象上,

$$\therefore x_1 y_1 = k, \quad x_2 y_2 = k.$$

$\because ME \perp y$ 轴, $NF \perp x$ 轴,

$$\therefore OE = y_1, \quad OF = x_2.$$

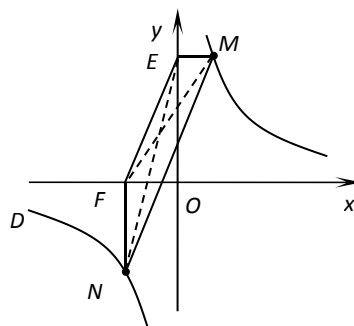


图 3

$$\therefore S_{\triangle EFM} = \frac{1}{2}x_1 \cdot y_1 = \frac{1}{2}k ,$$

$$S_{\triangle EFN} = \frac{1}{2}x_2 \cdot y_2 = \frac{1}{2}k .$$

$$\therefore S_{\triangle EFM} = S_{\triangle EFN} .$$

例3(2008年广州市中考第24题)如图1,扇形OAB的半径OA=3,圆心角AOB=90°,点C是弧AB上异于A、B的动点,过点C作CDOA于点D,作CEOB于点E,连结DE,点G、H在线段DE上,且DG=GH=HE.

(1) 求证: 四边形OGCH是平行四边形;

(2) 当点C在弧AB上运动时,在CD、CG、DG中,是否存在长度不变的线段?若存在,请求出该线段的长度;

(3) 求证: $CD^2 + 3CH^2$ 是定值.

【解答】

(1) 连结OC交DE于M,由矩形得OM=CG,EM=DM

因为DG=HE所以EM-EH=DM-DG得HM=DG

(2) DG不变,在矩形ODCE中,DE=OC=3,所以DG=1

(3) 设CD=x,则CE= $\sqrt{9-x^2}$,由DE·CG=CD·EC得CG= $\frac{x\sqrt{9-x^2}}{3}$

$$\text{所以 } DG = \sqrt{x^2 - \left(\frac{x\sqrt{9-x^2}}{3}\right)^2} = \frac{x^2}{3} \text{ 所以 } HG = 3 - 1 - \frac{x^2}{3} = \frac{6-x^2}{3}$$

$$\text{所以 } 3CH^2 = 3\left(\left(\frac{6-x^2}{3}\right)^2 + \left(\frac{x\sqrt{9-x^2}}{3}\right)^2\right) = 12 - x^2$$

$$\text{所以 } CD^2 + 3CH^2 = x^2 + 12 - x^2 = 12$$

例 4 (2008 年哈尔滨市中考第 27 题) 在矩形 ABCD 中，点 E 是 AD 边上一点，连结 BE，且 $\angle ABE=30^\circ$ ， $BE=DE$ ，连结 BD. 点 P 从点 E 出发沿射线 ED 运动，过点 P 作 $PQ \parallel BD$ 交直线 BE 于点 Q.

- (1) 当点 P 在线段 ED 上时 (如图 1)，求证： $BE=PD+3\sqrt{3}PQ$;
- (2) 若 $BC=6$ ，设 PQ 长为 x ，以 P、Q、D 三点为顶点所构成的三角形面积为 y ，求 y 与 x 的函数关系式 (不要求写出自变量 x 的取值范围);
- (3) 在 (2) 的条件下，当点 P 运动到线段 ED 的中点时，连结 QC，过点 P 作 $PF \perp QC$ ，垂足为 F，PF 交对角线 BD 于点 G (如图 2)，求线段 PG 的长.

【解答】

(1) 过点 E 作 PQ 的垂线交 PQ 于 M，交 BD 于 H.

因为 $AD \parallel BC$ ，所以 $\angle ADB = \angle DBC$.

因为 $EB=ED$ ，所以 $\angle ADB = \angle EBD$.

因此 $\angle DBC = \angle EBD = \angle ABE = 30^\circ$

由 $PQ \parallel BD$ ， $EB=ED$ ， $EM \perp PQ$ ，得 $QB=PD$, $PQ=2MQ$, $\angle EQP = \angle EBD = 30^\circ$.
 $QM = \frac{\sqrt{3}}{2}QE$.

因此 $QE = \frac{\sqrt{3}}{3}PQ$ ，于是 $BE = BQ + QE = PD + \frac{\sqrt{3}}{3}PQ$.

(2) 在 $Rt\triangle ABCD$ 中， $BD = 4\sqrt{3}$. $Rt\triangle BEH$ 中， $EH = 2$.

$\triangle EQP \sim \triangle EBD$ ，所以 $EM = \frac{\sqrt{3}}{6}x$

①当点 P 在 ED 上时， $MH = EH - EM = 2 - \frac{\sqrt{3}}{6}x$ ，此时 $y = -\frac{\sqrt{3}}{12}x^2 + x$

②当点 P 在 ED 的延长线上时， $MH = EM - EH = \frac{\sqrt{3}}{6}x - 2$ ，此时
 $y = \frac{\sqrt{3}}{12}x^2 - x$

(3) 当点 P 的 ED 的中点时， $QP = 2\sqrt{3}$, $PD = 2$.

在 $Rt\triangle PDC$ 中, $PC=4$. 在 $Rt\triangle QPC$ 中, $QC=2\sqrt{7}$. 在 $Rt\triangle PDN$ 中, $PN=1$.

由 $\triangle PNG \sim \triangle QPC$, 所以 $PG=PN/QP \cdot QC=2\sqrt{7}/3$.

例 5 (2008 年武汉市中考第 24 题) 正方形 ABCD 中, 点 O 是对角线 AC 的中点, P 是对角线 AC 上的一个动点, 过点 P 作 $PF \perp CD$ 于点 F. 如图 1, 当点 P 于点 O 重合时, 显然有 $DF=CF$.

(1) 如图 2, 若点 P 在线段 AO 上 (不与点 A、O 重合), $PE \perp PB$ 且 PE 交 CD 于点 E.

①求证: $DF=EF$;

②写出线段 PC、PA、CE 之间的一个等量关系, 并证明你的结论;

(2) 若点 P 在线段 OC 上 (不与点 O、C 重合), $PE \perp PB$ 且 PE 交直线 CD 于点 E. 请完成图 3 并判断 (1) 的结论①、②是否成立? 若不成立, 写出相应的结论 (所写结论均不必证明).

【解答】

(1) ①过点 P 作 BC 的垂线交 AD 于 M, 交 BC 于 N. 延长 FP 交 AB 于 H. 那么四边形 AHPM 和四边形 PNCF 是正方形.

在三角形 PBN 和三角形 PEF 中, $\angle BPN = \angle EPF$, $PN = PF$, $\angle PNB = \angle PFE = 90^\circ$, 所以 $\triangle PBN \cong \triangle PEF$. 所以 $BN = EF$.

又因为 $BN = AM = AH = DF$, 所以 $EF = DF$.

② $PC - PA = 2^{\frac{1}{2}} \cdot CE$.

过点 E 作 $EG \perp CD$ 交 AC 于 G, 则 $GE \parallel PF \parallel AD$.

因为 $FE = FD$, 所以 $PG = PA$.

$GC = 2^{\frac{1}{2}} \cdot CE$,

于是 $PC - PA = 2^{\frac{1}{2}} \cdot CE$

(2) 结论 $EF = DF$ 依然成立

结论 $PC - PA = 2^{\frac{1}{2}} \cdot CE$ 不成立, 应该是 $PA - PC = 2^{\frac{1}{2}} \cdot CE$

例 6 (2008 年义乌市中考第 23 题) 如图 1, 四边形 ABCD 是正方形, G 是 CD 边上的一个动点 (点 G 与 C、D 不重合), 以 CG 为边在正方形 ABCD 外作正方形 CEFG, 连结 BG, DE. 我们探究下列图中线段 BG、线段 DE 的长度关系及所

(1) 在直线的位置关系:

①猜想如图 1 线段 BG、线段 DE 的长度关系及所在直线的位置关系;

②将图 1 中的正方形 CEFG 绕着点 C 按顺时针 (或逆时针) 方向旋转任意角度 α ,

(2) 得到如图 2、图 3 的情形. 请你通过观察、测量等方法判断①中得到的结论是否仍然成立, 并选取图 2 证明你的判断.

将原题中的正方形改成矩形 (如图 4-6), 且 $AB=a$, $BC=b$, $CE=k \cdot a$, $CG=k \cdot b$ ($ab, k > 0$), 第 (1) 题①中得到的结论哪些成立, 哪些不成立? 若成立, 以图 5 为例简要说明理由.

(3) 在第 (2) 题图 5 中, 连结 DG、BE, 且 $a=3$, $b=2$, $k=1/2$, 求 $BE^2 + DG^2$ 的值.

【解答】

(1) ① $BG = DE, BG \perp DE$

② $BG = DE, BG \perp DE$ 仍然成立

在图 (2) 中证明如下

$\because$ 四边形 ABCD、四边形 ABCD 都是正方形

$\therefore BC = CD, CG = CE, \angle BCD = \angle ECG = 90^\circ$

$\therefore \angle BCG = \angle DCE$

$\therefore \triangle BCG \cong \triangle DCE$ (SAS)

$\therefore BG = DE \quad \angle CBG = \angle CDE$

$$\text{又} \because \angle BHC = \angle DHO \quad \angle CBG + \angle BHC = 90^\circ$$

$$\therefore \angle CDE + \angle DHO = 90^\circ \quad \therefore \angle DOH = 90^\circ$$

$$\therefore BG \perp DE$$

(2) $BG \perp DE$ 成立, $BG = DE$ 不成立

简要说明如下

$\because$ 四边形 $ABCD$ 、四边形 $CEFG$ 都是矩形,

且 $AB = a$, $BC = b$, $CG = kb$, $CE = ka$ ($a \neq b$, $k > 0$)

$$\therefore \frac{BC}{DC} = \frac{CG}{CE} = \frac{b}{a}, \quad \angle BCD = \angle ECG = 90^\circ$$

$$\therefore \angle BCG = \angle DCE$$

$$\therefore \triangle BCG \sim \triangle DCE$$

$$\therefore \angle CBG = \angle CDE$$

$$\text{又} \because \angle BHC = \angle DHO \quad \angle CBG + \angle BHC = 90^\circ$$

$$\therefore \angle CDE + \angle DHO = 90^\circ \quad \therefore \angle DOH = 90^\circ$$

$$\therefore BG \perp DE$$

$$(3) \because BG \perp DE \quad \therefore BE^2 + DG^2 = OB^2 + OE^2 + OG^2 + OD^2 = BD^2 + GE^2$$

$$\text{又} \because a = 3, \quad b = 2, \quad k = \frac{1}{2}$$

$$\therefore BD^2 + GE^2 = 2^2 + 3^2 + 1^2 + \left(\frac{3}{2}\right)^2 = \frac{65}{4}$$

$$\therefore BE^2 + DG^2 = \frac{65}{4}$$

例 7 (2009 年宁波市中考第 26 题) 如图 1, 在平面直角坐标系中, O 为坐标原点, 点 A 的坐标为 (-8,0), 直线 BC 经过点 B (-8,6), C (0,6), 将四边形 OABC 绕点 O 按顺时针方向旋转 α 度得到四边形 OA'B'C', 此时直线 OA'、直线 B'C' 分别与直线 BC 相交于点 P、Q.

(1) 四边形 OABC 的形状是 _____ ;

当 $\alpha=90^\circ$ 时, BP/BQ 的值是 _____ ;

(2) 如图 2, 当四边形 OA'B'C' 的顶点 B' 落在 y 轴正半轴时, 求 BP/BQ 的值.

如图 3, 当四边形 OA'B'C' 的顶点 B' 落在直线 BC 上时, 求 $\triangle OPB'$ 的面积.

(3) 在四边形 OABC 旋转过程中, 当 $0 < \alpha \leq 180^\circ$ 时, 是否存在这样的点 P 和点 Q, 使 $BP = \frac{1}{2} BQ$? 若存在, 请直接写出点 P 的坐标; 若不存在, 请说明理由.

【解答】

(1) 矩形 (长方形);

$$\frac{BP}{BQ} = \frac{4}{7}.$$

(2) ① $\because \angle POC = \angle B'OA', \angle PCO = \angle OA'B' = 90^\circ,$

$\therefore \triangle COP \sim \triangle A'OB'.$

$$\therefore \frac{CP}{A'B'} = \frac{OC}{OA'}, \text{ 即 } \frac{CP}{6} = \frac{6}{8},$$

$$\therefore CP = \frac{9}{2}, \quad BP = BC - CP = \frac{7}{2}.$$

同理 $\triangle B'CQ \sim \triangle B'C'O,$

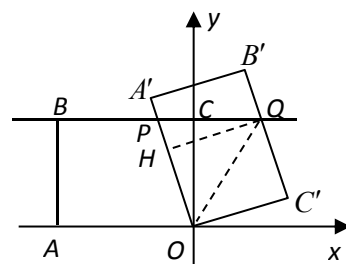
$$\therefore \frac{CQ}{C'O} = \frac{B'C}{B'C'}, \text{ 即 } \frac{CQ}{6} = \frac{10-6}{8},$$

$$\therefore CQ = 3, \quad BQ = BC + CQ = 11.$$

解得 $x_1 = 1 + \frac{3}{2}\sqrt{6}$, $x_2 = 1 - \frac{3}{2}\sqrt{6}$ (不符实际, 舍去).

$$\therefore PC = BC + BP = 9 + \frac{3}{2}\sqrt{6},$$

$$\therefore P_1\left(-9 - \frac{3}{2}\sqrt{6}, 6\right).$$



②如图 2, 当点 P 在点 B 右侧时,

$$\therefore OP = PQ = BQ - BP = x, \quad PC = 8 - x.$$

在 $\text{Rt}\triangle PCO$ 中, $(8-x)^2 + 6^2 = x^2$, 解得 $x = \frac{25}{4}$.

$$\therefore PC = BC - BP = 8 - \frac{25}{4} = \frac{7}{4},$$

$$\therefore P_2\left(-\frac{7}{4}, 6\right).$$

综上所述, 存在点 $P_1\left(-9 - \frac{3}{2}\sqrt{6}, 6\right)$, $P_2\left(-\frac{7}{4}, 6\right)$, 使 $BP = \frac{1}{2}BQ$.

例 8 (2009 年日照市中考第 24 题) 已知正方形 ABCD 中, E 为对角线 BD 上一点, 过 E 点作 EF⊥BD 交 BC 于 F, 连结 DF, G 为 DF 中点, 连结 EG, CG.

(1) 求证: $EG=CG$;

(2) 将图 1 中 $\triangle BEF$ 绕 B 点逆时针旋转 45° , 如 2 所示, 取 DF 中点 G, 连结 EG, CG. 问 (1) 中的结论是否仍然成立? 若成立, 请给出证明; 若不成立, 请说明理由.

(3) 将图 1 中 $\triangle BEF$ 绕 B 点旋转任意角度, 如图 3 所示, 再连结相应的线段, 问 (1) 中的结论是否仍然成立? 通过观察你还能得出什么结论? (均不要求证明)

【解答】

(1) 证明: 在 $\text{Rt}\triangle FCD$ 中,

$$\because G \text{ 为 } DF \text{ 的中点}, \therefore CG = \frac{1}{2}FD.$$

同理, 在 $\text{Rt}\triangle DEF$ 中,

$$EG = \frac{1}{2}FD.$$

$$\therefore CG=EG.$$

(2) (1) 中结论仍然成立, 即 $EG=CG$.

证法一: 连接 AG, 过 G 点作 $MN \perp AD$ 于 M, 与 EF 的延长线交于 N 点.

在 $\triangle DAG$ 与 $\triangle DCG$ 中,

$$\because AD=CD, \angle ADG=\angle CDG, DG=DG,$$

$$\therefore \triangle DAG \cong \triangle DCG.$$

$$\therefore AG=CG.$$

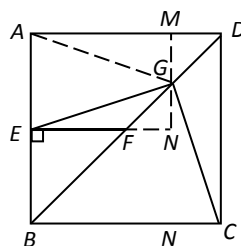


图 ② (一)

在 $\triangle DMG$ 与 $\triangle FNG$ 中,

$$\because \angle DGM = \angle FGN, FG = DG, \angle MDG = \angle NFG,$$

$$\therefore \triangle DMG \cong \triangle FNG.$$

$$\therefore MG = NG$$

在矩形 $AENM$ 中, $AM = EN$.

在 $\text{Rt}\triangle AMG$ 与 $\text{Rt}\triangle ENG$ 中,

$$\because AM = EN, MG = NG,$$

$$\therefore \triangle AMG \cong \triangle ENG.$$

$$\therefore AG = EG.$$

$$\therefore EG = CG.$$

证法二: 延长 CG 至 M ,使 $MG = CG$,

连接 MF , ME , EC ,

在 $\triangle DCG$ 与 $\triangle FMG$ 中,

$$\because FG = DG, \angle MGF = \angle CGD, MG = CG,$$

$$\therefore \triangle DCG \cong \triangle FMG.$$

$$\therefore MF = CD, \angle FMG = \angle DCG.$$

$$\therefore MF \parallel CD \parallel AB.$$

$$\therefore EF \perp MF.$$

在 $\text{Rt}\triangle MFE$ 与 $\text{Rt}\triangle CBE$ 中,

$$\because MF = CB, EF = BE,$$

$$\therefore \triangle MFE \cong \triangle CBE.$$

$$\therefore \angle MEF = \angle CEB.$$

$$\therefore \angle MEC = \angle MEF + \angle FEC = \angle CEB + \angle CEF = 90^\circ.$$

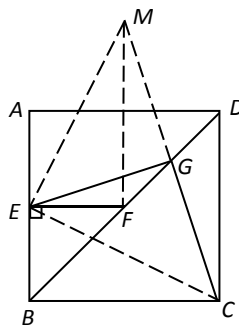


图 ② (二)

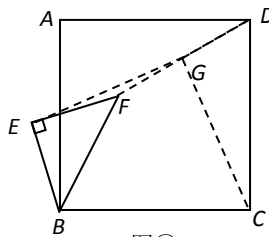


图 ③

$\therefore \triangle MEC$ 为直角三角形.

$\because MG = CG,$

$\therefore EG = \frac{1}{2} MC.$

$\therefore EG = CG.$

(3) (1) 中的结论仍然成立,

即 $EG = CG$. 其他的结论还有: $EG \perp CG$.

例 9 (2010 年河北省中考第 25 题) 如图 1, 在直角梯形 ABCD 中, $AD \parallel BC$, $\angle B = 90^\circ$, $AD = 6$, $BC = 8$, $AB = 3\sqrt{3}$, 点 M 是 BC 的中点. 点 P 从点 M 出发沿 MB 以每秒 1 个单位长的速度向点 B 匀速运动, 到达点 B 后立刻以原速度沿 BM 返回; 点 Q 从点 M 出发以每秒 1 个单位长的速度在射线 MC 上匀速运动. 在点 P、Q 运动过程中, 以 PQ 为边作等边三角形 EPQ, 使它与梯形 ABCD 在射线 BC 的同侧. 点 P、Q 同时出发, 当 P 返回到点 M 时停止运动, 点 Q 也随之停止. 设点 P、Q 运动的时间是 t 秒 ($t > 0$).

(1) 设 PQ 的长为 y , 在点 P 从点 M 向点 B 运动的过程中, 写出 y 与 t 之间的函数关系式 (不必写 t 的取值范围);

(2) 当 $BP = 1$ 时, 求 $\triangle EPQ$ 与梯形 ABCD 重叠部分的面积;

(3) 随着时间 t 的变化, 线段 AD 会有有一部分被 $\triangle EPQ$ 覆盖, 被覆盖线段的长度在某个时刻会达到最大值, 请回答: 该最大值能否持续一个时段? 若能, 直接写出 t 的取值范围; 若不能, 请说明理由.

【解答】

(1) $y = 2t$;

(2) 当 $BP = 1$, $t = 3$ 时, 点 D 恰好落在 AD 上, 此时重叠部分就是三角形 EPQ, 面积为 $9\sqrt{3}$.

当 $BP = 1$, $t = 5$ 时, EQ 恰好经过点 D, 若点 P 从点 B 向点 M 运动 $PQ = BM + MQ - BP = 8$, $PC = 7$. 过点 P 作 PF 垂直于 AD, 垂足为 F. 在直角三角形 PGF 中, $FG = 3$, $PG = 6$. 所以重叠部分是梯形 GPCD. 面积为 $27\sqrt{3}$.

(3) 能, 当 $4 \leq t \leq 5$ 时, GH 的长为 2

例 10 (2010 年宁波市中考第 26 题) 如图 1，在平面直角坐标系中，O 是坐标原点，平行四边形 ABCD 的顶点 A 的坐标为 $(-2,0)$ ，点 D 的坐标为 $(0,2\sqrt{3})$ ，点 B 在 x 轴的正半轴上，点 E 为线段 AD 的中点，过点 E 的直线 l 与 x 轴交于点 F，与射线 DC 交于点 G.

(1) 求 DCB 的度数；

(2) 当点 F 的坐标为 $(-4,0)$ 时，求点 G 的坐标；

(3) 连结 OE，以 OE 所在直线为对称轴， $\triangle OEF$ 经过轴对称变换后得到 $\triangle OEF'$ ，记直线 EF' 与射线 DC 的交点为 H.

①如图 2，当点 G 在点 H 的左侧时，求证： $\triangle DEG \sim \triangle DHE$ ；

②若 $\triangle EHG$ 的面积为 $3\sqrt{3}$ ，请直接写出点 F 的坐标.

【解答】

(1) 60°

(2) $(2, 2\sqrt{3})$

(3) ①略

②过点 E 作 $EM \perp$ 直线 CD 于点 M

$\because CD \parallel AB$

$\therefore \angle EDM = \angle DAB = 60^\circ$

$\therefore EM = DE \cdot \sin 60^\circ = 2 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3}$

$\because S_{\triangle EGH} = \frac{1}{2} \cdot GH \cdot ME = \frac{1}{2} \cdot GH \cdot \sqrt{3} = 3\sqrt{3}$

$\therefore GH = 6$

$\because \triangle DHE \sim \triangle DEG$

$\therefore \frac{DE}{DG} = \frac{DH}{DE}$ 即 $DE^2 = DG \cdot DH$

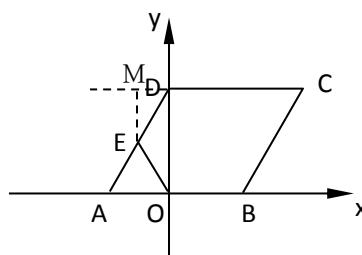
当点 H 在点 G 的右侧时，设 $DG = x$ ， $DH = x + 6$

$\therefore 4 = x(x + 6)$

解： $x_1 = -3 + \sqrt{13} + 2 = \sqrt{13} - 1$

$\therefore$ 点 F 的坐标为 $(-\sqrt{13} + 1, 0)$

当点 H 在点 G 的左侧时，设 $DG = x$ ， $DH = x - 6$



(图 3)

$$\therefore 4 = x(x - 6)$$

$$\text{解: } x_1 = 3 + \sqrt{13}, \quad x_2 = 3 - \sqrt{13} \quad (\text{舍})$$

$$\because \triangle DEG \cong \triangle AEF$$

$$\therefore AF = DG = 3 + \sqrt{13}$$

$$\because OF = AO + AF = 3 + \sqrt{13} + 2 = \sqrt{13} + 5$$

$$\therefore \text{点 F 的坐标为 } (-\sqrt{13} - 5, 0)$$

综上可知，点 F 的坐标有两个，分别是 $F_1 (-\sqrt{13} + 1, 0)$, $F_2 (-\sqrt{13} - 5, 0)$

例 11 (2010 年苏州市中考第 28 题) 刘卫同学在一次课外活动中, 用硬纸片做了两个直角三角形, 如图 1、如图 2. 图 1 中, $\angle B=90^\circ$, $\angle A=30^\circ$, $BC=6\text{cm}$; 图 2 中, $\angle D=90^\circ$, $\angle E=45^\circ$, $DE=4\text{cm}$; 图 3 是刘卫同学所做的一个实验; 他将 $\triangle DEF$ 的直角边 DE 与 $\triangle ABC$ 的斜边 AC 重合在一起, 并将 $\triangle DEF$ 沿 AC 方向移动. 在移动过程中, D 、 E 两点始终在 AC 边上 (移动开始时点 D 与点 A 重合) .

(1) 在 $\triangle DEF$ 沿 AC 方向移动的过程中, 刘卫同学发现: F 、 C 两点间的距离逐渐 . (填“不变”、“变大”、或“变小”)

(2) 刘卫同学经过进一步地研究, 编制了如下问题:

问题①: 当 $\triangle DEF$ 移动至什么位置, 即 AD 的长为多少时, F 、 C 的连线与 AB 平行?

问题②: 当 $\triangle DEF$ 移动至什么位置, 即 AD 的长为多少时, 以线段 AD 、 FC 、 BC 的长度为三边长的三角形是直角三角形?

问题③: 在 $\triangle DEF$ 移动过程中, 是否存在某个位置, 使得 $\angle FCD=15^\circ$? 如果存在, 求出 AD 的长度; 如果不存在, 请说明理由.

请你分别完成上述三个问题的解答过程.

【解答】

(1) 变小

(2) 问题①: 解: $\because \angle B=90^\circ$, $\angle A=30^\circ$, $BC=6\text{cm}$,
 $\therefore AC=12$.
 $\because \angle FDE=90^\circ$, $\angle DEF=45^\circ$, $DE=4$,
 $\therefore DF=4$.

连结 FC , 设 $FC \parallel AB$.

$\therefore \angle FCD = \angle A = 30^\circ$, 在 $Rt\triangle FDC$ 中, $DC = 4\sqrt{3}$.

$\therefore AD = AC - DC = 12 - 4\sqrt{3}$.

即 $AD = 12 - 4\sqrt{3}$ cm 时, $FC \parallel AB$

问题②: 解: 设当 $AD = x$,

在 $Rt\triangle FDC$ 中, $FC^2 = DC^2 + FD^2 = (12-x)^2 + 16$.

(I) 当 FC 为斜边时, 由 $AD^2 + BC^2 = FC^2$ 得, $x^2 + 6^2 = (12-x)^2 + 16$, $x = \frac{31}{6}$.

(II) 当 AD 为斜边时, 由 $FC^2 + BC^2 = AD^2$ 得,

$(12-x)^2 + 16 + 6^2 = x^2$, $x = \frac{49}{6} > 8$ (不符合题意, 舍去).

(III) 当 BC 为斜边时, 由 $AD^2 + FC^2 = BC^2$ 得,

$$x^2 + (12-x)^2 + 16 = 6^2, x^2 - 12x + 62 = 0,$$

$$\Delta = 144 - 248 < 0,$$

$\therefore$ 方程无解.

$\therefore$ 由 (I)、(II)、(III) 得, 当 $x = \frac{31}{6}$ 时, 以线段 AD 、 FC 、 BC 的长度为三边长的三角形是直角三角形.

问题③不存在这样的位置, 使得 $\angle FCD = 15^\circ$.

假设 $\angle FCD = 15^\circ$, 由 $\angle FED = 45^\circ$, 得 $\angle EFC = 30^\circ$. 作 $\angle EFC$ 的平分线, 交 AC 于 P ,

则 $\angle EFP = \angle CFP = \angle FCP = 15^\circ$,

$\therefore PF = PC, \angle DFP = \angle DFE + \angle EFP = 60^\circ$.

$\therefore PD = 4\sqrt{3}, PC = PF = 2FD = 8$.

$\therefore PC + PD = 8 + 4\sqrt{3} > 12$.

$\therefore$ 不存在这样的位置, 使得 $\angle FCD = 15^\circ$.

例 12 (2011 年北京市中考第 24 题) 在平行四边形 ABCD 中, $\angle BAD$ 的平分线交直线 BC 于点 E, 交直线 DC 于点 F.

(1) 在图 1 中, 证明 $CE=CF$;

(2) 若 $\angle ABC=90^\circ$, G 是 EF 的中点 (如图 2), 直接写出 $\angle BDG$ 的度数;

(3) 若 $\angle ABC=120^\circ$, $FG \parallel CE$, $FG=CE$, 分别连结 DB、DG (如图 3), 求 $\angle BDG$ 的度数.

【解答】

(1) 如图 1,

$\because AF$ 平分 $\angle BAD$,

$\therefore \angle BAF = \angle DAF$,

$\because$ 四边形 ABCD 是平行四边形,

$\therefore AD \parallel BC$, $AB \parallel CD$,

$\therefore \angle DAF = \angle CEF$, $\angle BAF = \angle F$,

$\therefore \angle CEF = \angle F$.

$\therefore CE = CF$.

(2) $\angle BDG = 45^\circ$

(3) 解: 分别连接 GB、GE、GC,

$\because AD \parallel BC$, $\angle ABC = 120^\circ$

$\therefore \angle ECF = \angle ABC = 120^\circ$

$\because FG \parallel CE$ 且 $FG = CE$,

$\therefore$ 四边形 CEGF 是平行四边形,

由 (1) 得 $CE = CF$.

∴ 四边形 CEGF 是菱形,

∴ $GE=EC$, ①

$$\angle GCF = \angle GCE = \frac{1}{2} \angle ECF = 60^\circ,$$

∴ $\triangle ECG$ 是等边三角形.

∴ $EG=CG$, $\angle GEC = \angle EGC$,

∴ $\angle GEC = \angle FGC$,

∴ $\angle BEG = \angle DCG$, ②

由 $AD \parallel BC$ 及 AF 平分 $\angle BAD$ 可得 $\angle BAE = \angle AEB$,

∴ $AB=BE$,

在 $\square ABCD$ 中, $AB=DC$,

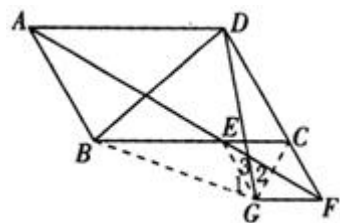
∴ $BE=DC$, ③

由①②③得 $\triangle BEG \cong \triangle DCG$,

∴ $BG=DG$, $\angle 1 = \angle 2$

∴ $\angle BGD = \angle 1 + \angle 3 = \angle 2 + \angle 3 = \angle EGC = 60^\circ$,

$$\therefore \angle BDG = \frac{180^\circ - \angle BGD}{2} = 60^\circ$$



例 13 (2011 年北京市中考第 25 题) 在平面直角坐标系中，我们把由两条射线 AE、BF 和以 AB 为直径的半圆所组成的图形叫做图形 C. 已知 A (-1,0), B (1,0), AE//BF, 且半圆与 y 轴的交点 D 在射线 AE 的反向延长线上.

- (1) 求两条射线 AE、BF 所在直线的距离；
- (2) 当一次函数 $y=x+b$ 的图像与图形 C 恰好只有一个公共点时，写出 b 的取值范围；当一次函数 $y=x+b$ 的图像与图形 C 恰好有两个公共点时，写出 b 的取值范围；
- (3) 已知平行四边形 AMPQ (四个顶点 A、M、P、Q 按顺时针方向排列) 的各项点都在图形 C 上，且不都在两条射线上，求点 M 的横坐标 x 的取值范围.

【解答】

(1) 分别连接 AD、DB，则点 D 在直线 AE 上，如图 1，

∵ 点 D 在以 AB 为直径的半圆上，

∴ $\angle ADB = 90^\circ$ ，

∴ $BD \perp AD$ ，

在 $Rt\triangle DOB$ 中，由勾股定理得， $BD = \sqrt{2}$ ，

∵ AE//BF，

∴ 两条射线 AE、BF 所在直线的距离为 $\sqrt{2}$.

(2) 当一次函数 $y=x+b$ 的图象与图形 C 恰好只有一个公共点时，b 的取值范围是 $b = \sqrt{2}$ 或 $-1 < b < 1$ ；

当一次函数 $y=x+b$ 的图象与图形 C 恰好有两个公共点时，b 的取值范围是 $1 < b < \sqrt{2}$

(3) 假设存在满足题意的平行四边形 AMPQ，根据点 M 的位置，分以下四种情况讨论：

① 当点 M 在射线 AE 上时，如图 2.

∵ AMPQ 四点按顺时针方向排列，∴ 直线 PQ 必在直线 AM 的上方，

∴ PQ 两点都在弧 AD 上，且不与点 A、D 重合，∴ $0 < PQ < \sqrt{2}$.

∵ AM//PQ 且 AM=PQ，∴ $0 < AM < \sqrt{2}$ ∴ $-2 < x < -1$ ，

② 当点 M 不在弧 AD 上时，如图 3，

∵点 A、M、P、Q 四点按顺时针方向排列，∴直线 PQ 必在直线 AM 的下方，此时，不存在满足题意的平行四边形.

③当点 M 在弧 BD 上时，设弧 DB 的中点为 R，则 $OR \parallel BF$ ，

当点 M 在弧 DR 上时，如图 4，过点 M 作 OR 的垂线交弧 DB 于点 Q，垂足为点 S，可得 S 是 MQ 的中点.

∴四边形 AMPQ 为满足题意的平行四边形，∴ $0 \leq x < \frac{\sqrt{2}}{2}$.

当点 M 在弧 RB 上时，如图 5，

直线 PQ 必在直线 AM 的下方，

此时不存在满足题意的平行四边形.

④当点 M 在射线 BF 上时，如图 6，

直线 PQ 必在直线 AM 的下方，

此时，不存在满足题意的平行四边形.

综上，点 M 的横坐标 x 的取值范围是

$-2 < x < -1$ 或 $0 \leq x < \frac{\sqrt{2}}{2}$.

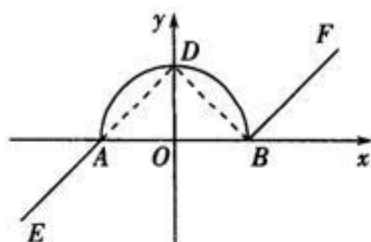


图 1

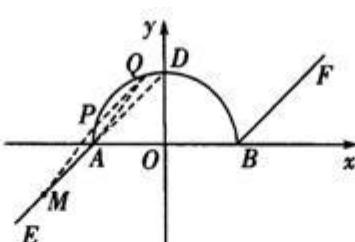


图 2

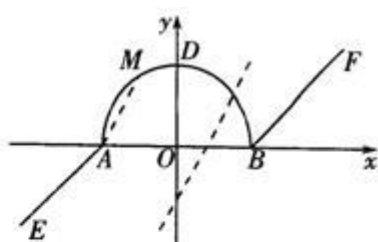


图 3

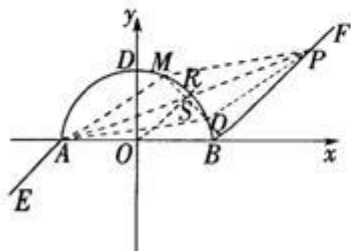


图 4

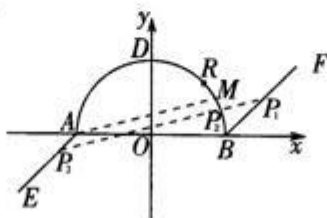


图 5

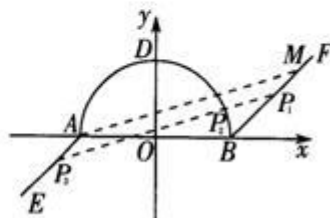


图 6

例 14 (2011 年宁波市中考第 26 题) 在平面直角坐标系 xOy 中, 点 A 的坐标为 $(-2,2)$, 点 B 的坐标为 $(6,6)$, 抛物线经过 A、O、B 三点, 连结 OA、OB、AB, 线段 AB 交 y 轴于点 E.

(1) 求点 E 的坐标;

(2) 求抛物线的函数解析式;

(3) 点 F 为线段 OB 上的一个动点 (不与点 O、B 重合), 直线 EF 与抛物线交于 M、N 两点 (点 N 在 y 轴右侧), 连结 ON、BN, 当点 F 在线段 OB 上运动时, 求 $\triangle BON$ 面积的最大值, 并求出此时点 N 的坐标;

连结 AN, 当 $\triangle BON$ 面积最大时, 在坐标平面内求使得 $\triangle BOP$ 与 $\triangle OAN$ 相似 (点 B、O、P 分别与点 O、A、N 对应) 的点 P 的坐标.

【解答】

(1) 设 $y = mx + n$

将点 $A(-2,2), B(6,6)$ 代入得

$$\begin{cases} -2m + n = 2 \\ 6m + n = 6 \end{cases}$$

$$\text{得 } m = \frac{1}{2}, n = 3$$

$$\therefore y = \frac{1}{2}x + 3$$

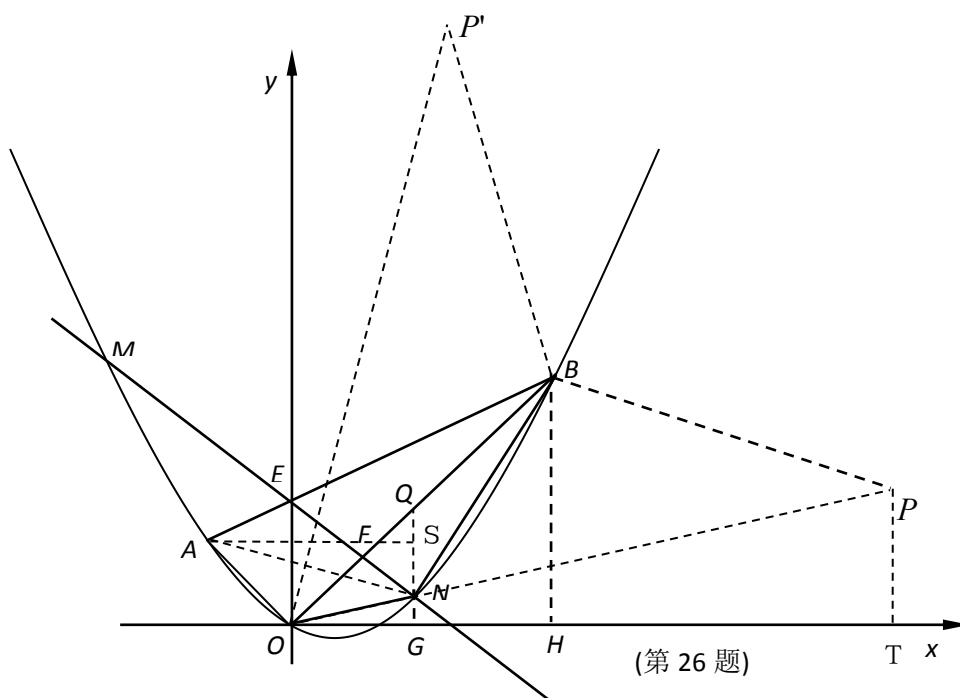
$$\text{当 } x = 0 \text{ 时, } y = 3. \quad \therefore E(0,3)$$

(2) 设抛物线的函数解析式为 $y = ax^2 + bx$,

$$\text{将 } A(-2,2), B(6,6) \text{ 代入得 } \begin{cases} 4a - 2b = 2 \\ 36a + 6b = 6 \end{cases} \quad \text{解得 } a = \frac{1}{4}, b = -\frac{1}{2}$$

$$\therefore \text{抛物线的解析式为 } y = \frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{2}x.$$

(3)



过点 N 作 x 轴的垂线 NG ，垂足为 G ，交 OB 于点 Q ，过 B 作 $BH \perp x$ 轴于 H ，
 设 $N(x, \frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{2}x)$ ，则 $Q(x, x)$

$$\begin{aligned}
 \text{则 } S_{\triangle BON} &= S_{\triangle QON} + S_{\triangle BQN} \\
 &= \frac{1}{2} \times QN \times OG + \frac{1}{2} \times QN \times GH \\
 &= \frac{1}{2} \times QN \times (OG + GH) \\
 &= \frac{1}{2} \times QN \times OH \\
 &= \frac{1}{2} \left[x - \left(\frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{2}x \right) \right] \times 6 \\
 &= -\frac{3}{4}x^2 + \frac{9}{2}x = -\frac{3}{4}(x-3)^2 + \frac{27}{4} \quad (0 < x < 6)
 \end{aligned}$$

$\therefore$ 当 $x=3$ 时， $\triangle BON$ 面积最大，最大值为 $\frac{27}{4}$ ，

此时点 N 的坐标为 $(3, \frac{3}{4})$ 。

(4) 解：过点 A 作 $AS \perp GQ$ 于 S

$$\because A(-2, 2), B(6, 6), N(3, \frac{3}{4})$$

$$\therefore \angle AOE = \angle OAS = \angle BOH = 45^\circ, \quad OG=3, \quad NG=\frac{3}{4}, \quad NS=\frac{5}{4}, \quad AS=5$$

在 $\text{Rt}\triangle SAN$ 和 $\text{Rt}\triangle NOG$ 中

$$\therefore \tan \angle SAN = \tan \angle NOG = \frac{1}{4}$$

$$\therefore \angle SAN = \angle NOG$$

$$\therefore \angle OAS - \angle SAN = \angle BOG - \angle NOG$$

$$\therefore \angle OAN = \angle BON$$

$\therefore ON$ 的延长线上存在一点 P , 使 $\triangle BOP \sim \triangle OAN$

$$\because A(-2, 2), N(3, \frac{3}{4})$$

$$\text{在 } \text{Rt}\triangle ASN \text{ 中, } AN = \sqrt{AS^2 + SN^2} = \frac{5\sqrt{17}}{4}$$

当 $\triangle BOP \sim \triangle OAN$ 时

$$\frac{OB}{OA} = \frac{OP}{AN} \quad \frac{6\sqrt{2}}{2\sqrt{2}} = \frac{OP}{\frac{5\sqrt{17}}{4}} \quad \text{得 } OP = \frac{15\sqrt{17}}{4}$$

过点 P 作 $PT \perp x$ 轴于点 T

$$\therefore \triangle OPT \sim \triangle ONG \quad \therefore \frac{PT}{OT} = \frac{NG}{OG} = \frac{1}{4}$$

$$\text{设 } P(4t, t) \quad \therefore (4t)^2 + t^2 = (\frac{15\sqrt{17}}{4})^2 \quad t_1 = \frac{15}{4}, t_2 = -\frac{15}{4} \quad (\text{舍})$$

$$\therefore \text{点 } P \text{ 的坐标为 } (15, \frac{15}{4})$$

将 $\triangle OPT$ 沿直线 OB 翻折, 可得出另一个满足条件的点 $P'(\frac{15}{4}, 15)$

由以上推理可知, 当点 P 的坐标为 $(15, \frac{15}{4})$ 或 $(\frac{15}{4}, 15)$ 时, $\triangle BOP$ 与 $\triangle OAN$ 相似.

例 15 (2011 年陕西省中考第 25 题) 如图 1, 在矩形 ABCD 中, 将矩形折叠, 使点 B 落在边 AD (含端点) 上, 落点记为 E, 这时折痕与边 BC 或边 CD (含端点) 交于点 F. 然后再展开铺平, 则以 B、E、F 为顶点的 $\triangle BEF$ 称为矩形 ABCD 的“折痕三角形”.

(1) 由“折痕三角形”的定义可知, 矩形 ABCD 的任意一个“折痕 $\triangle BEF$ ”一定是一个 三角形;

(2) 如图 2, 在矩形 ABCD 中, $AB=2$, $BC=4$. 当它的“折痕 $\triangle BEF$ ”的顶点 E 位于边 AD 的中点时, 画出这个“折痕 $\triangle BEF$ ”, 并求出点 F 的坐标;

(3) 如图 3, 在矩形 ABCD 中, $AB=2$, $BC=4$. 该矩形是否存在面积最大的“折痕 $\triangle BEF$ ”? 若存在, 说明理由, 并求出此时点 E 的坐标; 若不存在, 为什么?

【解答】

(1) 等腰.

(2) 如图①, 连接 BE, 画 BE 的中垂线交 BC 与点 F, 连接 EF, $\triangle BEF$ 是矩形 ABCD 的一个折痕三角形.

$\because$ 折痕垂直平分 BE, $AB=AE=2$,

$\therefore$ 点 A 在 BE 的中垂线上, 即折痕经过点 A.

$\therefore$ 四边形 ABFE 为正方形.

$\therefore BF=AB=2$,

$\therefore F(2, 0)$.

(3) 矩形 ABCD 存在面积最大的折痕三角形 BEF, 其面积为 4,

理由如下: ①当 F 在边 BC 上时, 如图②所示.

$S_{\triangle BEF} \leq \frac{1}{2} S_{\text{矩形} ABCD}$, 即当 F 与 C 重合时, 面积最大为 4.

②当 F 在边 CD 上时, 如图③所示,

过 F 作 FH//BC 交 AB 于点 H, 交 BE 于 K.

$$\because S_{\triangle EKF} = \frac{1}{2} KF \cdot AH \leq \frac{1}{2} HF \cdot AH = \frac{1}{2} S_{\text{矩形} AHFD},$$

$$S_{\triangle BKF} = \frac{1}{2} KF \cdot BH \leq \frac{1}{2} HF \cdot BH = \frac{1}{2} S_{\text{矩形} BCFH},$$

$$\therefore S_{\triangle BEF} \leq \frac{1}{2} S_{\text{矩形} ABCD} = 4.$$

即当 F 为 CD 中点时, $\triangle BEF$ 面积最大为 4.

下面求面积最大时, 点 E 的坐标.

①当 F 与点 C 重合时, 如图④所示.

由折叠可知 $CE = CB = 4$,

$$\text{在 Rt}\triangle CDE \text{ 中, } ED = \sqrt{CD^2 - CE^2} = \sqrt{4^2 - 2^2} = 2\sqrt{3}.$$

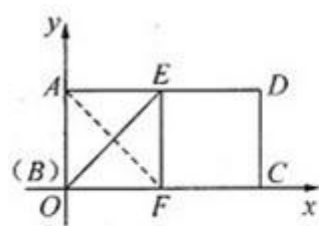
$$\therefore AE = 4 - 2\sqrt{3}.$$

$$\therefore E(4 - 2\sqrt{3}, 2).$$

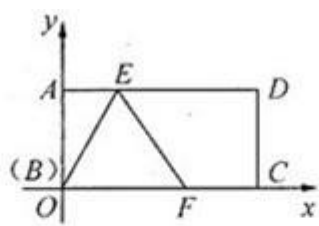
②当 F 在边 DC 的中点时, 点 E 与点 A 重合, 如图⑤所示.

此时 E(0, 2).

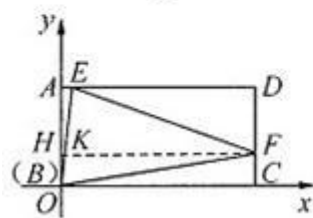
综上所述, 折痕 $\triangle BEF$ 的最大面积为 4 时, 点 E 的坐标为 E(0, 2) 或 E($4 - 2\sqrt{3}$, 2).



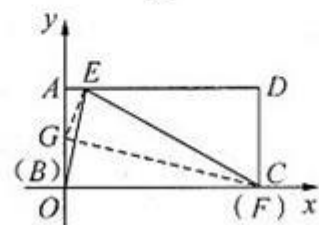
①



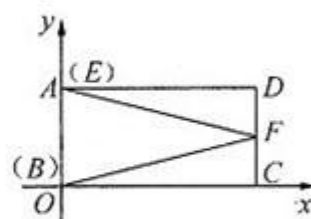
②



③



④



⑤

例 16 (2011 年扬州市中考第 28 题) 在 $\triangle ABC$ 中, $\angle BAC=90^\circ$, $AB<AC$, M 是 BC 边的中点, $MN \perp BC$ 交 AC 于点 N . 动点 P 从点 B 出发沿射线 BA 以每秒 $3^{1/2}$ 厘米的速度运动. 同时动点 Q 从点 N 出发沿射线 NC 运动, 且始终保持 $MQ \perp MP$. 设运动时间为 t 秒 ($t>0$).

(1) $\triangle PBM$ 与 $\triangle QNM$ 相似吗? 以图 1 为例说明理由;

(2) 若 $\angle ABC=60^\circ$, $AB=4 \times 3^{1/2}$ 厘米

①求动点 Q 的运动速度;

②设 $\triangle APQ$ 的面积为 S (平方厘米), 求 S 与 t 的函数关系式;

(3) 探求 BP^2 、 PQ^2 、 CQ^2 三者之间的数量关系, 以图 1 为例说明理由.

【解答】

(1) $\triangle PBM \sim \triangle QNM$. 理由如下: 如图 1,
 $\because MQ \perp MP, MN \perp BC, \therefore \angle PMB + \angle PMN = 90^\circ, \angle QMN + \angle PMN = 90^\circ,$
 $\therefore \angle PMB = \angle QMN$.
 $\because \angle PBM + \angle C = 90^\circ, \angle QNM + \angle C = 90^\circ, \therefore \angle PBM = \angle QNM$.
 $\therefore \triangle PBM \sim \triangle QNM$.
 (2) $\because \angle BAC = 90^\circ, \angle ABC = 60^\circ, \therefore BC = 2AB = 8\sqrt{3}$ cm.
 又 $\because MN$ 垂直平分 $BC, \therefore BM = CM = 4\sqrt{3}$ cm.
 $\because \angle C = 30^\circ, \therefore MN = \frac{\sqrt{3}}{3}CM = 4$ cm.

①设 Q 点的运动速度为 v cm/s.

如图 1, 当 $0 < t < 4$ 时, 由 (1) 知 $\triangle PBM \sim \triangle QNM$.

$$\therefore \frac{NQ}{BP} = \frac{MN}{MB}, \text{ 即 } \frac{vt}{\sqrt{3}t} = \frac{4}{4\sqrt{3}}, \therefore v = 1.$$

如图 2, 易知当 $t \geq 4$ 时, $v = 1$.

综上所述, Q 点运动速度为 1 cm/s.

② $\because AN = AC - NC = 12 - 8 = 4$ cm,

$\therefore$ 如图 1, 当 $0 < t < 4$ 时, $AP = 4\sqrt{3} - \sqrt{3}t, AQ = 4 + t$.

$$\therefore S = \frac{1}{2} AP \cdot AQ = \frac{1}{2} (4\sqrt{3} - \sqrt{3}t)(4+t) = -\frac{\sqrt{3}}{2}t^2 + 8\sqrt{3}.$$

如图 2, 当 $t \geq 4$ 时, $AP = \sqrt{3}t - 4\sqrt{3}$, $AQ = 4+t$,

$$\therefore S = \frac{1}{2} AP \cdot AQ = \frac{1}{2} (\sqrt{3}t - 4\sqrt{3})(4+t) = \frac{\sqrt{3}}{2}t^2 - 8\sqrt{3}.$$

综上所述,
$$S = \begin{cases} -\frac{\sqrt{3}}{2}t^2 + 8\sqrt{3} & (0 < t < 4) \\ \frac{\sqrt{3}}{2}t^2 - 8\sqrt{3} & (t \geq 4) \end{cases}$$

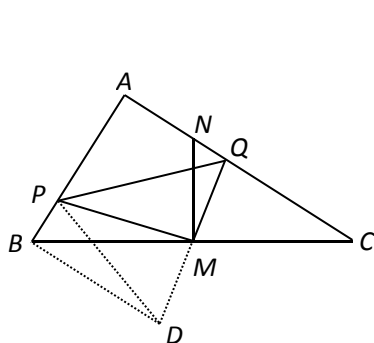


图 1

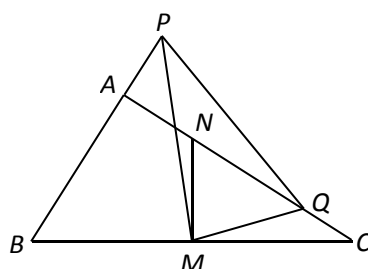


图 2(备用图)

() $PQ^2 = BP^2 + CQ^2$

理由如下:

如图, 延长 QM 至 D , 使 $MD = MQ$, 连结 BD 、 PD

$\because BC$ 、 DQ 互相平分, $\therefore$ 四边形 $BDCQ$ 是平行四边形, $\therefore BD \parallel CQ$.

$\because \angle BAC = 90^\circ$, $\therefore \angle PBD = 90^\circ$, $\therefore PD^2 = BP^2 + BD^2 = BP^2 + CQ^2$.

$\because PM$ 垂直平分 DQ , $\therefore PQ = PD$. $\therefore PQ^2 = BP^2 + CQ^2$

例 17 (2011 年浙江省中考第 24 题) 如图, 在直角坐标系中, 抛物线 $y=ax^2+bx+c$ ($a \neq 0$) 与 x 轴交于 $A(-1,0)$ 、 $B(3,0)$ 两点, 抛物线交 y 轴于点 $C(0,3)$, 点 D 为抛物线的顶点. 直线 $y=x-1$ 交抛物线于 M 、 N 两点, 过线段 MN 上一点 P 做 y 轴的平行线交抛物线于点 Q .

- (1) 求此抛物线的解析式及顶点 D 的坐标;
- (2) 问点 P 在何处时, 线段 PQ 最长, 最长为多少?
- (3) 设 E 为线段 OC 上三等分点, 连结 EP 、 EQ , 若 $EP=EQ$, 求点 P 的坐标.

【解答】

(1) 由题意, 抛物线交 y 轴于点 $C(0,3)$, 故设抛物线的解析式为 $y=ax^2+bx+3$,

把 $A(-1,0)$ 、 $B(3,0)$ 代入, 得:

$$\begin{cases} a-b+3=0 \\ 9a+3b+3=0 \end{cases}, \text{解得} \begin{cases} a=-1 \\ b=2 \end{cases}.$$

$\therefore$ 抛物线的解析式为 $y=-x^2+2x+3=-(x-1)^2+4$ 。

$\therefore$ 抛物线的顶点坐标为 $(1, 4)$ 。

(2) 由题意, 得 $P(x, x-1)$, $Q(x, -x^2+2x+3)$,

$$\therefore \text{线段 } PQ = -x^2+2x+3-(x-1) = -x^2+x+4 = -\left(x-\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{17}{4}.$$

$\therefore$ 当 $x=\frac{1}{2}$ 时, 线段 PQ 最长为 $\frac{17}{4}$ 。

(3) $\because E$ 为线段 OC 上的三等分点, $OC=3$, $\therefore E(0, 1)$, 或 $E(0, 2)$ 。

$$\because EP=EQ, PQ \text{ 与 } y \text{ 轴平行}, \therefore 2 \cdot OE = -x^2+2x+3+(x-1)$$

当 $OE=1$ 时, $x_1=0$, $x_2=3$, 点 P 坐标为 $(0, -1)$ 或 $(3, 2)$ 。

当 $OE=2$ 时, $x_1=1$, $x_2=2$, 点 P 坐标为 $(1, 0)$ 或 $(2, 1)$ 。

综上所述, 点 P 的坐标为 $(0, -1)$ 或 $(3, 2)$ 或 $(1, 0)$ 或 $(2, 1)$ 。

例 18 (2012 年上海市中考第 24 题) 如图 1, 在平面直角坐标系中, 二次函数 $y=ax^2+6x+c$ 的图象经过点 $A(4, 0)$ 、 $B(-1, 0)$, 与 y 轴交于点 C , 点 D 在线段 OC 上, $OD=t$, 点 E 在第二象限, $\angle ADE=90^\circ$, $\tan \angle DAE=1/2$, $EF \perp OD$, 垂足为 F .

- (1) 求这个二次函数的解析式;
- (2) 求线段 EF 、 OF 的长 (用含 t 的代数式表示);
- (3) 当 $\angle ECA=\angle OAC$ 时, 求 t 的值.

【解答】

【解答】

(1) 二次函数 $y=ax^2+6x+c$ 的图象经过点 $A(4, 0)$ 、 $B(-1, 0)$,

$$\therefore \begin{cases} 16a+24+c=0 \\ a-6+c=0 \end{cases}, \text{ 解得 } \begin{cases} a=-2 \\ c=8 \end{cases}.$$

$\therefore$ 这个二次函数的解析式为: $y=-2x^2+6x+8$.

(2) $\because \angle EFD=\angle EDA=90^\circ, \therefore \angle DEF+\angle EDF=90^\circ, \angle EDF+\angle ODA=90^\circ. \therefore \angle DEF=\angle ODA$.

$$\therefore \triangle EDF \sim \triangle DAO. \therefore \frac{EF}{DO} = \frac{ED}{DA}.$$

$$\because \frac{ED}{DA} = \tan \angle DAE = \frac{1}{2}, \therefore \frac{EF}{DO} = \frac{1}{2}.$$

$$\because OD=t, \therefore \frac{EF}{t} = \frac{1}{2}, \therefore EF = \frac{1}{2}t.$$

$$\text{同理 } \frac{DF}{OA} = \frac{ED}{DA}, \therefore DF=2, \therefore OF=t-2.$$

(3) $\because$ 抛物线的解析式为: $y=-2x^2+6x+8, \therefore C(0, 8), OC=8$.

如图, 连接 EC 、 AC , 过 A 作 EC 的垂线交 CE 于 G 点.

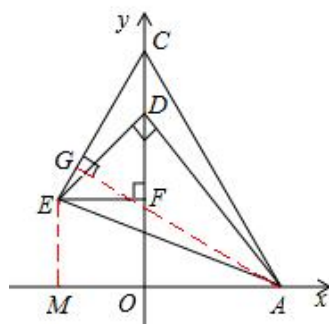
$\because \angle ECA=\angle OAC, \therefore \angle OAC=\angle GCA$ (等角的余角相等).

在 $\triangle CAG$ 与 $\triangle OCA$ 中,

$\because \angle OAC=\angle GCA, AC=CA, \angle ECA=\angle OAC,$

$\therefore \triangle CAG \cong \triangle OCA$ (ASA). $\therefore CG=AO=4, AG=OC=8$.

如图, 过 E 点作 $EM \perp x$ 轴于点 M ,



则在 $Rt\triangle AEM$ 中, $EM=OF=t-2$, $AM=OA+AM=OA+EF=4+\frac{1}{2}t$,

由勾股定理得: $AE^2 = AM^2 + EM^2 = \left(4+\frac{1}{2}t\right)^2 + (t-2)^2$ 。

在 $Rt\triangle AEG$ 中, 由勾股定理得: $EG=\sqrt{AE^2-AD^2}=\sqrt{\left(4+\frac{1}{2}t\right)^2+(t-2)^2-8^2}=\sqrt{\frac{5}{4}t^2-44}$ 。

在 $Rt\triangle ECF$ 中, $EF=\frac{1}{2}t$, $CF=OC-OF=10-t$, $CE=CG+EG=4+\sqrt{\frac{5}{4}t^2-44}$

由勾股定理得: $EF^2+CF^2=CE^2$, 即 $\left(\frac{1}{2}t\right)^2+(10-t)^2=\left(4+\sqrt{\frac{5}{4}t^2-44}\right)^2$ 。

解得 $t_1=10$ (不合题意, 舍去), $t_2=6$ 。 $\therefore t=6$ 。

例 19 (2012 年温州市中考第 24 题) 如图 1, 经过原点的抛物线 $y=-x^2+2mx$ ($m>0$) 与 x 轴的另一个交点为 A . 过点 $P(1, m)$ 作直线 $PM \perp x$ 轴于点 M , 交抛物线于点 B . 记点 B 关于抛物线对称轴的对称点为 C (B, C 不重合). 连接 CB, CP .

- (1) 当 $m=3$ 时, 求点 A 的坐标及 BC 的长;
- (2) 当 $m>1$ 时, 连接 CA , 问 m 为何值时 $CA \perp CP$?
- (3) 过点 P 作 $PE \perp PC$ 且 $PE=PC$, 问是否存在 m , 使得点 E 落在坐标轴上? 若存在, 求出所有满足要求的 m 的值, 并定出相对应的点 E 坐标; 若不存在, 请说明理由.

【解答】

(1) 当 $m=3$ 时, $y=-x^2+6x$.

令 $y=0$ 得 $-x^2+6x=0$, 解得, $x_1=0, x_2=6$. $\therefore A(6, 0)$.

当 $x=1$ 时, $y=5$. $\therefore B(1, 5)$.

$\because$ 抛物线 $y=-x^2+6x$ 的对称轴为直线 $x=3$, 且 B, C 关于对称轴对称,

$\therefore BC=4$.

(2) 过点 C 作 $CH \perp x$ 轴于点 H (如图 1)

由已知得, $\angle ACP = \angle BCH = 90^\circ$, $\therefore \angle ACH = \angle PCB$.

又 $\because \angle AHC = \angle PBC = 90^\circ$, $\therefore \triangle AGH \sim \triangle PCB$.

$$\therefore \frac{AH}{CH} = \frac{PB}{BC}.$$

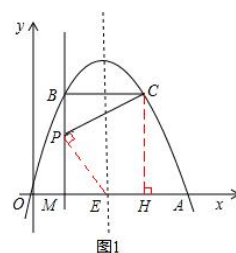
$\because$ 抛物线 $y=-x^2+2mx$ 的对称轴为直线 $x=m$, 其中 $m>1$, 且 B, C 关于对称轴对称,

$$\therefore BC=2(m-1).$$

$$\because B(1, 2m-1), P(1, m), \therefore BP=m-1.$$

$$\text{又} \because A(2m, 0), C(2m-1, 2m-1), \therefore H(2m-1, 0).$$

$$\therefore AH=1, CH=2m-1,$$



$$\therefore \frac{1}{2m-1} = \frac{m-1}{2(m-1)}, \text{ 解得 } m = \frac{3}{2}.$$

(3) 存在。 $\because B, C$ 不重合, $\therefore m \neq 1$ 。

(I) 当 $m > 1$ 时, $BC = 2(m-1)$, $PM = m$,

$$BP = m - 1,$$

(i) 若点 E 在 x 轴上 (如图 1),

$$\because \angle CPE = 90^\circ$$

$$\therefore \angle MPE + \angle BPC = \angle MPE + \angle MEP = 90^\circ, PC = EP.$$

$$\therefore \triangle BPC \cong \triangle MEP, \therefore BC = PM, \text{ 即 } 2(m-1) = m, \text{ 解得 } m = 2.$$

此时点 E 的坐标是 $(2, 0)$ 。

(ii) 若点 E 在 y 轴上 (如图 2), 过点 P 作 $PN \perp y$ 轴于点 N ,

易证 $\triangle BPC \cong \triangle NPE$,

$$\therefore BP = NP = OM = 1, \text{ 即 } m - 1 = 1, \text{ 解得 } m = 2.$$

此时点 E 的坐标是 $(0, 4)$ 。

(II) 当 $0 < m < 1$ 时, $BC = 2(1-m)$, $PM = m$,

$$BP = 1 - m,$$

(i) 若点 E 在 x 轴上 (如图 3),

易证 $\triangle BPC \cong \triangle MEP$,

$$\therefore BC = PM, \text{ 即 } 2(1-m) = m, \text{ 解得 } m = \frac{2}{3}.$$

此时点 E 的坐标是 $(\frac{4}{3}, 0)$ 。

(ii) 若点 E 在 y 轴上 (如图 4),

过点 P 作 $PN \perp y$ 轴于点 N , 易证 $\triangle BPC \cong \triangle NPE$,

$$\therefore BP = NP = OM = 1, \text{ 即 } 1 - m = 1, \therefore m = 0 \text{ (舍去)}.$$

综上所述, 当 $m = 2$ 时, 点 E 的坐标是 $(0, 2)$ 或 $(0, 4)$,

当 $m = \frac{2}{3}$ 时, 点 E 的坐标是 $(\frac{4}{3}, 0)$ 。

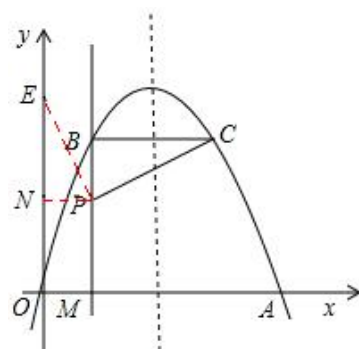


图2

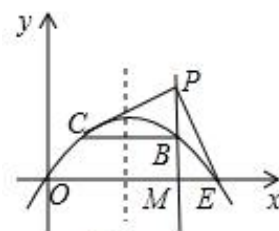


图3

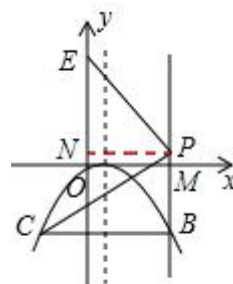


图4

例 20 (2012 年南通市中考第 28 题) 如图 1, 经过点 A (0, -4) 的抛物线 $y = \frac{1}{2}x^2 + bx + c$ 与 x 轴相交于点 B (-2, 0) 和 C 两点, O 为坐标原点.

(1) 求抛物线的解析式;

(2) 将抛物线 $y = \frac{1}{2}x^2 + bx + c$ 向上平移 $\frac{7}{2}$ 个单位长度, 再向左平移 m ($m > 0$) 个单位长度, 得到新抛物线. 若新抛物线的顶点 P 在 $\triangle ABC$ 内, 求 m 的取值范围;

(3) 设点 M 在 y 轴上, $\angle OMB + \angle OAB = \angle ACB$, 求 AM 的长.

【解答】

(1) 将 A (0, -4)、B (-2, 0) 代入抛物线 $y = \frac{1}{2}x^2 + bx + c$ 中, 得:

$$\begin{cases} 0 + c = -4 \\ 2 - 2b + c = 0 \end{cases}, \text{解得, } \begin{cases} b = -1 \\ c = -4 \end{cases}.$$

$\therefore$ 抛物线的解析式: $y = \frac{1}{2}x^2 - x - 4$.

(2) 由题意, 新抛物线的解析式可表示为: $y = \frac{1}{2}(x+m)^2 - (x+m) - 4 + \frac{7}{2}$,

即: $y = \frac{1}{2}x^2 + (m-1)x + \frac{1}{2}m^2 - m - \frac{1}{2}$. 它的顶点坐标 P ($1-m$, -1).

由 (1) 的抛物线解析式可得: C (4, 0).

$\therefore$ 直线 AB: $y = -2x - 4$; 直线 AC: $y = x - 4$.

当点 P 在直线 AB 上时, $-2(1-m) - 4 = -1$, 解得: $m = \frac{5}{2}$;

当点 P 在直线 AC 上时, $(1-m) - 4 = -1$, 解得: $m = -2$;

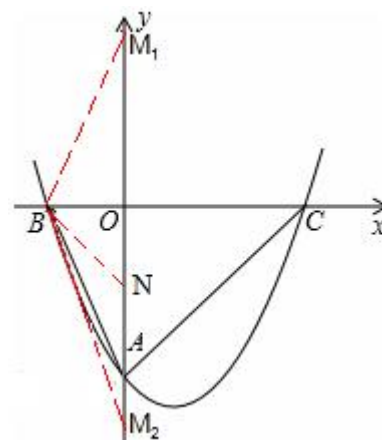
又 $\because m > 0$, $\therefore$ 当点 P 在 $\triangle ABC$ 内时, $0 < m < \frac{5}{2}$.

(3) 由 A (0, -4)、B (4, 0) 得: $OA = OC = 4$, 且 $\triangle OAC$ 是等腰直角三角形.

如图, 在 OA 上取 $ON = OB = 2$, 则 $\angle ONB = \angle ACB = 45^\circ$.

$\therefore \angle ONB = \angle NBA + \angle OAB = \angle ACB = \angle OMB + \angle OAB$,

即 $\angle ONB = \angle OMB$.



如图，在 $\triangle ABN$ 、 $\triangle AM_1B$ 中，

$$\angle BAN = \angle M_1AB, \quad \angle ABN = \angle AM_1B,$$

$$\therefore \triangle ABN \sim \triangle AM_1B, \text{ 得: } AB^2 = AN \cdot AM_1;$$

$$\text{由勾股定理, 得 } AB^2 = (-2)^2 + 4^2 = 20,$$

$$\text{又 } AN = OA - ON = 4 - 2 = 2,$$

$$\therefore AM_1 = 20 \div 2 = 10, \quad OM_1 = AM_1 - OA = 10 - 4 = 6。$$

$$\text{而 } \angle BM_1A = \angle BM_2A = \angle ABN, \quad \therefore OM_1 = OM_2 = 6, \quad AM_2 = OM_2 - OA = 6 - 4 = 2。$$

综上， AM 的长为 6 或 2。

例 21 (2012 年陕西省中考第 25 题) 正三角形 ABC 的边长为 $3+\sqrt{3}$.

如图 1, 正方形 EFPN 的顶点 E、F 在边 AB 上, 顶点 N 在边 AC 上. 在正三角形 ABC 及其内部, 以 A 为位似中心, 作正方形 EFPN 的位似正方形 E'F'P'N', 且使正方形 E'F'P'N' 的面积最大 (不要求写作法);

(1) 求 (1) 中作出的正方形 E'F'P'N' 的边长;

(2) 如图 2, 在正三角形 ABC 中放入正方形 DEMN 和正方形 EFPH, 使得 DE、EF 在边 AB 上, 点 P、N 分别在边 CB、CA 上, 求这两个正方形面积的最大值及最小值, 并说明理由.

【解答】

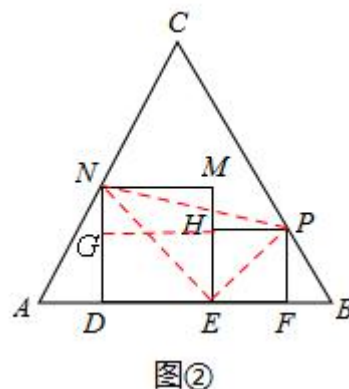
(1) 如图①, 正方形 E'F'P'N' 即为所求.

(2) 设正方形 E'F'P'N' 的边长为 x .

$$\because \triangle ABC \text{ 为正三角形}, \therefore AE'=BF'=\frac{\sqrt{3}}{3}x.$$

$$\therefore x+\frac{2\sqrt{3}}{3}x=3+\sqrt{3} \quad \therefore x=\frac{9+3\sqrt{3}}{2\sqrt{3}+3}, \quad \text{即}$$

$$x=3\sqrt{3}-3.$$



(3) 如图②, 连接 NE, EP, PN, 则 $\angle NEP=90^\circ$.

设正方形 DEMN 和正方形 EFPH 的边长分别为 m 、 n ($m \geq n$),

它们的面积和为 S , 则 $NE=\sqrt{2}m$, $PE=\sqrt{2}n$.

$$\therefore PN^2=NE^2+PE^2=2m^2+2n^2=2(m^2+n^2).$$

$$\therefore S=m^2+n^2=\frac{1}{2}PN^2.$$

延长 PH 交 ND 于点 G, 则 $PG \perp ND$.

在 $\text{Rt}\triangle \text{PGN}$ 中, $\text{PN}^2 = \text{PG}^2 + \text{GN}^2 = (m+n)^2 + (m-n)^2$ 。

$$\therefore \frac{\sqrt{3}}{3}m + m + n + \frac{\sqrt{3}}{3}n = \sqrt{3} + 3, \text{ 即 } m+n=3.$$

$$\therefore S = \frac{9}{2} + (m-n)^2.$$

①当 $(m-n)^2 = 0$ 时, 即 $m = n$ 时, S 最小。

$$\therefore S_{\text{最小}} = \frac{1}{2} \times 3^2 = \frac{9}{2}.$$

②当 $(m-n)^2$ 最大时, S 最大, 即当 m 最大且 n 最小时, S 最大。

$$\therefore m+n=3, \text{ 由 (2) 知, } m_{\text{最大}} = 3\sqrt{3} - 3.$$

$$\therefore n_{\text{最小}} = m_{\text{最大}} = 3 - (3\sqrt{3} - 3) = 6 - 3\sqrt{3}.$$

$$\therefore S_{\text{最大}} = \frac{1}{2} \left[9 + (m_{\text{最大}} - n_{\text{最小}})^2 \right] = \frac{1}{2} \left[9 + (3\sqrt{3} - 3 - 6 + 3\sqrt{3})^2 \right] = 99 - 54\sqrt{3}.$$

例 22 (2012 年绍兴市中考第 25 题) 如图 1, 矩形 OABC 的两边在坐标轴上, 连接 AC, 抛物线 $y=x^2-4x-2$ 经过 A, B 两点.

(1) 求 A 点坐标及线段 AB 的长;

(2) 若点 P 由点 A 出发以每秒 1 个单位的速度沿 AB 边向点 B 移动, 1 秒后点 Q 也由点 A 出发以每秒 7 个单位的速度沿 AO、OC、CB 边向点 B 移动, 当其中一个点到达终点时另一个点也停止移动, 点 P 的移动时间为 t 秒.

①当 $PQ \perp AC$ 时, 求 t 的值;

②当 $PQ \parallel AC$ 时, 对于抛物线对称轴上一点 H, $\angle HOQ > \angle POQ$, 求点 H 的纵坐标的取值范围.

【解答】

(1) 由抛物线 $y = x^2 - 4x - 2$ 知: 当 $x=0$ 时, $y=-2$, $\therefore A(0, -2)$.

$\because$ 四边形 OABC 是矩形, $\therefore AB \parallel x$ 轴, 即 A、B 的纵坐标相同.

当 $y=-2$ 时, $-2 = x^2 - 4x - 2$, 解得 $x_1 = 0$, $x_2 = 4$.

$\therefore B(4, -2)$, $\therefore AB=4$.

(2) ①由题意知: A 点移动路程为 $AP=t$, Q 点移动路程为 $7(t-1)$
 $=7t-7$.

当 Q 点在 OA 上时, 即 $0 \leq 7t-7 < 2$, $1 \leq t < \frac{9}{7}$ 时,

如图 1, 若 $PQ \perp AC$, 则有 $Rt\triangle QAP \sim Rt\triangle ABC$.

$\therefore \frac{QA}{AB} = \frac{AP}{BC}$, 即 $\frac{7t-7}{4} = \frac{t}{2}$, 解得 $t = \frac{7}{5}$.

$\because \frac{7}{5} > \frac{9}{7}$, $\therefore$ 此时 t 值不合题意.

当 Q 点在 OC 上时, 即 $2 \leq 7t-7 < 6$, $\frac{9}{7} \leq t < \frac{13}{7}$ 时,

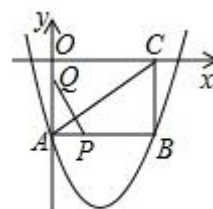


图1

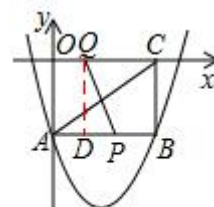


图2

如图 2, 过 Q 点作 $QD \perp AB$ 。 $\therefore AD = OQ = 7(t-1) - 2 = 7t - 9$ 。

$$\therefore DP = t - (7t - 9) = 9 - 6t。$$

若 $PQ \perp AC$, 则有 $Rt\triangle QDP \sim Rt\triangle ABC$,

$$\therefore \frac{QA}{AB} = \frac{DP}{BC}, \text{ 即 } \frac{2}{4} = \frac{9-6t}{4}, \text{ 解得 } t = \frac{4}{3}。$$

$$\therefore \frac{9}{7} < \frac{4}{3} < \frac{13}{7}, \therefore t = \frac{4}{3} \text{ 符合题意。}$$

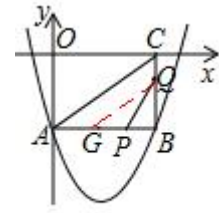


图3

当 Q 点在 BC 上时, 即 $6 \leq 7t - 7 \leq 8$, $\frac{13}{7} \leq t \leq \frac{15}{7}$ 时,

如图 3, 若 $PQ \perp AC$, 过 Q 点作 $QG \parallel AC$,

则 $QG \perp PG$, 即 $\angle GQP = 90^\circ$ 。

$\therefore \angle QPB > 90^\circ$, 这与 $\triangle QPB$ 的内角和为 180° 矛盾,

此时 PQ 不与 AC 垂直。

综上所述, 当 $t = \frac{4}{3}$ 时, 有 $PQ \perp AC$ 。

②当 $PQ \parallel AC$ 时, 如图 4, $\triangle BPQ \sim \triangle BAC$, $\therefore \frac{BP}{BA} = \frac{BQ}{BC}$,

$$\therefore \frac{4-t}{4} = \frac{8-7(t-1)}{2}, \text{ 解得 } t=2。$$

即当 $t=2$ 时, $PQ \parallel AC$ 。此时 $AP=2$, $BQ=CQ=1$ 。

$$\therefore P(2, -2), Q(4, -1)。$$

抛物线对称轴的解析式为 $x=2$,

当 H_1 为对称轴与 OP 的交点时, 有 $\angle H_1OQ = \angle POQ$,

$\therefore$ 当 $y_H < -2$ 时, $\angle HOQ > \angle POQ$ 。

作 P 点关于 OQ 的对称点 P' , 连接 PP' 交 OQ 于点 M , 过 P' 作 $P'N$ 垂直于对称轴, 垂足为 N , 连接 OP' ,

在 $Rt\triangle OCQ$ 中, $\because OC=4$, $CQ=1$ 。 $\therefore OQ = \sqrt{17}$,

$$\therefore S_{\triangle OPQ} = S_{\text{四边形 } ABCD} - S_{\triangle AOP} - S_{\triangle COQ} - S_{\triangle QBP} = 3 = \frac{1}{2} OQ \times PM,$$

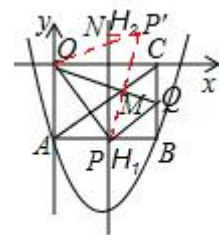


图4

$$\therefore PM = \frac{6\sqrt{17}}{17}。 \therefore PP' = 2PM = \frac{12\sqrt{17}}{17}。$$

$$\because \angle NPP' = \angle COQ。 \therefore Rt\triangle COQ \sim Rt\triangle NPP'。$$

$$\therefore \frac{CQ}{NP'} = \frac{OQ}{PP'} = \frac{OC}{PN}， \text{ 即 } \frac{1}{P'N} = \frac{\frac{\sqrt{17}}{12\sqrt{17}}}{\frac{4}{PN}}， \text{ 解得 } P'N = \frac{12}{17}， PN = \frac{48}{17}。$$

$$\therefore P' \left(\frac{46}{17}, \frac{14}{17} \right)。 \therefore \text{直线 } OP' \text{ 的解析式为 } y = \frac{7}{23}x。$$

$$\therefore OP' \text{ 与 } NP \text{ 的交点 } H_2 \left(2, \frac{14}{23} \right)。$$

$$\therefore \text{当 } y_H > \frac{14}{23} \text{ 时， } \angle HOP > \angle POQ。$$

$$\text{综上所述，当 } y_H < -2 \text{ 或 } y_H > \frac{14}{23} \text{ 时， } \angle HOQ > \angle POQ。$$

例 23 (2012 年义乌市中考第 24 题) 如图 1, 已知直线 $y=kx$ 与抛物线 $y=-\frac{4}{27}x^2+\frac{22}{3}$ 交于点 $A(3, 6)$.

(1) 求直线 $y=kx$ 的解析式和线段 OA 的长度;

(2) 点 P 为抛物线第一象限内的动点, 过点 P 作直线 PM , 交 x 轴于点 M (点 M 、 O 不重合), 交直线 OA 于点 Q , 再过点 Q 作直线 PM 的垂线, 交 y 轴于点 N . 试探究: 线段 QM 与线段 QN 的长度之比是否为定值? 如果是, 求出这个定值, 如果不是, 说明理由;

(3) 如图 2, 若点 B 为抛物线上对称轴右侧的点, 点 E 在线段 OA 上 (与点 O 、 A 不重合), 点 $D(m, 0)$ 是 x 轴正半轴上的动点, 且满足 $\angle BAE = \angle BED = \angle AOD$. 继续探究: m 在什么范围时, 符合条件的 E 点的个数分别是 1 个、2 个?

【解答】

(1) 把点 $A(3, 6)$ 代入 $y=kx$ 得; $6=3k$, 即 $k=2$ 。

$\therefore y=2x$. $\therefore OA = \sqrt{3^2+6^2} = 3\sqrt{5}$ 。

(2) 线段 QM 与线段 QN 的长度之比是一个定值, 理由如下:

如图 1, 过点 Q 作 $QG \perp y$ 轴于点 G , $QH \perp x$ 轴于点 H .

①当 QH 与 QM 重合时, 显然 QG 与 QN 重合,

此时 $\frac{QM}{QN} = \frac{QH}{QG} = \frac{QH}{OH} = \tan \angle AOM = 2$ 。

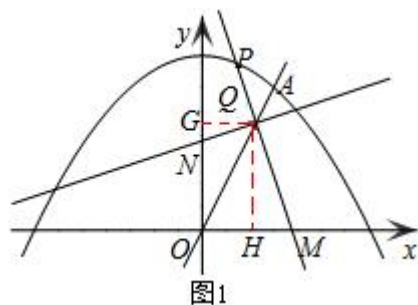
②当 QH 与 QM 不重合时,

$\because QN \perp QM$, $QG \perp QH$ 不妨设点 H , G 分别在 x 、 y 轴的正半轴上,

$\therefore \angle MQH = \angle GQN$ 。

又 $\because \angle QHM = \angle QGN = 90^\circ$, $\therefore \triangle QHM \sim \triangle QGN$. $\therefore \frac{QM}{QN} = \frac{QH}{QG} = \frac{QH}{OH} = \tan \angle AOM = 2$ 。

当点 P 、 Q 在抛物线和直线上不同位置时, 同理可得 $\frac{QM}{QN} = 2$ 。



∴ 线段 QM 与线段 QN 的长度之比是一个定值。

(3) 如图 2, 延长 AB 交 x 轴于点 F , 过点 F 作 $FC \perp OA$ 于点 C , 过点 A 作 $AR \perp x$ 轴于点 R 。

∵ $\angle AOD = \angle BAE$, ∴ $AF = OF$ 。

$$\therefore OC = AC = \frac{1}{2}OA = \frac{5}{2}\sqrt{5}。$$

∵ $\angle ARO = \angle FCO = 90^\circ$, $\angle AOR = \angle FOC$,

$$\therefore \triangle AOR \sim \triangle FOC。 \therefore \frac{OF}{OC} = \frac{AO}{OR} = \frac{3\sqrt{5}}{3} = \sqrt{5}。 \therefore OF = \frac{5}{2}\sqrt{5} \times \sqrt{5} = \frac{15}{2}。$$

∴ 点 F $(\frac{15}{2}, 0)$ 。

设点 $B(x, -\frac{4}{27}x^2 + \frac{22}{3}x)$, 过点 B 作 $BK \perp AR$ 于点 K , 则 $\triangle AKB \sim \triangle ARF$ 。

$$\therefore \frac{BK}{FR} = \frac{AK}{AR}, \text{ 即 } \frac{x-3}{7.5-3} = \frac{6 - (-\frac{4}{27}x^2 + \frac{22}{3}x)}{6}。$$

解得 $x_1 = 6$, $x_2 = 3$ (舍去)。∴ 点 $B(6, 2)$ 。

∴ $BK = 6 - 3 = 3$, $AK = 6 - 2 = 4$ 。∴ $AB = 5$ 。

在 $\triangle ABE$ 与 $\triangle OED$ 中, ∵ $\angle BAE = \angle BED$, ∴ $\angle ABE + \angle AEB = \angle DEO + \angle AEB$ 。

∴ $\angle ABE = \angle DEO$ 。

∵ $\angle BAE = \angle EOD$, ∴ $\triangle ABE \sim \triangle OED$ 。

设 $OE = x$, 则 $AE = 3\sqrt{5} - x$ ($0 < x < 3\sqrt{5}$),

由 $\triangle ABE \sim \triangle OED$ 得 $\frac{AE}{AB} = \frac{OD}{OE}$, 即 $\frac{3\sqrt{5} - x}{5} = \frac{m}{x}$ 。

$$\therefore m = \frac{1}{5}x(3\sqrt{5} - x) = -\frac{1}{5}x^2 + \frac{3\sqrt{5}}{5}x = -\frac{1}{5}\left(x - \frac{3}{2}\sqrt{5}\right)^2 + \frac{9}{4} \quad (0 < x < 3\sqrt{5})。$$

$$\therefore \text{顶点为} \left(x - \frac{3}{2}\sqrt{5}, \frac{9}{4}\right)。$$

如图 3, 当 $m = \frac{9}{4}$ 时, $OE = x = \frac{3}{2}\sqrt{5}$, 此时 E 点有 1 个;

当 $0 < m < \frac{9}{4}$ 时, 任取一个 m 的值都对应着两个 x 值, 此时 E 点有 2 个;

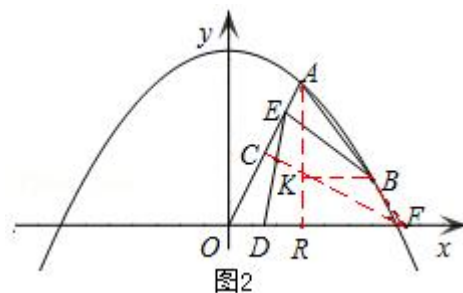


图2

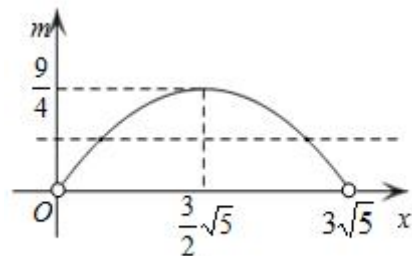


图3

例 24(2012 年抚顺市中考第 25 题)如图 1,在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中 $\angle ACB=90^\circ$, $\angle ABC=30^\circ$.

点 D 是直线 BC 上的一个动点,连接 AD ,并以 AD 为边在 AD 的右侧作等边三角形 ADE .

(1) 如图 1,当点 E 恰好在线段 BC 上时,请判断线段 DE 和 BE 的数量关系,并结合图 1 证明你的结论;

(2) 当点 E 不在直线 BC 上时,连接 BE ,其它条件不变,(1)中结论是否成立?若成立,请结合图 2 给予证明;若不成立,请直接写出新的结论;

(3) 若 $AC=3$,点 D 在直线 BC 上移动的过程中,是否存在以 A 、 C 、 D 、 E 为顶点的四边形是梯形?如果存在,直接写出线段 CD 的长度;如果不存在,请说明理由.

【解答】

$DE=BE$. 理由如下:

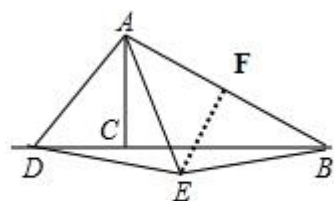
$\because \triangle ADE$ 为等边三角形, $\therefore AD=DE=AE$, $\angle AED=60^\circ$.

$\because \angle ABC=30^\circ$, $\angle AED=\angle ABC+\angle EAB$,

$\therefore \angle EAB=60^\circ-30^\circ=30^\circ$, $\therefore \angle ABC=\angle EAB$,

$\therefore EB=AE$, $\therefore EB=DE$;

(2) 如图,



图②

过点 E 作 $EF \perp AB$ ，垂足为 F，

在 $\triangle ABC$ 中， $\angle ABC = 30^\circ$ ，

$\therefore \angle CAB = 60^\circ$ ， $\therefore \angle DAE = \angle CAB$ ，

$\therefore \angle DAE - \angle CAE = \angle BAC - \angle CAE$ ，

则 $\angle CAD = \angle EAF$ 。

又 $\because AD = AE$ ， $\angle ACD = \angle AFE$ ，

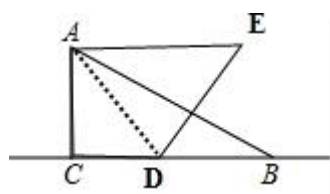
$\therefore \triangle ADC \cong \triangle AEF$ ， $\therefore AC = AF$ 。

在 $\triangle ABC$ 中， $\angle ABC = 30^\circ$ ，

$\therefore AC = \frac{1}{2} AB$ ，

$\therefore AF = BF$ ， $\therefore EA = EB$ ， $\therefore DE = EB$ ；

(3) 如图，



$\because$ 四边形 ACDE 是梯形， $\angle ACD = 90^\circ$ ， $\therefore \angle CAE = 90^\circ$ 。

$\because \angle CAE = \angle CAD + \angle EAD$ ，

又 $\because$ 在正三角形 ADE 中， $\angle EAD = 60^\circ$ ，

$\therefore \angle CAD = 30^\circ$ 。

在直角三角形 ACD 中， $AC = 3$ ， $\angle CAD = 30^\circ$ ，

由勾股定理可得 $CD = 3^{1/2}$ 。

同理可得：若点 D 与点 B 重合，AC 平行 DE，此时 $CD = 3 \cdot 3^{1/2}$ ，

综上所述：若 $AE \parallel CD$ ， $CD = 3^{1/2}$ ；若点 D 与点 B 重合，此时 $CD = 3 \cdot 3^{1/2}$ 。

例 25 (2012 年吉林省中考第 26 题)

问题情境 如图 1, 在 x 轴上有两点 $A(m, 0)$, $B(n, 0)$ ($n > m > 0$). 分别过点 A 、点 B 作 x 轴的垂线, 交抛物线 $y = x^2$ 于点 C 、点 D . 直线 OC 交直线 BD 于点 E , 直线 OD 交直线 AC 于 F , 点 E , 点 F 的纵坐标分别记为 y_E 、 y_F .

特例探究

填空:

当 $m=1$, $n=2$ 时, $y_E = \underline{\hspace{2cm}}$, $y_F = \underline{\hspace{2cm}}$;

当 $m=3$, $n=5$ 时, $y_E = \underline{\hspace{2cm}}$, $y_F = \underline{\hspace{2cm}}$.

归纳证明 对任意 m 、 n ($n > m > 0$), 猜想 y_E 与 y_F 的大小关系, 并证明你的猜想.

拓展应用

若将“抛物线 $y = x^2$ ”改为“抛物线 $y = a \cdot x^2$ ($a > 0$)”, 其它条件不变, 请直接写出 y_E 与 y_F 的大小关系;

连接 EF 、 AE . 当 $S_{\text{四边形 OFEB}} = 3 \cdot S_{\triangle OFE}$ 时, 直接写出 m 和 n 的关系及四边形 $OFEA$ 的形状.

【解答】

特例探究

当 $m=1, n=2$ 时, $C(1,1)$, $D(2,4)$, 所以直线 OC 的解析式为: $y = x$; 直线 OD 的解析式为: $y = 2x$; 此时

$$\text{解} \begin{cases} x = 2 \\ y = x \end{cases}, \text{得 } E(2,2) \Rightarrow y_E = 2$$

$$\text{解} \begin{cases} x=1 \\ y=2x \end{cases}, \text{得 } F(1,2) \Rightarrow y_F=2.$$

所以, 此时 $y_E = y_F = 1 \times 2 = 2$

当 $m=3, n=5$ 时, $C(3,9), D(5,25)$, 所以直线 OC 的解析式为: $y=3x$; 直线 OD 的解析式为: $y=5x$; 此时

$$\text{解} \begin{cases} x=5 \\ y=3x \end{cases}, \text{得 } E(5,15) \Rightarrow y_E=15$$

$$\text{解} \begin{cases} x=3 \\ y=5x \end{cases}, \text{得 } F(3,15) \Rightarrow y_F=15.$$

所以, 此时 $y_E = y_F = 3 \times 5 = 15$

归纳证明 猜想: 对任意 m, n ($n > m > 0$), 都有: $y_E = y_F$.

证明: 对任意 m, n ($n > m > 0$) 时, $C(m, m^2), D(n, n^2)$, 所以直线 OC 的解析式为: $y=mx$; 直线 OD 的解析式为: $y=nx$; 此时

$$\text{解} \begin{cases} x=n \\ y=mx \end{cases}, \text{得 } E(n, mn) \Rightarrow y_E = mn.$$

$$\text{解} \begin{cases} x=m \\ y=nx \end{cases}, \text{得 } F(n, mn) \Rightarrow y_F = mn.$$

所以, 此时 $y_E = y_F = mn$.

拓展应用

(1)若将“抛物线 $y=x^2$ ”改为“抛物线 $y=ax^2$ ($a > 0$)”, 其它条件不变, 仍然有:

$$y_E = y_F.$$

此时, $C(m, am^2), D(n, an^2)$, 所以直线 OC 的解析式为: $y=amx$; 直线 OD 的解析式为: $y=anx$; 此时

$$\text{解} \begin{cases} x = n \\ y = amx \end{cases}, \text{得 } E(n, amn) \Rightarrow y_E = amn.$$

$$\text{解} \begin{cases} x = m \\ y = anx \end{cases}, \text{得 } F(n, amn) \Rightarrow y_F = amn.$$

所以, $y_B = y_F = amn$.

(2) 连接 EF, AE, 如图, 由 S 四边形 OFEB = 3S△OFE

$$1/2 * ((n-m)-n) * a * m * n = 3 * 1/2 * (n-m) * a * m * n$$

$$2 * n - m = 3 * n - 3 * m$$

由 $n = 2 * m$, 即, $OB = 2OA$, $\therefore \begin{cases} EF = AB = OA \\ y_E = y_F \end{cases}$, 所以四边形 OFEA 是平行四边形。

例 26 (2012 年沈阳市中考第 25 题) 如图 1, 在平面直角坐标系中, 点 A 坐标为 $(-2, 0)$, 点 B 坐标为 $(0, 2)$, 点 E 为线段 AB 上的动点 (点 E 不与点 A, B 重合), 以 E 为顶点作 $\angle OET=45^\circ$, 射线 ET 交线段 OB 于点 F, C 为 y 轴正半轴上一点, 且 $OC=AB$, 抛物线 $y=-\frac{1}{2}x^2+mx+n$ 的图象经过 A、C 两点.

- (1) 求此抛物线的函数表达式;
- (2) 求证: $\angle BEF=\angle AOE$;
- (3) 当 $\triangle EOF$ 为等腰三角形时, 求此时点 E 的坐标;
- (4) 在 (3) 的条件下, 当直线 EF 交 x 轴于点 D, P 为 (1) 中抛物线上一动点, 直线 PE 交 x 轴于点 G, 在直线 EF 上方的抛物线上是否存在一点 P, 使得 $\triangle EPF$ 的面积是 $\triangle EDG$ 面积的 $(2\sqrt{2}+1)$ 倍? 若存在, 请直接写出点 P 的坐标; 若不存在, 请说明理由.

【解答】

(1) $\because A(-2, 0), B(0, 2), \therefore OA=OB=2$ 。

$\therefore AB^2=OA^2+OB^2=2^2+2^2=8$ 。 $\therefore AB=2\sqrt{2}$ 。

$\because OC=AB, \therefore OC=2\sqrt{2}$, 即 $C(0, 2\sqrt{2})$ 。

$\because$ 抛物线 $y=-\frac{1}{2}x^2+mx+n$ 的图象经过 A、C 两点, 得

$$\begin{cases} -4\sqrt{2}-2m+n=0 \\ n=2\sqrt{2} \end{cases}, \text{解得: } \begin{cases} m=-\sqrt{2} \\ n=2\sqrt{2} \end{cases}。$$

$\therefore$ 抛物线的表达式为 $y=-\frac{1}{2}x^2-\sqrt{2}x+2\sqrt{2}$ 。

(2) 证明: $\because OA=OB, \angle AOB=90^\circ, \therefore \angle BAO=\angle ABO=45^\circ$ 。

又 $\because \angle BEO=\angle BAO+\angle AOE=45^\circ+\angle AOE$, $\angle BEO=\angle OEF+\angle BEF=45^\circ+\angle BEF$,

$\therefore \angle BEF=\angle AOE$ 。

(3) 当 $\triangle EOF$ 为等腰三角形时, 分三种情况讨论

①当 $OE=OF$ 时, $\angle OFE=\angle OEF=45^\circ$,

在 $\triangle EOF$ 中, $\angle EOF=180^\circ-\angle OEF-\angle OFE=180^\circ-45^\circ-45^\circ=90^\circ$ 。

又 $\because \angle AOB=90^\circ$, 则此时点 E 与点 A 重合, 不符合题意, 此种情况不成立。

②如图①, 当 $FE=FO$ 时, $\angle EOF=\angle OEF=45^\circ$ 。

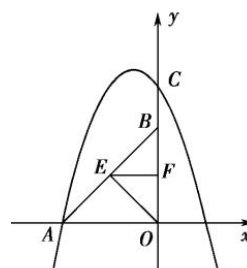
在 $\triangle EOF$ 中, $\angle EFO=180^\circ-\angle OEF-\angle EOF=180^\circ-45^\circ-45^\circ=90^\circ$,

$\therefore \angle AOF+\angle EFO=90^\circ+90^\circ=180^\circ$ 。 $\therefore EF \parallel AO$ 。

$\therefore \angle BEF=\angle BAO=45^\circ$ 。

又 $\because$ 由 (2) 可知, $\angle ABO=45^\circ$, $\therefore \angle BEF=\angle ABO$ 。

$\therefore BF=EF$ 。 $\therefore EF=BF=OF=\frac{1}{2}OB=\frac{1}{2}\times 2=1$ 。 $\therefore E(-1, 1)$ 。



图①

③如图②, 当 $EO=EF$ 时, 过点 E 作 $EH \perp y$ 轴于点 H ,

在 $\triangle AOE$ 和 $\triangle BEF$ 中,

$\because \angle EAO=\angle FBE$, $EO=EF$, $\angle AOE=\angle BEF$,

$\therefore \triangle AOE \cong \triangle BEF$ (AAS)。 $\therefore BE=AO=2$ 。

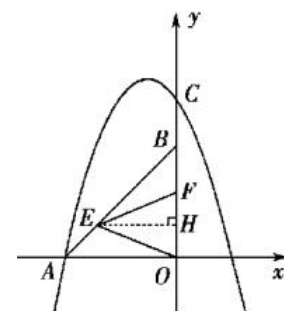
$\because EH \perp OB$, $\therefore \angle EHB=90^\circ$ 。 $\therefore \angle AOB=\angle EHB$ 。

$\therefore EH \parallel AO$ 。 $\therefore \angle BEH=\angle BAO=45^\circ$ 。

在 $Rt\triangle BEH$ 中, $\because \angle BEH=\angle ABO=45^\circ$,

$\therefore EH=BH=BE \cos 45^\circ=2 \times \frac{\sqrt{2}}{2}=\sqrt{2}$ 。

$\therefore OH=OB-BH=2-2\sqrt{2}$ 。 $\therefore E(-\sqrt{2}, 2-2\sqrt{2})$ 。



图②

综上所述, 当 $\triangle EOF$ 为等腰三角形时, 点 E 坐标为 $E(-1, 1)$ 或 $E(-\sqrt{2}, 2-2\sqrt{2})$ 。

(4) $P(0, 2\sqrt{2})$ 或 $P(-1, 2\sqrt{2})$ 。

例 27 (2013 年安徽省中考第 23 题) 我们把由不平行于底边的直线截等腰三角形的两腰所得的四边形称为“准等腰梯形”.如图 1,四边形 ABCD 即为“准等腰梯形”,其中 $\angle B = \angle C$.

(1) 在如图 1 所示的“准等腰梯形”ABCD 中, 选择合适的顶点引一条直线将四边形 ABCD 分割成一个等腰梯形和一个三角形或分割为一个等腰三角形和一个梯形 (画出一种示意图即可);

(2) 如图 2, 在“准等腰梯形”ABCD 中, $\angle B = \angle C$, E 为 BC 边上一点, 若 $AB \parallel DE$, $AE \parallel DC$, 求证: $AB/DC = BE/EC$.

(3) 在由不平行于 BC 的直线 AD 截 PBC 所得的四边形 ABCD 中, $\angle BAD$ 与 $\angle ADC$ 的平行线交于点 E, 若 $EB = EC$, 请问当点 E 在四边形 ABCD 内部时 (即图 3 所示情形), 四边形 ABCD 是不是“准等腰梯形”, 为什么? 若点 E 不在四边形 ABCD 内部时, 情况又将如何? 写出你的结论. (不必说明理由)

【解答】

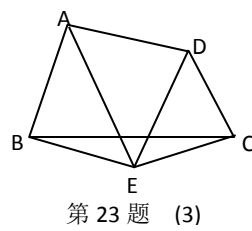
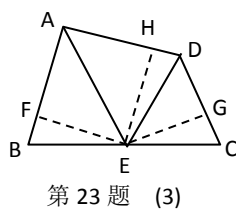
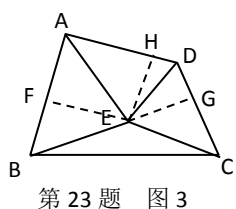
过点 A 作 $AE \parallel CD$ 交 BC 于点 E 或过点 D 作 $DF \parallel BC$ 交 AB 于点 F 或过点 D 作 $DG \parallel AB$ 于点 G, 图略;

$$\because AB \parallel DE, AE \parallel DC, \therefore \angle AEB = \angle C, \angle DEC = \angle B, \therefore \triangle ABE \sim \triangle DEC, \therefore \frac{AB}{DE} = \frac{BE}{EC},$$

$$\because \angle B = \angle C, \therefore \angle DEC = \angle C, \therefore DE = DC, \therefore \frac{AB}{DC} = \frac{BE}{EC};$$

四边形 ABCD 是“准等腰梯形”.理由: 过点 E 分别作 $EF \perp AB$ 于 F, $EG \perp CD$ 于 G, $EH \perp AD$ 于 H, 如图, $\because AE$ 平分 $\angle BAD$, $\therefore EF = EH$, 同理 $EH = EG$, $\therefore EF = EG$, $\because EB = EC$, $\therefore \triangle EBF \cong \triangle ECG$, $\therefore \angle EBF = \angle ECG$, $\because EB = EC$, $\therefore \angle EBC = \angle ECB$, $\therefore \angle ABC = \angle DCB$, $\therefore$ 四边形 ABCD 是“准等腰梯形”.当点 E 不在四

边形 ABCD 内部时，分两种情况，如图，(1) 点 E 在四边形 ABCD 的边 BC 上时，四边形 ABCD 是“准等腰梯形”；(2) 点 E 在四边形 ABCD 的外部时，四边形 ABCD 仍是“准等腰梯形”。



例 28 (2013 年乐山市中考第 25 题) 阅读下列材料：如图 1，在梯形 ABCD 中， $AD \parallel BC$ ，点 M、N 分别在边 AB、DC 上，且 $MN \parallel AD$ 。记 $AD=a$ ， $BC=b$ 。若 $AM/MB=m/n$ ，则有结论： $MN = (bm+an) / (m+n)$ 。

根据以上结论，解答下列问题：

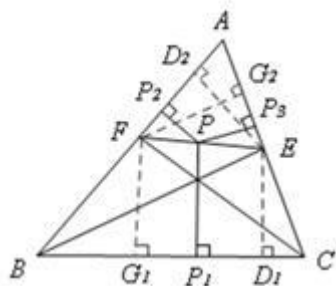
(1) 如图 2、图 3，BE、CF 是 $\triangle ABC$ 的两条角平分线。过 EF 上一点 P 分别作 $\triangle ABC$ 三边的垂线段 PP_1 、 PP_2 、 PP_3 ，交 BC 于点 P_1 ，交 AB 于点 P_2 ，交 CA 于点 P_3 。

(2) 若点 P 为线段 EF 的中点，求证 $PP_1 = PP_2 + PP_3$ ；

(3) 若点 P 在线段 EF 上的任意位置时，试探究 PP_1 、 PP_2 、 PP_3 的数量关系，并给出证明。

【解答】

(1) 证明：如图，过点 E 作 $ED_1 \perp BC$ 于 D_1 ， $ED_2 \perp AB$ 于 D_2 ，



$\because BE$ 是 $\angle ABC$ 的角平分线， $\therefore ED_1 = ED_2$ 。

$\because$ 点 P 为线段 EF 的中点，且 $PP_2 \perp AB$ ，

$\therefore PP_2 \parallel ED_2$ 。 $\therefore PP_2 = \frac{1}{2}ED_2$ 。 $\therefore PP_2 = \frac{1}{2}ED_1$ ，即 $ED_1 = 2PP_2$ 。

同理，过点 F 作 $FG_1 \perp BC$ 于 G_1 ， $FG_2 \perp AC$ 于 G_2 ，得 $FG_1 = 2PP_3$ 。

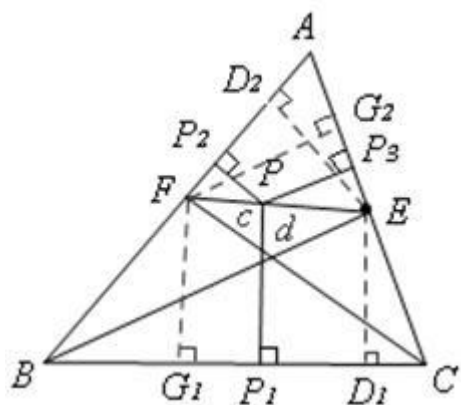
在梯形 EFG_1D_1 中， $\because$ 公式 $MN = \frac{bm+an}{m+n}$ 中， $m=n$ ，

$$\therefore MN = \frac{b+a}{2} \quad (\text{梯形中位线定理}).$$

$$\therefore PP_1 = \frac{1}{2}(ED_1 + FG_1) = \frac{1}{2}(2PP_2 + 2PP_3) = PP_2 + PP_3.$$

(2) $PP_1 = PP_2 + PP_3$ 。证明如下:

如图, 过点 E 作 $ED_1 \perp BC$ 于 D_1 , $ED_2 \perp AB$ 于 D_2 , 过点 F 作 $FG_1 \perp BC$ 于 G_1 , $FG_2 \perp AC$ 于 G_2 ,



$$\frac{PF}{PE} = \frac{c}{d}, \quad \text{则梯形 } EFG_1D_1 \text{ 满足公式 } MN = \frac{bm+an}{m+n},$$

$$\therefore PP_1 = \frac{FG_1 \cdot d + ED_1 \cdot c}{c+d} \quad \text{①}.$$

公式 $MN = \frac{bm+an}{m+n}$ 中, 当 $b=0$ 时, 原梯形变为三角形,

$$\therefore MN = \frac{an}{m+n}. \quad \therefore PP_2 = \frac{ED_2 \cdot c}{c+d}, \quad PP_3 = \frac{FG_2 \cdot d}{c+d}.$$

$$\therefore ED_1 = ED_2 = \frac{PP_2 \cdot (c+d)}{c} \quad \text{②}, \quad FG_1 = FG_2 = \frac{PP_3 \cdot (c+d)}{d} \quad \text{③}.$$

$$\text{将②③代入①, 得 } PP_1 = \frac{\frac{PP_2 \cdot (c+d)}{d} \cdot d + \frac{PP_3 \cdot (c+d)}{c} \cdot d}{c+d} = \frac{(c+d)(PP_2 + PP_3)}{c+d} = PP_2 + PP_3.$$

例 29 (2013 年乐山市中考第 26 题) 如图 1, 已知抛物线 C 经过原点, 对称轴 $x=-3$ 与抛物线相交于第三象限的点 M , 与 x 轴相交于点 N , 且 $\tan \angle MON=3$.

(1) 求抛物线 C 的解析式;

(2) 将抛物线 C 绕原点 O 旋转 180° 得到抛物线 C' , 抛物线 C' 与 x 轴的另一个交点为 A , B 为抛物线 C' 上横坐标为 2 的点.

①若点 P 为线段 AB 上的一个动点, $PD \perp y$ 轴于点 D , 求 $\triangle APD$ 面积的最大值;

②过线段 OA 上两点 E 、 F 分别作 x 轴的垂线, 交折线 $O-B-A$ 于点 E_1 、 F_1 , 再分别以线段 EE_1 、 FF_1 为边作如图 2 所示的等边 $\triangle EE_1E_2$ 、 $\triangle FF_1F_2$. 点 E 以每秒 1 个单位长度的速度从点 O 向点 A 运动, 同时点 F 以每秒 1 个单位长度的速度从点 A 向点 O 运动. 当 $\triangle EE_1E_2$ 与 $\triangle FF_1F_2$ 的某一边在同一直线上时, 求时间 t 的值.

【解答】

(1) $\because$ 抛物线的对称轴为 $x=-3$, $\therefore ON=3$.

$\because \tan \angle MON=3$, $\therefore NM=9$. $\therefore M(-3, -9)$.

$\therefore$ 设抛物线 C 的解析式为 $y=a(x+3)^2-9$.

$\because$ 抛物线 C 经过原点, $\therefore 0=a(0+3)^2-9$, 即 $a=1$.

$\therefore$ 抛物线 C 的解析式为 $y=(x+3)^2-9$, 即 $y=x^2+6x$.

(2) ① $\because$ 抛物线 C' 由抛物线 C 绕原点 O 旋转 180° 得到,

$\therefore$ 抛物线 C' 与抛物线 C 关于原点 O 对称. $\therefore$ 抛物线 C' 的顶点坐标为 $(3, 9)$.

$\therefore$ 抛物线 C' 的解析式为 $y=-(x-3)^2+9$, 即 $y=-x^2+6x$.

$\because$ 令 $y=0$, 得 $x=0$ 或 $x=6$, $\therefore A(6, 0)$.

又 $\because B$ 为抛物线 C' 上横坐标为 2 的点, $\therefore$ 令 $x=2$, 得 $y=8$. $\therefore B(2, 8)$.

设直线 AB 的解析式为 $y=kx+b$,

$$\text{则 } \begin{cases} 6k+b=0 \\ 2k+b=8 \end{cases}, \text{ 解得: } \begin{cases} k=-2 \\ b=12 \end{cases}.$$

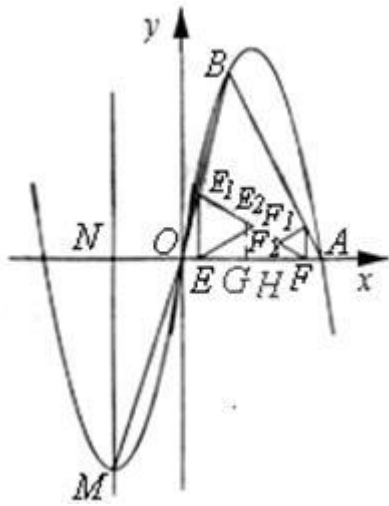
$\therefore$ 直线 AB 的解析式为 $y=-2x+12$ 。

$\because$ P 为线段 AB 上一动点, $\therefore$ 设 $P(p, -2p+12)$ 。

$$\therefore S_{\triangle APD} = \frac{1}{2} \cdot p \cdot (-2p+12) = -p^2 + 6p = -(p-3)^2 + 9.$$

APD 面积的最大值为 9。

②如图, 分别过 E_2 、 F_2 作 x 轴的垂线, 垂足分别为 G、H,



易求直线 OB: $y=4x$, 由①直线 AB: $y=-2x+12$ 。

当 $0 < t \leq 2$ 时, E_1 在 OB 上, F_1 在 AB 上,

$$OE=t, EE_1=4t, EG=2\sqrt{3}t, OG=2\sqrt{3}t+t, GE_2=2t;$$

$$OF=6-t, FF_1=2t, HF=\sqrt{3}t, OH=6-t-\sqrt{3}t, HF_2=t.$$

$$\therefore E(t, 0), E_1(t, 4t), E_2(2\sqrt{3}t+t, 2t), F(6-t, 0), F_1(6-t, 2t), F_2(6-t-\sqrt{3}t, t).$$

i) 若 EE_1 与 FF_1 在同一直线上, 由 $t=6-t$, $t=3$, 不符合 $0 < t \leq 2$;

ii) 若 EE_2 与 F_1F_2 在同一直线上, 易求得 $EE_2: y=\frac{\sqrt{3}}{3}x-\frac{\sqrt{3}}{3}t$, 将 $F_1(6-t, 2t)$ 代入,

$$\text{得 } 2t = \frac{\sqrt{3}}{3}(6-t) - \frac{\sqrt{3}}{3}t, \text{ 解得 } t = \frac{3(\sqrt{3}-1)}{2};$$

iii) 若 E_1E_2 与 FF_2 在同一直线上, 易求得 E_1E_2 : $y = -\frac{\sqrt{3}}{3}x + 4t + \frac{\sqrt{3}}{3}t$, 将 $F(6-t, 0)$

$$\text{代入, 得 } t = \frac{6\sqrt{3}-3}{10}.$$

当 $2 < t \leq 4$ 时, E_1, F_1 都在 AB 上,

$$OE=t, EE_1=12-2t, EG=6\sqrt{3}-\sqrt{3}t, OG=6\sqrt{3}-\sqrt{3}t+t, GE_2=6-t;$$

$$OF=6-t, FF_1=2t, HF=\sqrt{3}t, OH=6-t-\sqrt{3}t, HF_2=t.$$

$$\therefore E(t, 0), E_1(t, 12-2t), E_2(6\sqrt{3}-\sqrt{3}t+t, 6-t), F(6-t, 0), F_1(6-t, 2t), F_2(6-t-\sqrt{3}t, t).$$

i) 若 EE_1 与 FF_1 在同一直线上, 由 $t=6-t, t=3$;

ii) 若 EE_2 与 F_1F_2 在同一直线上, 易求得 EE_2 : $y = \frac{\sqrt{3}}{3}x - \frac{\sqrt{3}}{3}t$, 将 $F_1(6-t, 2t)$ 代入,

$$\text{得 } 2t = \frac{\sqrt{3}}{3}(6-t) - \frac{\sqrt{3}}{3}t, \text{ 解得 } t = \frac{3(\sqrt{3}-1)}{2}, \text{ 不符合 } 2 < t \leq 4;$$

iii) E_1E_2 与 FF_2 已在 $0 < t \leq 2$ 时在同一直线上, 故当 $2 < t \leq 4$ 时 E_1E_2 与 FF_2 不可能在同一直线上。

当 $4 < t < 6$ 时, 由上面讨论的结果, $\triangle AE_1E_2$ 的一边与 $\triangle AF_1F_2$ 的某一边不可能在同一直线上。

综上所述, 当 $\triangle AE_1E_2$ 有一边与 $\triangle AF_1F_2$ 的某一边在同一直线上时, $t = \frac{3(\sqrt{3}-1)}{2}$ 或

$$t = \frac{6\sqrt{3}-3}{10} \text{ 或 } t=3.$$

例 30 (2013 年江西省中考第 24 题) 某数学活动小组在作三角形的拓展图形，研究其性质时，经历了如下过程：

操作发现：

在等腰 $\triangle ABC$ 中， $AB=AC$ ，分别以 AB 、 AC 为斜边，向 $\triangle ABC$ 的外侧作等腰直角三角形，如图 1 所示，其中 $DF \perp AB$ 于点 F ， $EG \perp AC$ 于点 G ， M 是 BC 的中点，连结 MD 和 ME ，则下列结论正确的是 (填序号即可)

- ① $AF=AC=1/2AB$ ；② $MD=ME$ ；③整个图形是轴对称图形；④ $MD \perp ME$

数学思考：

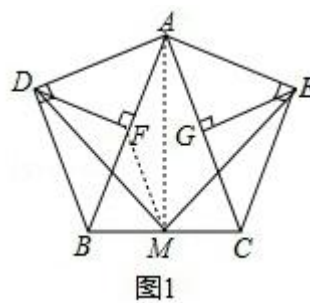
在任意 $\triangle ABC$ 中，分别以 AB 、 AC 为斜边，向 $\triangle ABC$ 的外侧作等腰直角三角形，如图 2 所示， M 是 BC 的中点，连结 MD 和 ME ，则 MD 与 ME 有怎样的数量关系？请给出证明过程；

类比探究：

在任意 $\triangle ABC$ 中，仍分别以 AB 、 AC 为斜边，向 $\triangle ABC$ 的内侧作等腰直角三角形，如图 3 所示， M 是 BC 的中点，连结 MD 和 ME ，试判断 $\triangle MDE$ 的形状.

答： .

【解答】



(1) $\because \triangle ADB$ 和 $\triangle AEC$ 是等腰直角三角形，

$\therefore \angle ABD = \angle DAB = \angle ACE = \angle EAC = 45^\circ$ ， $\angle ADB = \angle AEC = 90^\circ$

∵在 $\triangle ADB$ 和 $\triangle AEC$ 中,

$$\angle ABD = \angle ACE$$

$$\angle ADB = \angle AEC$$

$$AB = AC,$$

$$\therefore \triangle ADB \cong \triangle AEC \text{ (AAS)},$$

$$\therefore BD = CE, AD = AE,$$

∵ $DF \perp AB$ 于点 F , $EG \perp AC$ 于点 G ,

$$\therefore AF = BF = DF = \frac{1}{2} AB, AG = GC = GE = \frac{1}{2} AC.$$

$$\because AB = AC,$$

$$\therefore AF = AG = \frac{1}{2} AB, \text{ 故①正确;}$$

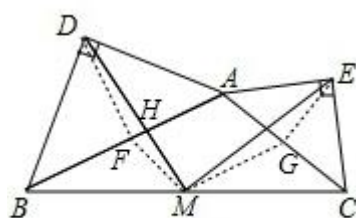


图2

∵ M 是 BC 的中点,

$$\therefore BM = CM.$$

$$\because AB = AC,$$

$$\therefore \angle ABC = \angle ACB,$$

$$\therefore \angle ABC + \angle ABD = \angle ACB + \angle ACE,$$

$$\text{即 } \angle DBM = \angle ECM.$$

在 $\triangle DBM$ 和 $\triangle ECM$ 中

$$BD = CE$$

$$\angle DBM = \angle ECM$$

$$BM = CM$$

$\therefore \triangle DBM \cong \triangle ECM$ (SAS),

$\therefore MD = ME$. 故②正确;

连接 AM, 根据前面的证明可以得出将图形 1, 沿 AM 对折左右两部分能完全重合,

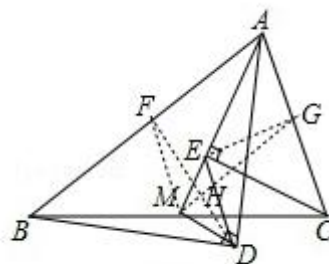


图3

$\therefore$ 整个图形是轴对称图形, 故③正确.

$\because AB = AC, BM = CM,$

$\therefore AM \perp BC,$

$\therefore \angle AMB = \angle AMC = 90^\circ,$

$\because \angle ADB = 90^\circ,$

$\therefore$ 四边形 ADBM 四点共圆,

$\therefore \angle AMD = \angle ABD = 45^\circ.$

$\because AM$ 是对称轴,

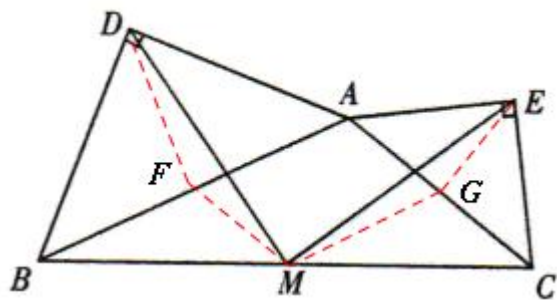
$\therefore \angle AME = \angle AMD = 45^\circ,$

$\therefore \angle DME = 90^\circ,$

$\therefore MD \perp ME$, 故④正确, 故答案为: ①②③④.

(2) 1、 $MD = ME$:

如图, 分别取 AB, AC 的中点 F, G, 连接 DF, MF, MG, EG,



$\because M$ 是 BC 的中点, $\therefore MF \parallel AC$, $MF = \frac{1}{2} AC$ 。

又 $\because EG$ 是等腰 $Rt\triangle AEC$ 斜边上的中线,

$\therefore EG \perp AC$ 且 $EG = \frac{1}{2} AC$ 。

$\therefore MF = EG$ 。

同理可证 $DF = MG$ 。

$\because MF \parallel AC$, $\therefore \angle MFA + \angle BAC = 180^\circ$ 。

同理可得 $\angle MGA + \angle BAC = 180^\circ$ 。

$\therefore \angle MFA = \angle MGA$ 。

又 $\because EG \perp AC$, $\therefore \angle EGA = 90^\circ$ 。

同理可得 $\angle DFA = 90^\circ$ 。

$\therefore \angle MFA + \angle DFA = \angle MGA = \angle EGA$, 即 $\angle DFM = \angle MEG$ 。

又 $MF = EG$, $DF = MG$, $\therefore \triangle DFM \cong \triangle MGE$ (SAS)。 $\therefore MD = ME$ 。

2、 $MD \perp ME$:

$\because MG \parallel AB$, $\therefore \angle MFA + \angle FMG = 180^\circ$ 。

又 $\because \triangle DFM \cong \triangle MGE$, $\therefore \angle MEG = \angle MDF$ 。

$\therefore \angle MFA + \angle FMD + \angle DME + \angle MDF = 180^\circ$ 。

$\because \angle MFA + \angle FMD + \angle MDF = 90^\circ$, $\therefore \angle DME = 90^\circ$, 即 $MD \perp ME$ 。

(3) (3) $\because$ 点 M、F、G 分别是 BC、AB、AC 的中点，
 $\therefore MF \parallel AC$, $MF = \frac{1}{2} AC$, $MG \parallel AB$, $MG = \frac{1}{2} AB$,
 $\therefore$ 四边形 MFAG 是平行四边形，
 $\therefore MG = AF$, $MF = AG$. $\angle AFM = \angle AGM$.
 $\because \triangle ADB$ 和 $\triangle AEC$ 是等腰直角三角形，
 $\therefore DF = AF$, $GE = AG$, $\angle AFD = \angle BFD = \angle AGE = 90^\circ$
 $\therefore MF = EG$, $DF = MG$, $\angle AFM - \angle AFD = \angle AGM - \angle AGE$,
 即 $\angle DFM = \angle MGE$.
 $\because$ 在 $\triangle DFM$ 和 $\triangle MGE$ 中
 $MF = EG$
 $\angle DFM = \angle MGE$
 $DF = MG$,
 $\therefore \triangle DFM \cong \triangle MGE$ (SAS),
 $\therefore MD = ME$, $\angle MDF = \angle EMG$.
 $\because MG \parallel AB$,
 $\therefore \angle MHD = \angle BFD = 90^\circ$,
 $\therefore \angle HMD + \angle MDF = 90^\circ$,
 $\therefore \angle HMD + \angle EMG = 90^\circ$,
 即 $\angle DME = 90^\circ$,
 $\therefore \triangle DME$ 为等腰直角三角形;

例 31 (2013 年宜宾市中考第 24 题) 如图 1, 在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中, $\angle BAC=90^\circ$, $AD \perp BC$ 于点 D, 点 O 是 AC 边上一点, 连结 BO 交 AD 于 F, OE $\perp$ BO 交 BC 于点 E.

- (1) 求证: $\triangle ABF \sim \triangle COE$;
- (2) 当 O 为 AC 边的中点, $AC/AB=2$ 时, 如图 2, 求 OF/OE 的值;
- (3) 当 O 为 AC 边的中点, $AC/AB=n$ 时, 请直接写出 OF/OE 的值.

【解答】

(1) 证明: $\because AD \perp BC, \therefore \angle DAC + \angle C = 90^\circ$,

$\because \angle BAC = 90^\circ, \therefore \angle BAF = \angle C$,

$\because OE \perp OB, \therefore \angle BOA + \angle COE = 90^\circ$,

$\because \angle BOA + \angle ABF = 90^\circ, \therefore \angle ABF = \angle COE$,

$\therefore \triangle ABF \sim \triangle COE$;

(2) 解: 作 $CG \perp AC$, 交 AD 的延长线于 G,

$\because AC = 2AB$,

O 是 AC 边的中点, $\therefore AB = OC = OA$,

由 (1) 有 $\triangle ABF \sim \triangle COE$,

$\therefore \triangle ABF \cong \triangle COE, \therefore BF = OE$,

$\because \angle BAD + \angle DAC = 90^\circ, \angle DAB + \angle ABD = 90^\circ$,

$\therefore \angle DAC = \angle ABD$,

又 $\angle BAC = \angle AOG = 90^\circ, AB = OA$,

$\therefore \triangle ABC \cong \triangle OAG$

$\therefore OG = AC = 2AB$,

$\because OG \perp OA$,

$$\therefore AB \parallel CG,$$

$$\therefore \triangle ABF \sim \triangle GOF,$$

$$\therefore \frac{OF}{BF} = \frac{OG}{AB}, \frac{OF}{OE} = \frac{OF}{BF} = \frac{OG}{AB} = 2;$$

$$(3) \text{ 解: } \frac{OF}{OE} = n.$$

例 32 (2013 年武汉市中考第 25 题) 如图 1, 点 P 是直线 $l_1: y=-2x-2$ 上的点, 过点 P 的另一条直线 l_2 交抛物线 $y=x^2$ 于点 A、B 两点.

(1) 若直线 l_2 的解析式为 $y=-\frac{1}{2}x+\frac{3}{2}$, 求 A、B 两点的坐标;

(2) ①若点 P 的坐标为 $(-2, t)$, 当 $PA=AB$ 时, 请直接写出点 A 的坐标;

②试证明: 对于直线 l_1 上任意给定的一点 P, 在抛物线上都能找到点 A, 使得 $PA=AB$ 成立;

(3) 设直线 l_1 与 y 轴交于点 C, 若 $\triangle AOB$ 的外心在边 AB 上, 且 $\angle BPC=\angle OCP$, 求点 P 的坐标.

【解答】

$$(1) \text{ 依题意, 得 } \begin{cases} y = -\frac{1}{2}x + \frac{3}{2} \\ y = x^2 \end{cases} \quad \text{解得} \begin{cases} x_1 = -\frac{3}{2} \\ y_1 = \frac{9}{4} \end{cases}, \begin{cases} x_2 = 1 \\ y_2 = 1 \end{cases}$$

$$\therefore A \left(-\frac{3}{2}, \frac{9}{4} \right), B (1, 1).$$

(2) ① $A_1 (-1, 1), A_2 (-3, 9)$.

②过点 P、B 分别作过点 A 且平行于 x 轴的直线的垂线, 垂足分别为 G、H.

$$\text{设 } P(a, -2a-2), A(m, m^2), \because PA=PB, \therefore \triangle PAG \cong \triangle BAH,$$

$$\therefore AG=AH, PG=BH, \therefore B(2m-a, 2m^2+2a+2),$$

将点 B 坐标代入抛物线 $y=x^2$, 得 $2m^2-4am+a^2-2a-2=0$,

$$\therefore \Delta = 16a^2 - 8(a^2 - 2a - 2) = 8a^2 + 16a + 16 = 8(a+1)^2 + 8 > 0$$

$\therefore$ 无论 a 为何值时, 关于 m 的方程总有两个不等的实数解, 即对于任意给定的点 P, 抛物线上总能找到两个满足条件的点 A.

(3) 设直线 $m: y = kx + b (k \neq 0)$ 交 y 轴于 D , 设 $A(m, m^2)$, $B(n, n^2)$.

过 A 、 B 两点分别作 AG 、 BH 垂直 x 轴于 G 、 H .

$\because \triangle AOB$ 的外心在 AB 上, $\therefore \angle AOB = 90^\circ$,

由 $\triangle AGO \sim \triangle OHB$, 得 $\frac{AG}{OG} = \frac{OH}{BH}$, $\therefore mn = -1$.

联立 $\begin{cases} y = kx + b \\ y = x^2 \end{cases}$ 得 $x^2 - kx - b = 0$, 依题意, 得 m 、 n 是方程 $x^2 - kx - b = 0$ 的两根,

$\therefore mn = -b$, $\therefore b = -1$, 即 $D(0, 1)$.

$\because \angle BPC = \angle OCP$, $\therefore DP = DC = 3$. P

设 $P(a, -2a - 2)$, 过点 P 作 $PQ \perp y$ 轴于 Q , 在 $Rt\triangle PDQ$ 中, $PQ^2 + DQ^2 = PD^2$,

$\therefore a^2 + (-2a - 2 - 1)^2 = 3^2$. $\therefore a_1 = 0$ (舍去), $a_2 = -\frac{12}{5}$, $\therefore P(-\frac{12}{5}, \frac{14}{5})$.

$\because PN$ 平分 $\angle MNQ$, $\therefore PT = NT$, $\therefore -t + \frac{1}{2}t^2 = \sqrt{2}(2 - t)$,

例 33 (2013 年北京市中考第 25 题) 对于平面直角坐标系 xOy 中的点 P 和 C , 给出如下定义: 若 C 上存在两点 A 、 B , 使得 $\angle APB=60^\circ$, 则称 P 为 C 的关键点. 已知点 $D(1/2, 1/2)$, $E(0, -2)$, $F(2\sqrt{3}, 0)$.

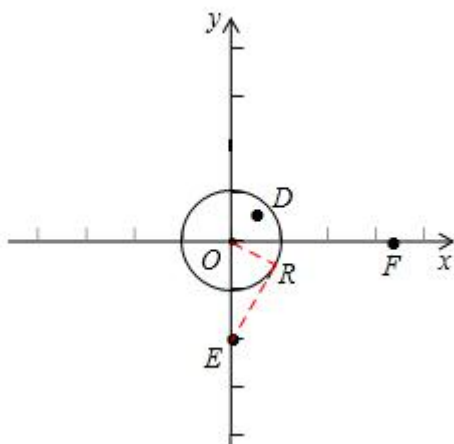
- (1) 当 $\odot O$ 的半径为 1 时, 在点 D 、 E 、 F 中, $\odot O$ 的关联点是 ;
- (2) 过点 F 作直线 l 交 y 轴正半轴于点 G , 使 $\angle GFO=30^\circ$, 若直线 l 上的点 $P(m, n)$ 是 $\odot O$ 的关联点, 求 m 的取值范围;
- (3) 若线段 EF 上所有点都是某个圆的关联点, 求这个圆的半径 r 的取值范围.

【解答】

- (1) ① D , E .

根据关联点的定义, 得出 E 点是 $\odot O$ 的关联点, 进而得出 F 、 D , 与 $\odot O$ 的关系:

如图 1 所示, 过点 E 作 $\odot O$ 的切线设切点为 R ,



$\because \odot O$ 的半径为 1, $\therefore RO=1$.

$\because EO=2$, $\therefore \angle OER=30^\circ$.

根据切线长定理得出 $\odot O$ 的左侧还有一个切点, 使得组成的角等于 30° .

$\therefore E$ 点是 $\odot O$ 的关联点.

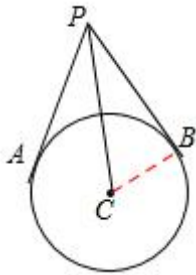
$$\because D\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right), E(0, -2), F(2\sqrt{3}, 0),$$

$$\therefore OF > EO, DO < EO.$$

$\therefore$ D 点一定是 $\odot O$ 的关联点，而在 $\odot O$ 上不可能找到两点使得组成的角度等于 60° 。故在点 D、E、F 中， $\odot O$ 的关联点是 D、E。

②由题意可知，若 P 要刚好是 $\odot C$ 的关联点，需要点 P 到 $\odot C$ 的两条切线 PA 和 PB 之间所夹的角为 60° 。

由图 2 可知 $\angle APB = 60^\circ$ ，则 $\angle CPB = 30^\circ$ ，

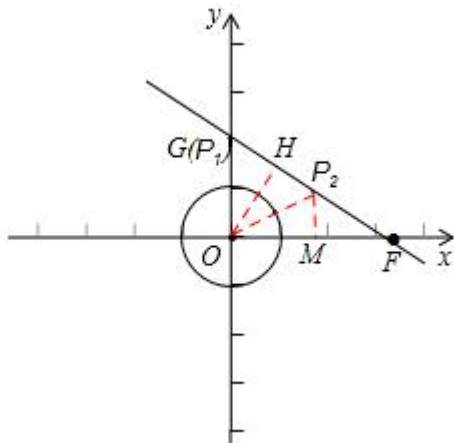


$$\text{连接 } BC, \text{ 则 } PC = \frac{BC}{\sin \angle CPB} = 2BC = 2r,$$

$\therefore$ 若 P 点为 $\odot C$ 的关联点，则需点 P 到圆心的距离 d 满足 $0 \leq d \leq 2r$ 。

由 (1)，考虑临界点位置的 P 点，

如图 3，



点 P 到原点的距离 $OP = 2 \times 1 = 2$ ，

过点 O 作 x 轴的垂线 OH，垂足为 H，

$$\text{则 } \tan \angle OGF = \frac{FO}{OG} = \frac{2\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3}。$$

$$\therefore \angle OGF = 60^\circ。$$

$$\therefore OH = OG \sin 60^\circ = \sqrt{3}, \quad \sin \angle OPH = \frac{OH}{OP} = \frac{\sqrt{3}}{2}。$$

$\therefore \angle OPH = 60^\circ$ 。可得点 P1 与点 G 重合。

过点 P2 作 $P2M \perp x$ 轴于点 M，可得 $\angle P2OM = 30^\circ$ ，

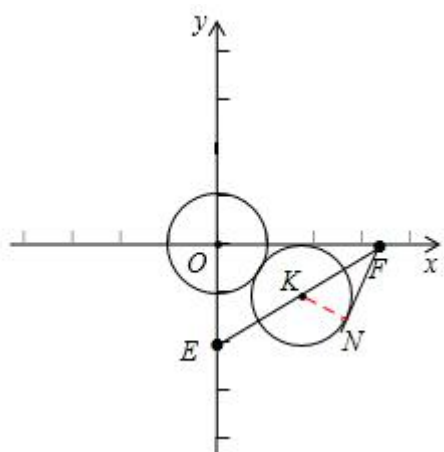
$$\therefore OM = OP2 \cos 30^\circ = \sqrt{3}。$$

$\therefore$ 若点 P 为 $\odot O$ 的关联点，则 P 点必在线段 P1P2 上。

$$\therefore 0 \leq m \leq \sqrt{3}。$$

(2) 若线段 EF 上的所有点都是某个圆的关联点，欲使这个圆的半径最小，则这个圆的圆心应在线段 EF 的中点。

考虑临界情况，如图 4，



即恰好 E、F 点为 $\odot K$ 的关联时，则 $KF = 2KN = \frac{1}{2} EF = 2$ ，此时， $r = 1$ 。

$\therefore$ 若线段 EF 上的所有点都是某个圆的关联点，这个圆的半径 r 的取值范围为 $r \geq 1$ 。

例 34 (2014 年绍兴市中考第 23 题) (1) 如图 1, 正方形 ABCD 中, 点 E、F 分别在边 BC、CD 上, $\angle EAF=45^\circ$, 延长 CD 到点 G, 使 $DG=BE$, 连结 EF、AG,

(1) 求证: $EF=FG$;

(2) 如图 2, 等腰直角三角形 ABC 中, $\angle BAC=90^\circ$, $AB=AC$, 点 M、N 在边 BC 上, 且 $\angle MAN=45^\circ$. 若 $BM=1$, $CN=3$, 求 MN 的长.

【解答】

(1) 证明: 在正方形 ABCD 中,

$$\therefore \angle ABE = \angle ADG, AD = AB,$$

在 $\triangle ABE$ 和 $\triangle ADG$ 中,

$$\begin{cases} AD = AB \\ \angle ABE = \angle ADG \\ DG = BE \end{cases}$$

$$\therefore \triangle ABE \cong \triangle ADG \text{ (SAS)},$$

$$\therefore \angle BAE = \angle DAG, AE = AG,$$

$$\therefore \angle EAG = 90^\circ,$$

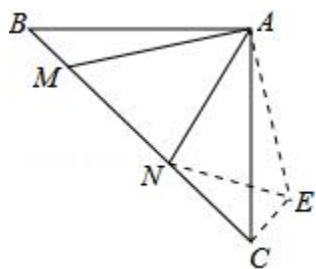
在 $\triangle FAE$ 和 $\triangle FAG$ 中,

$$\begin{cases} AE = AG \\ \angle EAF = \angle FAG = 45^\circ, \\ AF = AF \end{cases}$$

$$\therefore \triangle FAE \cong \triangle FAG \text{ (SAS)},$$

$$\therefore EF = FG$$

(2) 解: 如图 2, 过点 C 作 $CE \perp BC$, 垂足为点 C, 截取 CE, 使 $CE = BM$. 连接 AE、EN.



$\because AB=AC, \angle BAC=90^\circ, \therefore \angle B=\angle C=45^\circ.$

$\because CE \perp BC, \therefore \angle ACE=\angle B=45^\circ.$

在 $\triangle ABM$ 和 $\triangle ACE$ 中,

$$\begin{cases} AB=AC \\ \angle B=\angle ACE \\ BM=CE \end{cases}$$

$\therefore \triangle ABM \cong \triangle ACE \text{ (SAS)}.$

$\therefore AM=AE, \angle BAM=\angle CAE.$

$\because \angle BAC=90^\circ, \angle MAN=45^\circ, \therefore \angle BAM+\angle CAN=45^\circ.$

于是, 由 $\angle BAM=\angle CAE$, 得 $\angle MAN=\angle EAN=45^\circ.$

在 $\triangle MAN$ 和 $\triangle EAN$ 中,

$$\begin{cases} AM=AE \\ \angle MAN=\angle EAN \\ AN=AN \end{cases}$$

$\therefore \triangle MAN \cong \triangle EAN \text{ (SAS)}.$

$\therefore MN=EN.$

在 $\text{Rt}\triangle ENC$ 中, 由勾股定理, 得 $EN^2=EC^2+NC^2.$

$\therefore MN^2=BM^2+NC^2.$

$\because BM=1, CN=3,$

$\therefore MN^2=1^2+3^2, \therefore MN=\sqrt{10}$

例 35 (2014 年金华市中考第 23 题) 如图 1, 等边三角形 ABC 的边长为 6, 在 AC、BC 边上各取一点 E、F, 连结 AF、BE 相交于点 P.

(1) 若 $AE=CF$

求证: $AF=BE$, 并求 $\angle APB$ 的角度;

(2) 若 $AE=2$, 试求 $AP \cdot AF$ 的值;

(3) 若 $AF=BE$, 当点 E 从点 A 运动到点 C 时, 试求点 P 经过的路径长.

【解答】

(1) ①证明: $\because \triangle ABC$ 为等边三角形,

$\therefore AB=AC, \angle C=\angle CAB=60^\circ$,

又 $\because AE=CF$,

在 $\triangle ABE$ 和 $\triangle CAF$ 中,

$$\begin{cases} AB=AC \\ \angle BAE=\angle CAF, \\ AE=CF \end{cases}$$

$\therefore \triangle ABE \cong \triangle CAF$ (SAS),

$\therefore AF=BE, \angle ABE=\angle CAF$.

又 $\because \angle APE=\angle ABP+\angle BAP$,

$\therefore \angle APE=\angle BAP+\angle CAF=60^\circ$.

$\therefore \angle APB=120^\circ$.

②如图, 过点 E 作 $EH \parallel BC$, 交 AF 于 H, $AM \perp BC$, 垂足为 M,

$\because AE=CF=2, \triangle ABC$ 为等边三角形, $AB=BC=AC=6$,

$\therefore MF=1, AM=3\sqrt{3}$,

根据勾股定理, $AF=2\sqrt{7}$;

$$\therefore \frac{AH}{AF} = \frac{HE}{CF} = \frac{AE}{AC} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3},$$

$$\therefore \frac{HE}{BF} = \frac{HP}{PF} = \frac{1}{6},$$

$$\therefore \frac{AP}{AF} = \frac{3}{7},$$

$$\therefore AP \cdot AF = \frac{3}{7} AF^2 = \frac{3}{7} \cdot (2\sqrt{7})^2 = 12.$$

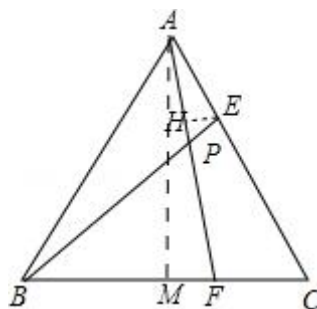
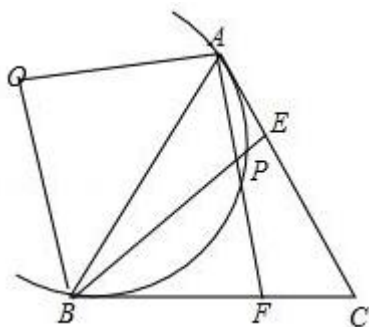
$$\angle ABP = \angle ABP = 30^\circ,$$

又 $\because AB=6$,

$$\therefore OA = 2\sqrt{3},$$

点 P 的路径是 $l = \frac{n\pi r}{180} = \frac{120\pi \cdot 2\sqrt{3}}{180} = \frac{4\sqrt{3}}{3}\pi$.

(2) 点 F 靠近点 B 时, 点 P 的路径就是过点 B 向 AC 做的垂线段的长度; 因为等边三角形 ABC 的边长为 6, 所以点 P 的路径的长度为: $\sqrt{6^2 - 3^2} = 3\sqrt{3}$.



例 36 (2014 年扬州市中考第 28 题) 已知矩形 ABCD 的一条边 AD=8, 将矩形 ABCD 折叠, 使得点 B 落在 CD 边上的点 P 处.

(1) 如图 1, 已知折痕于边 BC 交于点 O, 连结 AP、OP、OA.

①求证: $\triangle OCP \sim \triangle PDA$;

②若 $\triangle OCP$ 与 $\triangle PDA$ 的面积比为 1:4, 求边 AB 的长;

(2) 若图 1 中的点 P 恰好是 CD 边的中点, 求 $\angle OAB$ 的度数;

(3) 如图 2, 在 (1) 的条件下, 擦去折痕 AO、线段 OP, 连结 BP. 动点 M 在线段 AP 上 (点 M 于点 P、A 不重合), 动点 N 在线段 AB 的延长线上, 且 $BN=PM$, 连结 MN 交 PB 于 F, 作 $ME \perp BP$ 于点 E. 试问当点 M、N 在移动过程中, 线段 EF 的长度是否发生变化? 若变化, 请说明理由; 若不变化, 求出线段 EF 的长度.

【解答】

(1) 如图 1,

① $\because$ 四边形 ABCD 是矩形, $\therefore AD=BC$, $DC=AB$, $\angle DAB=\angle B=\angle C=\angle D=90^\circ$.

由折叠可得: $AP=AB$, $PO=BO$, $\angle PAO=\angle BAO$. $\angle APO=\angle B$.

$\therefore \angle APO=90^\circ$.

$\therefore \angle APD=90^\circ - \angle CPO=\angle POC$.

$\because \angle D=\angle C$, $\angle APD=\angle POC$.

$\therefore \triangle OCP \sim \triangle PDA$.

② $\because \triangle OCP$ 与 $\triangle PDA$ 的面积比为 1:4,

$$\therefore \frac{OC}{PD} = \frac{OP}{PA} = \frac{CP}{DA} = \sqrt{\frac{1}{4}} = \frac{1}{2}.$$

$\therefore PD=2OC$, $PA=2OP$, $DA=2CP$.

$$\because AD=8, \therefore CP=4, BC=8.$$

设 $OP=x$, 则 $OB=x$, $CO=8-x$.

在 $Rt\triangle PCO$ 中,

$$\because \angle C=90^\circ, CP=4, OP=x, CO=8-x,$$

$$\therefore x^2 = (8-x)^2 + 4^2. \quad \text{解得: } x=5.$$

$$\therefore AB=AP=2OP=10. \quad \therefore \text{边 } AB \text{ 的长为 } 10.$$

(2) 如图 1,

$$\because P \text{ 是 } CD \text{ 边的中点}, \quad \therefore DP = \frac{1}{2}DC.$$

$$\because DC=AB, AB=AP, \quad \therefore DP = \frac{1}{2}AP.$$

$$\because \angle D=90^\circ, \quad \therefore \sin \angle DAP = \frac{DP}{AP} = \frac{1}{2}.$$

$$\therefore \angle DAP=30^\circ.$$

$$\because \angle DAB=90^\circ, \angle PAO=\angle BAO, \angle DAP=30^\circ,$$

$$\therefore \angle OAB=30^\circ.$$

$$\therefore \angle OAB \text{ 的度数为 } 30^\circ.$$

(3) 作 $MQ \parallel AN$, 交 PB 于点 Q , 如图 2.

$$\because AP=AB, MQ \parallel AN,$$

$$\therefore \angle APB = \angle ABP, \angle ABP = \angle MQP.$$

$$\therefore \angle APB = \angle MQP.$$

$$\therefore MP=MQ.$$

$$\because MP=MQ, ME \perp PQ,$$

$$\therefore PE=EQ = \frac{1}{2}PQ.$$

$$\because BN=PM, MP=MQ,$$

$$\therefore BN=QM.$$

$$\because MQ \parallel AN,$$

$$\therefore \angle QMF = \angle BNF.$$

$$\text{在 } \triangle MFQ \text{ 和 } \triangle NFB \text{ 中, } \begin{cases} \angle QMF = \angle BNF \\ \angle QFM = \angle BFN \\ QM = BN \end{cases}$$

$$\therefore \triangle MFQ \cong \triangle NFB.$$

$$\therefore QF = BF. \quad \therefore QF = \frac{1}{2}QB.$$

$$\therefore EF = EQ + QF = \frac{1}{2}PQ + \frac{1}{2}QB = \frac{1}{2}PB.$$

由 (1) 中的结论可得:

$$PC=4, BC=8, \angle C=90^\circ.$$

$$\therefore PB = \sqrt{8^2 + 4^2} = 4\sqrt{5}.$$

$$\therefore EF = \frac{1}{2}PB = 2\sqrt{5}.$$

$\therefore$ 在 (1) 的条件下, 当点 M、N 在移动过程中, 线段 EF 的长度不变, 长度为 $2\sqrt{5}$.

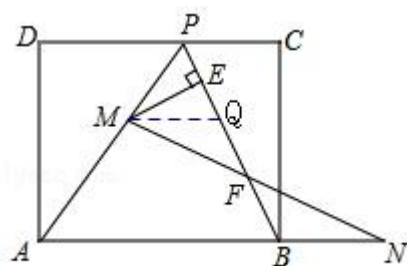


图2

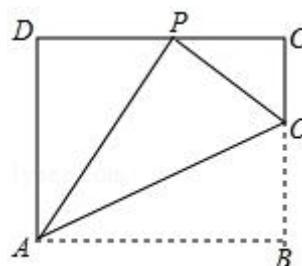


图1

例 37 (2014 年徐州市中考第 28 题) 如图 1, 矩形 ABCD 的边 $AB=3$, $AD=4$, 点 E 从点 A 出发, 沿射线 AD 移动. 以 CE 为直径作 $\odot O$, 点 F 为 $\odot O$ 与射线 BD 的公共点, 连结 EF、CF, 过点 E 作 $EG \perp EF$, EG 与 $\odot O$ 相交于点 G, 连结 CG.

(1) 试说明四边形 EFCG 是矩形;

(2) 当 $\odot O$ 与射线 BD 相切时, 点 E 停止移动, 在点 E 移动过程中,

①矩形 EFCG 的面积是否存在最大值或最小值? 若存在, 求出这个最大值或最小值; 若不存在, 请说明理由;

②求点 G 移动路线的长.

【解答】

(1) 证明: 如图 1,

$\because CE$ 为 $\odot O$ 的直径,

$\therefore \angle CFE = \angle CGE = 90^\circ$.

$\because EG \perp EF$,

$\therefore \angle FEG = 90^\circ$.

$\therefore \angle CFE = \angle CGE = \angle FEG = 90^\circ$.

$\therefore$ 四边形 EFCG 是矩形.

(2) ①存在.

连接 OD, 如图 2①,

$\because$ 四边形 ABCD 是矩形,

$\therefore \angle A = \angle ADC = 90^\circ$.

$\because$ 点 O 是 CE 的中点,

$$\therefore OD=OC.$$

$$\therefore \text{点 } D \text{ 在 } \odot O \text{ 上}.$$

$$\because \angle FCE = \angle FDE, \angle A = \angle CFE = 90^\circ,$$

$$\therefore \triangle CFE \sim \triangle DAB.$$

$$\therefore \frac{S_{\triangle CFE}}{S_{\triangle DAB}} = \left(\frac{CF}{DA}\right)^2.$$

$$\because AD=4, AB=3,$$

$$\therefore BD=5,$$

$$S_{\triangle CFE} = \left(\frac{CF}{4}\right)^2 \cdot S_{\triangle DAB}$$

$$= \frac{CF^2}{16} \times \frac{1}{2} \times 3 \times 4$$

$$= \frac{3CF^2}{8}.$$

$$\therefore S_{\text{矩形 } ABCD} = 2S_{\triangle CFE}$$

$$= \frac{3CF^2}{4}.$$

$$\because \text{四边形 } EFCG \text{ 是矩形},$$

$$\therefore FC \parallel EG.$$

$$\therefore \angle FCE = \angle CEG.$$

$$\because \angle GDC = \angle CEG, \angle FCE = \angle FDE,$$

$$\therefore \angle GDC = \angle FDE.$$

$$\because \angle FDE + \angle CDB = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle GDC + \angle CDB = 90^\circ.$$

$$\therefore \angle GDB = 90^\circ$$

I. 当点 E 在点 A (E') 处时, 点 F 在点 B (F') 处, 点 G 在点 D (G'处, 如图 2①所示.

此时, $CF=CB=4$.

II. 当点 F 在点 D (F'') 处时, 直径 $F''G'' \perp BD$,

如图 2②所示,

此时 $\odot O$ 与射线 BD 相切, $CF=CD=3$.

III. 当 $CF \perp BD$ 时, CF 最小, 此时点 F 到达 F''',

如图 2③所示.

$$S_{\triangle BCD} = \frac{1}{2}BC \cdot CD = \frac{1}{2}BD \cdot CF''.$$

$$\therefore 4 \times 3 = 5 \times CF''.$$

$$\therefore CF'' = \frac{12}{5}.$$

$$\therefore \frac{12}{5} \leq CF \leq 4.$$

$$\because S_{\text{矩形} ABCD} = \frac{3CF^2}{4},$$

$$\therefore \frac{3}{4} \times \left(\frac{12}{5}\right)^2 \leq S_{\text{矩形} ABCD} \leq \frac{3}{4} \times 4^2.$$

$$\therefore \frac{108}{25} \leq S_{\text{矩形} ABCD} \leq 12.$$

$$\therefore \text{矩形 EFCG 的面积最大值为 } 12, \text{ 最小值为 } \frac{108}{25}.$$

② $\because \angle GDC = \angle FDE = \text{定值}$, 点 G 的起点为 D, 终点为 G'',

$\therefore$ 点 G 的移动路线是线段 DG''.

$\because \angle GDC = \angle FDE, \angle DCG'' = \angle A = 90^\circ,$

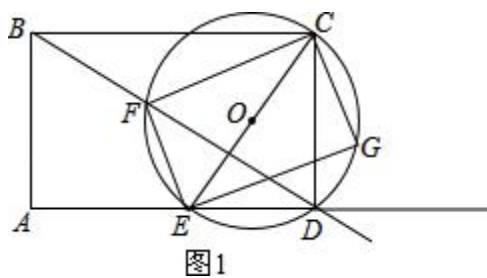
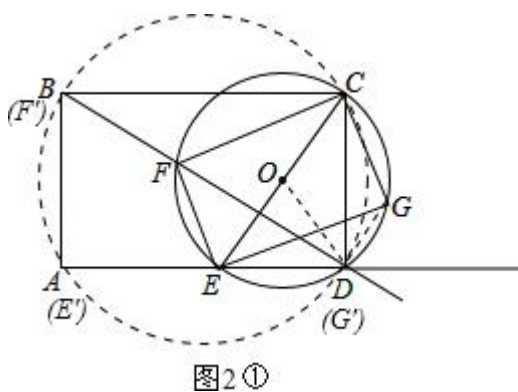
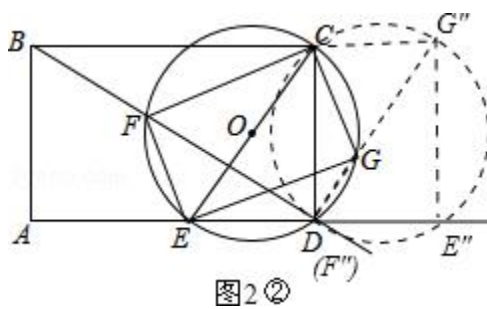
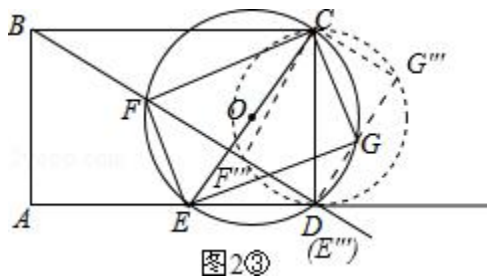
$\therefore \triangle DCG'' \sim \triangle DAB.$

$$\therefore \frac{DC}{DA} = \frac{DG''}{DB}.$$

$$\therefore \frac{3}{4} \cdot \frac{DG''}{5}.$$

$$\therefore DG'' = \frac{15}{4}.$$

$\therefore$ 点 G 移动路线的长为 $\frac{15}{4}$.

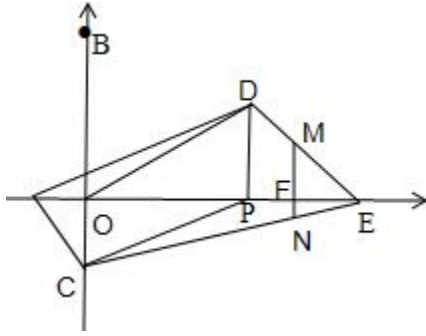


例 38 (2014 年温州市中考第 24 题) 如图 1, 在平面直角坐标系中, 点 A、B 的坐标分别是 $(-3,0)$ $(0,6)$. 动点 P 从点 O 出发, 沿 x 轴正方向以每秒 1 个单位的速度运动, 同时动点 C 从点 B 出发, 沿射线 BO 方向以每秒 2 个单位的速度运动. 以 CP、CO 为邻边构造平行四边形 PCOD, 在线段 OP 延长线上取点 E, 使 $PE=AO$. 设点 P 运动的时间为 t 秒.

- (1) 当点 C 运动到线段 OB 的中点时, 求 t 的值及点 E 的坐标;
 - (2) 当点 C 在线段 OB 上时, 求证四边形 ADEC 是平行四边形;
 - (3) 在线段 PE 上取点 F, 使 $PF=1$, 过点 F 作 $MN \perp PE$, 截取 $FM=2$, $FN=1$, 且点 M、N 分别在第一、四象限. 在运动过程中, 设平行四边形 PCOD 的面积为 S.
- ①当点 M、N 中有一点落在四边形 ADEC 的边长时, 求出所有满足条件的 t 的值;
- ②若点 M、N 中恰好只有一个点落在四边形 ADEC 的内部 (不包括边界) 时, 直接写出 S 的取值范围.

【解答】

- (1) $\because OB=6$, C 是 OB 的中点,
 $\therefore BC=\frac{1}{2}OB=3$,
 $\therefore 2t=3$ 即 $t=\frac{3}{2}$,
 $\therefore OE=\frac{3}{2}+3=\frac{9}{2}$, E $(\frac{9}{2}, 0)$
- (2) 如图, 连接 CD 交 OP 于点 G,



$$\because NF \parallel OC,$$

$$\therefore \triangle EFN \sim \triangle EOC,$$

$$\therefore \frac{FN}{OC} = \frac{EF}{EO} \text{ 即 } \frac{1}{2t-6} = \frac{2}{3+t},$$

$$\therefore t=5.$$

$$\textcircled{2} \frac{27}{8} < S \leq \frac{9}{2} \text{ 或 } \frac{27}{2} < S \leq 20.$$

$$\text{当 } 1 \leq t < \frac{9}{4} \text{ 时,}$$

$$S = t(6-2t) = -2\left(t - \frac{3}{2}\right)^2 + \frac{9}{2},$$

$$\because t = \frac{3}{2} \text{ 在 } 1 \leq t < \frac{9}{4} \text{ 范围内,}$$

$$\therefore \frac{27}{8} < S \leq \frac{9}{2},$$

$$\text{当 } \frac{9}{2} < t \leq 5 \text{ 时, } S = t(2t-6) = 2\left(t - \frac{3}{2}\right)^2 - \frac{9}{2},$$

$$\therefore \frac{27}{2} < S \leq 20.$$

例 39 (2014 年苏州市中考第 28 题) 如图 1, 已知 $l_1 \perp l_2$, $\odot O$ 与 l_1 、 l_2 都相切, $\odot O$ 的半径为 2. 矩形 ABCD 的边 AD、AB 分别与 l_1 、 l_2 重合, $AB=4\sqrt{3}$, $AD=4$. 若 $\odot O$ 与矩形 ABCD 沿 l_1 同时向右移动, $\odot O$ 的移动速度为每秒 3 个单位, 矩形 ABCD 的移动速度为每秒 4 个单位, 设移动的时间为 t 秒.

(1) 如图 1, 连结 OA、AC, 则 $\angle OAC$ 的度数为 _____ ;

(2) 如图 2, 两个图形移动一段时间后, O 到达 O' 的位置, 矩形 ABCD 到达 $A'B'C'D'$ 的位置, 此时点 O' 、 A' 、 C' 恰好在同一条直线上, 求圆心 O 移动的距离 (即 OO' 的长);

(3) 在移动过程中, 圆心 O' 到矩形对角线 $A'C'$ 所在直线的距离在不断变化, 设该距离为 d , 当 $d < 2$ 时, 求 t 的取值范围.

【解答】

(1) $\because l_1 \perp l_2$, $\odot O$ 与 l_1 , l_2 都相切,

$\therefore \angle OAD = 45^\circ$,

$\because AB = 4\sqrt{3}\text{cm}$, $AD = 4\text{cm}$,

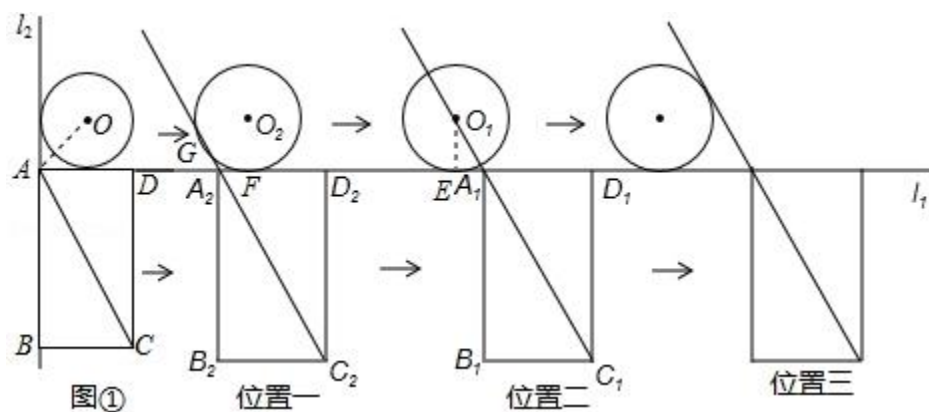
$\therefore CD = 4\sqrt{3}\text{cm}$, $AD = 4\text{cm}$,

$\therefore \tan \angle DAC = \frac{CD}{AD} = \frac{4\sqrt{3}}{4} = \sqrt{3}$,

$\therefore \angle DAC = 60^\circ$,

$\therefore \angle OAC$ 的度数为: $\angle OAD + \angle DAC = 105^\circ$,

故答案为: 105° ;



(2) 如图位置二, 当 O_1, A_1, C_1 恰好在同一直线上时, 设 $\odot O_1$ 与 l_1 的切点为 E , 连接 O_1E , 可得 $O_1E=2, O_1E \perp l_1$,

在 $Rt\triangle A_1D_1C_1$ 中, $\because A_1D_1=4, C_1D_1=4\sqrt{3}$,

$$\therefore \tan \angle C_1A_1D_1 = \sqrt{3}, \therefore \angle C_1A_1D_1 = 60^\circ,$$

在 $Rt\triangle A_1O_1E$ 中, $\angle O_1A_1E = \angle C_1A_1D_1 = 60^\circ$,

$$\therefore A_1E = \frac{2}{\tan 60^\circ} = \frac{2\sqrt{3}}{3},$$

$$\because A_1E = AA_1 - OO_1 - 2 = t - 2,$$

$$\therefore t - 2 = \frac{2\sqrt{3}}{3},$$

$$\therefore t = \frac{2\sqrt{3}}{3} + 2,$$

$$\therefore OO_1 = 3t = 2\sqrt{3} + 6;$$

(3) ①当直线 AC 与 $\odot O$ 第一次相切时, 设移动时间为 t_1 ,

如图, 此时 $\odot O$ 移动到 $\odot O_2$ 的位置, 矩形 $ABCD$ 移动到 $A_2B_2C_2D_2$ 的位置,

设 $\odot O_2$ 与直线 l_1, A_2C_2 分别相切于点 F, G , 连接 O_2F, O_2G, O_2A_2 ,

$$\therefore O_2F \perp l_1, O_2G \perp A_2C_2,$$

由 (2) 得, $\angle C_2A_2D_2 = 60^\circ, \therefore \angle GA_2F = 120^\circ$,

$$\therefore \angle O_2A_2F = 60^\circ,$$

在 $\text{Rt}\triangle A_2O_2F$ 中, $O_2F=2$, $\therefore A_2F=\frac{2\sqrt{3}}{3}$,

$\because OO_2=3t$, $AF=AA_2+A_2F=4t_1+\frac{2\sqrt{3}}{3}$,

$\therefore 4t_1+\frac{2\sqrt{3}}{3}-3t_1=2$,

$\therefore t_1=2-\frac{2\sqrt{3}}{3}$,

②当直线 AC 与 $\odot O$ 第二次相切时, 设移动时间为 t_2 ,

记第一次相切时为位置一, 点 O_1, A_1, C_1 共线时位置二, 第二次相切时为位置三,

由题意知, 从位置一到位置二所用时间与位置二到位置三所用时间相等,

$\therefore \frac{2\sqrt{3}}{3}+2-(2-\frac{2\sqrt{3}}{3})=t_2-(\frac{2\sqrt{3}}{3}+2)$,

解得: $t_2=2+2\sqrt{3}$,

综上所述, 当 $d<2$ 时, t 的取值范围是: $2-\frac{2\sqrt{3}}{3}<t<2+2\sqrt{3}$.

例 40 (2014 年安徽省中考第 23 题) 如图 1, 正六边形 ABCDEF 的边长为 a , P 是 BC 边上的一动点, 过 P 作 $PM \parallel AB$ 交 AF 于 M , 作 $PN \parallel CD$ 交 DE 于 N .

(1) ① $\angle MPN = \underline{\quad}^\circ$; ② 求证: $PM + PN = 3a$.

(2) 如图 2, 点 O 是 AD 的中点, 连结 OM 、 ON , 求证: $OM = ON$;

(3) 如图 3, 点 O 是 AD 的中点, OG 平分 $\angle MON$, 判断四边形 $OMGN$ 是否为特殊的四边形, 并说明理由.

【解答】

① $\because$ 四边形 ABCDEF 是正六边形,

$$\therefore \angle A = \angle B = \angle C = \angle D = \angle E = \angle F = 120^\circ.$$

又 $\because PM \parallel AB$, $PN \parallel CD$,

$$\therefore \angle BPM = 60^\circ, \angle NPC = 60^\circ,$$

$$\therefore \angle MPN = 180^\circ - \angle BPM - \angle NPC = 180^\circ - 60^\circ - 60^\circ = 60^\circ,$$

故答案为: 60° .

② 如图 1, 作 $AG \perp MP$ 交 MP 于点 G , $BH \perp MP$ 于点 H ,

$CL \perp PN$ 于点 L , $DK \perp PN$ 于点 K ,

$$MP + PN = MG + GH + HP + PL + LK + KN.$$

$\because$ 正六边形 ABCDEF 中, $PM \parallel AB$, 作 $PN \parallel CD$,

$$\therefore \angle AMG = \angle BPH = \angle CPL = \angle DNK = 60^\circ,$$

$$\therefore GM = \frac{1}{2}AM, HL = \frac{1}{2}BP, PL = \frac{1}{2}PM, NK = \frac{1}{2}ND,$$

$$\therefore AM = BP, PC = DN,$$

$$\therefore MG + HP + PL + KN = a, GH = LK = a,$$

$$\therefore MP+PN=MG+GH+HP+PL+LK+KN=3a.$$

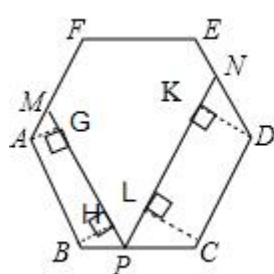


图1

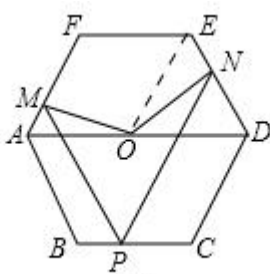


图2

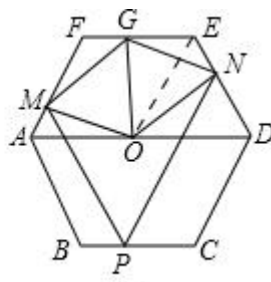


图3

(2) 如图 2, 连接 OE,

$\because$ 四边形 ABCDEF 是正六边形, $AB \parallel MP$, $PN \parallel DC$,

$\therefore AM=BP=EN$,

又 $\because \angle MAO = \angle NOE = 60^\circ$, $OA=OE$,

在 $\triangle ONE$ 和 $\triangle OMA$ 中,

$$\begin{cases} OA=OE \\ \angle MAO=\angle NOE \\ AM=BP \end{cases},$$

$\therefore \triangle OMA \cong \triangle ONE$ (SAS), $\therefore OM=ON$.

(3) 如图 3, 连接 OE,

由 (2) 得, $\triangle OMA \cong \triangle ONE$, $\therefore \angle MOA = \angle EON$,

$\because EF \parallel AO$, $AF \parallel OE$,

$\therefore$ 四边形 AOEFG 是平行四边形,

$\therefore \angle AFE = \angle AOE = 120^\circ$, $\therefore \angle MON = 120^\circ$, $\therefore \angle GON = 60^\circ$,

$\because \angle GON = 60^\circ - \angle EON$, $\angle DON = 60^\circ - \angle EON$, $\therefore \angle GOE = \angle DON$,

$\because OD=OE$, $\angle ODN = \angle OEG$,

在 $\triangle GOE$ 和 $\triangle DON$ 中,

$$\begin{cases} \angle GOE = \angle DON \\ OE = OD \\ \angle ODN = \angle OEG \end{cases},$$

$\therefore \triangle GOE \cong \triangle NOD$ (ASA), $\therefore ON = OG$,

又 $\because \angle GON = 60^\circ$,

$\therefore \triangle ONG$ 是等边三角形, $\therefore ON = NG$,

又 $\because OM = ON$, $\angle MOG = 60^\circ$,

$\therefore \triangle MOG$ 是等边三角形,

$\therefore MG = GO = MO$,

$\therefore MO = ON = NG = MG$,

$\therefore$ 四边形 MONG 是菱形.

例 41 (2014 年河北省中考第 25 题) 如图 1、图 2，优弧 AB 所在圆 O 的半径为 2， $AB=2\sqrt{3}$. 点 P 为优弧 AB 上一点 (点 P 不与 A、B 重合)，将图形沿 BP 折叠，得到点 A 的对称点 A'.

- (1) 点 O 到弦 AB 的距离是? 当 BP 经过点 O 时， $\angle ABA'=?$
- (2) 当 BA' 与圆 O 相切时，如图 2，求折痕的长；
- (3) 若线段 BA' 与优弧 AB 只有一个公共点 B，设 $\angle ABP=a$ ，确定 a 的取值范围.

【解答】

(1) ①过点 O 作 $OH \perp AB$ ，垂足为 H，连接 OB，如图 1①所示.

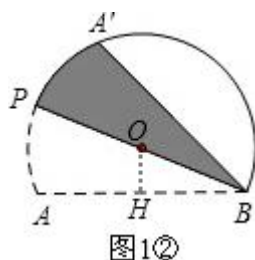
$$\because OH \perp AB, AB=2\sqrt{3},$$

$$\therefore AH=BH=\sqrt{3}.$$

$$\because OB=2,$$

$$\therefore OH=1.$$

$\therefore$ 点 O 到 AB 的距离为 1.



②当 BP 经过点 O 时，如图 1②所示.

$$\because OH=1, OB=2, OH \perp AB,$$

$$\therefore \sin \angle OBH = \frac{OH}{OB} = \frac{1}{2}.$$

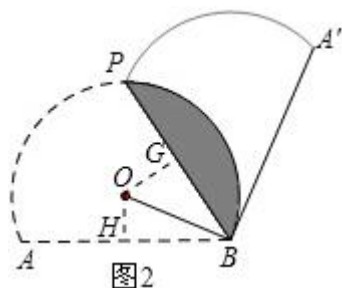
$$\therefore \angle OBH = 30^\circ.$$

由折叠可得: $\angle A'BP = \angle ABP = 30^\circ$.

$$\therefore \angle ABA' = 60^\circ.$$

故答案为：1、60.

(2) 过点 O 作 $OG \perp BP$ ，垂足为 G，如图 2 所示.



$\because BA'$ 与 $\odot O$ 相切,

$\therefore OB \perp A'B$.

$\therefore \angle OBA' = 90^\circ$.

$\because \angle OBH = 30^\circ$,

$\therefore \angle ABA' = 120^\circ$.

$\therefore \angle A'BP = \angle ABP = 60^\circ$.

$\therefore \angle OBP = 30^\circ$.

$\therefore OG = \frac{1}{2} OB = 1$.

$\therefore BG = \sqrt{3}$.

$\because OG \perp BP$,

$\therefore BG = PG = \sqrt{3}$.

$\therefore BP = 2\sqrt{3}$.

$\therefore$ 折痕的长为 $2\sqrt{3}$.

(3) 若线段 BA' 与优弧 AB 只有一个公共点 B,

I. 当点 A' 在 $\odot O$ 的内部时, 此时 α 的范围是 $0^\circ < \alpha < 30^\circ$.

II. 当点 A' 在 $\odot O$ 的外部时, 此时 α 的范围是 $60^\circ \leq \alpha < 120^\circ$.

例 42 (2014 年北京市中考第 24 题) 在正方形 ABCD 外侧作直线 AP, 点 B 关于直线 AP 的对称点为 E, 连结 BE、DE, 其中 DE 交直线 AP 于点 P.

(1) 依题意补全图 1;

(2) 若 $\angle PAB=20^\circ$, 求 $\angle ADF$ 的度数;

(3) 如图 2, 若 $45^\circ < \angle PAB < 90^\circ$, 用等式表示线段 AB、FE、FD 之间的数量关系, 并证明.

【解答】

(1) 如图 1 所示:

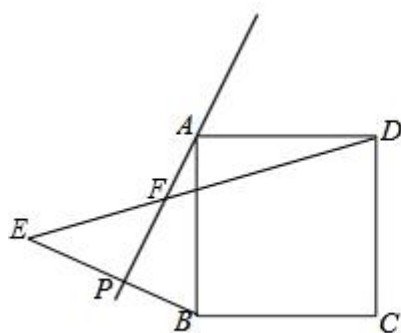


图1

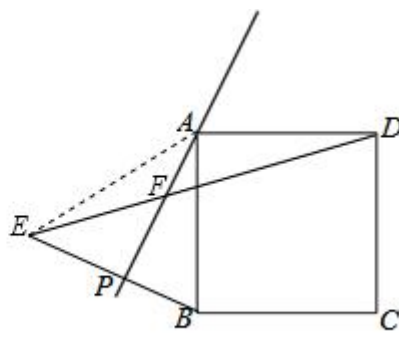


图2

(2) 如图 2, 连接 AE,

则 $\angle PAB = \angle PAE = 20^\circ$, $AE = AB = AD$,

$\because$ 四边形 ABCD 是正方形,

$\therefore \angle BAD = 90^\circ$,

$\therefore \angle EAP = \angle BAP = 20^\circ$,

$\therefore \angle EAD = 130^\circ$,

$\therefore \angle ADF = \frac{180^\circ - 130^\circ}{2} = 25^\circ$;

(3) 如图 3, 连接 AE、BF、BD,

由轴对称的性质可得: $EF = BF$, $AE = AB = AD$,

$$\angle ABF = \angle AEF = \angle ADF,$$

$$\therefore \angle BFD = \angle BAD = 90^\circ,$$

$$\therefore BF^2 + FD^2 = BD^2,$$

$$\therefore EF^2 + FD^2 = 2AB^2.$$

例 43 (2014 年沈阳市中考第 24 题) 如图 1, 在菱形 ABCD 中, 对角线 AC 与 BD 相交于点 O, $AB=13$, $BD=24$, 在菱形 ABCD 的外部以 AB 为边作等边三角形 ABE. 点 F 是对角线 BD 上的一个动点 (点 F 不与点 B 重合), 将线段 AF 绕点 A 顺时针旋转 60° 得到线段 AM, 连结 FM.

(1) 求 AO 的长;

(2) 如图 2, 当点 F 在线段 BO 上, 且 M、F、C 三点在同一条直线上时, 求证:
 $AC=3^{1/2}AM$;

(3) 连结 EM, 若 $\triangle AEM$ 的面积为 40, 请直接写出 $\triangle AFM$ 的周长.

【解答】

(1) 解: $\because$ 四边形 ABCD 是菱形,

$$\therefore AC \perp BD, OB=OD=\frac{1}{2}BD,$$

$$\because BD=24, \therefore OB=12,$$

在 $Rt\triangle OAB$ 中, $\because AB=13$,

$$\therefore OA=\sqrt{AB^2-OB^2}=\sqrt{13^2-12^2}=5.$$

(2) 证明: 如图 2,

$\because$ 四边形 ABCD 是菱形,

$\therefore BD$ 垂直平分 AC ,

$$\therefore FA=FC, \angle FAC=\angle FCA,$$

由已知 $AF=AM$, $\angle MAF=60^\circ$,

$\therefore \triangle AFM$ 为等边三角形,

$$\therefore \angle M=\angle AFM=60^\circ,$$

$\because$ 点 M, F, C 三点在同一条直线上,

$$\therefore \angle FAC + \angle FCA = \angle AFM = 60^\circ,$$

$$\therefore \angle FAC = \angle FCA = 30^\circ,$$

$$\therefore \angle MAC = \angle MAF + \angle FAC = 60^\circ + 30^\circ = 90^\circ,$$

在 $\text{Rt}\triangle ACM$ 中, $\angle ACM = 180^\circ - 90^\circ - 60^\circ = 30^\circ$.

所以 $AC = \sqrt{3} AM$

(3) 解: 如图 3, 连接 EM,

$\because \triangle ABE$ 是等边三角形,

$$\therefore AE = AB, \angle EAB = 60^\circ,$$

由 (1) 知 $\triangle AFM$ 为等边三角形,

$$\therefore AM = AF, \angle MAF = 60^\circ,$$

$$\therefore \angle EAM = \angle BAF,$$

在 $\triangle AEM$ 和 $\triangle ABF$ 中,

$$AE = AB, \angle EAM = \angle BAF, AM = AF,$$

$$\therefore \triangle AEM \cong \triangle ABF \text{ (SAS)},$$

$\because \triangle AEM$ 的面积为 40, $\triangle ABF$ 的高为 AO

$$\therefore \frac{1}{2} BF \cdot AO = 40, BF = 16,$$

$$\therefore FO = BF - BO = 16 - 12 = 4,$$

$$AF = \sqrt{AO^2 + FO^2} = \sqrt{5^2 + 4^2} = \sqrt{41},$$

$$\therefore \triangle AFM \text{ 的周长为 } 3\sqrt{41}.$$

例 44 (2014 年沈阳市中考第 25 题) 如图 1, 在平面直角坐标系中, 二次函数 $y=-\frac{4}{27}x^2+12$ 的图像与 y 轴交于点 A, 与 x 轴交于点 B、C 两点 (点 B 在点 C 的左侧), 连结 AB、AC.

(1) 点 B 的坐标为____, 点 C 的坐标为____;

(2) 过点 C 作射线 $CD \parallel AB$, 点 M 是线段 AB 上的动点, 点 P 是线段 AC 上的动点, 且始终满足 $BM=AP$ (点 M 与点 A、B 不重合), 过点 M 作 $MN \parallel BC$ 交 AC 于点 Q, 交射线 CD 于点 N (点 Q 不与点 P 重合), 连结 PM、PN, 设线段 AP 的长为 n .

①如图 2, 当 $n > \frac{1}{2}AC$ 时, 求证: $\triangle PAM \cong \triangle NCP$;

②直接用含有 n 的式子表示线段 PQ 的长;

③若 PM 的长为 $9\sqrt{2}$, 当二次函数 $y=-\frac{4}{27}x^2+12$ 的图像经过平移同时过点 P 和点 N 时, 请直接写出此时二次函数的表达式.

【解答】

(1) 答: $(-9, 0)$, $(9, 0)$.

解: B、C 为抛物线与 x 轴的交点, 故代入 $y=0$, 得 $y=-\frac{4}{27}x^2+12=0$,

解得 $x=-9$ 或 $x=9$,

即 B $(-9, 0)$, C $(9, 0)$.

(2) ①证明: $\because AB \parallel CN$,

$\therefore \angle MAP = \angle PCN$,

$\because MN \parallel BC$,

$\therefore$ 四边形 MBCN 为平行四边形,

$$\therefore BM=CN,$$

$$\because AP=BM,$$

$$\therefore AP=CN,$$

$$\because BO=OC, OA \perp BC,$$

$$\therefore OA \text{ 垂直平分 } BC,$$

$$\therefore AB=AC,$$

$$\therefore AM=AB-BM=AC-AP=CP.$$

$$\text{在 } \triangle PAM \text{ 和 } \triangle NCP \text{ 中, } \begin{cases} AP=CP \\ \angle MAP=\angle PCN, \\ AM=CP \end{cases}$$

$$\therefore \triangle PAM \cong \triangle NCP \text{ (SAS).}$$

②解：1. 当 $n < \frac{1}{2}AC$ 时，如图 1，

$$\because \text{四边形 } MBCN \text{ 为平行四边形,}$$

$$\therefore \angle MBC=\angle QNC,$$

$$\because AB=AC, MN \parallel BC,$$

$$\therefore \angle MBC=\angle QCB=\angle NQC,$$

$$\therefore \angle NQC=\angle QNC,$$

$$\therefore CN=CQ,$$

$$\because \triangle MAP \cong \triangle PCN,$$

$$\therefore AP=CN=CQ,$$

$$\because AP=n, AC=\sqrt{AO^2+OC^2}=\sqrt{12^2+9^2}=15,$$

$$\therefore PQ=AC-AP-QC=15-2n.$$

2. 当 $n=\frac{1}{2}AC$ 时，显然 P、Q 重合， $PQ=0$.

3. 当 $n > \frac{1}{2}AC$ 时, 如图 2,

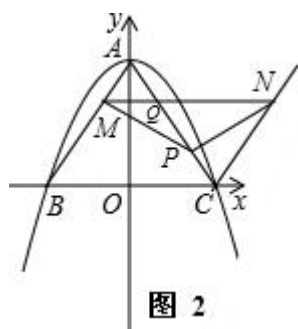


图 2

$\because$ 四边形 MBCN 为平行四边形,

$\therefore \angle MBC = \angle QNC, BM = CN$

$\because AB = AC, MN \parallel BC,$

$\therefore \angle MBC = \angle QCB = \angle NQC,$

$\therefore \angle NQC = \angle QNC,$

$\therefore BM = CN = CQ,$

$\because AP = BM, \therefore AP = CQ,$

$\because AP = n, AC = 15,$

$\therefore PQ = AP + QC - AC = 2n - 15.$

综上所述, 当 $n < \frac{1}{2}AC$ 时, $PQ = 15 - 2n$; 当 $n > \frac{1}{2}AC$ 时, $PQ = 2n - 15.$

③ $y = -\frac{4}{27}x^2 + \frac{16}{9}x + 4$ 或 $y = -\frac{4}{27}x^2 + \frac{32}{9}x - 12.$

分析如下:

1. 当 $n < \frac{1}{2}AC$ 时, 如图 3, 过点 P 作 x 轴的垂线, 交 MN 于 E, 交 BC 于 F.

此时 $\triangle PEQ \sim \triangle PFC \sim \triangle AOC, PQ = 15 - 2n.$

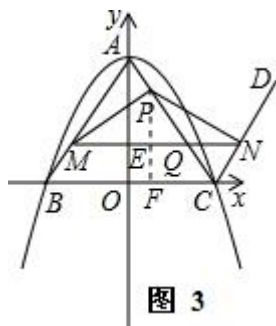


图 3

$$\because PM=PN,$$

$$\therefore ME=EN=\frac{1}{2}MN=\frac{1}{2}BC=9,$$

$$\therefore PE=\sqrt{PM^2-ME^2}=\sqrt{97-81}=4,$$

$$\because OC:OA:AC=3:4:5, \triangle PEQ \sim \triangle PFC \sim \triangle AOC,$$

$$\therefore PQ=5,$$

$$\therefore 15-2n=5,$$

$$\therefore AP=n=5,$$

$$\therefore PC=10,$$

$$\therefore FC=6, PF=8,$$

$$\because OF=OC-FC=9-6=3, EN=9, EF=PF-PE=8-4=4,$$

$$\therefore P(3, 8), N(12, 4).$$

设二次函数 $y=-\frac{4}{27}x^2+12$ 平移后的解析式为 $y=-\frac{4}{27}(x+k)^2+12+h$,

$$\therefore \begin{cases} 8 = -\frac{4}{27}(3+k)^2 + 12 + h \\ 4 = -\frac{4}{27}(12+k)^2 + 12 + h \end{cases}, \text{解得} \begin{cases} k = -6 \\ h = -\frac{8}{3} \end{cases},$$

$$\therefore y = -\frac{4}{27}(x-6)^2 + 12 - \frac{8}{3} = -\frac{4}{27}x^2 + \frac{16}{9}x + 4.$$

2. 当 $n > \frac{1}{2}AC$ 时, 如图 4, 过点 P 作 x 轴的垂线, 交 MN 于 E, 交 BC 于 F.

此时 $\triangle PEQ \sim \triangle PFC \sim \triangle AOC$, $PQ=2n-15$.

例 45 (2014 年济南市中考第 28 题) 如图 1, 抛物线 $y=-\frac{3}{16}x^2$ 平移后过点 A (8, 0) 和原点, 顶点为 B, 对称轴与 x 轴相交于点 C, 与原抛物线相交于点 D.

(1) 求平移后的抛物线的解析式并直接写出阴影部分的面积 $S_{\text{阴影}}$;

(2) 如图 2, 直线 AB 与 y 轴相交于点 P, 点 M 为线段 OA 上的一个动点, $\angle PMN$ 为直角, 边 MN 与 AP 相交于点 N. 设 $OM=t$, 试探究:

① t 为何值时 $\triangle MAN$ 为等腰三角形;

② t 为何值时 PN 的长度最小, 最小长度是多少?

【解答】

(1) 设平移后抛物线的解析式 $y=-\frac{3}{16}x^2+bx$,

将点 A (8, 0) 代入, 得 $y=-\frac{3}{16}x^2+\frac{3}{2}x$,

顶点 B (4, 3),

$S_{\text{阴影}}=OC \times CB=12$.

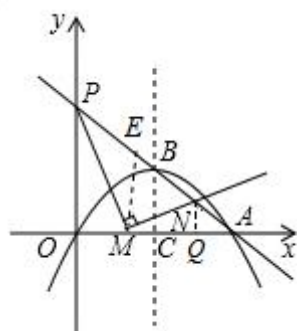


图2

(2) 直线 AB 的解析式为 $y=-\frac{3}{4}x+6$,

作 NQ 垂直于 x 轴于点 Q

① 当 $MN=AN$ 时, N 点的横坐标为 $\frac{8-t}{2}$, 纵坐标为 $\frac{24-3t}{8}$,

由三角形 NQM 和三角形 MOP 相似可知 $\frac{NQ}{OM} = \frac{MQ}{OP}$,

$$\frac{24-3t}{t} = \frac{8-t}{6}, \text{ 解得 } t_1 = \frac{9}{2}, t_2 = 8 \text{ (舍去)}.$$

当 $AM=AN$ 时, $AN=8-t$,

由三角形 ANQ 和三角形 APO 相似可知

$$NQ = \frac{3}{5}(8-t), AQ = \frac{4}{5}(8-t), MQ = \frac{8-t}{5},$$

由三角形 NQM 和三角形 MOP 相似可知 $\frac{NQ}{OM} = \frac{MQ}{OP}$

$$\text{得: } \frac{\frac{3}{5}(8-t)}{t} = \frac{\frac{8-t}{5}}{6},$$

解得: $t=18$ (舍去).

当 $MN=MA$ 时, $\angle MNA = \angle MAN < 45^\circ$,

故 $\angle AMN$ 是钝角, 显然不成立, 故 $t = \frac{9}{2}$.

②方法一: 作 PN 的中点 E , 连接 EM , 则 $EM=PE=\frac{1}{2}PN$,

当 EM 垂直于 x 轴且 M 为 OQ 中点时 PN 最小,

此时 $t=3$, 证明如下:

假设 $t=3$ 时 M 记为 M_0 , E 记为 E_0

若 M 不在 M_0 处, 即 M 在 M_0 左侧或右侧,

若 E 在 E_0 左侧或者 E 在 E_0 处, 则 EM 一定大于 E_0M_0 , 而 PE 却小于 PE_0 , 这与

$EM=PE$ 矛盾,

故 E 在 E_0 右侧, 则 PE 大于 PE_0 , 相应 PN 也会增大,

故若 M 不在 M_0 处时 PN 大于 M_0 处的 PN 的值,

故当 $t=3$ 时, $MQ=3$, $NQ=\frac{3}{2}$,

根据勾股定理可求出 $PM=3\sqrt{5}$

与 $MN = \frac{3}{2} \sqrt{5}$, $PN = \frac{15}{2}$.

故当 $t=3$ 时, PN 取最小值为 $\frac{15}{2}$.

方法二: 由 MN 所在直线方程为 $y = \frac{t}{6}x - \frac{t^2}{6}$,

与直线 AB 的解析式 $y = -\frac{3}{4}x + 6$ 联立,

得点 N 的横坐标为 $x_N = \frac{72 - 2t^2}{9 + 2t}$,

即 $t^2 - x_N t + 36 - \frac{9}{2}x_N = 0$,

$\Delta = x_N^2 - 4(36 - \frac{9}{2}x_N) = 0$,

得 $x_N = 6$ 或 $x_N = -24$,

又因为 $0 < x_N < 8$,

所以 x_N 的最小值为 6, 此时 $t=3$,

当 $t=3$ 时, N 的坐标为 $(6, \frac{3}{2})$, 此时 PN 取最小值为 $\frac{15}{2}$.

例 46 (2014 年长春市中考第 23 题) 如图 1，在平面直角坐标系中，抛物线 $y=x^2+bx+c$ 经过点 $(1, -1)$ ，且对称轴为直线 $x=2$. 点 P、Q 均抛物线上，点 P 位于对称轴右侧，点 Q 位于对称轴左侧，PA 垂直对称轴于点 A，QB 垂直对称轴于点 B，且 $QB=PA+1$ ，设点 P 的横坐标为 m .

- (1) 求这条抛物线所对应的函数关系式；
- (2) 求点 Q 的坐标 (用含 m 的式子表示)；
- (3) 请探究 $PA+QB=AB$ 是否成立，并说明理由；
- (4) 抛物线 $y_1=a_1x^2+b_1x+c_1$ ($a_1 \neq 0$) 经过 Q、B、P 三点，若其对称轴把四边形 PAQB 分成面积比为 1: 5 的两部分，直接写出此时 m 的值.

(5) 【解答】

(6) (1) $\because$ 抛物线 $y=x^2+bx+c$ 经过点 $(1, -1)$ ，且对称轴为在直线 $x=2$ ，

$$\therefore \begin{cases} -\frac{b}{2} = 2 \\ 1+b+c = -1 \end{cases}, \text{ 解得 } \begin{cases} b = -4 \\ c = 2 \end{cases}.$$

$\therefore$ 这条抛物线所对应的函数关系式 $y=x^2-4x+2$;

(2) $\because$ 抛物线上点 P 的横坐标为 m ,

$\therefore P(m, m^2-4m+2)$,

$\therefore PA=m-2$,

$QB=PA+1=m-2+1=m-1$,

$\therefore$ 点 Q 的横坐标为 $2-(m-1)=3-m$,

点 Q 的纵坐标为 $2-4+2=m^2-2m-1$,

$\therefore$ 点 Q 的坐标为;

(3) $PA+QB=AB$ 成立.

理由如下: $\because P(m, m^2-4m+2), Q,$

$\therefore A(2, m^2-4m+2), B(2, m^2-2m-1),$

$\therefore AB = (m^2-2m-1) - (m^2-4m+2) = 2m-3,$

又 $\because PA=m-2, QB=m-1,$

$\therefore PA+QB=m-2+m-1=2m-3,$

$\therefore PA+QB=AB;$

(4) $\because$ 抛物线 $y=ax^2+bx+c$ ($a \neq 0$) 经过 $Q、B、P$ 三点,

$\therefore$ 抛物线 $y=ax^2+bx+c$ 的对称轴为 QB 的垂直平分线,

$\because$ 对称轴把四边形 $PAQB$ 分成面积为 $1:5$ 的两部分,

$$\therefore \frac{\frac{m-1}{2} \times \frac{2m-3}{2}}{1+5} = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} (2m-3) \times (2m-3),$$

整理得, $(2m-3)(m-3)=0,$

$\because$ 点 P 位于对称轴右侧,

$\therefore m > 2,$

$\therefore 2m-3 \neq 0,$

$\therefore m-3=0,$

解得 $m=3.$

例 47 (2015 年安徽省中考第 23 题) 如图 1, 在四边形 ABCD 中, 点 E、F 分别是 AB、CD 的中点, 过点 E 作 AB 的垂线, 过点 F 作 CD 的垂线, 两垂线交于点 G, 连结 AG、BG、CG、DG, 且 $\angle AGD = \angle BGC$ 。

求证: $AD=BC$;

求证: $\triangle AGD \sim \triangle EGF$;

如图 2, 若 AD、BC 所在直线互相垂直, 求 AD/EF 的值。

【解答】

(1) 证明: $\because GE$ 是 AB 的垂直平分线, $\therefore GA=GB$,
同理: $GD=GC$,

在 $\triangle AGD$ 和 $\triangle BGC$ 中,
$$\begin{cases} GA=GB \\ \angle AGD=\angle BGC \\ GD=GC \end{cases},$$

$\therefore \triangle AGD \cong \triangle BGC$ (SAS), $\therefore AD=BC$;

(2) 证明: $\because \angle AGD = \angle BGC$,
 $\therefore \angle AGB = \angle DGC$,

在 $\triangle AGB$ 和 $\triangle DGC$ 中, $\frac{GA}{GD} = \frac{GB}{GC}$,

$\therefore \triangle AGB \sim \triangle DGC$, $\therefore \frac{EG}{FG} = \frac{GA}{GD}$,

又 $\because \angle AGE = \angle DGF$,

$\therefore \angle AGD = \angle EGF$, $\therefore \triangle AGD \sim \triangle EGF$;

(3) 解: 延长 AD 交 GB 于点 M, 交 BC 的延长线于点 H, 如图所示:
则 $AH \perp BH$,

$\because \triangle AGD \cong \triangle BGC$, $\therefore \angle GAD = \angle GBC$,

在 $\triangle GAM$ 和 $\triangle HBM$ 中, $\angle GAD = \angle GBC$, $\angle GMA = \angle HMB$,

$\therefore \angle AGB = \angle AHB = 90^\circ$, $\therefore \angle AGE = \frac{1}{2} \angle AGB = 45^\circ$,

$\therefore \frac{AG}{EG} = \sqrt{2}$,

又 $\because \triangle AGD \sim \triangle EGF$, $\therefore \frac{AD}{EF} = \frac{AG}{EG} = \sqrt{2}$.

例 48 (2015 年北京市中考第 28 题) 在正方形 ABCD 中，BD 是一条对角线。点 P 在射线 CD 上 (与 C、D 不重合)，连结 AP，平移 $\triangle ADP$ ，使点 D 移动到点 C，得到 $\triangle BCQ$ ，过点 Q 作 $QH \perp BD$ 于点 H，连结 AH、PH。

(1) 若点 P 在线段 CD 上，如图 1.

①依题意补全图 1；

②判断 AH 与 PH 的数量关系与位置关系并加以证明；

(2) 若点 P 在线段 CD 的延长线上，且 $\angle AHQ = 152^\circ$ ，正方形 ABCD 的边长为 1，请写出求 DP 的长的思路。(可以不写出计算结果)

【解答】

(1) ①如图 1；

②如图 1，连接 CH，

$\because$ 四边形 ABCD 是正方形， $QH \perp BD$ ，

$\therefore \angle HDQ = 45^\circ$ ，

$\therefore \triangle DHQ$ 是等腰直角三角形.

$\because DP = CQ$ ，

在 $\triangle HDP$ 与 $\triangle HQC$ 中. $\because \begin{cases} DH = QH \\ PH = CH \\ DP = QC \end{cases}$ ，

$\therefore \triangle HDP \cong \triangle HQC$ (SSS)，

$\therefore PH = CH$ ， $\angle HPC = \angle HCP$.

$\because BD$ 是正方形 ABCD 的对称轴，

$\therefore AH = CH$ ， $\angle DAH = \angle HCP$ ，

$$\therefore \angle AHP = 180^\circ - \angle ADP = 90^\circ,$$

$$\therefore AH = PH, AH \perp PH.$$

(2) 如图 2,

$$\because \text{四边形 } ABCD \text{ 是正方形, } QH \perp BD, \therefore \angle HDQ = 45^\circ,$$

$$\therefore \triangle DHQ \text{ 是等腰直角三角形.}$$

$$\because \triangle BCQ \text{ 由 } \triangle ADP \text{ 平移而成, } \therefore PD = CQ.$$

作 $HR \perp PC$ 于点 R ,

$$\because \angle AHQ = 152^\circ, \therefore \angle AHB = 62^\circ, \therefore \angle DAH = 17^\circ.$$

$$\text{设 } DP = x, \text{ 则 } DR = HR = RQ = \frac{1-x}{2}.$$

$$\because \tan 17^\circ = \frac{HR}{CR}, \text{ 即 } \tan 17^\circ = \frac{\frac{1-x}{2}}{\frac{1+x}{2}}, \therefore x = \frac{1 - \tan 17^\circ}{1 + \tan 17^\circ}.$$

例 49 (2015 年杭州市中考第 22 题) 如图 1, 在 $\triangle ABC$ 中, $BC > AC$, $\angle ACB = 90^\circ$, 点 D 在 AB 边上, $DE \perp AC$ 于点 E。

(1) 若 $AD/DB = 1/3$, $AE = 2$, 求 EC 的长;

(2) 设点 F 在线段 EC 上, 点 G 在射线 CB 上, 以 F、C、G 为顶点的三角形与 $\triangle EDC$ 有一个锐角相等, FG 交 CD 于点 P。问: 线段 CP 可能是 $\triangle CFG$ 的高还是中线? 或两者都有可能? 请说明理由。

【解答】

(1) $\because \angle ACB = 90^\circ$, $DE \perp AC$,

$$\therefore DE \parallel BC, \therefore \frac{AD}{DB} = \frac{AE}{EC},$$

$$\because \frac{AD}{DB} = \frac{1}{3}, AE = 2, \therefore EC = 6;$$

(2) ①如图 1, 若 $\angle CFG = \angle ECD$, 此时线段 CP 是 $\triangle CFG$ 的 FG 边上的中线。

证明: $\because \angle CFG + \angle CGF = 90^\circ$, $\angle ECD + \angle PCG = 90^\circ$,

又 $\because \angle CFG = \angle ECD$,

$$\therefore \angle CGF = \angle PCG, \therefore CP = PG,$$

$$\because \angle CFG = \angle ECD,$$

$$\therefore CP = FP, \therefore PF = PG = CP,$$

$\therefore$ 线段 CP 是 $\triangle CFG$ 的 FG 边上的中线;

②如图 2, 若 $\angle CFG = \angle EDC$, 此时线段 CP 为 $\triangle CFG$ 的 FG 边上的高线。

证明: $\because DE \perp AC$, $\therefore \angle EDC + \angle ECD = 90^\circ$,

$$\because \angle CFG = \angle EDC, \therefore \angle CFG + \angle ECD = 90^\circ,$$

$\therefore \angle CPF=90^\circ$, $\therefore$ 线段 CP 为 $\triangle CFG$ 的 FG 边上的高线.

③如图 3, 当 CD 为 $\angle ACB$ 的平分线时, CP 既是 $\triangle CFG$ 的 FG 边上的高线又是中线.

例 50(2015 年河南省中考第 22 题)如图 1,在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中, $\angle B=90^\circ$, $BC=2AB=8$, 点 D、E 分别是 BC、AC 的中点, 连结 DE。将 $\triangle EDC$ 绕点 C 按顺时针方向旋转, 记旋转角为 α 。

问题发现 ①当 $\alpha=0^\circ$ 时, $AE/BD=$ ____; ②当 $\alpha=180^\circ$ 时, $AE/BD=$ ____;

拓展探究 试判断当 $0^\circ \leq \alpha \leq 360^\circ$ 时, AE/BD 的大小有无变化? 请仅给出图 2 的情形证明;

问题解决 当 $\triangle EDC$ 旋转至 A、D、E 三点共线时, 直接写出线段 BD 的长。

【解答】

(1) ①当 $\alpha=0^\circ$ 时,

$\because \text{Rt}\triangle ABC$ 中, $\angle B=90^\circ$,

$$\therefore AC = \sqrt{AB^2 + BC^2} = \sqrt{(8 \div 2)^2 + 8^2} = 4\sqrt{5},$$

$\because$ 点 D、E 分别是边 BC、AC 的中点,

$$\therefore AE = 4\sqrt{5} \div 2 = 2\sqrt{5}, \quad BD = 8 \div 2 = 4,$$

$$\therefore \frac{AE}{BD} = \frac{2\sqrt{5}}{4} = \frac{\sqrt{5}}{2}.$$

②如图 1,, 当 $\alpha=180^\circ$ 时,

可得 $AB \parallel DE$,

$$\therefore \frac{AC}{AE} = \frac{BC}{BD}, \quad \therefore \frac{AE}{BD} = \frac{AC}{BC} = \frac{4\sqrt{5}}{8} = \frac{\sqrt{5}}{2}.$$

故答案为: $\frac{\sqrt{5}}{2}$ 、 $\frac{\sqrt{5}}{2}$.

(2) 如图 2,

当 $0^\circ \leq \alpha < 360^\circ$ 时, $\frac{AE}{BD}$ 的大小没有变化,

$\because \angle ECD = \angle ACB$, $\therefore \angle ECA = \angle DCB$,

又 $\because \frac{EC}{DC} = \frac{AC}{BC} = \frac{\sqrt{5}}{2}$, $\therefore \triangle ECA \sim \triangle DCB$,

$$\therefore \frac{AE}{BD} = \frac{EC}{DC} = \frac{\sqrt{5}}{2}.$$

(3) ①如图 3,

$\because AC = 4\sqrt{5}$, $CD = 4$, $CD \perp AD$,

$$\therefore AD = \sqrt{AC^2 - CD^2} = \sqrt{(4\sqrt{5})^2 - 4^2} = \sqrt{80 - 16} = 8,$$

$\because AD=BC, AB=DC, \angle B=90^\circ, \therefore$ 四边形 ABCD 是矩形,

$\therefore BD=AC=4\sqrt{5}$.

②如图 4, 连接 BD, 过点 D 作 AC 的垂线交 AC 于点 Q, 过点 B 作 AC 的垂线交 AC 于点 P,

$\because AC=4\sqrt{5}, CD=4, CD \perp AD,$

$\therefore AD=\sqrt{AC^2 - CD^2}=\sqrt{(4\sqrt{5})^2 - 4^2}=\sqrt{80-16}=8,$

在 $\triangle ABC$ 和 $\triangle CDA$ 中,
$$\begin{cases} AB=CD \\ BC=DA \\ AC=CA \end{cases}$$

$\therefore BP=DQ, BP \parallel DQ, PQ \perp DQ,$

$\therefore$ 四边形 BDQP 为矩形, $\therefore BD=PQ=AC-AP-CQ=4\sqrt{5}-\frac{4}{\sqrt{5}}-\frac{4}{\sqrt{5}}=\frac{12\sqrt{5}}{5}.$

综上所述, BD 的长为 $4\sqrt{5}$ 或 $\frac{12\sqrt{5}}{5}$.

例 51 (2015 年厦门市中考第 27 题) 如图 1, 已知四边形 ABCD 内接于圆 O, $\angle ADC=90^\circ$, $\angle DCB<90^\circ$, 对角线 AC 平分 $\angle DCB$, 延长 DA、CB 相交于点 E。

(1) 如图 1, $EB=AD$, 求证: $\triangle ABE$ 是等腰直角三角形;

(2) 如图 2, 连结 OE, 过点 E 作直线 EF, 使得 $\angle OEF=30^\circ$ 。当 $\angle ACE\geq 30^\circ$ 时, 判断直线 EF 与圆 O 的位置关系, 并说明理由。

【解答】

(1) 证明: $\because$ 对角线 AC 平分 $\angle DCB$,

$\therefore \angle ACD=\angle ACB$, $\therefore \widehat{AD}=\widehat{AB}$, $\therefore AD=AB$,

$\because EB=AD$, $\therefore AB=EB$,

$\because \angle EBA=\angle ADC=90^\circ$, $\therefore \triangle ABE$ 是等腰直角三角形

(2) 解: 直线 EF 与 $\odot O$ 相离. 理由如下:

$\because \angle DCB<90^\circ$, $\angle ACD=\angle ABC$,

$\because \angle ACE\geq 30^\circ$, $\therefore 60^\circ\leq \angle DCE<90^\circ$,

$\therefore \angle AEC\leq 30^\circ$, $\therefore AE\geq AC$,

$\because OE>AE$, $\therefore OE>AC$,

作 $OH\perp EF$ 于 H, 如图,

在 $Rt\triangle OEH$ 中, $\because \angle OEF=30^\circ$,

$\therefore OH=\frac{1}{2}OE$, $\therefore OH>OA$,

$\therefore$ 直线 EF 与 $\odot O$ 相离.

例 52 (2015 年武汉市中考第 24 题) 已知抛物线 $y = \frac{1}{2}x^2 + c$ 与 x 轴交于 $A(-1, 0)$ 、 B 两点，交 y 轴于点 C 。

(1) 求抛物线的解析式；

(2) 点 $E(m, n)$ 是第二象限内的一点，过点 E 作 $EF \perp x$ 轴交抛物线于点 F ，过点 F 作 $FG \perp y$ 轴于点 G ，连结 CE 、 CF ，若 $\angle CEF = \angle CFG$ ，求 n 的值并直接写出 m 的取值范围（利用图 1 完成你的探究）；

(3) 如图 2，点 P 是线段 OB 上一动点（不包括点 O 、 B ）， $PM \perp x$ 轴交抛物线于点 M ， $\angle OBQ = \angle OMP$ ， BQ 交直线 PM 于点 Q ，设点 P 的横坐标为 t ，求 $\triangle PBQ$ 的周长。

【解答】

(1) 把 $A(-1, 0)$ 代入 $y = \frac{1}{2}x^2 + c$ 得 $c = -\frac{1}{2}$ ，

$\therefore$ 抛物线解析式为 $y = \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}$

(2) 如图 1，过点 C 作 $CH \perp EF$ 于点 H ，

$\because \angle CEF = \angle CFG$ ， $FG \perp y$ 轴于点 G $\therefore \triangle EHC \sim \triangle FGC$

$\because E(m, n) \therefore F(m, \frac{1}{2}m^2 - \frac{1}{2})$

又 $\because C(0, \frac{1}{2}) \therefore EH = n + \frac{1}{2}$ ， $CH = -m$ ， $FG = -m$ ， $CG = \frac{1}{2}m^2$

又 $\because \frac{EH}{CH} = \frac{FG}{CG}$ ，则 $\frac{n + \frac{1}{2}}{-m} = \frac{-m}{\frac{1}{2}m^2}$

$\therefore n + \frac{1}{2} = 2 \therefore n = \frac{3}{2} \quad (-2 < m < 0)$

(3) 由题意可知 P (t, 0), M (t, $\frac{1}{2}t^2 - \frac{1}{2}$)

$\because PM \perp x$ 轴交抛物线于点 M, $\angle OBQ = \angle OMP$,

$\therefore \triangle OPM \sim \triangle QPB$. $\therefore \frac{OP}{PM} = \frac{PQ}{PB}$.

其中 $OP=t$, $PM=\frac{1}{2} - \frac{1}{2}t^2$, $PB=1-t$, $\therefore PQ=\frac{2t}{1+t}$.

$$BQ = \sqrt{PB^2 + PQ^2} = \frac{t^2 + 1}{t + 1}$$

$$\therefore PQ + BQ + PB = \frac{2t}{1+t} + \frac{t^2 + 1}{1+t} + 1 - t = 2.$$

$\therefore \triangle PBQ$ 的周长为 2.

例 53 (2015 年徐州市中考第 26 题) 如图 1, 在矩形 OABC 中, $OA=3$, $OC=5$ 。分别以 OA、OC 所在直线为 x 轴、y 轴, 建立平面直角坐标系。点 D 是 CB 边上的一个动点 (不与 C、B 重合), 反比例函数 $y=k/x$ ($k>0$) 的图象经过点 D 且与边 BA 交于点 E, 连结 DE。

- (1) 连结 OE, 若 $\triangle EOA$ 的面积为 2, 则 $k=$ _____;
- (2) 连结 CA, DE 与 CA 是否平行? 请说明理由;
- (3) 是否存在点 D, 使得点 B 关于 DE 的对称点在 OC 上? 若存在, 求出点 D 的坐标; 若不存在, 请说明理由。

【解答】

(1) 连接 OE, 如, 图 1,

$\because \text{Rt}\triangle AOE$ 的面积为 2, $\therefore k=2 \times 2=4$.

(2) 连接 AC, 如图 1, 设 $D(x, 5)$, $E(3, \frac{5}{3}x)$, 则 $BD=3-x$, $BE=5-\frac{5}{3}x$,

$$\frac{BD}{BE} = \frac{3-x}{5-\frac{5}{3}x} = \frac{3}{5}, \quad \frac{BC}{AB} = \frac{3}{5}$$

$$\therefore \frac{BD}{BE} = \frac{BC}{AB} \quad \therefore DE \parallel AC.$$

(3) 假设存在点 D 满足条件. 设 $D(x, 5)$, $E(3, \frac{5}{3}x)$, 则 $CD=x$,

$$BD=3-x, \quad BE=5-\frac{5}{3}x, \quad AE=\frac{5}{3}x.$$

作 $EF \perp OC$, 垂足为 F, 如图 2,

易证 $\triangle B'CD \sim \triangle EFB'$,

$$\therefore \frac{B'E}{B'D} = \frac{B'F}{CD}, \text{ 即 } \frac{5 - \frac{5}{3}x}{3 - x} = \frac{B'F}{x},$$

$$\therefore B'F = \frac{5}{3}x,$$

$$\therefore OB' = B'F + OF = B'F + AE = \frac{5}{3}x + \frac{5}{3}x = \frac{10}{3}x,$$

$$\therefore CB' = OC - OB' = 5 - \frac{10}{3}x,$$

$$\text{在 Rt}\triangle B'CD \text{ 中, } CB' = 5 - \frac{10}{3}x, CD = x, B'D = BD = 3 - x,$$

由勾股定理得, $CB'^2 + CD^2 = B'D^2$,

$$\left(5 - \frac{10}{3}x\right)^2 + x^2 = (3 - x)^2,$$

解这个方程得, $x_1 = 1.5$ (舍去), $x_2 = 0.96$,

$\therefore$ 满足条件的点 D 存在, D 的坐标为 D (0.96, 5).

故答案为 4.

例 54 (2015 年烟台市中考第 25 题)

【问题提出】如图 1，已知 $\triangle ABC$ 是等边三角形，点 E 在线段 AB 上，点 D 在直线 BC 上，且 $ED=EC$ 。将 $\triangle BCE$ 绕点 C 顺时针旋转 60° 至 $\triangle ACF$ ，连结 EF。

试证明： $AB=DB+AF$ 。

【类比探究】(1) 如图 2，如果点 E 在线段 AB 的延长线上，其他条件不变，线段 AB、DB、AF 之间又有怎样的数量关系？请说明理由；

如果点 E 在线段 BA 的延长线上，其他条件不变，请在图 3，的基础上将图形补充完整，并写出 AB、DB、AF 之间的数量关系，不必说明理由。

【解答】

证明： $ED=EC=CF$ ，

$\because \triangle BCE$ 绕点 C 顺时针旋转 60° 至 $\triangle ACF$ ，

$\therefore \angle ECF=60^\circ$ ， $BE=AF$ ， $EC=CF$ ，

$\therefore \triangle CEF$ 是等边三角形， $\therefore EF=EC$ ，

又 $\because ED=EC$ ，

$\therefore ED=EF$ ， $\angle CAF=\angle BAC=60^\circ$ ，

$\therefore \angle EAF=\angle BAC+\angle CAF=120^\circ$ ， $\angle DBE=120^\circ$ ， $\angle EAF=\angle DBE$ ，

$\because A、E、C、F$ 四点共圆， $\therefore \angle AEF=\angle ACF$ ，

又 $\because ED=EC$ ， $\therefore \angle D=\angle BCE$ ， $\angle BCE=\angle ACF$ ，

$\therefore \angle D=\angle AEF$ ，

在 $\triangle EDB$ 和 $\triangle FEA$ 中，
$$\begin{cases} \angle DBE=\angle EAF \\ \angle D=\angle AEF \\ ED=EF \end{cases} \quad (\text{AAS})$$

$\therefore \triangle EDB \cong \triangle FEA$ ，

$\therefore BD=AE$ ， $AB=AE+BF$ ， $\therefore AB=DB+AF$ 。

(1) $ED=EC=CF$ ，

$\because \triangle BCE$ 绕点 C 顺时针旋转 60° 至 $\triangle ACF$ ，

$\therefore \angle ECF=60^\circ$ ， $BE=AF$ ， $EC=CF$ ，

$\therefore \triangle CEF$ 是等边三角形， $\therefore EF=EC$ ，

又 $\because ED=EC$ ，

$\therefore ED=EF$ ， $\angle CAF=\angle BAC=60^\circ$ ，

$\therefore \angle EFC=\angle FGC+\angle FCG$ ， $\angle BAC=\angle FGC+\angle FEA$ ，

$\therefore \angle FCG=\angle FEA$ ，

又 $\because \angle FCG=\angle EAD$ ， $\angle D=\angle EAD$ ，

$\therefore \angle D=\angle FEA$ ，

由旋转的性质, 可得

$$\angle CBE = \angle CAF = 120^\circ,$$

$$\therefore \angle DBE = \angle FAE = 60^\circ,$$

$$\text{在} \triangle EDB \text{ 和 } \triangle FEA \text{ 中, } \begin{cases} \angle DBE = \angle EAF \\ \angle D = \angle AEF \\ ED = EF \end{cases} \quad (\text{AAS})$$

$$\therefore \triangle EDB \cong \triangle FEA,$$

$$\therefore BD = AE, EB = AF, \therefore BD = FA + AB,$$

即 $AB = BD + AF$.

(2) 如图③,, $ED = EC = CF$,

$\therefore \triangle BCE$ 绕点 C 顺时针旋转 60° 至 $\triangle ACF$,

$$\therefore \angle ECF = 60^\circ, BE = AF, EC = CF, BC = AC,$$

$\therefore \triangle CEF$ 是等边三角形, $\therefore EF = EC$,

又 $\because ED = EC$, $\therefore ED = EF$,

$$\because AB = AC, BC = AC,$$

$\therefore \triangle ABC$ 是等边三角形,

$$\therefore \angle ABC = 60^\circ,$$

$$\text{又} \because \angle CBE = \angle CAF, \therefore \angle CAF = 60^\circ,$$

$$\therefore \angle EAF = 180^\circ - \angle CAF - \angle BAC = 180^\circ - 60^\circ - 60^\circ = 60^\circ$$

$$\therefore \angle DBE = \angle EAF;$$

$$\because ED = EC, \therefore \angle ECD = \angle EDC,$$

$$\therefore \angle BDE = \angle ECD + \angle DEC = \angle EDC + \angle DEC,$$

$$\text{又} \because \angle EDC = \angle EBC + \angle BED,$$

$$\therefore \angle BDE = \angle EBC + \angle BED + \angle DEC = 60^\circ + \angle BEC,$$

$$\because \angle AEF = \angle CEF + \angle BEC = 60^\circ + \angle BEC,$$

$$\therefore \angle BDE = \angle AEF,$$

$$\text{在} \triangle EDB \text{ 和 } \triangle FEA \text{ 中, } \begin{cases} \angle DBE = \angle EAF \\ \angle BDE = \angle AEF \\ ED = EF \end{cases} \quad (\text{AAS})$$

$$\therefore \triangle EDB \cong \triangle FEA, \therefore BD = AE, EB = AF,$$

$$\because BE = AB + AE, \therefore AF = AB + BD,$$

即 AB, DB, AF 之间的数量关系是: $AF = AB + BD$.

例 55 (2015 年珠海市中考第 22 题) 如图 1, 折叠矩形 OABC 的一边 BC, 使点 C 落在 OA 边上的点 D 处, 已知折痕 $BE=5\sqrt{5}$, 且 $OD/OE=4/3$. 以 O 为原点, OA 所在直线为 x 轴建立如图 1 所示的平面直角坐标系, 抛物线 l: $y=-1/16x^2+1/2x+c$ 经过点 E, 且与 AB 边相交于点 F。

- (1) 求证: $\triangle ABD \sim \triangle ODE$;
- (2) 若 M 是 BE 的中点, 连结 MF, 求证: $MF \perp BD$;
- (3) 点 P 是线段 BC 上一动点, 点 Q 在抛物线 l 上, 且始终满足 $PD \perp DQ$, 在点 P 运动过程中, 能否使得 $PD=DQ$? 若能, 求出所有符合条件的点 Q 的坐标; 若不能, 请说明理由。

【解答】

(1) 证明:

$\because$ 四边形 ABCO 为矩形, 且由折叠的性质可知 $\triangle BCE \cong \triangle BDE$,
 $\therefore \angle BDE = \angle BCE = 90^\circ$,
 $\because \angle BAD = 90^\circ$, $\therefore \angle EDO + \angle BDA = \angle BDA + \angle DAB = 90^\circ$,
 $\therefore \angle EDO = \angle DBA$, 且 $\angle EOD = \angle BAD = 90^\circ$, $\therefore \triangle ABD \sim \triangle ODE$;

(2) 证明:

$\because \frac{OD}{OE} = \frac{4}{3}$, $\therefore$ 设 $OD=4x$, $OE=3x$, 则 $DE=5x$,
 $\therefore CE=DE=5x$, $\therefore AB=OC=CE+OE=8x$,

又 $\because \triangle ABD \sim \triangle ODE$, $\therefore \frac{DA}{AB} = \frac{OE}{OD} = \frac{3}{4}$,

$\therefore DA=6x$, $\therefore BC=OA=10x$,

在 $Rt\triangle BCE$ 中, 由勾股定理可得 $BE^2=BC^2+CE^2$, 即 $(5\sqrt{5})^2=(10x)^2+(5x)^2$

2, 解得 $x=1$,

$\therefore OE=3, OD=4, DA=6, AB=8, OA=10$,

$\therefore$ 抛物线解析式为 $y=-\frac{1}{16}x^2+\frac{1}{2}x+3$,

当 $x=10$ 时, 代入可得 $y=\frac{7}{4}$,

$\therefore AF=\frac{7}{4}, BF=AB-AF=8-\frac{7}{4}=\frac{25}{4}$,

在 $Rt\triangle AFD$ 中, 由勾股定理可得 $DF=\sqrt{AF^2+AD^2}=\sqrt{(\frac{7}{4})^2+6^2}=\frac{25}{4}$,

$\therefore BF=DF$,

又 M 为 $Rt\triangle BDE$ 斜边上的中点,

$\therefore MD=MB$,

$\therefore MF$ 为线段 BD 的垂直平分线, $\therefore MF \perp BD$;

(3) 由 (2) 可知抛物线解析式为 $y=-\frac{1}{16}x^2+\frac{1}{2}x+3$, 设抛物线与 x 轴的两个交点为 H 、 G ,

令 $y=0$, 可得 $0=-\frac{1}{16}x^2+\frac{1}{2}x+3$, 解得 $x=-4$ 或 $x=12$,

$\therefore H(-4, 0), G(12, 0)$,

①当 $PD \perp x$ 轴时, 由于 $PD=8, DM=DN=8$,

故点 Q 的坐标为 $(-4, 0)$ 或 $(12, 0)$ 时, $\triangle PDQ$ 是以 D 为直角顶点的等腰直角三角形;

②当 PD 不垂直与 x 轴时，分别过 P, Q 作 x 轴的垂线，垂足分别为 N, I，则 Q 不与 G 重合，从而 I 不与 G 重合，即 $DI \neq 8$.

$\because PD \perp DQ, \therefore \angle QDI = 90^\circ - \angle PDN = \angle DPN,$

$\therefore \text{Rt}\triangle PDN \sim \text{Rt}\triangle DQI,$

$\because PN = 8, \therefore PN \neq DI,$

$\therefore \text{Rt}\triangle PDN$ 与 $\text{Rt}\triangle DQI$ 不全等，

$\therefore PD \neq DQ$ ，另一侧同理 $PD \neq DQ$.

综合①，②所有满足题设条件的点 Q 的坐标为 $(-4, 0)$ 或 $(12, 0)$.

例 56 (2015 年沈阳市中考第 24 题) 如图 1, 在平行四边形 ABCD 中, $AB=6$, $BC=4$, $\angle ABC=60^\circ$ 。点 E 是边 AB 上一点, 点 F 是边 CD 上一点, 将平行四边形 ABCD 沿 EF 折叠, 得到四边形 EFGH, 点 A 的对应点为点 H, 点 D 的对应点为点 G。

(1) 当点 H 与点 C 重合时。

①填空: 点 E 到 CD 的距离是_____;

②求证: $\triangle BCE \cong \triangle GCF$;

③求三角形 CEF 的面积;

(2) 当点 H 落在射线 BC 上, 且 $CH=1$ 时, 直线 EH 与直线 CD 交于点 M, 请直接写出 $\triangle MEF$ 的面积。

【解答】

(1) 如图 1, ①作 $CK \perp AB$ 于 K,

$$\because \angle B=60^\circ, \therefore CK=BC \cdot \sin 60^\circ = 4 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = 2\sqrt{3},$$

$\because$ C 到 AB 的距离和 E 到 CD 的距离都是平行线 AB、CD 间的距离,

$\therefore$ 点 E 到 CD 的距离是 $2\sqrt{3}$,

故答案为 $2\sqrt{3}$;

② $\because$ 四边形 ABCD 是平行四边形,

$\therefore AD=BC$, $\angle D=\angle B$, $\angle A=\angle BCD$,

由折叠可知, $AD=CG$, $\angle D=\angle G$, $\angle A=\angle ECG$,

$\therefore BC=GC$, $\angle B=\angle G$, $\angle BCD=\angle ECG$, $\therefore \angle BCE=\angle GCF$,

在 $\triangle BCE$ 和 $\triangle GCF$ 中, $\begin{cases} \angle B = \angle G \\ \angle BCE = \angle GCF \\ BC = GC \end{cases}$,

$\therefore \triangle BCE \cong \triangle GCF$ (AAS);

③过E点作 $EP \perp BC$ 于P,

$\because \angle B = 60^\circ, \angle EPB = 90^\circ, \therefore \angle BEP = 30^\circ, \therefore BE = 2BP$,

设 $BP = m$, 则 $BE = 2m$,

$\therefore EP = BE \cdot \sin 60^\circ = 2m \times \frac{\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3}m$,

由折叠可知, $AE = CE$,

$\because AB = 6, \therefore AE = CE = 6 - 2m$,

$\because BC = 4, \therefore PC = 4 - m$,

在 $RT\triangle ECP$ 中, 由勾股定理得 $(4 - m)^2 + (\sqrt{3}m)^2 = (6 - 2m)^2$, 解得 $m = \frac{5}{4}$,

$\therefore EC = 6 - 2m = 6 - 2 \times \frac{5}{4} = \frac{7}{2}$,

$\because \triangle BCE \cong \triangle GCF, \therefore CF = EC = \frac{7}{2}$,

$\therefore S_{\triangle CEF} = \frac{1}{2} \times \frac{7}{2} \times 2\sqrt{3} = \frac{7\sqrt{3}}{2}$;

(2) ①当H在BC的延长线上时, 如图2, 过E点作 $EQ \perp BC$ 于Q,

$\because \angle B = 60^\circ, \angle EQB = 90^\circ$,

$\therefore \angle BEQ = 30^\circ, \therefore BE = 2BQ$,

设 $BQ = n$, 则 $BE = 2n$,

$\therefore QE = BE \cdot \sin 60^\circ = 2n \times \frac{\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3}n$,

由折叠可知, $AE=HE$,

$$\because AB=6, \therefore AE=HE=6-2n,$$

$$\because BC=4, CH=1, \therefore BH=5, \therefore QH=5-n,$$

在 $RT\triangle EHQ$ 中, 由勾股定理得 $(5-n)^2 + (\sqrt{3}n)^2 = (6-2n)^2$, 解得 $n=\frac{11}{4}$,

$$\therefore AE=HE=6-2n=\frac{31}{2},$$

$$\because AB \parallel CD, \therefore \triangle CMH \sim \triangle BEH,$$

$$\therefore \frac{MH}{HE} = \frac{CH}{BH}, \text{ 即 } \frac{\frac{31}{2}}{\frac{31}{2}} = \frac{1}{5},$$

$$\therefore MH=\frac{31}{5}, \therefore EM=\frac{31}{2} - \frac{31}{5} = \frac{124}{10}$$

$$\therefore S_{\triangle EMF} = \frac{1}{2} \times \frac{124}{10} \times 2\sqrt{3} = \frac{124\sqrt{3}}{5}.$$

②如图 3, 当 H 在 BC 的延长线上时, 过 E 点作 $EQ \perp BC$ 于 Q ,

$$\because \angle B=60^\circ, \angle EQB=90^\circ, \therefore \angle BEQ=30^\circ, \therefore BE=2BQ,$$

设 $BQ=n$, 则 $BE=2n$,

$$\therefore QE=BE \cdot \sin 60^\circ = 2n \times \frac{\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3}n,$$

由折叠可知, $AE=HE$,

$$\because AB=6, \therefore AE=HE=6-2n,$$

$$\because BC=4, CH=1, \therefore BH=3 \therefore QH=3-n$$

在 $RT\triangle EHQ$ 中, 由勾股定理得 $(3-n)^2 + (\sqrt{3}n)^2 = (6-2n)^2$, 解得 $n=\frac{3}{2}$

$$\therefore BE=2n=3, AE=HE=6-2n=3,$$

$$\therefore BE=BH, \therefore \angle B=60^\circ,$$

$\therefore \triangle BHE$ 是等边三角形,

$\therefore \angle BEH = 60^\circ$,

$\because \angle AEF = \angle HEF, \therefore \angle FEH = \angle AEF = 60^\circ$,

$\therefore EF \parallel BC, \therefore DF = CF = 3$,

$\because AB \parallel CD, \therefore \triangle CMH \sim \triangle BEH$,

$\frac{CM}{BE} = \frac{CH}{BH}, \text{ 即 } \frac{CM}{3} = \frac{1}{3}$,

$\therefore CM = 1 \therefore EM = CF + CM = 4 \therefore S_{\triangle EMF} = \frac{1}{2} \times 4 \times 2\sqrt{3} = 4\sqrt{3}$.

综上, $\triangle MEF$ 的面积为 $\frac{124\sqrt{3}}{35}$ 或 $4\sqrt{3}$.

例 57 (2016 年安徽省中考第 23 题) 如图 1, A、B 分别在射线 OM、ON 上, 且 $\angle MON$ 为钝角. 现以线段 OA、OB 为斜边向 $\angle MON$ 的外侧作等腰直角三角形, 分别是 $\triangle OAP$, $\triangle OBQ$, 点 C、D、E 分别是 OA、OB、AB 的中点.

(1) 求证: $\triangle PCE \cong \triangle EDQ$;

(2) 延长 PC、QD 交于点 R.

①如图 2, 若 $\angle MON = 150^\circ$, 求证: $\triangle ABR$ 为等边三角形;

②如图 3, 若 $\triangle ARB \sim \triangle PEQ$, 求 $\angle MON$ 大小和 AB/PQ 的值.

【分析】(1) 根据三角形中位线的性质得到 $DE=OC$, $DE \parallel OC$, $CE=OD$, $CE \parallel OD$, 推出四边形 ODEC 是平行四边形, 于是得到 $\angle OCE = \angle ODE$, 根据等腰直角三角形的定义得到 $\angle PCO = \angle QDO = 90^\circ$, 根据等腰直角三角形的性质得到 $PC=ED$, $CE=DQ$, 即可得到结论

(2)①连接 RO, 由于 PR 与 QR 分别是 OA, OB 的垂直平分线, 得到 $AP=OR=RB$, 由等腰三角形的性质得到 $\angle ARC = \angle ORC$, $\angle ORQ = \angle BRO$, 根据四边形的内角和得到 $\angle CRD = 30^\circ$, 即可得到结论;

②由 (1) 得, $EQ=EP$, $\angle DEQ = \angle CPE$, 推出 $\angle PEQ = \angle ACR = 90^\circ$, 证得 $\triangle PEQ$ 是等腰直角三角形, 根据相似三角形的性质得到 $\angle ARB = \angle PEQ = 90^\circ$, 根据四边形的内角和得到 $\angle MON = 135^\circ$, 求得 $\angle APB = 90^\circ$, 根据等腰直角三角形的性质得到结论.

【解答】

(1) 证明: $\because$ 点 C、D、E 分别是 OA、OB、AB 的中点,

$\therefore DE=OC$, $DE \parallel OC$, $CE=OD$, $CE \parallel OD$,

∴ 四边形 ODEC 是平行四边形,

∴ $\angle OCE = \angle ODE$,

∵ $\triangle OAP$, $\triangle OBQ$ 是等腰直角三角形,

∴ $\angle PCO = \angle QDO = 90^\circ$,

∴ $\angle PCE = \angle PCO + \angle OCE = \angle QDO = \angle ODQ = \angle EDQ$,

∵ $PC = \frac{1}{2}AO = OC = ED$, $CE = OD = \frac{1}{2}OB = DQ$,

在 $\triangle PCE$ 与 $\triangle EDQ$ 中,
$$\begin{cases} PC = DE \\ \angle PCE = \angle EDQ \\ CE = DQ \end{cases}$$

∴ $\triangle PCE \cong \triangle EDQ$;

(2) ①如图 2, 连接 RO,

∵ PR 与 QR 分别是 OA, OB 的垂直平分线,

∴ $AP = OR = RB$,

∴ $\angle ARC = \angle ORC$, $\angle ORQ = \angle BRO$,

∵ $\angle RCO = \angle RDO = 90^\circ$, $\angle COD = 150^\circ$,

∴ $\angle CRD = 30^\circ$,

∴ $\angle ARB = 60^\circ$,

∴ $\triangle ARB$ 是等边三角形;

②由 (1) 得, $EQ = EP$, $\angle DEQ = \angle CPE$,

∴ $\angle PEQ = \angle CED - \angle CEP - \angle DEQ = \angle ACE - \angle CEP - \angle CPE = \angle ACE -$

$\angle RCE = \angle ACR = 90^\circ$,

∴ $\triangle PEQ$ 是等腰直角三角形, ∵ $\triangle ARB \sim \triangle PEQ$, ∴ $\angle ARB = \angle PEQ = 90^\circ$,

∴ $\angle OCR = \angle ODR = 90^\circ$, $\angle CRD = \frac{1}{2}\angle ARB = 45^\circ$,

$$\therefore \angle MON = 135^\circ,$$

此时 P, O, B 在一条直线上, $\triangle PAB$ 为直角三角形, 且 $\angle APB = 90^\circ$,

$$\therefore AB = 2PE = 2 \times \frac{\sqrt{2}}{2} PQ = \sqrt{2} PQ, \therefore \frac{AP}{PQ} = \sqrt{2}.$$

例 58 (2016 年北京市中考第 28 题) 在等边 $\triangle ABC$ 中,

如图 1, P 、 Q 是 BC 边上两点, $AP=AQ$, $\angle BAP=20^\circ$, 求 $\angle AQB$ 的度数;

点 P 、 Q 是 BC 边上的两个动点(不与 B 、 C 重合), 点 P 在点 Q 的左侧, 且 $AP=AQ$,

点 Q 关于直线 AC 的对称点为 M , 连接 AM 、 PM .

①依题意将图 2 补全;

②小茹通过观察、实验, 提出猜想: 在点 P 、 Q 运动的过程中, 始终有 $PA=PM$. 小茹把这个猜想与同学们进行交流, 通过讨论, 形成了证明该猜想的几种想法:

想法 1: 要证 $PA=PM$, 只需证 $\triangle APM$ 是等边三角形.

想法 2: 在 BA 上取一点 N , 使得 $BN=BP$, 要证 $PA=PM$, 只需证 $\triangle ANP \cong \triangle PCM$.

想法 3: 将线段 BP 绕点 B 顺时针旋转 60° , 得到线段 BK , 要证 $PA=PM$, 只需证 $PA=CK$, $PM=CK$

请参考上面的想法, 帮助小茹证明 $PA=PM$. (一种方法即可)

【解答】

(1) $\because AP=AQ$, $\therefore \angle APQ=\angle AQP$, $\therefore \angle APB=\angle AQC$,

$\because \triangle ABC$ 是等边三角形, $\therefore \angle B=\angle C=60^\circ$,

$\therefore \angle BAP=\angle CAQ=20^\circ$, $\therefore \angle AQB=\angle APQ=\angle BAP+\angle B=80^\circ$;

(2) 如图 2, $\because AP=AQ$, $\therefore \angle APQ=\angle AQP$, $\therefore \angle APB=\angle AQC$,

$\because \triangle ABC$ 是等边三角形, $\therefore \angle B=\angle C=60^\circ$, $\therefore \angle BAP=\angle CAQ$,

$\because$ 点 Q 关于直线 AC 的对称点为 M , $\therefore AQ=AM$, $\angle QAC=\angle MAC$,

$\therefore \angle MAC=\angle BAP$, $\therefore \angle BAP+\angle PAC=\angle MAC+\angle CAP=60^\circ$,

$\therefore \angle PAM=60^\circ$, $\because AP=AQ$, $\therefore AP=AM$,

$\therefore \triangle APM$ 是等边三角形, $\therefore AP=PM$

例 59 (2016 年成都市中考第 27 题) 如图 1, $\triangle ABC$ 中, $\angle ABC=45^\circ$, $AH \perp BC$ 于点 H, 点 D 在 AH 上, 且 $DH=CH$, 连结 BD.

(1) 求证: $BD=AC$;

(2) 将 $\triangle BHD$ 绕点 H 旋转, 得到 $\triangle EHF$ (点 B、D 分别与点 E、F 对应), 连接 AE.

①如图 2, 当点 F 落在 AC 上时, (F 不与 C 重合), 若 $BC=4$, $\tan C=3$, 求 AE 的长;

②如图 3, 当 $\triangle EHF$ 是由 $\triangle BHD$ 绕点 H 逆时针旋转 30° 得到时, 设射线 CF 与 AE 相交于点 G, 连接 GH, 试探究线段 GH 与 EF 之间满足的等量关系, 并说明理由.

【解答】

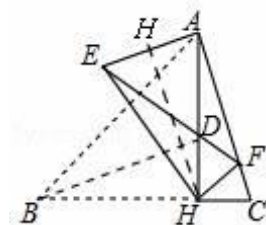
(1) 在 $Rt\triangle AHB$ 中, $\angle ABC=45^\circ$, $\therefore AH=BH$,

在 $\triangle BHD$ 和 $\triangle AHC$ 中,

$$\begin{cases} AH=BH \\ \angle BHD=\angle AHC=90^\circ \\ DH=CH \end{cases},$$

$\therefore \triangle BHD \cong \triangle AHC$, $\therefore BD=AC$,

(2) ①如图,



在 $Rt\triangle AHC$ 中, $\because \tan C=3$, $\therefore \frac{AH}{CH}=3$,

设 $CH=x$, $\therefore BH=AH=3x$,

$$\because BC=4, \therefore 3x+x=4,$$

$$\therefore x=1, \therefore AH=3, CH=1,$$

由旋转知, $\angle EHF = \angle BHD = \angle AHC = 90^\circ$, $EH = AH = 3$, $CH = DH = FH$,

$$\therefore \angle EHA = \angle FHC, \frac{EH}{AH} = \frac{FH}{HC} = 1,$$

$$\therefore \triangle EHA \cong \triangle FHC, \therefore \angle EAH = \angle C, \therefore \tan \angle EAH = \tan C = 3,$$

过点 H 作 $HP \perp AE$, $\therefore HP = 3AP$, $AE = 2AP$,

在 $Rt\triangle AHP$ 中, $AP^2 + HP^2 = AH^2$,

$$\therefore AP^2 + (3AP)^2 = 9, \therefore AP = \frac{3\sqrt{10}}{10}, \therefore AE = \frac{3\sqrt{10}}{5};$$

②由①有, $\triangle AEH$ 和 $\triangle FHC$ 都为等腰三角形,

$$\therefore \angle GAH = \angle HCG = 90^\circ, \therefore \triangle AGQ \sim \triangle CHQ,$$

$$\therefore \frac{AQ}{CQ} = \frac{GQ}{HQ}, \therefore \frac{AQ}{GQ} = \frac{CQ}{HQ},$$

$$\because \angle AQC = \angle GQH, \therefore \triangle AQC \sim \triangle GQH, \therefore \frac{EF}{HG} = \frac{AC}{GH} = \frac{AG}{GQ} = \sin 30^\circ = \frac{1}{2}.$$

例 60 (2016 年广州市中考第 25 题) 如图 1, 点 C 为 $\triangle ABD$ 外接圆上的一动点

(点 C 不在弧 BAD 上, 且不与点 B、D 重合), $\angle ACB = \angle ABD = 45^\circ$.

(1) 求证: BD 是该外接圆的直径;

(2) 连结 CD, 求证: $2^{\frac{1}{2}} \cdot AC = BC + CD$;

(3) 若 $\triangle ABC$ 关于直线 AB 的对称图形为 $\triangle ABM$, 连接 DM, 试探究 DM^2 、 AM^2 、 BM^2 三者之间满足的等量关系, 并证明你的结论.

【解答】

(1) $\because \widehat{AB} = \widehat{AB}, \therefore \angle ACB = \angle ADB = 45^\circ$,

$\because \angle ABD = 45^\circ, \therefore \angle BAD = 90^\circ, \therefore BD$ 是 $\triangle ABD$ 外接圆的直径;

(2) 在 CD 的延长线上截取 $DE = BC$,

连接 EA, $\because \angle ABD = \angle ADB, \therefore AB = AD$,

$\because \angle ADE + \angle ADC = 180^\circ, \angle ABC + \angle ADC = 180^\circ$,

$\therefore \angle ABC = \angle ADE$,

在 $\triangle ABC$ 与 $\triangle ADE$ 中,
$$\begin{cases} AB = AD \\ \angle ABC = \angle ADE \\ BC = DE \end{cases}$$

$\therefore \triangle ABC \cong \triangle ADE$ (SAS), $\therefore \angle BAC = \angle DAE$,

$\therefore \angle BAC + \angle CAD = \angle DAE + \angle CAD, \therefore \angle BAD = \angle CAE = 90^\circ$,

$\because \widehat{AD} = \widehat{AD} \therefore \angle ACD = \angle ABD = 45^\circ$,

$\therefore \triangle CAE$ 是等腰直角三角形,

$\therefore \sqrt{2}AC = CE, \therefore \sqrt{2}AC = CD + DE = CD + BC$;

(3) 过点 M 作 $MF \perp MB$ 于点 M, 过点 A 作 $AF \perp MA$ 于点 A, MF 与 AF 交于点 F, 连接 BF,

由对称性可知: $\angle AMB = \angle ACB = 45^\circ$,

$\therefore \angle FMA = 45^\circ, \therefore \triangle AMF$ 是等腰直角三角形, $\therefore AM = AF, MF = \sqrt{2}AM$,

$\because \angle MAF + \angle MAB = \angle BAD + \angle MAB, \therefore \angle FAB = \angle MAD$,

在 $\triangle ABF$ 与 $\triangle ADM$ 中, $\begin{cases} AE=AM \\ \angle FAB=\angle MAD, \\ AB=AD \end{cases}$

$\therefore \triangle ABF \cong \triangle ADM$ (SAS) , $\therefore BF=DM$,

在 $Rt\triangle BMF$ 中,

$\therefore BM^2+MF^2=BF^2$,

$\therefore BM^2+2AM^2=DM^2$.

例 61 (2016 年江西省中考第 22 题)

【图形定义】如图，将正 n 边形绕点 A 顺时针旋转 60° 后，发现旋转前后两图形有另一交点 O ，连接 AO ，我们称 AO 为“叠弦”；再将“叠弦” AO 所在的直线绕点 A 逆时针旋转 60° 后，交旋转前的图形于点 P ，连接 PO ，我们称 $\angle OAB$ 为“叠弦角”， $\triangle AOP$ 为“叠弦三角形”。

【探究证明】(1) 请在图 1 和图 2 中选择其中一个证明：“叠弦三角形”($\triangle AOP$) 是等边三角形；

如图 2，求证： $\angle OAB = \angle OAE'$ 。

【归纳猜想】(3) 图 1、图 2 中的“叠弦角”的度数分别为____，____；

图 n 中，“叠弦三角形”____等边三角形（填“是”或“不是”）；

图 n 中，“叠弦角”的度数为____（用含 n 的式子表示）。

【解析】

(1) 如图 1 $\because$ 四 $ABCD$ 是正方形，

由旋转知： $AD = AD'$ ， $\angle D = \angle D' = 90^\circ$ ， $\angle DAD' = \angle OAP = 60^\circ$

$\therefore \angle DAP = \angle D'AO$ ，

$\therefore \triangle APD \cong \triangle AOD'$ (ASA)

$\therefore AP = AO$ ，又 $\angle OAP = 60^\circ$ ， $\therefore \triangle AOP$ 是等边三角形。

(2) 如右图，作 $AM \perp DE$ 于 M ，作 $AN \perp CB$ 于 N 。

$\because$ 五 $ABCDE$ 是正五边形，

由旋转知： $AE = AE'$ ， $\angle E = \angle E' = 108^\circ$ ，

$\angle EAE' = \angle OAP = 60^\circ$

$$\therefore \angle EAP = \angle E'AO ,$$

$$\therefore \triangle APE \cong \triangle AOE' \text{ (ASA)}$$

$$\therefore \angle OAE' = \angle PAE.$$

在 $\text{Rt}\triangle AEM$ 和 $\text{Rt}\triangle ABN$ 中,

$$\therefore \text{Rt}\triangle AEM \cong \text{Rt}\triangle ABN \text{ (AAS)}$$

$$\therefore \angle EAM = \angle BAN, \quad AM = AN.$$

在 $\text{Rt}\triangle APM$ 和 $\text{Rt}\triangle AON$ 中,

$$\therefore \text{Rt}\triangle APM \cong \text{Rt}\triangle AON \text{ (HL)}.$$

$$\therefore \angle PAM = \angle OAN,$$

$$\therefore \angle PAE = \angle OAB$$

$$\therefore \angle OAE' = \angle OAB \text{ (等量代换)}.$$

$$(3) \quad 15^\circ, \quad 24^\circ$$

(4) 是

$$(5) \quad \angle OAB = [(n-2) \times 180^\circ \div n - 60^\circ] \div 2 = 60^\circ - \frac{180^\circ}{n}$$

例 62 (2016 年南京市中考第 26 题) 如图, O 是 $\triangle ABC$ 内一点, 与 BC 相交于 F 、 G 两点, 且与 AB 、 AC 分别相切于点 D 、 E , $DE \parallel BC$, 连接 DF 、 EG .

(1) 求证: $AB=AC$;

(2) 已知 $AB=10$, $BC=12$, 求四边形 $DFGE$ 是矩形时圆 O 的半径.

【解析】

(1) 证明: $\because \odot O$ 与 AB 、 AC 分别相切于点 D 、 E ,

$\therefore AD=AE$. $\therefore \angle ADE = \angle AED$.

$\because DE \parallel BC$, $\therefore \angle B = \angle ADE$, $\angle C = \angle AED$.

$\therefore \angle B = \angle C$. $\therefore AB=AC$.

(2) 解: 如图, 连接 AO , 交 DE 于点 M , 延长 AO 交 BC 于点 N , 连接 OE 、 DG .

设 $\odot O$ 的半径为 r .

$\because$ 四边形 $DFGE$ 是矩形, $\therefore \angle DFG = 90^\circ$. $\therefore DG$ 是 $\odot O$ 的直径.

$\because \odot O$ 与 AB 、 AC 分别相切于点 D 、 E , $\therefore OD \perp AB$,

$OE \perp AC$.

又 $OD=OE$, $\therefore AN$ 平分 $\angle BAC$.

又 $AB=AC$, $\therefore AN \perp BC$, $BN = \frac{1}{2} BC = 6$.

在 $\text{Rt}\triangle ABN$ 中, $AN = \sqrt{AB^2 - BN^2} = \sqrt{10^2 - 6^2} = 8$.

$\because OD \perp AB$, $AN \perp BC$, $\therefore \angle ADO = \angle ANB = 90^\circ$.

又 $\angle OAD = \angle BAN$, $\therefore \triangle AOD \sim \triangle ABN$.

$$\therefore \frac{OD}{BN} = \frac{AD}{AN},$$

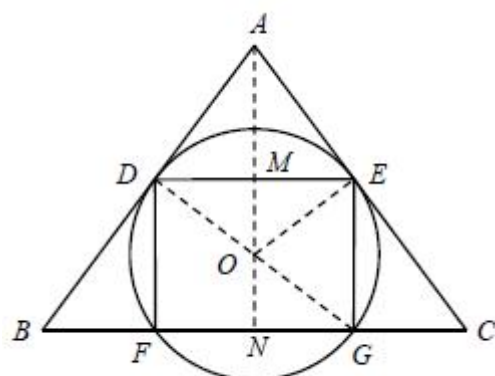
$$\text{即 } \frac{r}{6} = \frac{AD}{8}.$$

$$\therefore AD = \frac{4}{3}r.$$

$$\therefore BD = AB - AD = 10 - \frac{4}{3}r.$$

$\because OD \perp AB$, $\therefore \angle GDB = \angle ANB = 90^\circ$.

又 $\angle B = \angle B$, $\therefore \triangle GBD \sim \triangle ABN$.



(第 26 题)

$$\therefore \frac{BD}{BN} = \frac{GD}{AN},$$

$$\text{即 } \frac{10 - \frac{4}{3}r}{6} = \frac{2r}{8}.$$

$$\therefore r = \frac{60}{17}.$$

$\therefore$ 四边形 $DFGE$ 是矩形时 $\odot O$ 的半径为 $\frac{60}{17}$.

例 63 (2016 年宁波市中考第 26 题) 如图, 在平面直角坐标系中, O 为坐标原点, 点 A 的坐标为 $(5, 0)$, 菱形 $OABC$ 的顶点 B 、 C 都在第一象限, $\tan \angle AOC = 4/3$, 将菱形绕点 A 按顺时针方向旋转角 α ($0^\circ < \alpha < \angle AOC$) 得到菱形 $FADE$ (点 O 的对应点为点 F), EF 与 OC 交于点 G , 连结 AG .

- (1) 求点 B 的坐标;
- (2) 当 $OG=4$ 时, 求 AG 的长;
- (3) 求证: GA 平分 $\angle OGE$;
- (4) 连结 BD 并延长交 x 轴于点 P , 当点 P 的坐标为 $(12, 0)$ 时, 求点 G 的坐标.

【分析】(1) 如图 1, 过点 B 作 $BH \perp x$ 轴于点 H , 构建直角 $\triangle ABH$, 所以利用菱形的四条边相等的性质和解该直角三角形得到 AH 、 BH 的长度, 则易求点 B 的坐标;

(2) 如图 1, 过点 A 作 $AM \perp OC$ 于点 M , 构建直角 $\triangle OAM$ 和直角 $\triangle AMG$, 通过解直角 $\triangle OAM$ 求得直角边 AM 的长度, 然后结合图形和勾股定理来求 AG 的长度;

(3) 如图 1, 过点 A 作 $AM \perp OC$ 于点 M , 构建全等三角形: $\triangle AOM \cong \triangle AFN$ (ASA), 利用该全等三角形的对应边相等得到 $AM=AN$, 最后结合角平分线的性质证得结论;

(4) 如图 2, 过点 G 作 $GQ \perp x$ 轴于点 Q , 构建相似三角形: $\triangle GOA \sim \triangle BAP$, 根据该相似三角形的对应边成比例得到求得 GQ 的长度. 结合已知条件

$\tan \angle AOC = \frac{4}{3}$, 来求边 OQ 的长度, 即可得到点 G 的坐标.

【解答】

(1) 如图 1, 过点 B 作 $BH \perp x$ 轴于点 H,

$\because$ 四边形 OABC 为菱形, $\therefore OC \parallel AB$, $\therefore \angle BAH = \angle COA$.

$$\because \tan \angle AOC = \frac{4}{3}, \therefore \tan \angle BAH = \frac{4}{3}.$$

又 $\because$ 在直角 $\triangle BAH$ 中, $AB=5$, $\therefore BH = \frac{4}{5}AB=4$, $AH = \frac{3}{5}AB=3$,

$\therefore OH = OA + AH = 5 + 3 = 8$, $\therefore$ 点 B 的坐标为 $(8, 4)$;

(2) 如图 1, 过点 A 作 $AM \perp OC$ 于点 M,

在直角 $\triangle AOM$ 中, $\because \tan \angle AOC = \frac{4}{3}$, $OA=5$, $\therefore AM = \frac{4}{5}OA=4$, $OM = \frac{3}{5}OA=3$,

$\because OG=4$, $\therefore GM = OG - OM = 4 - 3 = 1$,

$$\therefore AG = \sqrt{AM^2 + GM^2} = \sqrt{4^2 + 1^2} = \sqrt{17};$$

(3) 如图 1, 过点 A 作 $AN \perp EF$ 于点 N,

$$\because \text{在 } \triangle AOM \text{ 与 } \triangle AFN \text{ 中, } \begin{cases} \angle AOM = \angle F \\ OA = FA \\ \angle AMO = \angle ANF = 90^\circ \end{cases},$$

$\therefore \triangle AOM \cong \triangle AFN$ (ASA),

$\therefore AM = AN$, $\therefore GA$ 平分 $\angle OGE$.

(4) 如图 2, 过点 G 作 $GQ \perp x$ 轴于点 Q,

由旋转可知: $\angle OAF = \angle BAD = \alpha$.

$$\because AB = AD, \therefore \angle ABP = \frac{180^\circ - \alpha}{2},$$

$\because \angle AOT = \angle F$, $\angle OTA = \angle GTF$,

$$\therefore \angle OGA = \angle EGA = \frac{180^\circ - \alpha}{2}, \therefore \angle OGA = \angle ABP,$$

$$\text{又} \because \angle GOA = \angle BAP, \therefore \triangle GOA \sim \triangle BAP,$$

$$\therefore \frac{GO}{BP} = \frac{OA}{AP}, \therefore GO = \frac{5}{7} \times 4 = \frac{20}{7}.$$

$$\because \tan \angle AOC = \frac{4}{3}, \therefore OQ = \frac{20}{7} \times \frac{3}{4} = \frac{15}{7}, \therefore G \left(\frac{15}{7}, \frac{20}{7} \right).$$

例 64 (2016 年上海市中考第 24 题) 如图, 抛物线 $y=ax^2+bx-5$ ($a \neq 0$) 经过点 A (4, -5), 与 x 轴的负半轴交于点 B, 与 y 轴交于点 C, 且 $OC=5 \cdot OB$, 抛物线的顶点为 D.

- (1) 求这条抛物线的表达式;
- (2) 联结 AB、BC、CD、DA, 求四边形 ABCD 的面积;
- (3) 如果点 E 在 y 轴的正半轴上, 且 $\angle BEO = \angle ABC$ 时, 求点 E 的坐标.

【分析】 (1) 先得出 C 点坐标, 再由 $OC=5BO$, 得出 B 点坐标, 将 A、B 两点坐标代入解析式求出 a, b;

(2) 分别算出 $\triangle ABC$ 和 $\triangle ACD$ 的面积, 相加即得四边形 ABCD 的面积;

(3) 由 $\angle BEO = \angle ABC$ 可知, $\tan \angle BEO = \tan \angle ABC$, 过 C 作 AB 边上的高 CH, 利用等面积法求出 CH, 从而算出 $\tan \angle ABC$, 而 BO 是已知的, 从而利用 $\tan \angle BEO = \tan \angle ABC$ 可求出 EO 长度, 也就求出了 E 点坐标.

【解答】

(1) $\because$ 抛物线 $y=ax^2+bx-5$ 与 y 轴交于点 C,

$\therefore C(0, -5), \therefore OC=5$.

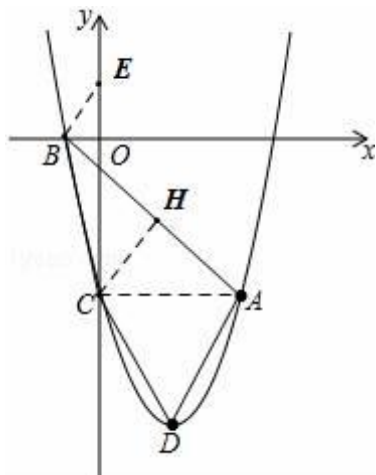
$\because OC=5OB, \therefore OB=1$,

又点 B 在 x 轴的负半轴上, $\therefore B(-1, 0)$.

$\because$ 抛物线经过点 A (4, -5) 和点 B (-1, 0),

$$\therefore \begin{cases} 16a+4b-5=-5 \\ a-b-5=0 \end{cases}, \text{解得} \begin{cases} a=1 \\ b=-4 \end{cases},$$

$\therefore$ 这条抛物线的表达式为 $y=x^2-4x-5$.



(2) 由 $y = x^2 - 4x - 5$, 得顶点 D 的坐标为 $(2, -9)$.

连接 AC,

$\because$ 点 A 的坐标是 $(4, -5)$, 点 C 的坐标是 $(0, -5)$,

又 $S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} \times 4 \times 5 = 10$, $S_{\triangle ACD} = \frac{1}{2} \times 4 \times 4 = 8$,

$\therefore S_{\text{四边形 } ABCD} = S_{\triangle ABC} + S_{\triangle ACD} = 18$.

(3) 过点 C 作 $CH \perp AB$, 垂足为点 H.

$\because S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} \times AB \times CH = 10$, $AB = 5\sqrt{2}$, $\therefore CH = 2\sqrt{2}$,

在 $\text{RT}\triangle BCH$ 中, $\angle BHC = 90^\circ$, $BC = \sqrt{26}$, $BH = \sqrt{BC^2 - CH^2} = 3\sqrt{2}$,

$\therefore \tan \angle CBH = \frac{CH}{BH} = \frac{2}{3}$.

$\because$ 在 $\text{RT}\triangle BOE$ 中, $\angle BOE = 90^\circ$, $\tan \angle BEO = \frac{BO}{EO}$,

$\because \angle BEO = \angle ABC$, $\therefore \frac{BO}{EO} = \frac{2}{3}$, 得 $EO = \frac{3}{2}$,

$\therefore$ 点 E 的坐标为 $(0, \frac{3}{2})$.

例 65 (2016 年沈阳市中考第 24 题) 在 $\triangle ABC$ 中, $AB=6$, $AC=BC=5$, 将 $\triangle ABC$ 绕点 A 按顺时针方向旋转, 得到 $\triangle ADE$, 旋转角为 α ($0^\circ < \alpha < 180^\circ$), 点 B 的对应点为点 D, 点 C 的对应点为点 E, 连接 BD、BE.

(1) 如图, 当 $\alpha=60^\circ$ 时, 延长 BE 交 AD 于点 F.

①求证: $\triangle ABD$ 是等边三角形;

②求证: $BF \perp AD$, $AF=DF$;

③请直接写出 BE 的长;

(2) 在旋转过程中, 过点 D 作 DG 垂直于直线 AB, 垂足为点 G, 连接 CE, 当 $\angle DAG=\angle ACB$, 且线段 DG 与线段 AE 无公共点时, 请直接写出 BE+CE 的值.

【分析】 (1) ①由旋转性质知 $AB=AD$, $\angle BAD=60^\circ$ 即可得证; ②由 $BA=BD$ 、 $EA=ED$ 根据中垂线性质即可得证; ③分别求出 BF、EF 的长即可得;

(2) 由 $\angle ACB+\angle BAC+\angle ABC=180^\circ$ 、 $\angle DAG+\angle DAE+\angle BAE=180^\circ$ 、 $\angle DAG=\angle ACB$ 、 $\angle DAE=\angle BAC$ 得 $\angle BAE=\angle BAC$ 且 $AE=AC$, 根据三线合一可得 $CE \perp AB$ 、 $AC=5$ 、 $AH=3$, 继而知 $CE=2CH=8$ 、 $BE=5$, 即可得答案.

【解答】

(1) ① $\because \triangle ABC$ 绕点 A 顺时针方向旋转 60° 得到 $\triangle ADE$,

$\therefore AB=AD$, $\angle BAD=60^\circ$, $\therefore \triangle ABD$ 是等边三角形;

②由①得 $\triangle ABD$ 是等边三角形, $\therefore AB=BD$,

$\because \triangle ABC$ 绕点 A 顺时针方向旋转 60° 得到 $\triangle ADE$, $\therefore AC=AE$, $BC=DE$,

又 $\because AC=BC$, $\therefore EA=ED$, $\therefore$ 点 B、E 在 AD 的中垂线上, $\therefore BE$ 是 AD 的中垂线,

$\because$ 点 F 在 BE 的延长线上, $\therefore BF \perp AD$, $AF=DF$;

③由②知 $BF \perp AD$, $AF=DF$, $\therefore AF=DF=3$,

$\because AE=AC=5$, $\therefore EF=4$,

$\because$ 在等边三角形 ABD 中, $BF=AB \cdot \sin \angle BAF = 6 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = 3\sqrt{3}$,

$\therefore BE=BF-EF=3\sqrt{3}-4$;

(2) 如图所示,

$\because \angle DAG = \angle ACB$, $\angle DAE = \angle BAC$,

$\therefore \angle ACB + \angle BAC + \angle ABC = \angle DAG + \angle DAE + \angle ABC = 180^\circ$,

又 $\because \angle DAG + \angle DAE + \angle BAE = 180^\circ$, $\therefore \angle BAE = \angle ABC$,

$\because AC=BC=AE$, $\therefore \angle BAC = \angle ABC$, $\therefore \angle BAE = \angle BAC$,

$\therefore AB \perp CE$, 且 $CH=HE=\frac{1}{2}CE$,

$\because AC=BC$, $\therefore AH=BH=\frac{1}{2}AB=3$,

则 $CE=2CH=8$, $BE=5$, $\therefore BE+CE=13$.

例 66 (2016 年泰州市中考第 25 题) 如图, 已知正方形 ABCD, P 为射线 AB 上的一点, 以 BP 为边作正方形 BPEF, 使点 F 在线段 CB 的延长线上, 连接 EA、EC.

(1) 如图 1, 若点 P 在线段 AB 的延长线上, 求证: $EA=EC$;

(2) 若点 P 在线段 AB 上.

①如图 2, 连接 AC, 当 P 为 AB 的中点时, 判断 $\triangle ACE$ 的形状, 并说明理由;

②如图 3, 设 $AB=a$, $BP=b$, 当 EP 平分 $\angle AEC$ 时, 求 $a:b$ 及 $\angle AEC$ 的度数.

【分析】 (1) 根据正方形的性质和全等三角形的判定定理证明 $\triangle APE \cong \triangle CFE$, 根据全等三角形的性质证明结论;

(2) ①根据正方形的性质、等腰直角三角形的性质解答;

②根据 $PE \parallel CF$, 得到 $\frac{PE}{BC} = \frac{PG}{GE}$, 代入 a 、 b 的值计算求出 $a:b$, 根据角平分线的判定定理得到 $\angle HCG = \angle BCG$, 证明 $\angle AEC = \angle ACB$, 即可求出 $\angle AEC$ 的度数.

【解答】

(1) $\because$ 四边形 ABCD 和四边形 BPEF 是正方形,

$\therefore AB=BC$, $BP=BF$, $\therefore AP=CF$,

在 $\triangle APE$ 和 $\triangle CFE$ 中, $\begin{cases} AP=CF \\ \angle P=\angle F \\ PE=EF \end{cases}$,

$\therefore \triangle APE \cong \triangle CFE$, $\therefore EA=EC$;

(2) ① ∵ P 为 AB 的中点,

∴ PA=PB, 又 PB=PE, ∴ PA=PE, ∴ ∠PAE=45°, 又 ∠DAC=45°,

∴ ∠CAE=90°, 即 △ACE 是直角三角形;

② ∵ EP 平分 ∠AEC, EP ⊥ AG,

∴ AP=PG=a-b, BG=a-(2a-2b)=2b-a

∵ PE // CF, ∴ $\frac{PE}{BC} = \frac{PG}{GE}$, 即 $\frac{a-b}{2b-a}$,

解得, $a = \sqrt{2}b$;

作 GH ⊥ AC 于 H, ∵ ∠CAB=45°,

∴ $HG = \frac{\sqrt{2}}{2} AG = \frac{\sqrt{2}}{2} \times (2\sqrt{2}b - 2b) = (2 - \sqrt{2})b$, 又 $BG = 2b - a = (2 - \sqrt{2})b$,

∴ GH=GB, GH ⊥ AC, GB ⊥ BC, ∴ ∠HCG=∠BCG,

∵ PE // CF, ∴ ∠PEG=∠BCG, ∴ ∠AEC=∠ACB=45°.

∴ a: b = $\sqrt{2}$: 1; ∴ ∠AEC=45°.

例 67 (2016 年湘潭市中考第 25 题) 如图, 菱形 ABCD 中, 已知 $\angle BAD=120^\circ$, $\angle EGF=60^\circ$, $\angle EGF$ 的顶点 G 在菱形对角线 AC 上运动, 角的两边分别交边 BC、CD 于点 E、F.

如图 1, 当顶点 G 运动到与点 A 重合时, 求证: $EC+CF=BC$;

知识探究: ①如图 2, 当顶点 G 运动到 AC 中点时, 探究线段 EC、CF 与 BC 的数量关系;

②在顶点 G 的运动过程中, 若 $AC/CG=t$, 请直接写出线段 EC、CF 与 BC 的数量关系 (不需要写出证明过程);

问题解决: 如图 3, 已知菱形边长为 8, $BG=7$, $CF=6/5$, 当 $t>2$ 时, 求 EC 的长度.

【解答】

(1) 因为菱形 ABCD 中, $\angle BAD=120^\circ$, 所以 $\triangle ABC$ 和 $\triangle ADC$ 是等边三角形.

如图, 作 $AM \perp BC$ 于 M, 作 $AN \perp CD$ 于 N.

因为 CG 平分 $\angle BCD$, 所以 $AM=AN$, $AC=2*MC$.

所以 $MC=NC$, $\angle MAN=60^\circ$.

又因为 $\angle EAF=60^\circ$, 所以 $\angle EAM=\angle FAN$.

所以 $\triangle EAM \cong \triangle FAN$. 所以 $EM=FN$.

所以 $EC+CF=EM+MC+CN-FN=2*MC=AC=BC$.

(2) ①如图, 作 $GP \parallel AB$ 交 BC 于 P, 作 $GQ \parallel AD$ 交 CD 于 Q.

由 (1) 知, 在菱形 GPCQ 中, $EC+CF=PC$.

因为 G 是 AC 的中点, 所以 P 是 BC 的中点, 所以 $EC+CF=1/2*BC$.

② $EC+CF=1/t*BC$.

(3) 如图, 设 AC 与 BD 交于点 O.

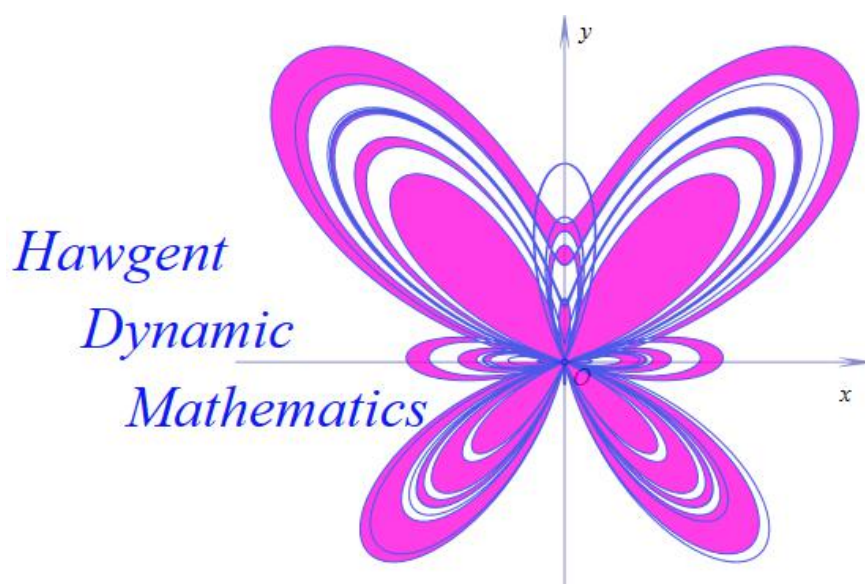
在 $Rt\triangle BCO$ 中, $BC=8, \angle BCO=60^\circ$, 所以 $CO=4, BO=4*3^{1/2}$.

在 $Rt\triangle BGO$ 中, $BG=7, BO=4*3^{1/2}$, 所以 $GO=1$.

当 $AC/CG=t>0, GC=3$, 此时 $t=AC/CG=8/3$. 所以 $EC+CF=1/t*BC=3$.

所以 $EC=3-CF=3-6/5=9/5$.

皓荡的大地，奔腾的骏马
只为向着那，最初的梦想



地址：广州市越秀区桂花岗广州大学北 8 号

广州市越秀区盘福路朱紫后街 1 号

邮件： 11033149@qq.com

电话： 020-36280771

网站： www.hawgent.com

QQ 群： 367878041