

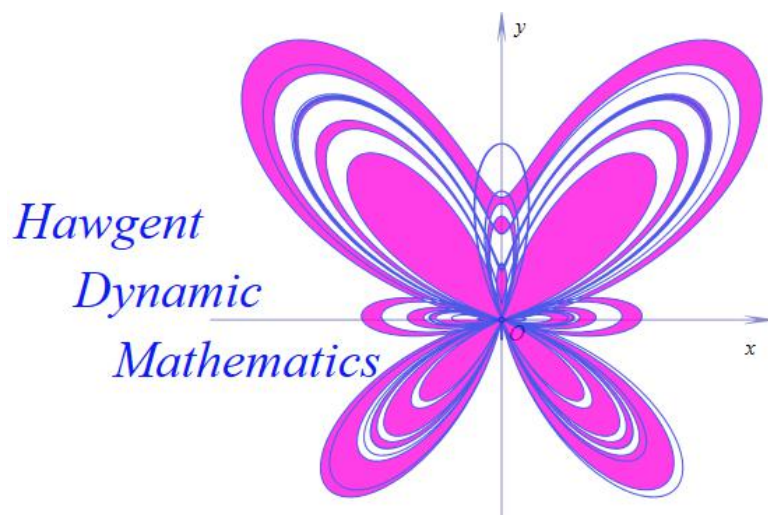


Hawgent 皓骏动态数学课程系列

计算与推理

(上册)

深入学科，彻底突破数学教学和数学学习中的重点难点问题
开展数学实验、数学教学、数学学习和数学研究的必备工具



皓骏（广州）数学技术中心

Hawgent Technology Centre in Mathematics

内容介绍

在学习数学过程中,有许多问题在查看了详细的解答或听到了老师的讲解之后,很多学生仍然不得其解,即使他们在下一次遇到同一个问题也未必能够给出正确或完整的解答.

这是因为,在学习过程中,数学更加需要理解.

本课程收集并整理了一些综合性很高的数学问题,它们让老师感到难教,让学生感到难学.就是说,对于这类问题许多数学老师都反应他们在花费了很大力气、很多时间的讲解之后,很多学生仍然是似懂非懂.

同样是学习,但方法有优劣之分,效率有高低之分.把看似复杂、抽象的问题变得更容易一些,抓住数学的本质使学生多一些理性思考而少一些机械记忆,让学生感悟到自然朴实的数学思想方法从而能够举一反三,这是我们追求的理念.

Hawgent 皓骏团队利用动态数学技术将这类问题呈现在学生面前,为他们提供了一个动手、观察、探索、猜想和验证的机会与平台,帮助他们利用变化的图形和数据发现问题内在的关系,并逐渐形成真正属于他们自己的解决问题的思路,这是我们追求的目标.

如果这种方式能够得到大家的认同,对我们是一种鼓励,并将激发我们更加努力工作的热情,同时希望有更多志同道合者加入我们的队伍,将这项工作持续下去,越做越好.当然也欢迎各种不同的声音,甚至是批评的意见,从而帮助我们得到提高和成长.

欢迎联系: 11033149@qq.com

目录

第一部分 代数计算及通过代数计算进行说理问题.....	5
例 1 (2008 年长沙市中考第 25 题)	5
例 2 (2008 年江西省中考第 24 题)	6
例 3 (2008 年陕西省中考第 24 题)	8
例 4 (2008 年泰州市中考第 29 题)	10
例 5 (2009 年福州市中考第 22 题)	12
例 6 (2009 年杭州市中考第 24 题)	14
例 7 (2009 年河南省中考第 23 题)	16
例 8 (2010 年黄冈市中考第 25 题)	19
例 9 (2010 年大连市中考第 26 题)	20
例 10 (2011 年河北省中考第 26 题)	22
例 11 (2011 年黄冈市中考第 24 题)	24
例 12 (2011 年武汉市中考第 25 题)	26
例 13 (2012 年江西省中考第 23 题)	29
例 14 (2012 年武汉市中考第 25 题)	31
例 15 (2012 年苏州市中考第 28 题)	33
例 16 (2012 年盐城市中考第 28 题)	35
例 17 (2012 年成都市中考第 28 题)	37
例 18 (2012 年丽水市中考第 23 题)	40
例 19 (2012 年陕西省中考第 24 题)	42
例 20 (2013 年福州市中考第 22 题)	44
例 21 (2013 年广州市中考第 25 题)	46
例 22 (2013 年南昌市中考第 25 题)	47
例 23 (2013 年南京市中考第 26 题)	49
例 24 (2014 年珠海市中考第 22 题)	51
例 25 (2014 年烟台市中考第 26 题)	55
例 26 (2014 年泰州市中考第 26 题)	57
例 27 (2014 年福州市中考第 22 题)	59
例 28 (2014 年武汉市中考第 25 题)	62
例 29 (2014 年南宁市中考第 26 题)	66
例 30 (2014 年天津市中考第 24 题)	69
例 31 (2015 年北京市中考第 29 题)	71
例 32 (2015 年广州市中考第 25 题)	73
例 33 (2015 年河北省中考第 25 题)	76
例 34 (2015 年湖州市中考第 24 题)	78
例 35 (2015 年江西省中考第 23 题)	82
例 36 (2015 年兰州市中考第 28 题)	84
例 37 (2015 年泰州市中考第 26 题)	86
例 38 (2015 年天津市中考第 25 题)	88
例 39 (2016 年北京市中考第 29 题)	90
例 40 (2016 年大连市中考第 26 题)	92
例 41 (2016 年福州市中考第 27 题)	94

例 42 (2016 年河北省中考第 26 题)	95
例 43 (2016 年江西省中考第 23 题)	97
例 44 (2016 年金华市中考第 24 题)	99
例 45 (2016 年吉林省中考第 25 题)	103
例 46 (2016 年南京市中考第 27)	105
例 47 (2016 年陕西省中考第 24 题)	107
例 48 (2016 年天津市中考第 25 题)	109
例 49 (2016 年武汉市中考第 24 题)	113
例 50 (2016 年义乌市绍兴市中考第 23 题)	115
例 51 (2016 年长沙市中考第 25 题)	117
例 52 (2016 年长沙市中考第 26 题)	119
例 53 (2016 年株洲市中考第 26 题)	121

第一部分 代数计算及通过代数计算进行说理问题

例 1 (2008 年长沙市中考第 25 题) 在平面直角坐标系中，一动点 $P(x, y)$ 从 $M(1, 0)$ 出发，沿由 $A(-1, 1)$, $B(-1, -1)$, $C(1, -1)$, $D(1, 1)$ 四点组成的正方形边线 (如图 1) 按一定方向运动. 图 2 时 P 点运动的路程 s (个单位) 与运动时间 t (秒) 之间的函数图像，图 3 时 P 点的纵坐标 y 与 P 点运动的路程 s 之间的函数图像的一部分.

- (1) s 与 t 之间的函数关系式是: _____;
- (2) 与 图 3 相对应的 P 点的运动路程是_____； P 点出发_____秒首次到达点 B ;
- (3) 写出当 $3 \leq s \leq 8$ 时， y 与 s 之间的函数关系式，并在图 3 中补全函数图像.

【解答】

$$(1) S = \frac{1}{2}t \quad (t \geq 0)$$

$$(2) M \rightarrow D \rightarrow A \rightarrow B,$$

$$(3) \text{当 } 3 \leq s < 5, \text{ 即 } P \text{ 从 } A \text{ 到 } B \text{ 时, } y = -1 - s;$$

$$\text{当 } 5 \leq s < 7, \text{ 即 } P \text{ 从 } B \text{ 到 } C \text{ 时, } y = -1;$$

$$\text{当 } 7 \leq s \leq 8, \text{ 即 } P \text{ 从 } C \text{ 到 } M \text{ 时, } y = s - 8.$$

例2(2008年江西省中考第24题)如图1,抛物线 $y_1 = -ax^2 - ax + 1$ 经过点 $P(-1/2, 9/8)$, 且与抛物线 $y_2 = ax^2 - ax - 1$ 相交于 A、B 两点.

(1) 求 a 的值;

(2) 设 $y_1 = -ax^2 - ax + 1$ 与 x 轴分别交于 M、N 两点 (点 M 在点 N 的左边), $y_2 = ax^2 - ax - 1$ 与 x 轴分别交于 E、F 两点 (点 E 在点 F 的左边), 观察 M、N、E、F 四点的坐标, 写出一条正确的结论, 并通过计算说明;

(3) 设 A、B 两点的横坐标分别记为 x_A 、 x_B , 若在 x 轴上有一动点 Q ($x, 0$), 且 $x_A \leq x \leq x_B$, 过 Q 作一条垂直于 x 轴的直线, 与两条抛物线分别交于 C、D 两点, 试问当 x 为何值时, 线段 CD 有最大值? 其最大值为多少?

【解答】

(1) 解: 答案不唯一, 只要合理均可. 例如:

- ① 抛物线 $y_1 = -ax^2 - ax + 1$ 开口向下, 或抛物线 $y_2 = ax^2 - ax - 1$ 开口向上;
 - ② 抛物线 $y_1 = -ax^2 - ax + 1$ 的对称轴是 $x = -\frac{1}{2}$, 或抛物线 $y_2 = ax^2 - ax - 1$ 的对称轴是 $x = \frac{1}{2}$;
 - ③ 抛物线 $y_1 = -ax^2 - ax + 1$ 经过点 (0,1), 或抛物线 $y_2 = ax^2 - ax - 1$ 经过点 (0,-1);
 - ④ 抛物线 $y_1 = -ax^2 - ax + 1$ 与 $y_2 = ax^2 - ax - 1$ 的形状相同, 但开口方向相反;
 - ⑤ 抛物线 $y_1 = -ax^2 - ax + 1$ 与 $y_2 = ax^2 - ax - 1$ 都与 x 轴有两个交点;
 - ⑥ 抛物线 $y_1 = -ax^2 - ax + 1$ 经过点 (-1,1) 或抛物线 $y_2 = ax^2 - ax - 1$ 经过点 (1,-1);
- 等等.

(2) 当 $a = \frac{1}{2}$ 时, $y_1 = -\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}x + 1$, 令 $-\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}x + 1 = 0$,

解得 $x_M = -2$, $x_N = 1$.

$$y_2 = \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}x - 1, \text{ 令 } \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}x - 1 = 0, \text{ 解得 } x_E = -1, x_F = 2.$$

① $\because x_M + x_F = 0, x_N + x_E = 0, \therefore$ 点 M 与点 F 对称, 点 N 与点 E 对称;

② $\because x_M + x_F + x_N + x_E = 0, \therefore M, N, E, F$ 四点横坐标的代数和为 0;

③ $\because MN = 3, EF = 3, \therefore MN = EF$ (或 $ME = NF$).

(3) $\because a > 0,$

$\therefore$ 抛物线 $y_1 = -ax^2 - ax + 1$ 开口向下, 抛物线 $y_2 = ax^2 - ax - 1$ 开口向上.

根据题意, 得 $CD = y_1 - y_2 = (-ax^2 - ax + 1) - (ax^2 - ax - 1) = -2ax^2 + 2.$

$\therefore$ 当 $x = 0$ 时, CD 的最大值是 2.

例 3 (2008 年陕西省中考第 24 题) 如图 1, 矩形 ABCD 的长、宽分别为 $\frac{3}{2}$ 和 1, 且 OB=1, 点 E ($\frac{3}{2}, 2$), 连结 AE, ED.

- (1) 求经过 A、E、D 三点的抛物线的表达式;
- (2) 若以原点为位似中心, 将五边形 AEDCB 放大, 使放大后的五边形的边长是原五边形对应边长的 3 倍. 请在右图网格中画出放大后的五边形 A'E'D'C'B';
- (3) 经过 A'、E'、D' 三点的抛物线能否由 (1) 中的抛物线平移得到? 请说明理由.

【解答】

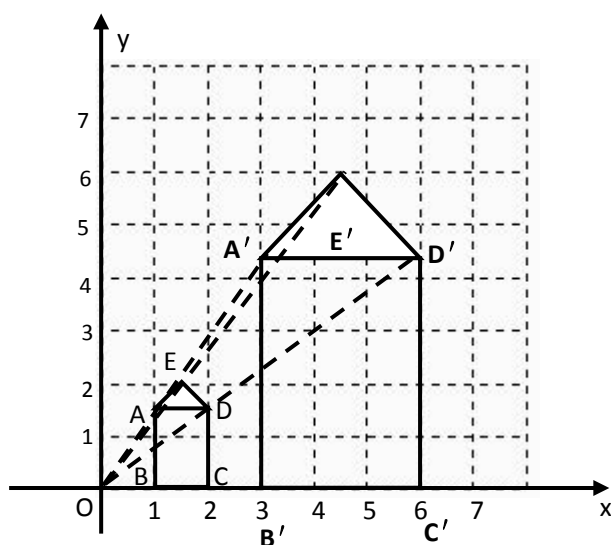
(1) 设经过 A、E、D 三点的抛物线的表达式为 $y = ax^2 + bx + c$

$$\because A(1, \frac{3}{2}), E(\frac{3}{2}, 2), D(2, \frac{3}{2})$$

$$\therefore \begin{cases} a+b+c=\frac{3}{2} \\ \frac{9}{4}a+\frac{3}{2}b+c=2 \\ 4a+2b+c=\frac{3}{2} \end{cases}, \quad \text{解之, 得} \begin{cases} a=-2 \\ b=6 \\ c=-\frac{5}{2} \end{cases}$$

$$\therefore \text{过 A、E、D 三点的抛物线的表达式为 } y = -2x^2 + 6x - \frac{5}{2}.$$

(2)



(第 24 题图)

(3) 不能，理由如下：

设经过 A'、E'、D'三点的抛物线的表达式为 $y = a'x^2 + b'x + c'$

$$\because A' \left(3, \frac{9}{2} \right), E' \left(\frac{9}{2}, 6 \right), D' \left(6, \frac{9}{2} \right)$$

$$\therefore \begin{cases} 9a' + 3b' + c' = \frac{9}{2} \\ \frac{81}{4}a' + \frac{9}{2}b' + c' = 6, \\ 36a' + 6b' + c' = \frac{9}{2} \end{cases} \quad \text{解之，得 } a' = -\frac{2}{3}$$

$$\because a = -2, a' = -\frac{2}{3}, \quad \therefore a \neq a'$$

$\therefore$ 经过 A'、E'、D'三点的抛物线不能由 (1) 中的抛物线平移得到。

例 4 (2008 年泰州市中考第 29 题) 已知二次函数 $y_1=ax^2+bx+c$ ($a \neq 0$) 的图像经过三点 $(1,0)$, $(-3,0)$, $(0, -3/2)$.

(1) 求二次函数的解析式, 并在给定的直角坐标系中作出这个函数的图像;

(2) 若反比例函数 $y_2=2/x$ ($x>0$) 的图像与二次函数 $y_1=ax^2+bx+c$ ($a \neq 0$) 的图像在第一象限内交于点 $A(x_0, y_0)$, x_0 落在两个相邻的正整数之间. 请你观察图像, 写出这两个相邻的正整数;

(3) 若反比例函数 $y_2=k/x$ ($k>0, x>0$) 的图像与二次函数 $y_1=ax^2+bx+c$ ($a \neq 0$) 的图像在第一象限内的交点为 A , 点 A 的横坐标为 x_0 满足 $2 < x_0 < 3$, 试求实数 k 的取值范围.

【解答】

(1) 设抛物线解析式为 $y=a(x-1)(x+3)$

将 $(0, -\frac{3}{2})$ 代入, 解得 $a=\frac{1}{2}$.

$\therefore$ 抛物线解析式为 $y=\frac{1}{2}x^2+x-\frac{3}{2}$

(2) 正确的画出反比例函数在第一象限内的图像

(3) 由图像可知, 交点的横坐标 x_0 落在 1 和 2 之间, 从而得出这两个相邻的正整数为 1 与 2。

(3) 由函数图像或函数性质可知: 当 $2 < x < 3$ 时,

对 $y_1=\frac{1}{2}x^2+x-\frac{3}{2}$, y_1 随着 x 增大而增大, 对 $y_2=\frac{k}{x}$ ($k>0$),

y_2 随着 x 的增大而减小。因为 $A(x_0, y_0)$ 为二次函数图像与反比例函数图像的交点, 所以当 $x_0=2$ 时, 由反比例函数图像在二次函数上方得 $y_2 > y_1$,

即 $\frac{k}{2} > \frac{1}{2} \times 2^2 + 2 - \frac{3}{2}$, 解得 $k > 5$ 。

同理，当 $X_0=3$ 时，由二次函数数图象在反比例上方得 $y_1 > y_2$ ，

$$\text{即 } \frac{1}{2} \times 3^2 + 3 - \frac{3}{2} > \frac{k}{3}, \text{ 解得 } K < 18。$$

所以 K 的取值范围为 $5 < K < 18$

例 5 (2009 年福州市中考第 22 题) 已知直线 $l: y = -x + m$ ($m \neq 0$) 交 x 轴、 y 轴于点 A 、 B 两点, 点 C 、 M 分别在线段 OA 、 AB 上, 且 $OC = 2 \cdot CA$, $AM = 2 \cdot MB$, 连结 MC , 将 $\triangle ACM$ 绕点 M 旋转 180° , 得到 $\triangle FEM$, 则点 E 在 y 轴上, 点 F 在直线 l 上; 取线段 EO 的中点 N , 将 $\triangle ACM$ 沿 MN 所在直线翻折, 得到 $\triangle PMG$, 其中 P 与 A 为对称点. 记: 过点 F 的双曲线为 C_1 , 过点 M 且以 B 为顶点的抛物线为 C_2 , 过点 P 且以 M 为顶点的抛物线为 C_3 .

如图 1, 当 $m = 6$ 时:

①直接写出点 M 、 F 的坐标;

②求 C_1 、 C_2 的函数解析式;

当 m 发生变化时: ①在 C_1 的每一支上, y 随 x 的增大如何变化? 请说明理由.

②若 C_2 、 C_3 中的 y 丢随着 x 的增大而减小, 写出 x 的取值范围.

【解答】

(1) ①点 M 的坐标为 $(2, 4)$, 点 F 的坐标为 $(-2, 8)$.

设 C_1 的函数解析式为 $y = \frac{k}{x}$ ($k \neq 0$).

$\because C_1$ 过点 $F(-2, 8)$

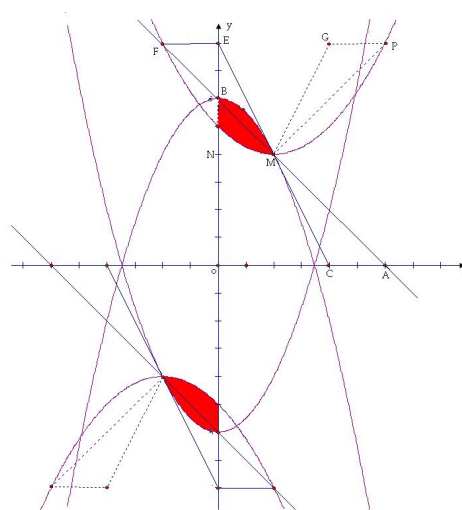
$\therefore C_1$ 的函数解析式为 $y = -\frac{16}{x}$.

$\because C_2$ 的顶点 B 的坐标是 $(0, 6)$

$\therefore$ 设 C_2 的函数解析式为 $y = ax^2 + 6$ ($a \neq 0$).

$\because C_2$ 过点 $M(2, 4)$

$\therefore 4a + 6 = 4$, $a = -\frac{1}{2}$.



$\therefore C_2$ 的函数解析式为 $y = -\frac{1}{2}x^2 + 6$.

(2) 依题意得, A (m, 0), B (0, m),

$\therefore$ 点 M 坐标为 $(\frac{1}{3}m, \frac{2}{3}m)$, 点 F 坐标为 $(-\frac{1}{3}m, \frac{4}{3}m)$.

① 设 C_1 的函数解析式为 $y = \frac{k}{x}$ ($k \neq 0$) .

$\therefore C_1$ 过点 F $(-\frac{1}{3}m, \frac{4}{3}m)$

$$\therefore k = -\frac{4}{9}m^2 .$$

$$\therefore m \neq 0$$

$$\therefore k < 0$$

$\therefore$ 在 C_1 的每一支上, y 随着 x 的增大而增大.

② 答: 当 $m > 0$ 时, 满足题意的 x 的取值范围为 $0 < x < \frac{1}{3}m$;

当 $m < 0$ 时, 满足题意的 x 的取值范围为 $\frac{1}{3}m < x < 0$.

例 6 (2009 年杭州市中考第 24 题) 已知平行于 x 轴的直线 $y=a$ ($a \neq 0$) 与函数 $y=x$ 和函数 $y=1/x$ 的图像分别交于点 A 和点 B, 又有定点 P (2,0) .

(1) 若 $a>0$, 且 $\tan \angle POB=1/9$, 求线段 AB 的长;

(2) 在过 A, B 两点且顶点在直线 $y=x$ 上的抛物线中, 已知线段 $AB=8/3$, 且在它的对称轴左边时, y 随着 x 的增大而增大, 试求出满足条件的抛物线的解析式;

(3) 已知经过 A, B, P 三点的抛物线, 平移后能得到 $y=9/5 \cdot x^2$ 的图像, 求点 P 到直线 AB 的距离.

【解答】

(1) 设第一象限内的点 B (m,n), 则 $\tan \angle POB = \frac{n}{m} = \frac{1}{9}$, 得 $m=9n$, 又点 B 在函数 $y=\frac{1}{x}$ 的图象上, 得 $n=\frac{1}{m}$, 所以 $m=3$ (-3 舍去), 点 B 为 $(3, \frac{1}{3})$,

而 $AB \parallel x$ 轴, 所以点 A $(\frac{1}{3}, \frac{1}{3})$, 所以 $AB = 3 - \frac{1}{3} = \frac{8}{3}$;

(2) 由条件可知所求抛物线开口向下, 设点 A (a, a), B $(\frac{1}{a}, a)$, 则 $AB = \frac{1}{a} - a = \frac{8}{3}$,

所以 $3a^2 + 8a - 3 = 0$, 解得 $a = -3$ 或 $a = \frac{1}{3}$.

当 $a = -3$ 时, 点 A (-3, -3), B $(-\frac{1}{3}, -3)$, 因为顶点在 $y=x$ 上, 所以

顶点为 $(-\frac{5}{3}, -\frac{5}{3})$, 所以可设二次函数为 $y = k(x + \frac{5}{3})^2 - \frac{5}{3}$, 点 A 代入, 解得

$k = -\frac{3}{4}$, 所以所求函数解析式为 $y = -\frac{3}{4}(x + \frac{5}{3})^2 - \frac{5}{3}$.

同理，当 $a = \frac{1}{3}$ 时，所求函数解析式为 $y = -\frac{3}{4}\left(x - \frac{5}{3}\right)^2 + \frac{5}{3}$ ；

(3) 设 A (a, a) ，B $\left(\frac{1}{a}, a\right)$ ，由条件可知抛物线的对称轴为 $x = \frac{a}{2} + \frac{1}{2a}$ 。

设所求二次函数解析式为： $y = \frac{9}{5}(x - 2)\left(x - \left(a + \frac{1}{a}\right) + 2\right)$ 。

点 A (a, a) 代入，解得 $a_1 = 3$ ， $a_2 = \frac{6}{13}$ ，所以点 P 到直线 AB 的距离为 3 或 $\frac{6}{13}$ 。

例 7 (2009 年河南省中考第 23 题)

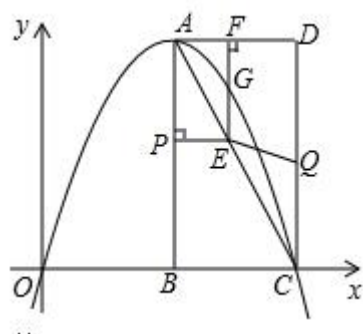
如图，在平面直角坐标系中，已知矩形 ABCD 的三个顶点 B (4, 0)、C (8, 0)、D (8, 8)．抛物线 $y=ax^2+bx$ 过 A、C 两点．

(1) 直接写出点 A 的坐标，并求出抛物线的解析式；

(2) 动点 P 从点 A 出发，沿线段 AB 向终点 B 运动，同时点 Q 从点 C 出发，沿线段 CD 向终点 D 运动．速度均为每秒 1 个单位长度，运动时间为 t 秒．过点 P 作 $PE \perp AB$ 交 AC 于点 E．

①过点 E 作 $EF \perp AD$ 于点 F，交抛物线于点 G．当 t 为何值时，线段 EG 最长？

②连接 EQ．在点 P、Q 运动的过程中，判断有几个时刻使得 $\triangle CEQ$ 是等腰三角形？请直接写出相应的 t 值



【分析】(1) 由于四边形 ABCD 为矩形，所以 A 点与 D 点纵坐标相同，A 点与 B 点横坐标相同；

(2) ①根据相似三角形的性质求出点 E 的横坐标表达式即为点 G 的横坐标表达式．代入二次函数解析式，求出纵标表达式，将线段最值问题转化为二次函数最值问题解答．

②若构成等腰三角形，则三条边中有两条边相等即可，于是可分 $EQ=QC$ ， $EC=CQ$ ， $EQ=EC$ 三种情况讨论．若有两种情况时间相同，则三边长度相同，为等腰三角

形.

【解答】

解: (1) 因为点 B 的横坐标为 4, 点 D 的纵坐标为 8, $AD \parallel x$ 轴, $AB \parallel y$ 轴,

所以点 A 的坐标为 $(4, 8)$.

将 A (4, 8)、C (8, 0) 两点坐标分别代入 $y=ax^2+bx$ 得 $\begin{cases} 16a+4b=8 \\ 64a+8b=0 \end{cases}$,

解得 $a = -\frac{1}{2}$, $b = 4$.

故抛物线的解析式为： $y = -\frac{1}{2}x^2 + 4x$ ；

(2) ①在 $\text{Rt}\triangle APE$ 和 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中, $\tan \angle PAE = \frac{PE}{AP} = \frac{BC}{AB}$, 即 $\frac{PE}{AP} = \frac{4}{8}$.

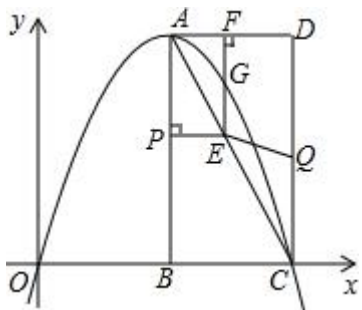
$$\therefore PE = \frac{1}{2} AP = \frac{1}{2} t. \quad PB = 8 - t.$$

∴点 E 的坐标为 $(4+\frac{1}{2}t, 8-t)$.

$$\therefore \text{点 G 的纵坐标为: } -\frac{1}{2} \left(4 + \frac{1}{2}t\right)^2 + 4 \left(4 + \frac{1}{2}t\right) = -\frac{1}{8}t^2 + 8.$$
$$\therefore EG = -\frac{1}{8}t^2 + 8 - (8-t) = -\frac{1}{8}t^2 + t.$$

$\because -\frac{1}{8} < 0$, $\therefore$ 当 $t=4$ 时, 线段 EG 最长为 2.

②共有三个时刻.



(①) 当 $EQ=QC$ 时,

因为 $Q(8, t)$, $E(4+\frac{1}{2}t, 8-t)$, $QC=t$,

所以根据两点间距离公式，得：

$$\left(\frac{1}{2}t-4\right)^2 + (8-2t)^2 = t^2.$$

整理得 $13t^2-144t+320=0$,

解得 $t=\frac{40}{13}$ 或 $t=\frac{104}{13}=8$ (此时 E、C 重合，不能构成三角形，舍去).

(②) 当 $EC=CQ$ 时，

因为 $E\left(4+\frac{1}{2}t, 8-t\right)$, $C(8, 0)$, $QC=t$,

所以根据两点间距离公式，得：

$$\left(4+\frac{1}{2}t-8\right)^2 + (8-t)^2 = t^2.$$

整理得 $t^2-80t+320=0$, $t=40-16\sqrt{5}$, $t=40+16\sqrt{5} > 8$ (此时 Q 不在矩形的边上，舍去).

(③) 当 $EQ=EC$ 时，

因为 $Q(8, t)$, $E\left(4+\frac{1}{2}t, 8-t\right)$, $C(8, 0)$,

所以根据两点间距离公式，得： $\left(\frac{1}{2}t-4\right)^2 + (8-2t)^2 = \left(4+\frac{1}{2}t-8\right)^2 + (8-t)^2$,

解得 $t=0$ (此时 Q、C 重合，不能构成三角形，舍去) 或 $t=\frac{16}{3}$.

于是 $t_1=\frac{16}{3}$, $t_2=\frac{40}{3}$, $t_3=40-16\sqrt{5}$.

例 8 (2010 年黄冈市中考第 25 题) 如图 1, 已知抛物线 $y=ax^2+bx+c$ ($a \neq 0$) 的顶点为 $C(1,1)$ 且过原点 O . 过抛物线上一点 $P(x, y)$ 向直线 $y=5/4$ 作垂线, 垂足为 M , 连结 FM .

- (1) 求字母 a 、 b 、 c 的值;
- (2) 在直线 $x=1$ 上有一点 $F(1, 3/4)$, 求以 PM 为底边的三角形 PFM 为等腰三角形时点 P 的坐标, 并证明此时 $\triangle PFM$ 为正三角形;
- (3) 对抛物线上任意一点 P , 是否总存在一点 $N(1, t)$, 使 $PM=PN$ 恒成立, 若存在请求出 t 的值; 若不存在请说明理由.

【解答】

(1) $a=-1, b=2, c=0$

(2) 过 P 作直线 $x=1$ 的垂线, 可求 P 的纵坐标为 $\frac{1}{4}$, 横坐标为 $1+\frac{1}{2}\sqrt{3}$. 此时, $MP=MF=PF=1$, 故 $\triangle MPF$ 为正三角形.

(3) 不存在. 因为当 $t < \frac{5}{4}$, $x < 1$ 时, PM 与 PN 不可能相等, 同理, 当 $t > \frac{5}{4}$, $x > 1$ 时, PM 与 PN 不可能相等.

例 9 (2010 年大连市中考第 26 题) 如图 1, 抛物线 $F: y=ax^2+bx+c$ ($a>0$) 与 y 轴相交于点 C , 直线 l_1 经过点 C 且平行于 x 轴, 将直线 l_1 向上平移 t 个单位得到直线 l_2 . 设直线 l_1 与抛物线 F 的交点为 C 、 D , 直线 l_2 与抛物线 F 的交点为 A 、 B , 连结 AC 、 BC .

- (1) 当 $a=1/2$, $b=-3/2$, $c=1$, $t=2$ 时, 探究 $\triangle ABC$ 的形状, 并说明理由;
- (2) 若 $\triangle ABC$ 为直角三角形, 求 t 的值 (用含 a 的式子表示);
- (3) 在 (2) 的条件下, 若点 A 关于 y 轴对称的点 A' 恰好在抛物线 F 的对称轴上, 连结 $A'C$ 、 BD , 求四边形 $A'CDB$ 的面积 (用含 a 的式子表示).

【解答】

(1) $\because y = \frac{1}{2}x^2 - \frac{3}{2}x + 1$, $\therefore C$ 的坐标为 $(0, 1)$, 当 $t=2$ 时, $y=3$, 所以有 $3 = \frac{1}{2}x^2 - \frac{3}{2}x + 1$, 解得 $x_1 = -1; x_2 = 4$. $\therefore A(-1, 3), B(4, 3)$, $\therefore CA = \sqrt{5}, CB = 2\sqrt{5}, AB = 5$, $\therefore AB^2 = CB^2 + AC^2$, 则 $\triangle ABC$ 是直角三角形。

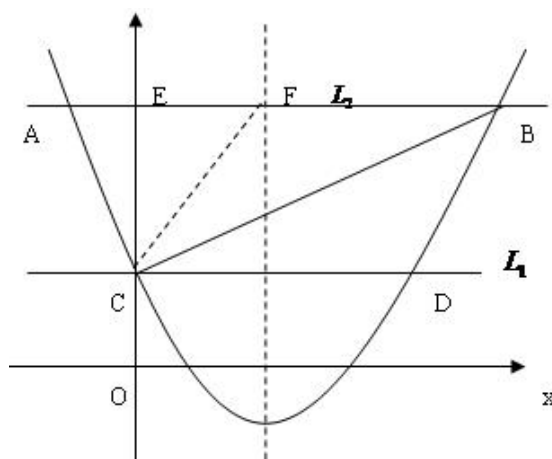
(2) 设 AB 交 y 轴于 E , 交抛物线对称轴于 F , 则 F 为 AB 中点, 连接 CF .

由方程 $c+t=ax^2+bx+c$ 得 $ax^2+bx-t=0$, 设它们两根为 x_1, x_2 . 则由根与系数的关系得:

$$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}, x_1 x_2 = -\frac{t}{a};$$

$$AB = |x_1 - x_2| = \sqrt{(x_1 + x_2)^2 - 4x_1 x_2} = \frac{\sqrt{b^2 + 4at}}{a}$$

$$\therefore CF = \frac{1}{2}AB = \frac{\sqrt{b^2 + 4at}}{2a}$$



在 $\text{Rt}\triangle CEF$ 中, $CE=t, EF=\left|-\frac{b}{2a}\right|$

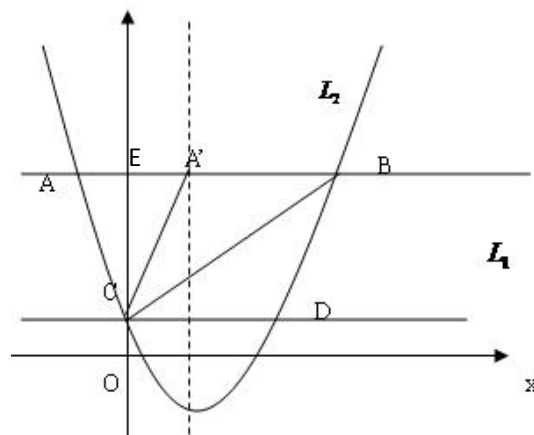
$$\therefore t^2 + \left|-\frac{b}{2a}\right|^2 = \left(\frac{\sqrt{b^2+4at}}{2a}\right)^2, \text{解得 } t = \frac{1}{a}.$$

(3) 因为点 A 关于 y 轴的对称点 A' 恰好在抛物线 F 的对称轴上, 所以 $b < 0$, 且 $A'B = 4EA'$.

$$\therefore \frac{\sqrt{b^2+4at}}{a} = -\frac{b}{2a} \times 4, \text{解得 } b = -\frac{2\sqrt{3}}{3}.$$

$\therefore CD = A'B = -\frac{b}{a}, \therefore$ 四边形 $A'CDB$ 是平行四边形.

则它的面积为 $-\frac{b}{a} \times t = \frac{2\sqrt{3}}{3a^2}.$



例 10 (2011 年河北省中考第 26 题) 如图 1, 在平面直角坐标系中, 点 P 从原点 O 出发, 沿 x 轴向右以每秒 1 个单位长度的速度运动 $t(t>0)$ 秒, 抛物线 $y=x^2+bx+c$ 经过点 O 和点 P. 已知矩形 ABCD 的三个顶点为 A (1,0)、B (1, -5)、D (4,0) .

(1) 求 c、b (用含 t 的代数式表示);

(2) 当 $4<t<5$ 时, 设抛物线分别与线段 AB、CD 交于点 M、N.

①在点 P 的运动过程中, 你认为 $\angle AMP$ 的大小是否会变化? 若变化, 说明理由; 若不变, 求出 $\angle AMP$ 的值;

②求 $\triangle MPN$ 的面积 S 与 t 的函数关系式, 并求 t 为何值时, $S=21/8$;

在矩形 ABCD 的内部 (不含边界), 把横、纵坐标都是整数的点称为“好点”. 若抛物线将这些“好点”分成数量相等的两部分, 请直接写出 t 的取值范围.

【解答】

(1) 把 $x=0, y=0$ 代入 $y=x^2+bx+c$, 得 $c=0$,

再把 $x=t, y=0$ 代入 $y=x^2+bx$, 得 $t^2+bt=0$,

$\because t>0$,

$\therefore b=-t$;

(2) ①不变.

如图 6, 当 $x=1$ 时, $y=1-t$, 故 M (1, $1-t$),

$\because \tan \angle AMP=1$,

$\therefore \angle AMP=45^\circ$;

② $S=S_{\text{四边形 AMNP}}-S_{\triangle PAM}=S_{\triangle DPN}+S_{\text{梯形 NDAM}}-S_{\triangle PAM}=\frac{1}{2}(t-4)(4t-16)+\frac{1}{2}[(4t-$

$$16) + (t-1)] \times 3 - \frac{1}{2} (t-1) (t-1) = \frac{3}{2}t^2 - \frac{15}{2}t + 6.$$

$$\text{解 } \frac{3}{2}t^2 - \frac{15}{2}t + 6 = \frac{21}{8},$$

$$\text{得: } t_1 = \frac{1}{2}, t_2 = \frac{9}{2},$$

$$\because 4 < t < 5,$$

$$\therefore t_1 = \frac{1}{2} \text{舍去},$$

$$\therefore t = \frac{9}{2}.$$

$$(3) \frac{7}{2} < t < \frac{11}{3}.$$

例 11 (2011 年黄冈市中考第 24 题) 如图 1, 过点 $F(0,1)$ 的直线 $y=kx+b$ 与抛物线 $y=\frac{1}{4}x^2$ 交于 $M(x_1, y_1)$ 和 $N(x_2, y_2)$ 两点 (其中 $x_1<0, x_2>0$) .

(1) 求 b 的值;

(2) 求 $x_1 \cdot x_2$ 的值;

(3) 分别过 M 、 N 作直线 $l: y=-1$ 的垂线, 垂足分别是 M_1 、 N_1 , 判断 $\triangle M_1FN_1$ 的形状, 并证明你的结论.

(4) 对于过点 F 的任意直线 MN , 是否存在一条定直线 m , 使 m 与以 MN 为直径的圆相切. 如果有, 请求出这条直线 m 的解析式; 如果没有, 请说明理由.

【解答】

(1) $b=1$

(2) 显然 $\begin{cases} x=x_1 \\ y=y_1 \end{cases}$ 和 $\begin{cases} x=x_2 \\ y=y_2 \end{cases}$ 是方程组 $\begin{cases} y=kx+1 \\ y=\frac{1}{4}x^2 \end{cases}$ 的两组解, 解方程组消元得

$\frac{1}{4}x^2 - kx - 1 = 0$, 依据“根与系数关系”得 $x_1 \cdot x_2 = -4$

(3) $\triangle M_1FN_1$ 是直角三角形是直角三角形, 理由如下:

由题知 M_1 的横坐标为 x_1 , N_1 的横坐标为 x_2 , 设 M_1N_1 交 y 轴于 F_1 , 则 $F_1M_1 \cdot F_1N_1 = -x_1 \cdot x_2 = 4$, 而 $FF_1=2$, 所以 $F_1M_1 \cdot F_1N_1 = F_1F^2$, 另有 $\angle M_1F_1F = \angle FF_1N_1 = 90^\circ$, 易证 $Rt\triangle M_1FF_1 \sim Rt\triangle N_1FF_1$, 得 $\angle M_1FF_1 = \angle FN_1F_1$, 故 $\angle M_1FN_1 = \angle M_1FF_1 + \angle F_1FN_1 = \angle FN_1F_1 + \angle F_1FN_1 = 90^\circ$, 所以 $\triangle M_1FN_1$ 是直角三角形.

(4) 存在, 该直线为 $y=-1$. 理由如下:

直线 $y=-1$ 即为直线 M_1N_1 .

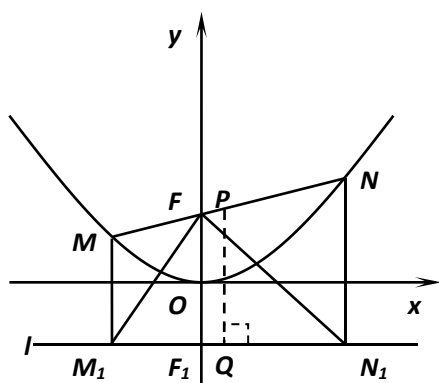
如图, 设 N 点横坐标为 m , 则 N 点纵坐标为 $\frac{1}{4}m^2$, 计算知 $NN_1 = \frac{1}{4}m^2 + 1$,

$$NF = \sqrt{m^2 + \left(\frac{1}{4}m^2 - 1\right)^2} = \frac{1}{4}m^2 + 1, \text{ 得 } NN_1 = NF$$

同理 $MM_1 = MF$.

那么 $MN = MM_1 + NN_1$, 作梯形 MM_1N_1N 的中位线 PQ , 由中位线性质知 $PQ = \frac{1}{2}(MM_1 + NN_1) = \frac{1}{2}MN$, 即圆心到直线 $y = -1$ 的距离等于圆的半径, 所以 $y = -1$

总与该圆相切.



第 22 题解答用图

例 12 (2011 年武汉市中考第 25 题) 如图 1, 抛物线 $y=ax^2+bx+3$ 经过 A (-3,0), B (-1,0) 两点.

(1) 求抛物线的解析式;

(2) 设抛物线的顶点为 M, 直线 $y=-2x+9$ 与 y 轴交于点 C, 与直线 OM 交于点 D. 现将抛物线平移, 保持顶点在直线 OD 上. 若平移的抛物线与射线 CD (含端点 C) 只有一个公共点, 求它的顶点的横坐标的值或取值范围.

(3) 如图 2, 将抛物线平移, 当顶点至原点时, 过 Q (0,3) 作不平行于 x 轴的直线交抛物线于 E、F 两点. 问在 y 轴的负半轴上是否存在点 P, 使 $\triangle PEF$ 的内心在 y 轴上? 若存在, 求出点 P 的坐标; 若不存在, 请说明理由.

【解答】

(1) 抛物线 $y=ax^2+bx+3$ 经过 A (-3,0), B (-1,0) 两点

$$\therefore 9a-3b+3=0 \text{ 且 } a-b+3=0$$

解得 $a=1$

$b=4 \therefore$ 抛物线的解析式为 $y=x^2+4x+3$ (2) 由 (1) 配方得 $y=(x+2)^2-1 \therefore$

抛物线的顶点 M (-2, -1) $\therefore$ 直线 OD 的解析式为 $y=\frac{1}{2}x$

于是设平移的抛物线的顶点坐标为 $(h, \frac{1}{2}h)$, $\therefore$ 平移的抛物线解析式为 $y=(x-h)^2+\frac{1}{2}h$. ①当抛物线经过点 C 时, $\because C(0, 9)$, $\therefore h^2+\frac{1}{2}h=9$,

$$\text{解得 } h=\frac{-1\pm\sqrt{145}}{4}. \therefore \text{ 当 } \frac{-1-\sqrt{145}}{4}\leq h<\frac{-1+\sqrt{145}}{4}$$

时, 平移的抛物线与射线 CD 只有一个公共点.

②当抛物线与直线 CD 只有一个公共点时,

由方程组 $y = (x-h)^2 + \frac{1}{2}h, y = -2x+9$.

得 $x^2 + (-2h+2)x + h^2 + \frac{1}{2}h - 9 = 0, \therefore \Delta = (-2h+2)^2 - 4(h^2 + \frac{1}{2}h - 9) = 0,$

解得 $h=4$.

此时抛物线 $y = (x-4)^2 + 2$ 与射线 CD 唯一的公共点为 $(3, 3)$,

符合题意.

综上: 平移的抛物线与射线 CD 只有一个公共点时, 顶点横坐标的

值或取值范围是 $h=4$ 或 $\frac{-1-\sqrt{145}}{4} \leq h < \frac{-1+\sqrt{145}}{4}$.

(3) 方法 1

将抛物线平移, 当顶点至原点时, 其解析式为 $y=x^2$

设 EF 的解析式为 $y=kx+3$ ($k \neq 0$).

假设存在满足题设条件的点 $P(0, t)$, 如图, 过 P 作 $GH \parallel x$ 轴, 分别过 E, F 作 GH 的垂线, 垂足为 G, H. $\because \triangle PEF$ 的内心在 y 轴上,

$\therefore \angle GEP = \angle EPQ = \angle QPF = \angle HFP$,

$\therefore \triangle GEP \sim \triangle HFP$,9 分 $\therefore GP/PH = GE/HF$,

$\therefore -x_E/x_F = (y_E - t)/(y_F - t) = (kx_E + 3 - t)/(kx_F + 3 - t)$

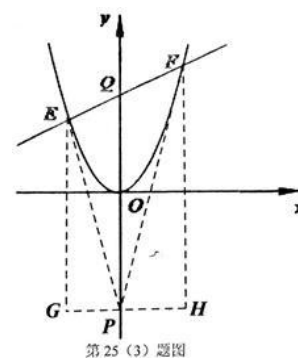
$\therefore 2kx_E \cdot x_F = (t-3)(x_E + x_F)$

由 $y=x^2, y=-kx+3$. 得 $x^2 - kx - 3 = 0$.

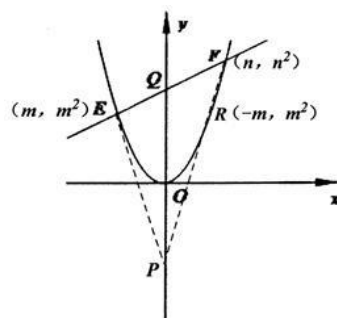
$\therefore x_E + x_F = k, x_E \cdot x_F = -3. \therefore 2k(-3) = (t-3)$

$k, \because k \neq 0, \therefore t = -3. \therefore y$ 轴的负半轴上存在点 $P(0, -3)$, 使 $\triangle PEF$ 的内心在 y 轴上.

方法 2 设 EF 的解析式为 $y=kx+3$ ($k \neq 0$), 点 E, F 的坐标分别为



第 25 (3) 题图



第 25 (3) 题图

$(m, m^2)(n, n^2)$ 由方法 1 知: $mn = -3$. 作点 E 关于 y 轴的对称点 $R(-m, m^2)$,
 作直线 FR 交 y 轴于点 P, 由对称性知 $\angle EPQ = \angle FPQ$, $\therefore$ 点 P 就是所
 求的点. 由 F, R 的坐标, 可得直线 FR 的解析式为 $y = (n-m)x + mn$. 当
 $x=0$, $y=mn=-3$, $\therefore P(0, -3)$. $\therefore$ y 轴的负半轴上存在点 P (0, -3), 使
 $\triangle PEF$ 的内心在 y 轴上.

例 13 (2012 年江西省中考第 23 题) 如图, 已知二次函数 $L_1: y=x^2-4x+3$ 与 x 轴交于 A、B 两点 (点 A 在点 B 的左边), 与 y 轴交于点 C.

(1) 写出 A、B 两点的坐标;

(2) 二次函数 $L_2: y=kx^2-4kx+3k$ ($k \neq 0$), 顶点为 P.

①直接写出二次函数 L_2 与二次函数 L_1 有关图象的两条相同的性质;

②是否存在实数 k , 使 $\triangle ABP$ 为等边三角形? 如存在, 请求出 k 的值; 如不存在, 请说明理由;

③若直线 $y=8k$ 与抛物线 L_2 交于 E、F 两点, 问线段 EF 的长度是否发生变化? 如果不会, 请求出 EF 的长度; 如果会, 请说明理由.

【解答】

(1) .依照题意, 求抛物线与 x 轴的交点坐标, 可将原二次函数表达式 $L_1: y=x^2-4x+3$ 转化成其交点式即 $L_1: y=(x-1)(x-3)$, 则点 A,B 的坐标分别为 (1, 0); (3,0)。

(2) . I .同理 $L_2: y=kx^2-4kx+3k(k \neq 0)$ 转化成其交点式即 $L_2=k(x-1)(x-3)$ 则二次函数 L_2 与二次函数 L_1 有关图像的两条相同性质可以是:

①抛物线均经过点 A (1,0) 与点 B (3, 0);

②抛物线的对称轴均为直线 $x=2$ 。

II .存在。∵抛物线 $L_2: y=kx^2-4kx+3k(k \neq 0)$ 其顶点必在直线 $x=2$ 即点 P 的横坐标为 2.

如图一，当点 P 位于第一象限时，可过点 P 作 AB 边的垂线段 PM。PM= $\tan 60^\circ \times (2 \div 2) = \sqrt{3}$

此时点 P 为 $(2, \sqrt{3})$ ，则 $4k - 4 \times 2k + 3k = \sqrt{3}$ ， $k = -\sqrt{3}$

如图一，当点 P 位于第四象限时，可过点 P 作 AB 边的垂线段 PN。PN= $\tan 60^\circ \times (2 \div 2)$
 $= \sqrt{3}$

此时点 P 为 $(2, -\sqrt{3})$ ，同理 $4k - 4 \times 2k + 3k = \sqrt{3}$ ， $k = \sqrt{3}$

III.不会发生变化。

如图二， $\because$ 抛物线 $L_2: y = kx^2 - 4kx + 3k (k \neq 0)$ 其顶点必在直线 $x = 2$ 即点 P 的

横坐标为 2.若 直线 $y = 8k$ 与抛物线 L_2 交与 E,F 两点，则有

$$\begin{cases} y = 8k \\ y = kx^2 - 4kx + 3k (k \neq 0) \end{cases}, \text{ 得 } x^2 - 4x + 3 = 8 \quad \text{解得 } \{x_1 = -1, x_2 = 5\}$$

$\therefore$ EF 恒等于 6.

例 14 (2012 年武汉市中考第 25 题) 如图 1，点 A 为抛物线 $C_1: y = \frac{1}{2}x^2 - 2$ 的顶点，点 B 的坐标为 (1, 0)，直线 AB 交抛物线 C_1 于另一点 C。

求点 C 的坐标；

如图 1，平行于 y 轴的直线 $x=3$ 交直线 AB 于点 D，交抛物线 C_1 于点 E，平行于 y 轴的直线 $x=a$ 交直线 AB 于 F，交抛物线 C_1 于 G。若 $FG: DE=4: 3$ ，求 a 的值；

如图 2，将抛物线 C_1 向下平移 m ($m>0$) 个单位得到抛物线 C_2 ，且抛物线 C_2 的顶点为点 P，交 x 轴负半轴于点 M，交射线 BC 于点 N。 $NQ \perp x$ 轴于点 Q，当 NP 平分 $\angle MNQ$ 时，求 m 的值。

【解答】

(1) $\because$ 当 $x=0$ 时， $y=-2$ 。 $\therefore A(0, -2)$ 。

设直线 AB 的解析式为 $y=kx+b$ ，则 $\begin{cases} b=-2 \\ k+b=0 \end{cases}$ ，解得 $\begin{cases} k=2 \\ b=-2 \end{cases}$ 。

$\therefore$ 直线 AB 的解析式为 $y=2x-2$ 。

$\because$ 点 C 是直线 AB 与抛物线 C_1 的交点，

$\therefore \begin{cases} y=2x-2 \\ y=\frac{1}{2}x^2-2 \end{cases}$ ，解得 $\begin{cases} x_1=4 \\ y_1=6 \end{cases}$ ， $\begin{cases} x_2=0 \\ y_2=-2 \end{cases}$ (舍去)。

$\therefore C(4, 6)$ 。

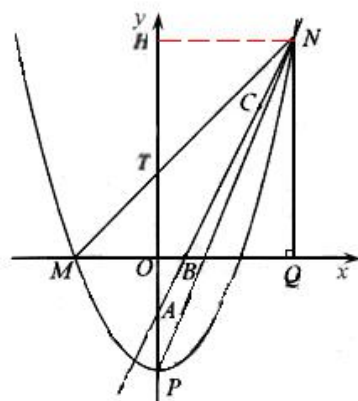
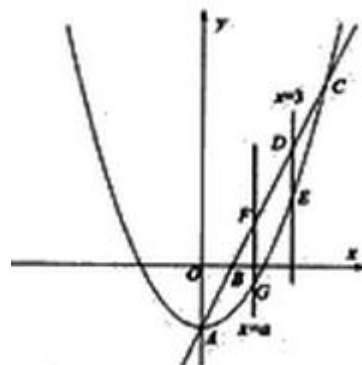
(2) $\because$ 直线 $x=3$ 交直线 AB 于点 D，交抛物线 C_1 于点 E，

$\therefore y_D=4$ ， $y_E=\frac{5}{2}$ ， $\therefore DE=y_D-y_E=4-\frac{5}{2}=\frac{3}{2}$ 。

$\because FG: DE=4: 3$ ， $\therefore FG=2$ 。

$\because$ 直线 $x=a$ 交直线 AB 于点 F，交抛物线 C_1 于点 G，

$\therefore y_F=2a-2$ ， $y_G=\frac{1}{2}a^2-2$ 。



$$\therefore FG = |y_F - y_G| = \left| 2a - \frac{1}{2}a^2 \right| = 2。$$

$$\text{解得 } a_1 = 2, a_2 = 2 + 2\sqrt{2}, a_3 = 2 - 2\sqrt{2}。$$

(3) 设直线 MN 交 y 轴于点 T , 过点 N 作 $NH \perp y$ 轴于点 H 。

设点 M 的坐标为 $(t, 0)$, 抛物线 C_2 的解析式为 $y = \frac{1}{2}x^2 - 2 - m$ 。

$$\therefore 0 = \frac{1}{2}t^2 - 2 - m。 \therefore -2 - m = -\frac{1}{2}t^2。$$

$$\therefore y = \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}t^2。 \therefore P(0, -\frac{1}{2}t^2)。$$

$\because$ 点 N 是直线 AB 与抛物线 C_2 的交点,

$$\therefore \begin{cases} y = 2x - 2 \\ y = \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}t^2 \end{cases}, \text{解得} \begin{cases} x_1 = 2 - t \\ y_1 = 2 - 2t \end{cases}, \begin{cases} x_2 = 2 + t \\ y_2 = 2 + 2t \end{cases} \quad (\text{舍去})。$$

$$\therefore N(2 - t, 2 - 2t)。$$

$$\therefore NQ = 2 - 2t, MQ = 2 - 2t。 \therefore NQ = MQ。 \therefore \angle NMQ = 45^\circ。$$

$$\therefore \triangle MOT, \triangle NHT \text{ 都是等腰直角三角形。} \therefore MO = TO, HT = HN。$$

$$\therefore OT = -t, NT = \sqrt{2}NH = \sqrt{2}(2 - t), PT = -t + \frac{1}{2}t^2。$$

$$\therefore PN \text{ 平分 } \angle MNQ, \therefore PT = NT。$$

$$\therefore -t + \frac{1}{2}t^2 = \sqrt{2}(2 - t), \text{解得 } t_1 = -2\sqrt{2}, t_2 = 2 \quad (\text{舍去})。$$

$$\therefore -2 - m = -\frac{1}{2}t^2 = -\frac{1}{2}(-2\sqrt{2})^2 = -4。 \therefore m = 2。$$

例 15 (2012 年苏州市中考第 28 题) 如图, 正方形 ABCD 的边 AD 与矩形 EFGH 的边 FG 重合, 将正方形 ABCD 以每秒 1 个单位的速度沿 FG 方向移动, 移动开始前点 A 与点 F 重合. 在移动过程中, 边 AD 始终与边 FG 重合, 连接 CG, 过点 A 作 CG 的平行线交线段 GH 于点 P, 连接 PD. 已知正方形 ABCD 的边长为 1 厘米, 矩形 EFGH 的边 FG、GH 的长分别为 4 厘米、3 厘米. 设正方形移动时间为 x 秒, 线段 GP 的长为 y 厘米, 其中 $0 \leq x \leq 2.5$.

- (1) 试求出 y 关于 x 的函数关系式, 并求出 $y=3$ 时相应 x 的值;
- (2) 记 $\triangle DGP$ 的面积为 S_1 , $\triangle CDG$ 的面积为 S_2 , 试说明 S_1-S_2 是常数;
- (3) 当线段 PD 所在直线与正方形 ABCD 的对角线 AC 垂直时, 求线段 PD 的长.

【解答】

$$(1) \because CG \parallel AP, \therefore \angle CGD = \angle PAG, \text{ 则 } \tan \angle CGD = \tan \angle PAG. \therefore \frac{CD}{GD} = \frac{PG}{AG}.$$

$$\because GF=4, CD=DA=1, AF=x, \therefore GD=3-x, AG=4-x.$$

$$\therefore \frac{1}{3-x} = \frac{y}{4-x}, \text{ 即 } y = \frac{4-x}{3-x}. \therefore y \text{ 关于 } x \text{ 的函数关系式为 } y = \frac{4-x}{3-x}.$$

$$\text{当 } y=3 \text{ 时, } 3 = \frac{4-x}{3-x}, \text{ 解得 } x=2.5.$$

$$(\qquad \qquad \qquad 2 \qquad \qquad \qquad)$$

$$\because S_1 = \frac{1}{2} \cdot GP \cdot GD = \frac{1}{2} \cdot \frac{4-x}{3-x} \cdot (3-x) = -\frac{1}{2}x + 2, S_2 = \frac{1}{2} \cdot GD \cdot CD = \frac{1}{2} \cdot (3-x) \cdot 1 = -\frac{1}{2}x + \frac{3}{2},$$

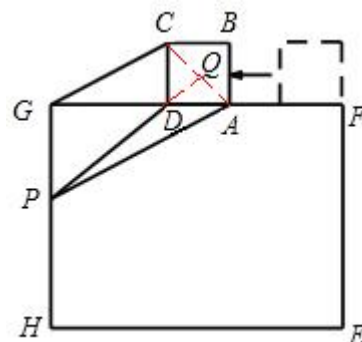
$$\therefore S_1 - S_2 = \left(-\frac{1}{2}x + 2 \right) - \left(-\frac{1}{2}x + \frac{3}{2} \right) = \frac{1}{2} \text{ 为常数.}$$

(3) 延长 PD 交 AC 于点 Q.

$\because$ 正方形 ABCD 中, AC 为对角线, $\therefore \angle CAD = 45^\circ$.

$\because PQ \perp AC, \therefore \angle ADQ = 45^\circ$.

$\therefore \angle GDP = \angle ADQ = 45^\circ$.



$\therefore \triangle DGP$ 是等腰直角三角形，则 $GD=GP$ 。

$$\therefore 3-x=\frac{4-x}{3-x}, \text{ 化简得: } x^2-5x+5=0, \text{ 解得: } x=\frac{5\pm\sqrt{5}}{2}。$$

$$\because 0\leq x\leq 2.5, \therefore x=\frac{5-\sqrt{5}}{2}。$$

$$\text{在 } Rt\triangle DGP \text{ 中, } PD=\frac{GD}{\cos 45^\circ}=\sqrt{2}(3-x)=\sqrt{2}\left(3-\frac{5-\sqrt{5}}{2}\right)=\frac{\sqrt{2}+\sqrt{10}}{2}。$$

例 16 (2012 年盐城市中考第 28 题) 在平面直角坐标系中，已知二次函数 $y = \frac{1}{4}x^2 + mx + n$ 的图象经过点 A (2, 0)，和点 B (1, -3/4)，直线 l 经过抛物线的顶点且与 y 轴垂直，垂足为 Q.

(1) 求该二次函数的表达式；

(2) 设抛物线上有一动点 P 从点 B 处出发沿抛物线向上运动，其纵坐标 y_1 随时间 t ($t \geq 0$) 的变化规律为 $y_1 = -3/4 + 2t$. 现以线段 OP 为直径作圆 C.

①当点 P 在起始位置点 B 处时，试判断直线 l 与 $\odot C$ 的位置关系，并说明理由；在点 P 运动的过程中，直线 l 与 $\odot C$ 是否始终保持这种位置关系？请说明你的理由；

②若在点 P 开始运动的同时，直线 l 也向上平行移动，且垂足 Q 的纵坐标 y_2 随时间 t 的变化规律为 $y_2 = -1 + 3t$ ，则当 t 在什么范围内变化时，直线 l 与 $\odot C$ 相交？此时，若直线 l 被 $\odot C$ 所截得的弦长为 a ，试求 a^2 的最大值.

【解答】

(1) 将点 A(2,0)和点 B(1,-3/4)的坐标代入 $y = \frac{1}{4}x^2 + mx + n$,

$$\text{得} \begin{cases} 1 + 2m + n = 0 \\ 1/4 + m + n = -3/4 \end{cases}, \text{解得 } m=0, n=-1,$$

$\therefore$ 二次函数的表达式为 $y = \frac{1}{4}x^2 - 1$

(2)①当点 P 在点 B 处时,直线 l 与 C 相切,

理由如下: $\because$ 点 P(1,-3/4), $\therefore$ 圆心的坐标为 C(1/2, -3/8),

$\therefore$ 圆 C 的半径为 $r = ((1/2)^2 + |-3/8|^2)^{1/2}$,

又抛物线的顶点坐标为(0, -1),即直线 l 上所有点的纵坐标均为 -1,

从而圆心 C 到直线 l 的距离为 $d = -3/8 - (-1) = 5/8 = r$

$\therefore$ 直线 l 与圆 C 相切。

在点 P 运动的过程中，直线 l 与圆 C 始终保持相切的位置关系。理由如下：

设点 $P(x_0, -\frac{3}{4} + 2t)$ ，则圆心的坐标为 $C(\frac{x_0}{2}, -\frac{3}{8} + t)$ ，

$\therefore$ 圆心 C 到直线 l 的距离为 $d = (-\frac{3}{8} + t) - (-1) = \frac{5}{8} + t$ 。

又 $\because -\frac{3}{4} + 2t = \frac{1}{4}x_0^2 - 1$ ， $\therefore x_0^2 = 8t + 1$ 。

则圆 C 的半径为 $r = \sqrt{(\frac{x_0}{2})^2 + |-\frac{3}{8} + t|^2} = \sqrt{\frac{8t+1}{4} + t^2 - \frac{3}{4}t + \frac{9}{64}} = \sqrt{(t + \frac{5}{8})^2} = t + \frac{5}{8} = d$ 。

$\therefore$ 直线 l 与圆 C 始终相切。

②由①知圆 C 的半径为 $r = t + \frac{5}{8}$ ，

又 $\because$ 圆心 C 的纵坐标为 $-\frac{3}{8} + t$ ，直线 l 上的点的纵坐标为 $-1 + 3t$ ，

$\therefore$ (i) 当 $-\frac{3}{8} + t \geq -1 + 3t$ ，即 $t \leq \frac{5}{16}$ 时，圆心 C 到直线 l 的距离为

$$d = (-\frac{3}{8} + t) - (-1 + 3t) = \frac{5}{8} - 2t。$$

则由 $d < r$ ，得 $\frac{5}{8} - 2t < t + \frac{5}{8}$ ，解得 $t > 0$ ， $\therefore$ 此时 $0 < t \leq \frac{5}{16}$ 。

(ii) 当 $-\frac{3}{8} + t < -1 + 3t$ ，即 $t > \frac{5}{16}$ 时，圆心 C 到直线 l 的距离为

$$d = (-1 + 3t) - (-\frac{3}{8} + t) = 2t - \frac{5}{8}。$$

则由 $d < r$ ，得 $2t - \frac{5}{8} < t + \frac{5}{8}$ ，解得 $t < \frac{5}{4}$ 。

$\therefore$ 此时 $\frac{5}{16} < t < \frac{5}{4}$ 。综上所述，当 $0 < t < \frac{5}{4}$ 时，直线 l 与圆 C 相交。

$\because$ 当 $0 < t < \frac{5}{4}$ 时，圆心 C 到直线 l 的距离为 $d = |2t - \frac{5}{8}|$ ，又半径为 $r = t + \frac{5}{8}$ ，

$$\therefore a^2 = 4(r^2 - d^2) = 4[(t + \frac{5}{8})^2 - |2t - \frac{5}{8}|^2] = -12t^2 + 15t = -12\left(t - \frac{5}{8}\right)^2 + \frac{75}{16}。$$

$\therefore$ 当 $t = \frac{5}{8}$ 时， a^2 取得最大值为 $\frac{75}{16}$ 。

例 17 (2012 年成都市中考第 28 题) 如图 1, 在平面直角坐标系 xOy 中, 一次函数 $y=\frac{5}{4}x+m$ (m 为常数) 的图象与 x 轴交于点 $A(3, 0)$, 与 y 轴交于点 C . 以直线 $x=1$ 为对称轴的抛物线 $y=ax^2+bx+c$ (a 、 b 、 c 为常数, 且 $a \neq 0$) 经过 A 、 C 两点, 并与 x 轴的正半轴交于点 B .

(1) 求 m 的值及抛物线的函数表达式;

(2) 设 E 是 y 轴右侧抛物线上一点, 过点 E 作直线 AC 的平行线交 x 轴于点 F . 是否存在这样的点 E , 使得以 A 、 C 、 E 、 F 为顶点的四边形是平行四边形? 若存在, 求出点 E 的坐标及相应的平行四边形的面积; 若不存在, 请说明理由;

(3) 若 P 是抛物线对称轴上使 $\triangle ACP$ 的周长取得最小值的点, 过点 P 任意作一条与 y 轴不平行的直线交抛物线于 $M(x_1, y_1)$, $M'(x_2, y_2)$ 两点, 试探究 $MP \cdot M'P / MM'$ 是否为定值, 并写出探究过程.

【解答】

解: (1) $\because y=\frac{5}{4}x+m$ 经过点 $(-3, 0)$,

$$\therefore 0 = -\frac{15}{4} + m, \text{ 解得 } m = \frac{15}{4},$$

$\therefore$ 直线解析式为 $y=\frac{5}{4}x+\frac{15}{4}$, $C(0, \frac{15}{4})$.

$\because$ 抛物线 $y=ax^2+bx+c$ 对称轴为 $x=1$, 且与 x 轴交于 $A(-3, 0)$, $\therefore$ 另一交点为 $B(5, 0)$,

设抛物线解析式为 $y=a(x+3)(x-5)$,

$\because$ 抛物线经过 $C(0, \frac{15}{4})$,

$$\therefore \frac{15}{4} = a \cdot 3 \cdot (-5), \text{ 解得 } a = -\frac{1}{4},$$

$\therefore$ 抛物线解析式为 $y = -\frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{2}x + \frac{15}{4}$;

(2) 假设存在点 E 使得以 A 、 C 、 E 、 F 为顶点的四边形是平行四边形,

(3) 则 $AC \parallel EF$ 且 $AC=EF$. 如图 1,

(i) 当点 E 在点 E 位置时, 过点 E 作 $EG \perp x$ 轴于点 G,

$\because AC \parallel EF, \therefore \angle CAO = \angle EFG,$

又 $\because \begin{cases} \angle COA = \angle EOF = 90^\circ \\ AC = EF \end{cases}, \therefore \triangle CAO \cong \triangle EFG,$

$\therefore EG = CO = \frac{15}{4}, \text{ 即 } y_E = \frac{15}{4},$

$\therefore \frac{15}{4} = -\frac{1}{4x_E^2} + \frac{1}{2x_E} + \frac{15}{4}, \text{ 解得 } x_E = 2 \text{ (} x_E = 0 \text{ 与 C 点重合, 舍去),}$

$\therefore E(2, \frac{15}{4}), S_{\square ACEF} = \frac{15}{2};$

(ii) 当点 E 在点 E' 位置时, 过点 E' 作 $E'G' \perp x$ 轴于点 G',

同理可求得 $E'(\sqrt{31}+1, -\frac{15}{4}), S_{\square ACE'F} = \frac{15\sqrt{31}+105}{4}.$

(3) 要使 $\triangle ACP$ 的周长最小, 只需 $AP+CP$ 最小即可.

如答图 2, 连接 BC 交 $x=1$ 于 P 点, 因为点 A、B 关于 $x=1$ 对称, 根据轴对称性质以及两点之间线段最短, 可知此时 $AP+CP$ 最小 ($AP+CP$ 最小值为线段 BC 的长度).

$\because B(5, 0), C(0, \frac{15}{4}), \therefore \text{直线 BC 解析式为 } y = -\frac{3}{4}x + \frac{15}{4},$

$\because x_P = 1, \therefore y_P = 3, \text{ 即 } P(1, 3).$

令经过点 P (1, 3) 的直线为 $y = kx + 3 - k,$

$\because y = kx + 3 - k, y = -\frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{2}x + \frac{15}{4},$

联立化简得: $x^2 + (4k - 2)x - 4k - 3 = 0,$

$\therefore x_1 + x_2 = 2 - 4k, x_1 x_2 = -4k - 3.$

$\because y_1 = kx_1 + 3 - k, y_2 = kx_2 + 3 - k, \therefore y_1 - y_2 = k(x_1 - x_2).$

根据两点间距离公式得到:

$$\begin{aligned}
M_1 M_2 &= \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2} = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + k^2 (x_1 - x_2)^2} = \\
&= \sqrt{1+k^2} \cdot \sqrt{(x_1 - x_2)^2} = \\
\therefore M_1 M_2 &= \sqrt{1+k^2} \cdot \sqrt{(x_1 + x_2)^2 - 4x_1 x_2} = \sqrt{1+k^2} \cdot \sqrt{(2-4k)^2 - 4(-4k-3)} \\
&= 4(1+k^2).
\end{aligned}$$

又

$$\begin{aligned}
M_1 P &= \sqrt{(x_1 - 1)^2 + (y_1 - 3)^2} = \sqrt{(x_1 - 1)^2 + (kx_1 + 3 - k - 3)^2} = \\
&= \sqrt{1+k^2} \cdot \sqrt{(x_1 - 1)^2}; \\
\text{同理 } M_2 P &= \sqrt{1+k^2} \cdot \sqrt{(x_2 - 1)^2} \\
\therefore M_1 P \cdot M_2 P &= (1+k^2) \cdot \sqrt{(x_1 - 1)^2 (x_2 - 1)^2} = (1+k^2) \cdot \sqrt{[x_1 x_2 - (x_1 + x_2) + 1]^2} = \\
&= (1+k^2) \cdot \sqrt{[-4k-3 - (2-4k) + 1]^2} = 4(1+k^2).
\end{aligned}$$

$$\therefore M_1 P \cdot M_2 P = M_1 M_2,$$

$$\begin{aligned}
&\frac{M_1 P \cdot M_2 P}{M_1 M_2} \\
\therefore \frac{M_1 P \cdot M_2 P}{M_1 M_2} &= 1 \text{ 为定值.}
\end{aligned}$$

例 18 (2012 年丽水市中考第 23 题) 在直角坐标系中，点 A 是抛物线 $y=x^2$ 在第二象限上的点，连接 OA，过点 O 作 $OB \perp OA$ ，交抛物线于点 B，以 OA、OB 为边构造矩形 AOBC.

(1) 如图 1，当点 A 的横坐标为_____时，矩形 AOBC 是正方形；

(2) 如图 2，当点 A 的横坐标为 $-1/2$ 时.

①求点 B 的坐标；

②将抛物线 $y=x^2$ 作关于 x 轴的轴对称变换得到抛物线 $y=-x^2$ ，试判断抛物线 $y=-x^2$ 经过平移变换后，能否经过 A，B，C 三点？如果可以，说出变换的过程；如果不可以，请说明理由.

【解答】

(1) -1 。

如图，过点 A 作 $AD \perp x$ 轴于点 D， $\because$ 矩形 AOBC 是正方形， $\therefore \angle AOC = 45^\circ$ ，

$\therefore \angle AOD = 90^\circ - 45^\circ = 45^\circ$ ， $\therefore \triangle AOD$ 是等腰直角三角形，

设点 A 的坐标为 $(-a, a) (a \neq 0)$ ，则 $(-a)^2 = a$ ，解得 $a_1 = -1$ ， $a^2 = 0$ (舍去)，

$\therefore$ 点 A 的坐标 $-a = -1$ ，

(2) ①过点 A 作 $AE \perp x$ 轴于点 E，过点 B 作 $BF \perp x$ 轴于点 F，

当 $x = -1/2$ 时， $y = (-1/2)^2 = 1/4$ ，

即 $OE = 1/2$ ， $AE = 1/4$ 。

$\because \angle AOE + \angle BOF = 180^\circ - 90^\circ = 90^\circ$ ，

$\angle AOE + \angle EAO = 90^\circ$ ， $\therefore \angle EAO = \angle BOF$ 。

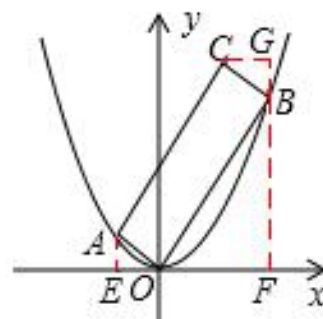
又 $\because \angle AEO = \angle BFO = 90^\circ$ ， $\therefore \triangle AEO \sim \triangle OFB$ 。

$\therefore OF/BF = AE/EO = 1/2$ 。

设 $OF = t$ ，则 $BF = 2t$ ， $\therefore t^2 = 2t$ ，解得： $t_1 = 0$ (舍去)， $t_2 = 2$ 。

$\therefore$ 点 B(2, 4)。

②过点 C 作 $CG \perp BF$ 于点 G，



$\because \angle AOE + \angle EAO = 90^\circ, \angle FBO + \angle CBG = 90^\circ, \angle EOA = \angle FBO,$

$\therefore \angle EAO = \angle CBG。$

在 $\triangle AEO$ 和 $\triangle BGC$ 中, $\angle AEO = \angle G = 90^\circ, \angle EAO = \angle CBG, AO = BC,$

$\therefore \triangle AEO \cong \triangle BGC (AAS)。$ $\therefore CG = OE = 1/2, BG = AE = 1/4。$

$\therefore x_c = 2 - 1/2 = 3/2, y_c = 4 + 1/4 = 17/4。$ $\therefore$ 点 $C(3/2, 17/4)。$

设过点 A $(-1/2, 1/4)$ 、B $(2, 4)$ 两点的抛物线解析式为 $y = -x^2 + b \cdot x + c,$

由题意得,
$$\begin{cases} -1/4 - 1/2 \cdot b + c = 1/4 \\ -4 + 2 \cdot b + c = 4 \end{cases},$$
 得 $b=3, c=2。$

$\therefore$ 经过 A、B 两点的抛物线解析式为 $y = -x^2 + 3 \cdot x + 2。$

$\because$ 当 $x = 3/2$ 时, $y = -(3/2)^2 + 3 \times 3/2 + 2 = 17/4, \therefore$ 点 C 也在此抛物线上。

$\therefore$ 经过 A、B、C 三点的抛物线解析式为 $y = -x^2 + 3x + 2 = -(x - 3/2)^2 + 17/4。$

平移方案: 先将抛物线 $y = -x^2$ 向右平移 $3/2$ 个单位, 再向上平移 $17/4$ 个单位得到抛物线 $y = -(x - 3/2)^2 + 17/4。$

例 19 (2012 年陕西省中考第 24 题) 如果一条抛物线 $y=ax^2+bx+c$ ($a \neq 0$) 与 x 轴有两个交点, 那么以该抛物线的顶点和这两个交点为顶点的三角形称为这条抛物线的“抛物线三角形”.

(1) “抛物线三角形”一定是_____ 三角形;

(2) 若抛物线 $y=-x^2+bx$ ($b>0$) 的“抛物线三角形”是等腰直角三角形, 求 b 的值;

(3) 如图 1, $\triangle OAB$ 是抛物线 $y=-x^2+b'x$ ($b'>0$) 的“抛物线三角形”, 是否存在以原点 O 为对称中心的矩形 $ABCD$? 若存在, 求出过 O 、 C 、 D 三点的抛物线的表达式; 若不存在, 说明理由.

【解答】

(1) 等腰。

(2) $\because$ 抛物线 $y=-x^2+bx(b>0)$ 的“抛物线三角形”是等腰直角三角形,

$\therefore$ 该抛物线的顶点 $\left(\frac{b}{2}, \frac{b^2}{4}\right)$ 满足 $\frac{b}{2} = \frac{b^2}{4}$ ($b>0$)。

$\therefore b=2$ 。

(3) 存在。

如图, 作 $\triangle OCD$ 与 $\triangle OAB$ 关于原点 O 中心对称,

则四边形 $ABCD$ 为平行四边形。

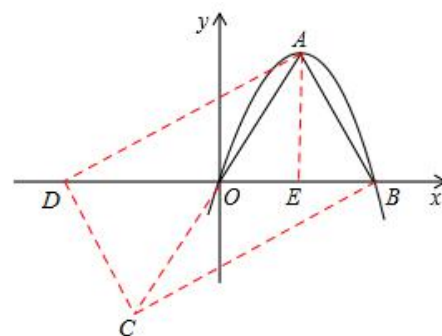
当 $OA=OB$ 时, 平行四边形 $ABCD$ 为矩形。

又 $\because AO=AB$, $\therefore \triangle OAB$ 为等边三角形。

作 $AE \perp OB$, 垂足为 E ,

$\therefore AE = \sqrt{3}OE$, 即 $\frac{b'^2}{4} = \sqrt{3} \cdot \frac{b'}{2}$ ($b'>0$), $\therefore b'=2\sqrt{3}$.

$\therefore A(\sqrt{3}, 3)$, $B(2\sqrt{3}, 0)$, $C(-\sqrt{3}, -3)$, $D(-2\sqrt{3}, 0)$ 。



设过点 O 、 C 、 D 三点的抛物线 $y=mx^2+nx$ ，则

$$\begin{cases} 12m-2\sqrt{3}n=0 \\ 3m-\sqrt{3}n=-3 \end{cases}, \text{解得}, \begin{cases} m=1 \\ n=2\sqrt{3} \end{cases}。$$

$\therefore$ 所求抛物线的表达式为 $y=x^2+2\sqrt{3}x$ 。

例 20 (2013 年福州市中考第 22 题) 我们知道经过原点的抛物线的解析式可以是

$$y=ax^2+bx \quad (a \neq 0).$$

对于这样的抛物线:

(1) 当顶点坐标为 (1,1) 时, $a=$;

(2) 当顶点坐标为 (m, n), $m \neq 0$ 时, a 与 m 之间的关系式是 ;

(3) 继续探究, 如果 $b \neq 0$, 且过原点的抛物线的顶点在直线 $y=kx$ ($k \neq 0$) 上, 请用含 k 的代数式表示 b ;

(4) 现有一组经过原点的抛物线, 顶点 $A_1, A_2, \dots, A_n$ 在直线 $y=x$ 上, 横坐标依次为 $1, 2, \dots, n$ (n 为正整数, 且 $n \leq 12$), 分别过每个顶点作 x 轴的垂线, 垂足记为 $B_1, B_2, \dots, B_n$, 以线段 $A_n B_n$ 为边向右作正方形 $A_n B_n C_n D_n$, 若这组抛物线中有一条经过点 D_n , 求所有满足条件的正方形的边长.

【解答】

(1) 当顶点坐标为(1, 1)时, $a = -1$;

当顶点坐标为(m, m), $m \neq 0$ 时, a 与 m 之间的关系式是 $a = -\frac{1}{m}$.

(2) 设抛物线的顶点的坐标为(m, km),

$$\text{那么 } y = a(x-m)^2 + km = ax^2 - 2amx + am^2 + km.$$

$$\text{对照 } y = ax^2 + bx, \text{ 可得 } \begin{cases} am^2 + km = 0, \\ b = -2am. \end{cases} \text{ 由此得到 } b = 2k.$$

(3) 正方形的顶点 $D_1, D_2, \dots, D_n$ 的坐标分别为(2, 1)、(4, 2)、(6, 3)、(8, 4)、(10, 5)、(12, 6)、(14, 7)、(16, 8)、(18, 9)、(20, 10)、(22, 11)、(24, 12), 这些点在直线 $y = \frac{1}{2}x$ 上.

由(1)知, 当抛物线的顶点(m, m)在直线 $y=x$ 上时, $a = -\frac{1}{m}$.

根据抛物线的对称性, 抛物线与 x 轴的交点为原点 O 和($2m, 0$).

所以顶点为 (m, m) 的抛物线的解析式为 $y = -\frac{1}{m}x(x-2m)$.

联立 $y = \frac{1}{2}x$ 和 $y = -\frac{1}{m}x(x-2m)$, 可得点 D 的坐标为 $(\frac{3}{2}m, \frac{3}{4}m)$.

当 m 分别取正整数 4、8、12 时, 对应的点 D 为 $D_3(6, 3)$ 、 $D_6(12, 6)$ 、 $D_9(18, 9)$, 它们所对应的正方形的边长分别为 3、6、9 (如图 1 所示).

例 21 (2013 年广州市中考第 25 题) 已知抛物线 $y_1 = ax^2 + bx + c$ ($a \neq 0, a \neq c$) 过点

A (1,0), 顶点为 B, 且抛物线不经过第三象限.

(1) 使用 a、c 表示 b;

(2) 判断点 B 所在的象限, 并说明理由;

(3) 若直线 $y_2 = 2x + m$ 经过点 B, 且与该抛物线交于另一点 C ($\frac{c}{a}, b+8$), 求当 $x \geq 1$ 时, y_1 的取值范围.

【解答】

(1) $\because$ 抛物线 $y_1 = ax^2 + bx + c$ ($a \neq 0, a \neq c$), 经过 A (1, 0),
把点代入函数即可得到: $b = -a - c$;

(2) B 在第四象限.

理由如下: $\because$ 抛物线 $y_1 = ax^2 + bx + c$ ($a \neq 0, a \neq c$) 过点 A (1, 0),

$$\therefore x_1 = 1, x_2 = \frac{c}{a}, a \neq c,$$

所以抛物线与 x 轴有两个交点,
又因为抛物线不经过第三象限,
所以 $a > 0$, 且顶点在第四象限;

(3) $\because C (\frac{c}{a}, b+8)$, 且在抛物线上,

$$\therefore b+8=0, \therefore b=-8,$$

$$\because a+c=-b, \therefore a+c=8,$$

把 B、C 两点代入直线解析式易得: $c-a=4$,

$$\text{即} \begin{cases} a+c=8 \\ c-a=4 \end{cases}$$

$$\text{解得: } \begin{cases} c=6 \\ a=2 \end{cases}$$

如图所示, C 在 A 的右侧,

$$\therefore \text{当 } x \geq 1 \text{ 时, } y_1 \geq \frac{4ac - b^2}{4a} = -2.$$

例 22 (2013 年南昌市中考第 25 题) 已知抛物线 $y_n = -(x-a_n)^2 + a_n$ (n 为正整数, 且 $0 < a_1 < a_2 < \dots < a_n$) 与 x 轴的交点为 $A_{n-1}(b_{n-1}, 0)$ 和 $A_n(b_n, 0)$.

当 $n=1$ 时, 第 1 条抛物线 $y_1 = -(x-a_1)^2$ 与 x 轴的交点为 $A_0(0, 0)$ 和 $A_1(b_1, 0)$, 依此类推.

(1) 求 a 、 b 的值及抛物线 y_2 的解析式;

(2) 抛物线 y_3 的顶点坐标为 _____ ;

(3) 依此类推第 n 条抛物线 y_n 的顶点坐标为 _____ ; (用含 n 的式子表示)

所有抛物线得到顶点坐标满足的函数关系式是 _____ ;

(4) 探究下列结论:

①若用 $A_{n-1}A_n$ 表示第 n 条抛物线被 x 轴截得的线段的长, 直接写出 A_0A_1 的值, 并求出 $A_{n-1}A_n$;

②是否存在经过点 $A(2, 0)$ 的直线和所有抛物线都相交, 且被每一条抛物线截得的线段的长度都相等? 若存在, 直接写出直线的表达式; 若不存在, 请说明理由.

【解答】

(1) 因为点 $A_0(0, 0)$ 在抛物线 $y_1 = -(x-a_1)^2 + a_1$ 上, 可求得 $a_1=1$, 则 $y_1 = -(x-1)^2 + 1$; 令 $y_1=0$, 求得 $A_1(2, 0)$, $b_1=2$; 再由点 $A_1(2, 0)$ 在抛物线 $y_2 = -(x-a_2)^2 + a_2$ 上, 求得 $a_2=4$, $y_2 = -(x-4)^2 + 4$.

(2) 求得 y_1 的顶点坐标 $(1, 1)$, y_2 的顶点坐标 $(4, 4)$, y_3 的顶点坐标 $(9, 9)$, 依此类推, y_n 的顶点坐标为 (n^2, n^2) . 因为所有抛物线顶点的横坐标等于纵坐标, 所以顶点坐标满足的函数关系式是: $y=x$.

(3) ①由 $A_0(0, 0)$, $A_1(2, 0)$, 求得 $A_0A_1=2$; $y_n = -(x-n^2)^2 + n^2$, 令 $y_n=0$, 求得 $A_{n-1}(n^2-n, 0)$, $A_n(n^2+n, 0)$, 所以 $A_{n-1}A_n = (n^2+n) - (n^2-n) = 2n$;

②设直线解析式为: $y=kx-2k$, 设直线 $y=kx-2k$ 与抛物线 $y_n = -(x-n^2)^2 + n^2$ 交于 $E(x_1, y_1)$, $F(x_2, y_2)$ 两点, 联立两式得一元二次方程, 得到 $x_1+x_2=2n^2-k$, $x_1 \cdot x_2=n^4-n^2-2k$. 然后作辅助线, 构造直角三角形, 求出 EF^2 的表述式为: $EF^2 = (k^2+1)[4n^2 \cdot (1-k) + k^2+8k]$, 可见当 $k=1$ 时, $EF^2=18$ 为定值. 所以满足条件的直线为: $y=x-2$.

试题解析: (1) $\because$ 当 $n=1$ 时, 第 1 条抛物线 $y_1 = -(x-a_1)^2 + a_1$ 与 x 轴的交点为 $A_0(0, 0)$,

$\therefore 0 = -(0-a_1)^2 + a_1$, 解得 $a_1=1$ 或 $a_1=0$.

由已知 $a_1 > 0$, $\therefore a_1=1$,

$\therefore y_1 = -(x-1)^2 + 1$.

令 $y_1=0$, 即 $-(x-1)^2 + 1=0$, 解得 $x=0$ 或 $x=2$,

$\therefore A_1(2, 0)$, $b_1=2$.

由题意, 当 $n=2$ 时, 第 2 条抛物线 $y_2 = -(x-a_2)^2 + a_2$ 经过点 $A_1(2, 0)$,

$\therefore 0 = -(2-a_2)^2 + a_2$, 解得 $a_2=1$ 或 $a_2=4$,

$\because a_1=1$, 且已知 $a_2 > a_1$,

$\therefore a_2=4$,

$\therefore y_2 = -(x-4)^2 + 4$.

$\therefore a_1=1$, $b_1=2$, $y_2 = -(x-4)^2 + 4$.

(2) 抛物线 $y_2 = -(x-4)^2 + 4$, 令 $y_2=0$, 即 $-(x-4)^2 + 4=0$, 解得 $x=2$ 或 $x=6$.

$\therefore A_1(2, 0)$,

$\therefore A_2(6, 0)$.

由题意, 当 $n=3$ 时, 第 3 条抛物线 $y_3 = -(x-a_3)^2 + a_3$ 经过点 $A_2(6, 0)$,

$\therefore 0 = -(6-a_3)^2 + a_3$, 解得 $a_3=4$ 或 $a_3=9$.

$\because a_2=4$, 且已知 $a_3 > a_2$,

$\therefore a_3=9$,

$\therefore y_3 = -(x-9)^2 + 9$.

$\therefore y_3$ 的顶点坐标为 $(9, 9)$.

由 y_1 的顶点坐标 $(1, 1)$, y_2 的顶点坐标 $(4, 4)$, y_3 的顶点坐标 $(9, 9)$,

依此类推, y_n 的顶点坐标为 (n^2, n^2) .

$\therefore$ 所有抛物线顶点的横坐标等于纵坐标,

$\therefore$ 顶点坐标满足的函数关系式是: $y=x$.

(3) ① $\because A_0(0, 0)$, $A_1(2, 0)$,

$\therefore A_0A_1=2$. $y_n = -(x-n^2)^2 + n^2$, 令 $y_n=0$, 即 $-(x-n^2)^2 + n^2=0$,

解得 $x=n^2+n$ 或 $x=n^2-n$,

$\therefore A_{n-1}(n^2-n, 0)$, $A_n(n^2+n, 0)$, 即 $A_{n-1}A_n = (n^2+n) - (n^2-n) = 2n$.

② 存在.

设过点 $(2, 0)$ 的直线解析式为 $y=kx+b$, 则有: $0=2k+b$, 得 $b=-2k$,

$\therefore y=kx-2k$.

设直线 $y=kx-2k$ 与抛物线 $y_n = -(x-n^2)^2 + n^2$ 交于 $E(x_1, y_1)$, $F(x_2, y_2)$ 两点,

联立两式得: $kx-2k = -(x-n^2)^2 + n^2$, 整理得: $x^2 + (k-2n^2)x + n^4 - n^2 - 2k = 0$,

$\therefore x_1+x_2=2n^2-k$, $x_1 \cdot x_2=n^4-n^2-2k$.

过点 F 作 $FG \perp x$ 轴, 过点 E 作 $EG \perp FG$ 于点 G , 则 $EG=x_2-x_1$,

$FG=y_2-y_1 = [-(x_2-n^2)^2 + n^2] - [-(x_1-n^2)^2 + n^2] = (x_1+x_2-2n^2)(x_1-x_2) = k(x_2-x_1)$.

在 $Rt\triangle EFG$ 中, 由勾股定理得: $EF^2 = EG^2 + FG^2$,

即: $EF^2 = (x_2-x_1)^2 + [k(x_2-x_1)]^2 = (k^2+1)(x_2-x_1)^2 = (k^2+1)[(x_1+x_2)^2 - 4x_1 \cdot x_2]$,

将 $x_1+x_2=2n^2-k$, $x_1 \cdot x_2=n^4-n^2-2k$ 代入, 整理得: $EF^2 = (k^2+1)[4n^2 \cdot (1-k) + k^2 + 8k]$,

当 $k=1$ 时, $EF^2 = (1+1)(1+8) = 18$,

$\therefore EF=3\sqrt{2}$ 为定值,

$\therefore k=1$ 满足条件, 此时直线解析式为 $y=x-2$.

$\therefore$ 存在满足条件的直线, 该直线的解析式为 $y=x-2$.

例 23 (2013 年南京市中考第 26 题) 已知二次函数 $y=a(x-m)^2-a(x-m)$ (a, m 为常数, 且 $a \neq 0$) .

(1) 求证: 不论 a 与 m 为何值, 该函数的图像与 x 轴总有两个公共点;

(2) 设该函数的图像的顶点为 C , 与 x 轴相交于 A, B 两点, 与 y 轴交于 D .

①当 $\triangle ABC$ 的面积等于 1 时, 求 a 的值;

②当 $\triangle ABC$ 的面积与 $\triangle ABD$ 的面积相等时, 求 m 的值.

【解答】

(1) 证明: $y=a(x-m)^2-a(x-m)=ax^2-(2am+a)x+am^2+am$.

因为当 $a \neq 0$ 时, $[-(2am+a)]^2-4a(am^2+am)=a^2>0$.

所以, 方程 $ax^2-(2am+a)x+am^2+am=0$ 有两个不相等的实数根.

所以, 不论 a 与 m 为何值, 该函数的图像与 x 轴总有两个公共点.

(2) 解: ① $y=a(x-m)^2-a(x-m)=(x-\frac{2m+1}{2})^2-\frac{a}{4}$,

所以, 点 C 的坐标为 $(\frac{2m+1}{2}, -\frac{a}{4})$.

当 $y=0$ 时, $a(x-m)^2-a(x-m)=0$. 解得 $x_1=m, x_2=m+1$. 所以 $AB=1$.

当 $\triangle ABC$ 的面积等于 1 时, $\frac{1}{2} \times 1 \times |-\frac{a}{4}|=1$.

所以 $\frac{1}{2} \times 1 \times (-\frac{a}{4})=1$, 或 $\frac{1}{2} \times 1 \times \frac{a}{4}=1$.

所以 $a=-8$, 或 $a=8$.

② 当 $x=0$ 时, $y=am^2+am$, 所以点 D 的坐标为 $(0, am^2+am)$.

当 $\triangle ABC$ 的面积与 $\triangle ABD$ 的面积相等时,

$\frac{1}{2} \times 1 \times |-\frac{a}{4}| = \frac{1}{2} \times 1 \times |am^2+am|$.

所以 $\frac{1}{2} \times 1 \times (-\frac{a}{4}) = \frac{1}{2} \times 1 \times (am^2+am)$, 或 $\frac{1}{2} \times 1 \times \frac{a}{4} =$

$$\frac{1}{2} \times 1 \times (a^2 + am)。$$

$$\text{所以 } m = -\frac{1}{2}, \text{ 或 } m = \frac{-1-\sqrt{2}}{2}, \text{ 或 } m = \frac{-1+\sqrt{2}}{2}。$$

例 24 (2014 年珠海市中考第 22 题) 如图 1, 矩形 OABC 的顶点 A (2,0)、C (0, $2\sqrt{3}$) .将矩形 OABC 绕点 O 逆时针旋转 30° 得矩形 OEFG, 线段 GE、FO 相交于点 H, 平行于 y 轴的直线 MN 分别交线段 GF、GH、GO 和 x 轴于点 M、P、N、D, 连结 MH.

- (1) 若抛物线 $l: y=ax^2+bx+c$ 经过 G、O、E 三点, 则它的解析式为 _____ ;
- (2) 如果四边形 OHMN 为平行四边形, 求点 D 的坐标;
- (3) 在 (1) (2) 的条件下, 直线 MN 与抛物线 l 交于点 R, 动点 Q 在抛物线 l 上且在 R、E 两点之间 (不含点 R、E) 运动, 设 PQH 的面积为 S , 当 $\frac{\sqrt{3}}{6} < S \leq \frac{\sqrt{3}}{2}$ 时, 确定点 Q 的横坐标的取值范围.

【解答】

(1) 如图 1, 过 G 作 $GI \perp CO$ 于 I, 过 E 作 $EJ \perp CO$ 于 J,

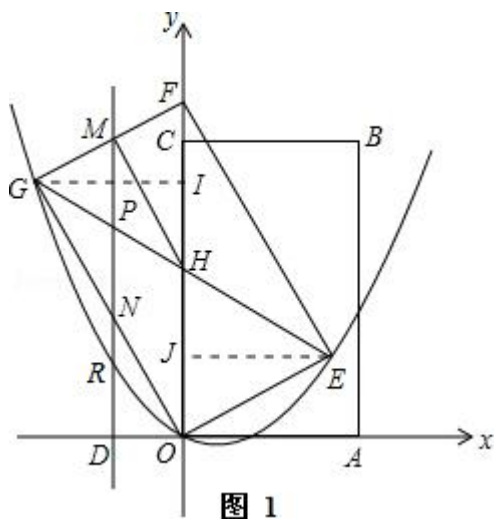


图 1

$$\because A(2, 0), C(0, 2\sqrt{3}),$$

$$\therefore OE=OA=2, OG=OC=2\sqrt{3},$$

$$\because \angle GOI=30^\circ, \angle JOE=90^\circ - \angle GOI=90^\circ - 30^\circ=60^\circ,$$

$$\therefore GI=\sin 30^\circ \cdot GO=\frac{1}{2} \cdot 2\sqrt{3}=\sqrt{3},$$

$$IO = \cos 30^\circ \cdot GO = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot 2\sqrt{3} = 3,$$

$$JO = \cos 30^\circ \cdot OE = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot 2 = \sqrt{3},$$

$$JE = \sin 30^\circ \cdot OE = \frac{1}{2} \cdot 2 = 1,$$

$$\therefore G(-\sqrt{3}, 3), E(\sqrt{3}, 1),$$

设抛物线解析式为 $y = ax^2 + bx + c$,

$\because$ 经过 G、O、E 三点,

$$\therefore \begin{cases} 3a - \sqrt{3}b + c = 3 \\ 3a + \sqrt{3}b + c = 1 \\ 0 + 0 + c = 0 \end{cases}, \text{ 解得 } \begin{cases} a = \frac{2}{3} \\ b = -\frac{\sqrt{3}}{3} \\ c = 0 \end{cases},$$

$$\therefore y = \frac{2}{3}x^2 - \frac{\sqrt{3}}{3}x.$$

(2) $\because$ 四边形 OHMN 为平行四边形,

$$\therefore MN \parallel OH, MN = OH,$$

$$\therefore OH = \frac{1}{2} \cdot OF,$$

$\therefore MN$ 为 $\triangle OGF$ 的中位线,

$$\therefore x_D = x_N = \frac{1}{2} \cdot x_G = -\frac{\sqrt{3}}{2},$$

$$\therefore D\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}, 0\right).$$

(3) 设直线 GE 的解析式为 $y = kx + b$,

$$\therefore G(-\sqrt{3}, 3), E(\sqrt{3}, 1),$$

$$\therefore \begin{cases} -\sqrt{3}k + b = 3 \\ \sqrt{3}k + b = 1 \end{cases}, \text{ 解得 } \begin{cases} k = -\frac{\sqrt{3}}{3} \\ b = 2 \end{cases},$$

$$\therefore y = -\frac{\sqrt{3}}{3}x + 2.$$

$\because$ Q 在抛物线 $y = \frac{2}{3}x^2 - \frac{\sqrt{3}}{3}x$ 上,

∴ 设 Q 的坐标为 $(x, \frac{2}{3}x^2 - \frac{\sqrt{3}}{3}x)$,

∵ Q 在 R、E 两点之间运动,

$$\therefore -\frac{\sqrt{3}}{2} < x < \sqrt{3}.$$

① 当 $-\frac{\sqrt{3}}{2} < x < 0$ 时,

如图 2, 连接 PQ, HQ, 过点 Q 作 QK // y 轴, 交 GE 于 K, 则 K $(x, -\frac{\sqrt{3}}{3}x+2)$,

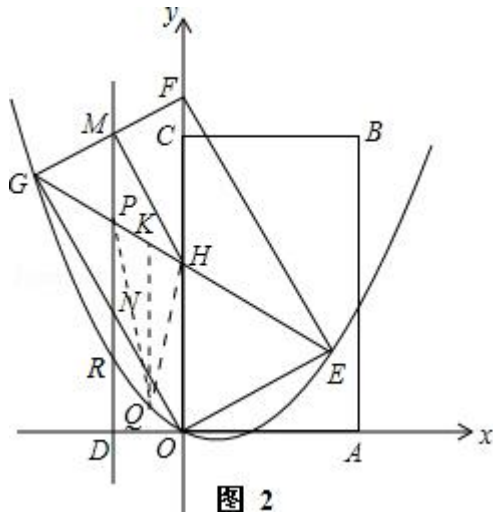


图 2

$$\therefore S_{\triangle PKQ} = \frac{1}{2} \cdot (y_K - y_Q) \cdot (x_Q - x_P),$$

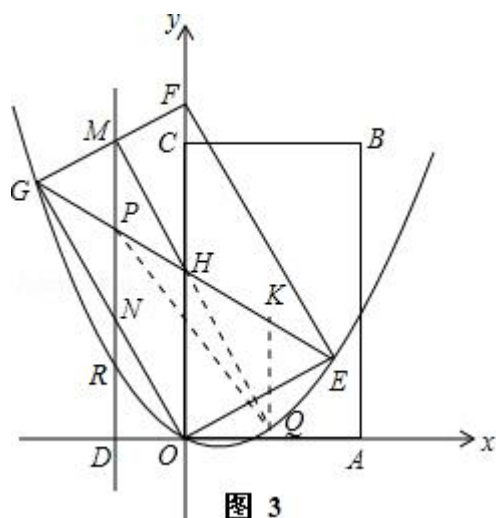
$$S_{\triangle HKQ} = \frac{1}{2} \cdot (y_K - y_Q) \cdot (x_H - x_Q),$$

$$\therefore S_{\triangle PQH} = S_{\triangle PKQ} + S_{\triangle HKQ} = \frac{1}{2} \cdot (y_K - y_Q) \cdot (x_Q - x_P) + \frac{1}{2} \cdot (y_K - y_Q) \cdot (x_H - x_Q)$$

$$= \frac{1}{2} \cdot (y_K - y_Q) \cdot (x_H - x_P) = \frac{1}{2} \cdot \left[-\frac{\sqrt{3}}{3}x+2 - \left(\frac{2}{3}x^2 - \frac{\sqrt{3}}{3}x \right) \right] \cdot \left[0 - \left(-\frac{\sqrt{3}}{2} \right) \right] = -\frac{\sqrt{3}}{6}x^2 + \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

② 当 $0 \leq x < \sqrt{3}$ 时,

如图 2, 连接 PQ, HQ, 过点 Q 作 QK // y 轴, 交 GE 于 K, 则 K $(x, -\frac{\sqrt{3}}{3}x+2)$,



$$\text{同理 } S_{\Delta PQH} = S_{\Delta PKQ} - S_{\Delta HKQ} = \frac{1}{2} \cdot (y_K - y_Q) \cdot (x_Q - x_P) - \frac{1}{2} \cdot (y_K - y_Q) \cdot (x_Q - x_H)$$

$$= \frac{1}{2} \cdot (y_K - y_Q) \cdot (x_H - x_P) = -\frac{\sqrt{3}}{6}x^2 + \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

综上所述, $S_{\triangle PQH} = -\frac{\sqrt{3}}{6}x^2 + \frac{\sqrt{3}}{2}$.

$$\therefore \frac{\sqrt{3}}{6} < s \leq \frac{\sqrt{3}}{2},$$

$$\therefore \frac{\sqrt{3}}{6} < -\frac{\sqrt{3}}{6}x^2 + \frac{\sqrt{3}}{2} \leq \frac{\sqrt{3}}{2},$$

解得 $-\sqrt{2} < x < \sqrt{2}$,

$$\therefore -\frac{\sqrt{3}}{2} < x < \sqrt{3},$$

$$\therefore -\frac{\sqrt{3}}{2} < x < \sqrt{2}.$$

例 25 (2014 年烟台市中考第 26 题) 如图 1, 在平面直角坐标系中, $\text{Rt}\triangle ABC$ 的顶点 A、C 分别在 y 轴、x 轴上, $\angle ACB=90^\circ$, $OA=3^{\frac{1}{2}}$. 抛物线 $y=ax^2-ax-a$ 经过点 B $(2, 3^{\frac{1}{2}}/3)$, 与 y 轴交于点 D.

- (1) 求抛物线的表达式;
- (2) 点 B 关于直线 AC 的对称点是否在抛物线上? 请说明理由.
- (3) 延长 BA 交抛物线于点 E, 连结 ED. 试说明 $ED \parallel AC$ 的理由.

【解答】

(1) 把点 B 的坐标代入抛物线的表达式, 得 $\frac{\sqrt{3}}{3} = a \times 2^2 - 2a - a$, 解得 $a = \frac{\sqrt{3}}{3}$,
 $\therefore$ 抛物线的表达式为 $y = \frac{\sqrt{3}}{3}x^2 - \frac{\sqrt{3}}{3}x - \frac{\sqrt{3}}{3}$.

(2) 连接 CD, 过点 B 作 $BF \perp x$ 轴于点 F, 则 $\angle BCF + \angle CBF = 90^\circ$

$\because \angle ACB = 90^\circ$, $\therefore \angle ACO + \angle BCF = 90^\circ$, $\therefore \angle ACO = \angle CBF$,

$\because \angle AOC = \angle CFB = 90^\circ$, $\therefore \triangle AOC \sim \triangle CFB$, $\therefore \frac{AO}{CF} = \frac{OC}{BF}$,

设 $OC = m$, 则 $CF = 2 - m$, 则有 $\frac{\sqrt{3}}{2 - m} = \frac{m}{\frac{\sqrt{3}}{3}}$, 解得 $m = 1$, $\therefore OC = OF = 1$,

当 $x = 0$ 时 $y = -\frac{\sqrt{3}}{3}$, $\therefore OD = \frac{\sqrt{3}}{3}$, $\therefore BF = OD$,

$\because \angle DOC = \angle BFC = 90^\circ$, $\therefore \triangle OCD \sim \triangle FCB$, $\therefore DC = CB$, $\angle OCD = \angle FCB$,

$\therefore$ 点 B、C、D 在同一直线上,

$\therefore$ 点 B 与点 D 关于直线 AC 对称,

$\therefore$ 点 B 关于直线 AC 的对称点在抛物线上.

(3) 过点 E 作 $EG \perp y$ 轴于点 G, 设直线 AB 的表达式为 $y = kx + b$, 则 $\begin{cases} b = \sqrt{3} \\ \frac{\sqrt{3}}{3} = 2k + b \end{cases}$,
 解得 $k = -\frac{\sqrt{3}}{3}$,

$$\therefore y = -\frac{\sqrt{3}}{3}x + \sqrt{3}, \text{ 代入抛物线的表达式 } -\frac{\sqrt{3}}{3}x + \sqrt{3} = \frac{\sqrt{3}}{3}x^2 - \frac{\sqrt{3}}{3}x - \frac{\sqrt{3}}{3}.$$

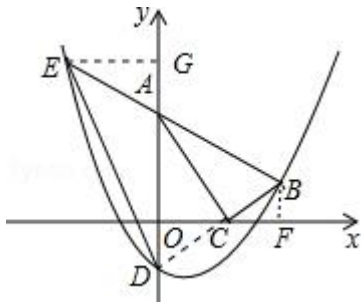
解得 $x=2$ 或 $x=-2$,

$$\text{当 } x=-2 \text{ 时 } y = -\frac{\sqrt{3}}{3}x + \sqrt{3} = -\frac{\sqrt{3}}{3} \times (-2) + \sqrt{3} = \frac{5\sqrt{3}}{3},$$

$$\therefore \text{点 } E \text{ 的坐标为 } (-2, \frac{5\sqrt{3}}{3}), \because \tan \angle EDG = \frac{EG}{DG} = \frac{2}{\frac{5\sqrt{3}}{3} + \frac{\sqrt{3}}{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3},$$

$$\therefore \angle EDG = 30^\circ \because \tan \angle OAC = \frac{OC}{OA} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}, \therefore \angle OAC = 30^\circ,$$

$$\therefore \angle OAC = \angle EDG, \therefore ED \parallel AC.$$



例 26 (2014 年泰州市中考第 26 题) 平面直角坐标系中，点 A、B 分别在函数 $y=4/x$ ($x>0$) 与 $y=-4/x$ ($x<0$) 的图像上，A、B 的横坐标分别为 a、b.

(1) 若 $AB \parallel x$ 轴，求 $\triangle AOB$ 的面积；

(2) 若 $\triangle AOB$ 是以 AB 为底边的等腰三角形，且 $a+b \neq 0$ ，求 ab 的值；

作边长为 3 的正方形 ACDE，使 $AC \parallel x$ 轴，点 D 在点 A 的左下方，那么对大于或等于 4 的任意实数 a，CD 边与函数 $y=4/x$ ($x>0$) 的图像都有交点，请说明理由.

【解答】

(1) 如图 1，AB 交 y 轴于 P， $\because AB \parallel x$ 轴，

$$\therefore S_{\triangle OAC} = \frac{1}{2} \times |4| = 2, S_{\triangle OBC} = \frac{1}{2} \times |-4| = 2,$$

$$\therefore S_{\triangle OAB} = S_{\triangle OAC} + S_{\triangle OBC} = 4;$$

(2) $\because$ A、B 的横坐标分别为 a、b，

$$\therefore \text{A、B 的纵坐标分别为 } \frac{4}{a}, -\frac{4}{b},$$

$$\therefore OA^2 = a^2 + \left(\frac{4}{a}\right)^2, OB^2 = b^2 + \left(-\frac{4}{b}\right)^2,$$

$\because \triangle OAB$ 是以 AB 为底边的等腰三角形，

$$\therefore OA = OB,$$

$$\therefore a^2 + \left(\frac{4}{a}\right)^2 = b^2 + \left(-\frac{4}{b}\right)^2,$$

$$\therefore a^2 - b^2 + \left(\frac{4}{a}\right)^2 - \left(\frac{4}{b}\right)^2 = 0,$$

$$\therefore a^2 - b^2 + \frac{16(b^2 - a^2)}{a^2 b^2} = 0,$$

$$\therefore (a+b)(a-b)\left(1 - \frac{16}{a^2 b^2}\right) = 0,$$

$$\because a+b \neq 0, a > 0, b < 0,$$

$$\therefore 1 - \frac{16}{a^2 b^2} = 0, \quad \therefore ab = -4;$$

$$(3) \because a \geq 4, \text{ 而 } AC=3,$$

$\therefore$ 直线 CD 在 y 轴的右侧, 直线 CD 与函数 $y_1 = \frac{4}{x} (x > 0)$ 的图象一定有交点,

设直线 CD 与函数 $y_1 = \frac{4}{x} (x > 0)$ 的图象交点为 F, 如图 2,

$\because$ A 点坐标为 $(a, \frac{4}{a})$, 正方形 ACDE 的边长为 3,

$\therefore$ C 点坐标为 $(a-3, \frac{4}{a})$,

$\therefore$ F 点的坐标为 $(a-3, \frac{4}{a-3})$,

$$\therefore FC = \frac{4}{a-3} - \frac{4}{a},$$

$$\because 3 - FC = 3 - (\frac{4}{a-3} - \frac{4}{a}) = \frac{3(a+1)(a-4)}{a(a-3)},$$

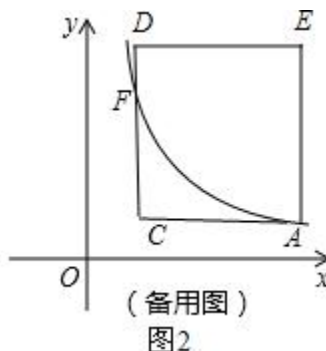
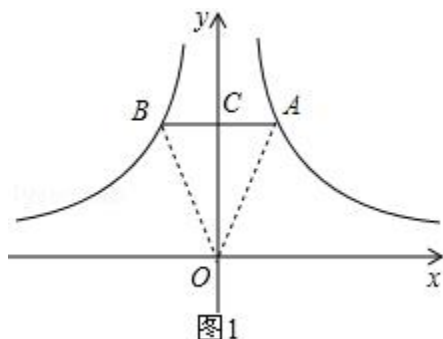
而 $a \geq 4$,

$$\therefore 3 - FC \geq 0, \text{ 即 } FC \leq 3,$$

$$\because CD=3,$$

$\therefore$ 点 F 在线段 DC 上,

即对大于或等于 4 的任意实数 a, CD 边与函数 $y_1 = \frac{4}{x} (x > 0)$ 的图象都有交点.



例 27 (2014 年福州市中考第 22 题) 如图 1, 抛物线 $y = \frac{1}{2}(x-3)^2 - 1$ 与 x 轴交于 A、B 两点 (点 A 在点 B 左侧), 与 y 轴交于点 C, 顶点为 D.

(1) 求点 A、B、C 的坐标;

(2) 连结 CD, 过点 O 作 $OE \perp CD$, 垂足为 H, OE 与抛物线的对称轴交于点 E, 连结 AE、AD. 求证: $\angle AEO = \angle ADC$;

(3) 以 (2) 中的点 E 为圆心, 1 为半径画圆, 在对称轴右侧的抛物线上有一动点 P, 过 P 作 E 的切线, 切点为 Q, 当 PQ 的长最小时, 求点 P 的坐标, 并直接写出点 Q 的坐标.

【解答】

(1) 顶点 D 的坐标为 $(3, -1)$.

令 $y=0$, 得 $\frac{1}{2}(x-3)^2 - 1 = 0$,

解得 $x_1 = 3 + \sqrt{2}$, $x_2 = 3 - \sqrt{2}$.

$\because$ 点 A 在点 B 的左侧,

$\therefore$ A 点坐标 $(3 - \sqrt{2}, 0)$, B 点坐标 $(3 + \sqrt{2}, 0)$.

(2) 过 D 作 $DG \perp y$ 轴, 垂足为 G.

则 $G(0, -1)$, $GD=3$.

令 $x=0$, 则 $y = \frac{7}{2}$, $\therefore$ C 点坐标为 $(0, \frac{7}{2})$.

$\therefore GC = \frac{7}{2} - (-1) = \frac{9}{2}$.

设对称轴交 x 轴于点 M.

$\because OE \perp CD$,

$\therefore \angle GCD + \angle COH = 90^\circ$.

$\because \angle MOE + \angle COH = 90^\circ$,

$$\therefore \angle MOE = \angle GCD.$$

$$\text{又} \because \angle CGD = \angle OMN = 90^\circ,$$

$$\therefore \triangle DCG \sim \triangle EOM.$$

$$\therefore \frac{CG}{OM} = \frac{DG}{EM}, \text{ 即 } \frac{\frac{9}{2}}{3} = \frac{3}{EM}.$$

$$\therefore EM = 2, \text{ 即点 } E \text{ 坐标为 } (3, 2), ED = 3.$$

$$\text{由勾股定理, 得 } AE^2 = 6, AD^2 = 3,$$

$$\therefore AE^2 + AD^2 = 6 + 3 = 9 = ED^2.$$

$$\therefore \triangle AED \text{ 是直角三角形, 即 } \angle DAE = 90^\circ.$$

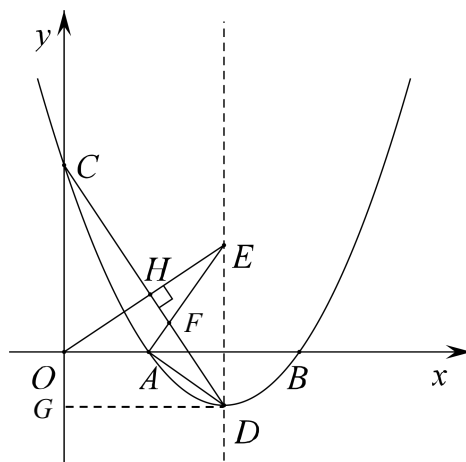
设 AE 交 CD 于点 F .

$$\therefore \angle ADC + \angle AFD = 90^\circ.$$

$$\text{又} \because \angle AEO + \angle HFE = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle AFD = \angle HFE,$$

$$\therefore \angle AEO = \angle ADC.$$



$$(3) \text{ 由 } \odot E \text{ 的半径为 } 1, \text{ 根据勾股定理, 得 } PQ^2 = EP^2 - 1.$$

要使切线长 PQ 最小, 只需 EP 长最小, 即 EP^2 最小.

$$\text{设 } P \text{ 坐标为 } (x, y), \text{ 由勾股定理, 得 } EP^2 = (x-3)^2 + (y-2)^2.$$

$$\because y = \frac{1}{2}(x-3)^2 - 1,$$

$$\therefore (x-3)^2 = 2y+2.$$

$$\begin{aligned}\therefore EP^2 &= 2y + 2 + y^2 - 4y + 4 \\ &= (y-1)^2 + 5.\end{aligned}$$

当 $y=1$ 时, EP^2 最小值为 5.

把 $y=1$ 代入 $y=\frac{1}{2}(x-3)^2-1$, 得 $\frac{1}{2}(x-3)^2-1=1$,

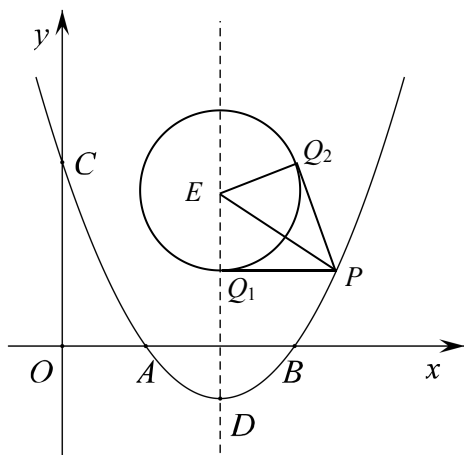
解得 $x_1=1$, $x_2=5$.

又 $\because$ 点 P 在对称轴右侧的抛物线上,

$\therefore x_1=1$ 舍去.

$\therefore$ 点 P 坐标为 $(5, 1)$.

此时 Q 点坐标为 $(3, 1)$ 或 $(\frac{19}{5}, \frac{13}{5})$.



例 28 (2014 年武汉市中考第 25 题) 如图 1, 已知直线 AB: $y=kx+2k+4$ 与抛物线 $y=\frac{1}{2}x^2$ 交于 A、B 两点.

(1) 直线 AB 总经过一个定点 C, 请直接写出点 C 的坐标;

(2) 当 $k=-\frac{1}{2}$ 时, 在直线 AB 下方的抛物线上求点 P, 使 $\triangle ABP$ 的面积等于 5;

若在抛物线上存在定点 D 使 $\angle ADB=90^\circ$, 求点 D 到直线 AB 的最大距离.

【解答】

解: (1) $\because$ 当 $x=-2$ 时, $y=(-2)k+2k+4=4$.

$\therefore$ 直线 AB: $y=kx+2k+4$ 必经过定点 $(-2, 4)$.

$\therefore$ 点 C 的坐标为 $(-2, 4)$.

(2) $\because k=-\frac{1}{2}$,

$\therefore$ 直线的解析式为 $y=-\frac{1}{2}x+3$.

联立 $\begin{cases} y=-\frac{1}{2}x+3 \\ y=\frac{1}{2}x^2 \end{cases}$, 解得: $\begin{cases} x=-3 \\ y=\frac{9}{2} \end{cases}$ 或 $\begin{cases} x=2 \\ y=2 \end{cases}$.

$\therefore$ 点 A 的坐标为 $(-3, \frac{9}{2})$, 点 B 的坐标为 $(2, 2)$.

过点 P 作 $PQ \parallel y$ 轴, 交 AB 于点 Q,

过点 A 作 $AM \perp PQ$, 垂足为 M,

过点 B 作 $BN \perp PQ$, 垂足为 N, 如图 1 所示.

设点 P 的横坐标为 a, 则点 Q 的横坐标为 a.

$\therefore y_P = \frac{1}{2}a^2$, $y_Q = -\frac{1}{2}a+3$.

$\because$ 点 P 在直线 AB 下方, $\therefore PQ = y_Q - y_P = -\frac{1}{2}a+3 - \frac{1}{2}a^2$

$\therefore AM+NB = a - (-3) + 2 - a = 5$.

$$\begin{aligned}
&\therefore S_{\triangle APB} = S_{\triangle APQ} + S_{\triangle BPQ} \\
&= \frac{1}{2} PQ \cdot AM + \frac{1}{2} PQ \cdot BN \\
&= \frac{1}{2} PQ \cdot (AM + BN) \\
&= \frac{1}{2} \left(-\frac{1}{2}a + 3 - \frac{1}{2}a^2 \right) \cdot 5 \\
&= 5.
\end{aligned}$$

整理得： $a^2 + a - 2 = 0$.

解得： $a_1 = -2$, $a_2 = 1$.

当 $a = -2$ 时, $y_P = \frac{1}{2} \times (-2)^2 = 2$.

此时点 P 的坐标为 $(-2, 2)$.

当 $a = 1$ 时, $y_P = \frac{1}{2} \times 1^2 = \frac{1}{2}$.

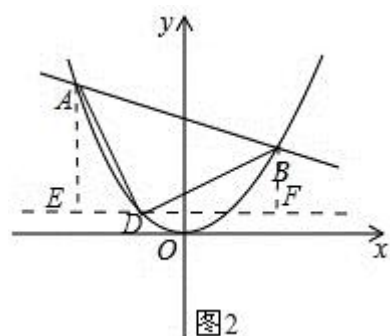
此时点 P 的坐标为 $(1, \frac{1}{2})$.

$\therefore$ 符合要求的点 P 的坐标为 $(-2, 2)$ 或 $(1, \frac{1}{2})$.

(3) 过点 D 作 x 轴的平行线 EF,

作 $AE \perp EF$, 垂足为 E,

作 $BF \perp EF$, 垂足为 F, 如图 2.



$\because AE \perp EF$, $BF \perp EF$,

$\therefore \angle AED = \angle BFD = 90^\circ$.

$\because \angle ADB = 90^\circ$,

$$\therefore \angle ADE = 90^\circ - \angle BDF = \angle DBF.$$

$$\because \angle AED = \angle BFD, \angle ADE = \angle DBF,$$

$$\therefore \triangle AED \sim \triangle DFB. \quad \therefore \frac{AE}{DF} = \frac{ED}{FB}.$$

设点 A、B、D 的横坐标分别为 m、n、t,

则点 A、B、D 的纵坐标分别为 $\frac{1}{2}m^2$ 、 $\frac{1}{2}n^2$ 、 $\frac{1}{2}t^2$.

$$AE = y_A - y_E = \frac{1}{2}m^2 - \frac{1}{2}t^2.$$

$$BF = y_B - y_F = \frac{1}{2}n^2 - \frac{1}{2}t^2.$$

$$ED = x_D - x_E = t - m,$$

$$DF = x_F - x_D = n - t.$$

$$\therefore \frac{AE}{DF} = \frac{ED}{FB},$$

$$\therefore \frac{\frac{1}{2}m^2 - \frac{1}{2}t^2}{n - t} = \frac{t - m}{\frac{1}{2}n^2 - \frac{1}{2}t^2}.$$

$$\therefore \frac{(m+t)(m-t)}{2(n-t)} = \frac{2(t-m)}{(n+t)(n-t)}.$$

$$\because t \neq m, t \neq n,$$

$$\therefore \frac{m+t}{2} = n+t$$

去分母并整理得: $mn + (m+n)t + t^2 + 4 = 0$.

$\because$ 点 A、B 是直线 AB: $y = kx + 2k + 4$ 与抛物线 $y = \frac{1}{2}x^2$ 交点,

$\therefore m、n$ 是方程 $kx + 2k + 4 = \frac{1}{2}x^2$ 即 $x^2 - 2kx - 4k - 8 = 0$ 两根.

$$\therefore m+n=2k, mn=-4k-8.$$

$$\therefore -4k-8+2kt+t^2+4=0,$$

$$\text{即 } t^2 + 2kt - 4k - 4 = 0.$$

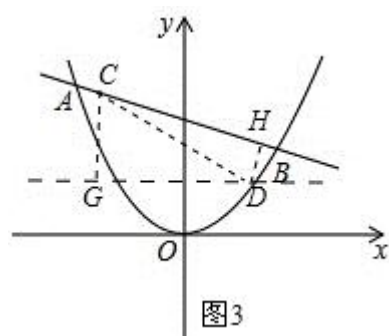
$$\text{即 } (t-2)(t+2k+2) = 0.$$

$$\therefore t_1 = 2, t_2 = -2k - 2 \text{ (舍)}.$$

$$\therefore \text{定点 } D \text{ 的坐标为 } (2, 2).$$

过点 D 作 x 轴的平行线 DG ,

过点 C 作 $CG \perp DG$, 垂足为 G , 如图 3 所示.



$$\because \text{点 } C(-2, 4), \text{点 } D(2, 2),$$

$$\therefore CG = 4 - 2 = 2, DG = 2 - (-2) = 4.$$

$$\because CG \perp DG,$$

$$\therefore DC = \sqrt{GC^2 + DG^2}$$

$$= \sqrt{2^2 + 4^2} = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}.$$

过点 D 作 $DH \perp AB$, 垂足为 H , 如图 3 所示,

$$\therefore DH \leq DC. \therefore DH \leq 2\sqrt{5}.$$

$\therefore$ 当 DH 与 DC 重合即 $DC \perp AB$ 时,

点 D 到直线 AB 的距离最大, 最大值为 $2\sqrt{5}$.

$\therefore$ 点 D 到直线 AB 的最大距离为 $2\sqrt{5}$.

例 29(2014 年南宁市中考第 26 题)在平面直角坐标系中,抛物线 $y=x^2+(k-1)x-k$ 与直线 $y=kx+1$ 交于 A、B 两点,点 A 在点 B 的左侧.

(1) 如图 1, 当 $k=1$ 时, 直接写出 A、B 两点的坐标;

(2) 在 (1) 的条件下, 点 P 为抛物线上的一个动点, 且在直线 AB 下方, 试求出 $\triangle ABP$ 面积的最大值及此时点 P 的坐标;

(3) 如图 2, 抛物线 $y=x^2+(k-1)x-k$ ($k>0$) 与 x 轴交于 C、D 两点 (点 C 在点 D 的左侧). 在直线 $y=kx+1$ 上是否存在唯一的点 Q, 使得 $\angle OQC=90^\circ$? 若存在, 请求出此时 k 的值; 若不存在, 请说明理由.

【解答】

(1) 当 $k=1$ 时, 抛物线解析式为 $y=x^2-1$, 直线解析式为 $y=x+1$.

联立两个解析式, 得: $x^2-1=x+1$,

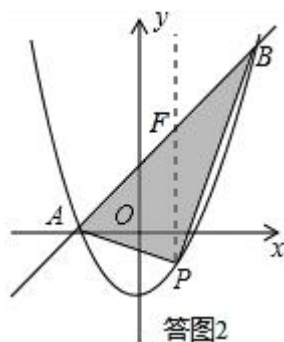
解得: $x=-1$ 或 $x=2$,

当 $x=-1$ 时, $y=x+1=0$; 当 $x=2$ 时, $y=x+1=3$,

$\therefore A(-1, 0), B(2, 3)$.

(2) 设 $P(x, x^2-1)$.

如答图 2 所示, 过点 P 作 $PF \parallel y$ 轴, 交直线 AB 于点 F, 则 $F(x, x+1)$.



$$\therefore PF=y_F-y_P=(x+1)-(x^2-1)=-x^2+x+2.$$

$$S_{\triangle ABP}=S_{\triangle PFA}+S_{\triangle PFB}=\frac{1}{2}PF(x_F-x_A)+\frac{1}{2}PF(x_B-x_F)=\frac{1}{2}PF(x_B-x_A)=\frac{3}{2}PF$$

$$\therefore S_{\triangle ABP}=\frac{3}{2}(-x^2+x+2)=-\frac{3}{2}\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{27}{8}$$

$$\text{当 } x=\frac{1}{2} \text{ 时, } y_P=x^2-1=-\frac{3}{4}.$$

$$\therefore \triangle ABP \text{ 面积最大值为 } \frac{27}{8}, \text{ 此时点 } P \text{ 坐标为 } \left(\frac{1}{2}, -\frac{3}{4}\right).$$

(3) 设直线 AB: $y=kx+1$ 与 x 轴、y 轴分别交于点 E、F,

$$\text{则 } E\left(-\frac{1}{k}, 0\right), F(0, 1), OE=\frac{1}{k}, OF=1.$$

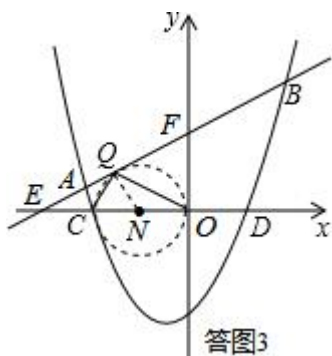
$$\text{在 Rt}\triangle EOF \text{ 中, 由勾股定理得: } EF=\sqrt{\left(\frac{1}{k}\right)^2+1}=\sqrt{\frac{1+k^2}{k^2}}.$$

$$\text{令 } y=x^2+(k-1)x-k=0, \text{ 即 } (x+k)(x-1)=0, \text{ 解得: } x=-k \text{ 或 } x=1.$$

$$\therefore C(-k, 0), OC=k.$$

I、假设存在唯一一点 Q, 使得 $\angle OQC=90^\circ$, 如答图 3 所示,

则以 OC 为直径的圆与直线 AB 相切于点 Q, 根据圆周角定理, 此时 $\angle OQC=90^\circ$.



$$\text{设点 } N \text{ 为 } OC \text{ 中点, 连接 } NQ, \text{ 则 } NQ \perp EF, NQ=CN=ON=\frac{k}{2}.$$

$$\therefore EN=OE-ON=\frac{1}{k}-\frac{k}{2}.$$

$$\because \angle NEQ=\angle FEO, \angle EQN=\angle EOF=90^\circ,$$

$$\therefore \triangle EQN \sim \triangle EOF,$$

$$\therefore \frac{NQ}{OF} = \frac{EN}{EF}, \text{ 即: } \frac{\frac{k}{2}}{1} = \frac{\frac{1-k}{k}-\frac{k}{2}}{\frac{\sqrt{1+k^2}}{k}},$$

$$\text{解得: } k = \pm \frac{2\sqrt{5}}{5},$$

$$\because k > 0, \therefore k = \frac{2\sqrt{5}}{5}.$$

$$\therefore \text{存在唯一一点 } Q, \text{ 使得 } \angle OQC = 90^\circ, \text{ 此时 } k = \frac{2\sqrt{5}}{5}.$$

II、若直线 AB 过点 C 时，此时直线与圆的交点只有另一点 Q 点，故亦存在唯一一点 Q，使得 $\angle OQC = 90^\circ$ ，

将 C (-k, 0) 代入 $y = kx + 1$ 中，

可得 $k = 1$, $k = -1$ (舍去)，

故存在唯一一点 Q，使得 $\angle OQC = 90^\circ$ ，此时 $k = 1$ 。

综上所述， $k = \frac{2\sqrt{5}}{5}$ 或 1 时，存在唯一一点 Q，使得 $\angle OQC = 90^\circ$ 。

例 30 (2014 年天津市中考第 24 题) 在平面直角坐标系中, O 为原点, 点 $A(-2, 0)$, 点 $B(0, 2)$, 点 E 、 F 分别为 OA 、 OB 的中点. 若正方形 $OEDF$ 绕点 O 顺时针旋转, 得正方形 $OE'D'F'$, 记旋转角为 α .

(1) 如图 1, 当 $\alpha=90^\circ$ 时, 求 AE' 、 BF' ;

(2) 如图 2, 当 $\alpha=135^\circ$ 时, 求证: $AE'=BF'$, 且 $AE' \perp BF'$;

(3) 若直线 AE' 与直线 BF' 相交于点 P , 试求 P 的纵坐标的最大值 (直接写出结果即可) .

【解答】

(1) 当 $\alpha=90^\circ$ 时, 点 E' 与点 F 重合, 如图①.

$\because$ 点 A 点 $B(0, 2)$,

$\therefore OA=OB=2$.

$\because$ 点 E , 点 F 分别为 OA , OB 的中点,

$\therefore OE=OF=1$

$\because$ 正方形 $OE'D'F'$ 是正方形 $OEDF$ 绕点 O 顺时针旋转 90° 得到的,

$\therefore OE'=OE=1$, $OF'=OF=1$.

在 $Rt\triangle AE'O$ 中,

$$AE' = \sqrt{OA^2 + OE'^2} = \sqrt{2^2 + 1^2} = \sqrt{5}$$

在 $Rt\triangle BOF'$ 中,

$$BF' = \sqrt{OB^2 + OF'^2} = \sqrt{2^2 + 1^2} = \sqrt{5}$$

$\therefore AE'$, BF' 的长都等于 $\sqrt{5}$.

(2) 当 $\alpha=135^\circ$ 时, 如图②.

$\because$ 正方形 $OE'D'F'$ 是由正方形 $OEDF$ 绕点 O 顺时针旋转 135° 所得,

$$\therefore \angle AOE' = \angle BOF' = 135^\circ.$$

$$\text{在 } \triangle AOE' \text{ 和 } \triangle BOF' \text{ 中, } \begin{cases} AO = BO \\ \angle AOE' = \angle BOF' \\ OE' = OF' \end{cases},$$

$$\therefore \triangle AOE' \cong \triangle BOF' \text{ (SAS).}$$

$$\therefore AE' = BF', \text{ 且 } \angle OAE' = \angle OBF'.$$

$$\because \angle ACB = \angle CAO + \angle AOC = \angle CBP + \angle CPB, \angle CAO = \angle CBP,$$

$$\therefore \angle CPB = \angle AOC = 90^\circ$$

$$\therefore AE' \perp BF'.$$

(3) 在第一象限内, 当点 D' 与点 P 重合时, 点 P 的纵坐标最大.

过点 P 作 $PH \perp x$ 轴, 垂足为 H, 如图③所示.

$$\because \angle AE'O = 90^\circ, E'O = 1, AO = 2,$$

$$\therefore \angle E'AO = 30^\circ, AE' = \sqrt{3}.$$

$$\therefore AP = \sqrt{3} + 1.$$

$$\because \angle AHP = 90^\circ, \angle PAH = 30^\circ,$$

$$\therefore PH = \frac{1}{2} AP = \frac{\sqrt{3} + 1}{2}.$$

$$\therefore \text{点 P 的纵坐标的最大值为 } \frac{\sqrt{3} + 1}{2}.$$

例 31 (2015 年北京市中考第 29 题) 在平面直角坐标系中，圆 C 的半径为 r ， P 是与圆心 C 不重合的点，点 P 关于圆 C 的反称点的定义如下：若在射线 CP 上存在一点 P' ，满足 $CP+CP'=2r$ ，则称点 P' 为点 P 关于圆 C 的反称点。如图 1 为点 P 及其关于圆 C 的反称点 P' 的示意图。

特别的，当点 P' 与圆心 C 重合时，规定 $CP'=0$ 。

(1) 当圆 O 的半径为 1 时；

①分别判断点 $M(2, 1)$ 、 $N(\frac{3}{2}, 0)$ 、 $T(1, \sqrt{3})$ 关于圆 O 的反称点是否存在？若存在，求其坐标；

②点 P 在直线 $y=-x+2$ 上，若点 P 关于圆 O 的反称点 P' 存在，且点 P' 不在 x 轴上，求点 P 的横坐标的取值范围；

(2) 圆 C 的圆心在 x 轴上，半径为 1，直线 $y=-\frac{\sqrt{3}}{3}x+2\sqrt{3}$ 与 x 轴、 y 轴分别交于点 A 、 B ，若线段 AB 上存在点 P ，使得点 P 关于圆 C 的反称点 P' 在圆 C 的内部，求圆心 C 的横坐标的取值范围。

【解答】

(1) 当 $\odot O$ 的半径为 1 时.

①点 $M(2, 1)$ 关于 $\odot O$ 的反称点不存在；

$N(\frac{3}{2}, 0)$ 关于 $\odot O$ 的反称点存在，反称点 $N'(\frac{1}{2}, 0)$ ；

$T(1, \sqrt{3})$ 关于 $\odot O$ 的反称点存在，反称点 $T'(0, 0)$ ；

② $\because OP \leq 2r=2$, $OP^2 \leq 4$, 设 $P(x, -x+2)$,

$\therefore OP^2 = x^2 + (-x+2)^2 = 2x^2 - 4x + 4 \leq 4$, $\therefore 2x^2 - 4x \leq 0$,

$x(x-2) \leq 0$, $\therefore 0 \leq x \leq 2$.

当 $x=2$ 时, $P(2, 0)$, $P'(0, 0)$ 不符合题意；

当 $x=0$ 时, $P(0, 2)$, $P'(0, 0)$ 不符合题意；

$\therefore 0 < x < 2$;

(2) $\because$ 直线 $y = -\frac{\sqrt{3}}{3}x + 2\sqrt{3}$ 与 x 轴、 y 轴分别交于点 A 、 B ,

$\therefore A(6, 0)$, $B(0, 2\sqrt{3})$, $\therefore \frac{OA}{OB} = \sqrt{3}$,

$\therefore \angle OBA=60^\circ, \angle OAB=30^\circ.$

设 $C(x, 0).$

①当 C 在 OA 上时, 作 $CH \perp AB$ 于 H , 则 $CH \leq CP \leq 2r=2,$

所以 $AC \leq 4,$

C 点横坐标 $x \geq 2$ (当 $x=2$ 时, C 点坐标 $(2, 0)$, H 点的反称点 $H'(2, 0)$ 在圆的内部);

②当 C 在 A 点右侧时, C 到线段 AB 的距离为 AC 长, AC 最大值为 $2,$

所以 C 点横坐标 $x \leq 8.$

综上所述, 圆心 C 的横坐标的取值范围是 $2 \leq x \leq 8.$

例 32 (2015 年广州市中考第 25 题) 已知 O 为坐标原点, 抛物线 $y_1 = ax^2 + bx + c$ ($a \neq 0$) 与 x 轴相交于点 $A(x_1, 0)$ 、 $B(x_2, 0)$, 与 y 轴交于点 C , 且 O 、 C 两点间的距离为 3, $x_1 \cdot x_2 < 0$, $|x_1| + |x_2| = 4$, 点 A 、 C 在直线 $y_2 = -3x + t$ 。

- (1) 求点 C 的坐标;
- (2) 当 y_1 随着 x 的增大而增大时, 求自变量 x 的取值范围;
- (3) 将抛物线 y_1 向左平移 n ($n > 0$) 个单位, 记平移后 y 随 x 增大而增大的部分为 P , 直线 y_2 向下平移 n 个单位。当平移后的直线与 P 有公共交点时, 求 $2n^2 - 5n$ 的最小值。

【解答】

- (1) 令 $x=0$, 则 $y=c$, 故 $C(0, c)$,
 $\because OC$ 的距离为 3, $\therefore |c|=3$, 即 $c=\pm 3$,
 $\therefore C(0, 3)$ 或 $(0, -3)$;
- (2) $\because x_1 x_2 < 0$, $\therefore x_1, x_2$ 异号,
 ①若 $C(0, 3)$, 即 $c=3$,
 把 $C(0, 3)$ 代入 $y_2 = -3x + t$, 则 $0 + t = 3$, 即 $t=3$,
 $\therefore y_2 = -3x + 3$,
 把 $A(x_1, 0)$ 代入 $y_2 = -3x + 3$, 则 $-3x_1 + 3 = 0$,
 即 $x_1 = 1$, $\therefore A(1, 0)$,
 $\because x_1, x_2$ 异号, $x_1 = 1 > 0$, $\therefore x_2 < 0$,
 $\because |x_1| + |x_2| = 4$, $\therefore 1 - x_2 = 4$,
 解得: $x_2 = -3$, 则 $B(-3, 0)$,

代入 $y_1 = ax^2 + bx + 3$ 得, $\begin{cases} a+b+3=0 \\ 9a-3b+3=0 \end{cases}$, 解得: $\begin{cases} a=-1 \\ b=-2 \end{cases}$,

$$\therefore y_1 = -x^2 - 2x + 3 = -(x+1)^2 + 4,$$

则当 $x \leq -1$ 时, y 随 x 增大而增大.

②若 $C(0, -3)$, 即 $c = -3$,

把 $C(0, -3)$ 代入 $y_2 = -3x + t$, 则 $0 + t = -3$, 即 $t = -3$,

$$\therefore y_2 = -3x - 3,$$

把 $A(x_1, 0)$, 代入 $y_2 = -3x - 3$,

$$\text{则 } -3x_1 - 3 = 0,$$

$$\text{即 } x_1 = -1, \therefore A(-1, 0),$$

$$\because x_1, x_2 \text{ 异号}, x_1 = -1 < 0, \therefore x_2 > 0$$

$$\because |x_1| + |x_2| = 4, \therefore 1 + x_2 = 4,$$

解得: $x_2 = 3$, 则 $B(3, 0)$,

代入 $y_1 = ax^2 + bx + 3$ 得, $\begin{cases} a-b-3=0 \\ 9a+3b-3=0 \end{cases}$, 解得: $\begin{cases} a=1 \\ b=-2 \end{cases}$,

$$\therefore y_1 = x^2 - 2x - 3 = (x-1)^2 - 4,$$

则当 $x \geq 1$ 时, y 随 x 增大而增大,

综上所述, 若 $c = 3$, 当 y 随 x 增大而增大时, $x \leq -1$;

若 $c = -3$, 当 y 随 x 增大而增大时, $x \geq 1$;

(3) ①若 $c = 3$, 则 $y_1 = -x^2 - 2x + 3 = -(x+1)^2 + 4$, $y_2 = -3x + 3$,

y_1 向左平移 n 个单位后, 则解析式为: $y_3 = -(x+1+n)^2 + 4$,

则当 $x \leq -1-n$ 时, y 随 x 增大而增大,

y_2 向下平移 n 个单位后, 则解析式为: $y_4 = -3x + 3 - n$,

要使平移后直线与 P 有公共点, 则当 $x = -1 - n$, $y_3 \geq y_4$,

即 $-(-1 - n + 1 + n)^2 + 4 \geq -3(-1 - n) + 3 - n$, 解得: $n \leq -1$,

$\because n > 0$, $\therefore n \leq -1$ 不符合条件, 应舍去;

②若 $c = -3$, 则 $y_1 = x^2 - 2x - 3 = (x - 1)^2 - 4$, $y_2 = -3x - 3$,

y_1 向左平移 n 个单位后, 则解析式为: $y_3 = (x - 1 + n)^2 - 4$,

则当 $x \geq 1 - n$ 时, y 随 x 增大而增大,

y_2 向下平移 n 个单位后, 则解析式为: $y_4 = -3x - 3 - n$,

要使平移后直线与 P 有公共点, 则当 $x = 1 - n$, $y_3 \leq y_4$,

即 $(1 - n - 1 + n)^2 - 4 \leq -3(1 - n) - 3 - n$, 解得: $n \geq 1$,

综上所述: $n \geq 1$, $2n^2 - 5n = 2\left(n - \frac{5}{4}\right)^2 - \frac{25}{8}$,

$\therefore$ 当 $n = \frac{5}{4}$ 时, $2n^2 - 5n$ 的最小值为: $-\frac{25}{8}$.

例 33 (2015 年河北省中考第 25 题) 如图 1, 已知点 $O(0, 0)$ 、 $A(-5, 0)$ 、 $B(2, 1)$, 抛物线 $l: y=-(x-h)^2+1$ (h 为常数) 与 y 轴的交点为 C 。

(1) 抛物线 l 经过点 B , 求它的解析式, 并写出此时抛物线 l 的对称轴及顶点坐标;

(2) 设点 C 的纵坐标为 y_C , 求 y_C 的最大值, 此时抛物线 l 上有两点 (x_1, y_1) 、 (x_2, y_2) , 其中 $x_1 > x_2 \geq 0$, 比较 y_1 与 y_2 的大小;

(3) 当线段 OA 被抛物线 l 只分为两部分, 且这两部分的比是 $1:4$ 时, 求 h 的值。

【解答】

(1) 把点 B 的坐标 $B(2, 1)$ 代入 $y=-(x-h)^2+1$, 得 $1=-(2-h)^2+1$.
解得 $h=2$.

则该函数解析式为 $y=-(x-2)^2+1$ (或 $y=-x^2+4x-3$).

故抛物线 l 的对称轴为 $x=2$, 顶点坐标是 $(2, 1)$;

(2) 点 C 的横坐标为 0 , 则 $y_C=-h^2+1$.

当 $h=0$ 时, y_C 有最大值 1 ,

此时, 抛物线 l 为: $y=-x^2+1$, 对称轴为 y 轴, 开口方向向下,

所以, 当 $x \geq 0$ 时, y 随 x 的增大而减小,

所以, $x_1 > x_2 \geq 0$, $y_1 < y_2$;

(3) $\because$ 线段 OA 被 l 只分为两部分, 且这两部分的比是 $1:4$, 且 $O(0, 0)$, $A(-5, 0)$,

$\therefore$ 把线段 OA 被 l 只分为两部分的点的坐标分别是 $(-1, 0)$, $(-4, 0)$.

把 $x=-1$, $y=0$ 代入 $y=-(x-h)^2+1$, 得 $0=-(-1-h)^2+1$,

解得 $h_1=0$, $h_2=-2$.

但是当 $h=-2$ 时, 线段 OA 被抛物线 l 分为三部分, 不合题意, 舍去.

同样, 把 $x=-4$, $y=0$ 代入 $y=-(x-h)^2+1$, 得

$h=-5$ 或 $h=-3$ (舍去).

综上所述, h 的值是 0 或 -5 .

例 34 (2015 年潮州市中考第 24 题) 已知在平面直角坐标系 xOy 中, O 为坐标原点, 线段 AB 的两个端点 $A(0, 2)$ 、 $B(1, 0)$ 分别在 y 轴和 x 轴的正半轴上, 点 C 为线段 AB 的中点, 现将线段 BA 绕点 B 按顺时针方向旋转 90° 得到线段 BD , 抛物线 $y=ax^2+bx+c$ ($a \neq 0$) 经过点 D 。

(1) 如图 1, 若该抛物线经过原点 O , 且 $a=-1/3$;

①求点 D 的坐标及该抛物线的解析式;

②连结 CD 。问在抛物线上是否存在点 P , 使得 $\angle POB$ 与 $\angle BCD$ 互余? 若存在,

(2) 求出所有满足条件的点 P 的坐标, 若不存在, 请说明理由;

(3) 如图 2, 若该抛物线 $y=ax^2+bx+c$ ($a \neq 0$) 经过点 $E(1, 1)$, 点 Q 在抛物线上, 且满足 $\angle QOB$ 与 $\angle BCD$ 互余, 若符合条件的 Q 点的个数是 4 个, 请直接写出 a 的取值范围。

【解答】

(1) ①过点 D 作 $DF \perp x$ 轴于点 F , 如图 1,

$$\because \angle DBF + \angle ABO = 90^\circ, \angle BAO + \angle ABO = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle DBF = \angle BAO,$$

$$\text{又} \because \angle AOB = \angle BFD = 90^\circ, AB = BD,$$

$$\text{在} \triangle AOB \text{ 和 } \triangle BFD \text{ 中, } \begin{cases} \angle DBF = \angle BAO \\ \angle AOB = \angle BFD \\ AB = BD \end{cases},$$

$$\therefore \triangle AOB \cong \triangle BFD \text{ (AAS)}$$

$$\therefore DF = BO = 1, BF = AO = 2, \therefore D \text{ 的坐标是 } (3, 1),$$

$$\text{根据题意, 得 } a = -\frac{1}{3}, c = 0, \text{ 且 } a \times 3^2 + b \times 3 + c = 1, \therefore b = \frac{4}{3},$$

∴该抛物线的解析式为 $y = -\frac{1}{3}x^2 + \frac{4}{3}x$;

②∵点 A (0, 2), B (1, 0), 点 C 为线段 AB 的中点,

∴C ($\frac{1}{2}$, 1),

∵C、D 两点的纵坐标都为 1,

∴CD//x 轴, ∴∠BCD=∠ABO, ∴∠BAO 与 ∠BCD 互余,

要使得 ∠POB 与 ∠BCD 互余, 则必须 ∠POB=∠BAO,

设 P 的坐标为 $(x, -\frac{1}{3}x^2 + \frac{4}{3}x)$,

(I) 当 P 在 x 轴的上方时, 过 P 作 PG⊥x 轴于点 G, 如图 2,

则 $\tan \angle POB = \tan \angle BAO$, 即 $\frac{PG}{OG} = \frac{BO}{AO}$,

$$\therefore \frac{-\frac{1}{3}x^2 + \frac{4}{3}x}{x} = \frac{1}{2}, \text{ 解得 } x_1=0 \text{ (舍去)}, x_2=\frac{5}{2},$$

$$\therefore -\frac{1}{3}x^2 + \frac{4}{3}x = \frac{5}{4}, \therefore P \text{ 点的坐标为 } (\frac{5}{2}, \frac{5}{4});$$

(II) 当 P 在 x 轴的下方时, 过 P 作 PG⊥x 轴于点 G, 如图 3

则 $\tan \angle POB = \tan \angle BAO$, 即 $\frac{PG}{OG} = \frac{BO}{AO}$,

$$\therefore \frac{\frac{1}{3}x^2 - \frac{4}{3}x}{x} = \frac{1}{2}, \text{ 解得 } x_1=0 \text{ (舍去)}, x_2=\frac{11}{2},$$

$$\therefore -\frac{1}{3}x^2 + \frac{4}{3}x = -\frac{11}{4}, \therefore P \text{ 点的坐标为 } (\frac{5}{2}, -\frac{11}{4});$$

综上, 在抛物线上是否存在点 P ($\frac{5}{2}, \frac{5}{4}$) 或 ($\frac{5}{2}, -\frac{11}{4}$), 使得 ∠POB 与 ∠BCD

互余.

(2) 如图 3, $\because D(3, 1), E(1, 1)$,

抛物线 $y=ax^2+bx+c$ 过点 E、D, 代入可得 $\begin{cases} a+b+c=1 \\ 9a+3b+c=1 \end{cases}$, 解得 $\begin{cases} b=-4a \\ c=1+3a \end{cases}$, 所以 $y=ax^2-4ax+3a+1$.

分两种情况:

①当抛物线 $y=ax^2+bx+c$ 开口向下时, 若满足 $\angle QOB$ 与 $\angle BCD$ 互余且符合条件的 Q 点的个数是 4 个, 则点 Q 在 x 轴的上、下方各有两个.

(i) 当点 Q 在 x 轴的下方时, 直线 OQ 与抛物线有两个交点, 满足条件的 Q 有 2 个;

(ii) 当点 Q 在 x 轴的上方时, 要使直线 OQ 与抛物线 $y=ax^2+bx+c$ 有两个交点, 抛物线 $y=ax^2+bx+c$ 与 x 轴的交点必须在 x 轴的正半轴上, 与 y 轴的交点在 y 轴的负半轴, 所以 $3a+1 < 0$, 解得 $a < -\frac{1}{3}$;

②当抛物线 $y=ax^2+bx+c$ 开口向上时, 点 Q 在 x 轴的上、下方各有两个,

(i) 当点 Q 在 x 轴的上方时, 直线 OQ 与抛物线 $y=ax^2+bx+c$ 有两个交点, 符合条件的点 Q 有两个;

(ii) 当点 Q 在 x 轴的下方时, 要使直线 OQ 与抛物线 $y=ax^2+bx+c$ 有两个交点, 符合条件的点 Q 才两个.

根据 (2) 可知, 要使得 $\angle QOB$ 与 $\angle BCD$ 互余, 则必须 $\angle POB = \angle BAO$,

$\therefore \tan \angle QOB = \tan \angle BAO = \frac{OB}{OA} = \frac{1}{2}$, 此时直线 OQ 的斜率为 $-\frac{1}{2}$, 则直线 OQ 的解析式为 $y = -\frac{1}{2}x$, 要使直线 OQ 与抛物线 $y=ax^2+bx+c$ 有两个交点, 所以方程 $ax^2 -$

$4ax+3a+1 = -\frac{1}{2}x$ 有两个不相等的实数根, 所以 $\Delta = (-4a+\frac{1}{2})^2 - 4a(3a+1) > 0$,

即 $4a^2 - 8a + \frac{1}{4} > 0$, 解得 $a > \frac{4+\sqrt{15}}{4}$ ($a < \frac{4-\sqrt{15}}{4}$ 舍去)

综上所述, a 的取值范围为 $a < -\frac{1}{3}$ 或 $a > \frac{4+\sqrt{15}}{4}$.

例 35(2015 年江西省中考第 23 题)如图 1, 已知二次函数 $L_1: y = ax^2 - 2ax + a + 3$

($a > 0$) 和二次函数 $L_2: y = -a(x+1)^2 + 1$ ($a > 0$) 图像的顶点分别为 M、N, 与 y 轴分别交于点 E、F。

(1) 函数 $y = ax^2 - 2ax + a + 3$ ($a > 0$) 的最小值为____; 当二次函数 L_1 、 L_2 的 y 值同时随着 x 的增大而减少时, x 的取值范围是____;

(2) 当 $EF = MN$ 时, 求 a 的值, 并判断四边形 ENFM 的形状 (直接写出, 不必证明);

(3) 若二次函数 L_2 的图像与 x 轴的右交点为 A ($m, 0$), 当 $\triangle AMN$ 为等腰三角形时, 求方程 $-a(x+1)^2 + 1 = 0$ 的解。

【解答】

(1) $\because$ 二次函数 $L_1: y = ax^2 - 2ax + a + 3 = a(x-1)^2 + 3$,

$\therefore$ 顶点 M 坐标为 (1, 3),

$\because a > 0$, $\therefore$ 函数 $y = ax^2 - 2ax + a + 3$ ($a > 0$) 的最小值为 3,

$\because$ 二次函数 L_1 的对称轴为 $x = 1$, 当 $x < 1$ 时, y 随 x 的增大而减小;

二次函数 $L_2: y = -a(x+1)^2 + 1$ 的对称轴为 $x = -1$, 当 $x > -1$ 时, y 随 x 的增大而减小;

$\therefore$ 当二次函数 L_1 、 L_2 的 y 值同时随着 x 的增大而减小时, x 的取值范围是 $-1 < x < 1$;

故答案为: 3, $-1 < x < 1$.

(2) 由二次函数 $L_1: y = ax^2 - 2ax + a + 3$ 可知 E (0, $a+3$),

由二次函数 $L_2: y = -a(x+1)^2 + 1 = -ax^2 - 2ax - a + 1$ 可知 F (0, $-a+1$),

$$\because M(1, 3), N(-1, 1), \therefore EF=MN=\sqrt{2^2+2^2}=2\sqrt{2},$$

$$\therefore a+3 - (-a+1) = 2\sqrt{2}, \therefore a=\sqrt{2}-1,$$

作 $MG \perp y$ 轴于 G , 则 $MG=1$, 作 $NH \perp y$ 轴于 H , 则 $NH=1$,

$$\therefore MG=NH=1,$$

$$\because EG=a+3-3=a, FH=1-(-a+1)=a, \therefore EG=FH,$$

$$\text{在 } \triangle EMG \text{ 和 } \triangle FNH \text{ 中, } \begin{cases} EG=FH \\ \angle EGM = \angle FHN \\ MG=NH \end{cases},$$

$$\therefore \triangle EMG \cong \triangle FNH \text{ (SAS)}, \therefore \angle MEF = \angle NFE, EM=NF,$$

$$\therefore EM \parallel NF, \therefore \text{四边形 ENFM 是平行四边形};$$

$$\because EF=MN, \therefore \text{四边形 ENFM 是矩形};$$

(3) 作 MN 的垂直平分线, 交 MN 于 D , 交 x 轴于 A ,

$$\because M(1, 3), N(-1, 1), \therefore D(0, 2),$$

$$\text{设直线 MN 的解析式为 } y=kx+b, \text{ 则 } \begin{cases} k+b=3 \\ -k+b=1 \end{cases}, \text{ 解得 } k=1,$$

$$\therefore MN \text{ 的垂直平分线 AD 为 } y=-x+2,$$

$$\text{令 } y=0, \text{ 则 } x=2, \therefore A(2, 0),$$

$$\because \text{抛物线 L2 的对称轴 } x=-1,$$

$$\therefore \text{另一个交点为 } (-4, 0),$$

$$\therefore \text{方程 } -a(x+1)^2+1=0 \text{ 的解为 } -4 \text{ 和 } 2.$$

例 36 (2015 年兰州市中考第 28 题) 已知二次函数 $y=ax^2$ 的图像经过点 (2, 1)。

(1) 求二次函数 $y=ax^2$ 的解析式；

(2) 一次函数 $y=mx+4$ 的图像与二次函数 $y=ax^2$ 的图像交于点 A (x_1, y_1)、B (x_2, y_2) 两点。

①当 $m=3/2$ 时 (如图 1)，求证： $\triangle AOB$ 为直角三角形；

②试判断当 $m \neq 3/2$ 时 (如图 2) $\triangle AOB$ 的形状，并证明；

(3) 根据第 (2) 问，说出一条你能得到的结论 (不要证明)。

【解答】

(1) 解： $\because y=ax^2$ 过点 (2, 1)，

$\therefore 1=4a$ ，解得 $a=\frac{1}{4}$ ， $\therefore$ 抛物线解析式为 $y=\frac{1}{4}x^2$ ；

(2) ①证明：

当 $m=\frac{3}{2}$ 时，联立直线和抛物线解析式可得 $\begin{cases} y=\frac{3}{2}x+4 \\ y=\frac{1}{4}x^2 \end{cases}$ ，解得 $\begin{cases} x=-2 \\ y=1 \end{cases}$ 或 $\begin{cases} x=8 \\ y=16 \end{cases}$ ，

$\therefore A(-2, 1)$ ， $B(8, 16)$ ，

分别过 A、B 作 $AC \perp x$ 轴， $BD \perp x$ 轴，垂足分别为 C、D，如图 1，

$\therefore AC=1$ ， $OC=2$ ， $OD=8$ ， $BD=16$ ，

$\therefore \frac{AC}{OC} = \frac{OD}{BD} = \frac{1}{2}$ ，且 $\angle ACO = \angle ODB$ ，

$\therefore \triangle ACO \sim \triangle ODB$ ， $\therefore \angle AOC = \angle OBD$ ，

又 $\because \angle OBD + \angle BOD = 90^\circ$ ，

$\therefore \angle AOC + \angle BOD = 90^\circ$ ，即 $\angle AOB = 90^\circ$ ， $\therefore \triangle AOB$ 为直角三角形；

②解： $\triangle AOB$ 为直角三角形。

证明如下：

当 $m \neq \frac{3}{2}$ 时，联立直线和抛物线解析式可得 $\begin{cases} y=mx+4 \\ y=\frac{1}{4}x^2 \end{cases}$ ，解得 $\begin{cases} x=2m-2\sqrt{m^2+4} \\ y=(m-\sqrt{m^2+4})^2 \end{cases}$ 或

$\begin{cases} x=2m+2\sqrt{m^2+4} \\ y=(m+\sqrt{m^2+4})^2 \end{cases}$ ，

$\therefore A(2m-2\sqrt{m^2+4}, (m-\sqrt{m^2+4})^2)$ ， $B(2m+2\sqrt{m^2+4}, (m+\sqrt{m^2+4})^2)$ ，

分别过 A、B 作 $AC \perp x$ 轴, $BD \perp x$ 轴, 如图 2,

$$\therefore AC = (m - \sqrt{m^2 + 4})^2, OC = -(2m - 2\sqrt{m^2 + 4}), BD = (m + \sqrt{m^2 + 4})^2, OD = 2m + 2\sqrt{m^2 + 4},$$

$$\therefore \frac{AC}{OC} = \frac{OD}{BD} = \frac{m - \sqrt{m^2 + 4}}{2}, \text{ 且 } \angle ACO = \angle ODB,$$

$$\therefore \triangle ACO \sim \triangle OBD, \therefore \angle AOC = \angle OBD,$$

$$\text{又 } \because \angle OBD + \angle BOD = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle AOC + \angle BOD = 90^\circ, \text{ 即 } \angle AOB = 90^\circ,$$

$\therefore \triangle AOB$ 为直角三角形;

(3) 解: 由 (2) 可知, 一次函数 $y = mx + 4$ 的图象与二次函数 $y = ax^2$ 的交点为 A、B, 则 $\triangle AOB$ 恒为直角三角形. (答案不唯一).

例 37 (2015 年泰州市中考第 26 题) 如图 1, 已知一次函数 $y=2x-4$ 的图像与 x 轴、 y 轴分别交于点 A 、 B , 点 P 在该函数图像上, P 到 x 轴、 y 轴的距离分别为 d_1 、 d_2 。

- (1) 当点 P 为线段 AB 的中点时, 求 d_1+d_2 的值;
- (2) 直接写出 d_1+d_2 的范围, 并求当 $d_1+d_2=3$ 时点 P 的坐标;
- (3) 若在线段 AB 上存在无数个点 P , 使得 $d_1+a \cdot d_2=4$ (a 为常数), 求 a 的值。

【解答】

(1) 对于一次函数 $y=2x-4$,

令 $x=0$, 得到 $y=-4$; 令 $y=0$, 得到 $x=2$,

$\therefore A(2, 0)$, $B(0, -4)$,

$\because P$ 为 AB 的中点, $\therefore P(1, -2)$, 则 $d_1+d_2=3$;

(2) ① $d_1+d_2 \geq 2$;

② 设 $P(m, 2m-4)$, $\therefore d_1+d_2=|m|+|2m-4|$,

当 $0 \leq m \leq 2$ 时, $d_1+d_2=m+4-2m=4-m=3$,

解得: $m=1$, 此时 $P_1(1, -2)$;

当 $m > 2$ 时, $d_1+d_2=m+2m-4=3$,

解得: $m=\frac{7}{3}$, 此时 $P_2(\frac{7}{3}, \frac{2}{3})$;

当 $m < 0$ 时, 不存在,

综上, P 的坐标为 $(1, -2)$ 或 $(\frac{7}{3}, \frac{2}{3})$;

(3) 设 $P(m, 2m-4)$, $\therefore d_1=|2m-4|$, $d_2=|m|$,

$\because P$ 在线段 AB 上, $\therefore 0 \leq m \leq 2$, $\therefore d_1 = 4 - 2m$, $d_2 = m$,

$\because d_1 + ad_2 = 4$, $\therefore 4 - 2m + am = 4$, 即 $(a - 2)m = 0$,

$\because$ 有无数个点, $\therefore a = 2$.

例 38 (2015 年天津市中考第 25 题) 已知二次函数 $y=x^2+bx+c$ (b 、 c 为常数)。

(1) 当 $b=2$, $c=-3$ 时, 求二次函数的最小值;

(2) 当 $c=5$ 时, 若在函数值 $y=1$ 的情况下, 只有一个自变量 x 的值与其对应, 求此时二次函数的解析式;

(3) 当 $c=b^2$ 时, 若自变量 x 的值满足 $b \leq x \leq b+3$ 的情况下, 与其对应的函数值 y 的最小值为 21, 求此时二次函数的解析式。

【解答】

(I) 当 $b=2$, $c=-3$ 时, 二次函数的解析式为 $y=x^2+2x-3=(x+1)^2-4$,

$\therefore$ 当 $x=-1$ 时, 二次函数取得最小值 -4 ;

(II) 当 $c=5$ 时, 二次函数的解析式为 $y=x^2+bx+5$,

由题意得, $x^2+bx+5=1$ 有两个相等实数根,

$\therefore \Delta=b^2-16=0$, 解得, $b_1=4$, $b_2=-4$,

$\therefore$ 二次函数的解析式 $y=x^2+4x+5$, $y=x^2-4x+5$;

(III) 当 $c=b^2$ 时, 二次函数解析式为 $y=x^2+bx+b^2$,

图象开口向上, 对称轴为直线 $x=-\frac{b}{2}$,

①当 $-\frac{b}{2} < b$, 即 $b > 0$ 时,

在自变量 x 的值满足 $b \leq x \leq b+3$ 的情况下, y 随 x 的增大而增大,

$\therefore$ 当 $x=b$ 时, $y=b^2+b \cdot b+b^2=3b^2$ 为最小值,

$\therefore 3b^2=21$, 解得, $b_1=-\sqrt{7}$ (舍去), $b_2=\sqrt{7}$;

②当 $b \leq -\frac{b}{2} \leq b+3$ 时, 即 $-2 \leq b \leq 0$,

$$\therefore x = -\frac{b}{2}, y = \frac{3}{4}b^2 \text{ 为最小值,}$$

$$\therefore \frac{3}{4}b^2 = 21, \text{ 解得, } b_1 = -2\sqrt{7} \text{ (舍去), } b_2 = 2\sqrt{7} \text{ (舍去);}$$

$$\textcircled{3} \text{ 当 } -\frac{b}{2} > b+3, \text{ 即 } b < -2,$$

在自变量 x 的值满足 $b \leq x \leq b+3$ 的情况下, y 随 x 的增大而减小,

故当 $x = b+3$ 时, $y = (b+3)^2 + b(b+3) + b^2 = 3b^2 + 9b + 9$ 为最小值,

$$\therefore 3b^2 + 9b + 9 = 21. \text{ 解得, } b_1 = 1 \text{ (舍去), } b_2 = -4;$$

$$\therefore b = \sqrt{7} \text{ 时, 解析式为: } y = x^2 + \sqrt{7}x + 7$$

$$b = -4 \text{ 时, 解析式为: } y = x^2 - 4x + 16.$$

综上所述, 此时二次函数的解析式为 $y = x^2 + \sqrt{7}x + 7$ 或 $y = x^2 - 4x + 16$.

例 39 (2016 年北京市中考第 29 题) 在平面直角坐标系 xOy 中, 点 P 的坐标为 (x_1, y_2) , 点 Q 的坐标为 (x_2, y_2) , 且 $x_1 \neq x_2$, $y_1 \neq y_2$, 若 P 、 Q 为某个矩形的两个顶点, 且该矩形的边均与某条坐标轴垂直, 则称该矩形为点 P 、 Q 的“相关矩形”. 下图为点 P 、 Q 的“相关矩形”的示意图.

(1) 已知点 A 的坐标为 $(1, 0)$,

①若点 B 的坐标为 $(3, 1)$, 求点 A 、 B 的“相关矩形”的面积;

②点 C 在直线 $x=3$ 上, 若点 A 、 C 的“相关矩形”为正方形, 求直线 AC 的表达式;

(2) $\odot O$ 的半径为 $2^{1/2}$, 点 M 的坐标为 $(m, 3)$, 若在 $\odot O$ 上存在一点 N , 使得点 M 、 N 的“相关矩形”为正方形, 求 m 的取值范围.

【解答】

(1) ① $\because A(1, 0)$, $B(3, 1)$,

由定义可知: 点 A 、 B 的“相关矩形”的底与高分别为 2 和 1,

$\therefore$ 点 A 、 B 的“相关矩形”的面积为 $2 \times 1 = 2$;

②由定义可知: AC 是点 A 、 C 的“相关矩形”的对角线,

又 $\because$ 点 A 、 C 的“相关矩形”为正方形, $\therefore$ 直线 AC 与 x 轴的夹角为 45° ,

设直线 AC 的解析为: $y=x+m$ 或 $y=-x+n$, 把 $(1, 0)$ 分别代入 $y=x+m$,

$\therefore m=-1$, $\therefore$ 直线 AC 的解析为: $y=x-1$,

把 $(1, 0)$ 代入 $y=-x+n$, $\therefore n=1$, $\therefore y=-x+1$,

综上所述, 若点 A 、 C 的“相关矩形”为正方形, 直线 AC 的表达式为 $y=x-1$ 或 $y=-x+1$;

(2) 设直线 MN 的解析式为 $y=kx+b$, $\because$ 点 M 、 N 的“相关矩形”为正方形,

∴由定义可知：直线 MN 与 x 轴的夹角为 45° ，∴ $k=\pm 1$ ，

∵点 N 在 $\odot O$ 上，当直线 MN 与 $\odot O$ 有交点时，点 M, N 的“相关矩形”为正方形，

当 $k=1$ 时，作 $\odot O$ 的切线 AD 和 BC，且与直线 MN 平行，

其中 A、C 为 $\odot O$ 的切点，直线 AD 与 y 轴交于点 D，直线 BC 与 y 轴交于点 B，

连接 OA, OC，把 M (m, 3) 代入 $y=x+b$ ，∴ $b=3-m$ ，

∴直线 MN 的解析式为： $y=x+3-m$

∵ $\angle ADO=45^\circ$ ， $\angle OAD=90^\circ$ ，∴ $OD=2^{1/2} \cdot OA=2$ ，∴D (0, 2)

同理可得：B (0, -2)，

∴令 $x=0$ 代入 $y=x+3-m$ ，∴ $y=3-m$ ，∴ $-2 \leq 3-m \leq 2$ ，∴ $1 \leq m \leq 5$ ，

当 $k=-1$ 时，把 M (m, 3) 代入 $y=-x+b$ ，

∴ $b=3+m$ ，∴直线 MN 的解析式为： $y=-x+3+m$ ，

同理可得： $-2 \leq 3+m \leq 2$ ，∴ $-5 \leq m \leq -1$ ；

综上所述，当点 M, N 的“相关矩形”为正方形时，m 的取值范围是： $1 \leq m \leq 5$ 或 $-5 \leq m \leq -1$ 。

例 40 (2016 年大连市中考第 26 题) 如图，在平面直角坐标系 xOy 中，抛物线 $y=x^2+1/4$ 与 y 轴相交于点 A ，点 B 与点 O 关于点 A 对称.

(1) 填空：点 B 的坐标是_____；

(2) 过点 B 的直线 $y=kx+b$ (其中 $k<0$) 与 x 轴相交于点 C ，过点 C 作直线 l 平行于 y 轴， P 是直线 l 上一点，且 $PB=PC$ ，求线段 PB 的长 (用含 k 的式子表示)，并判断点 P 是否在抛物线上，说明理由；

(3) 在 (2) 的条件下，若点 C 关于直线 BP 的对称点 C' 恰好落在该抛物线的对称轴上，求此时点 P 的坐标.

【解答】

(1) $\because$ 抛物线 $y=x^2+1/4$ 与 y 轴相交于点 A ， $\therefore A(0, 1/4)$ ，

$\because$ 点 B 与点 O 关于点 A 对称， $\therefore BA=OA=1/4$ ， $\therefore OB=1/2$ ，即 B 点坐标为 $(0, 1/2)$ ；

(2) $\because B$ 点坐标为 $(0, 1/2)$ ， $\therefore$ 直线解析式为 $y=kx+1/2$ ，

令 $y=0$ 可得 $kx+1/2=0$ ，解得 $x=-1/(2k)$ ， $\therefore OC=-1/(2k)$ ，

$\because PB=PC$ ， $\therefore$ 点 P 只能在 x 轴上方， 如图 1，

过 B 作 $BD \perp l$ 于点 D ，设 $PB=PC=m$ ， 则 $BD=OC=-1/(2k)$ ， $CD=OB=1/2$ ，

$\therefore PD=PC-CD=m-1/2$ ，在 $Rt\triangle PBD$ 中，

由勾股定理可得 $PB^2=PD^2+BD^2$ ，即 $m^2=(m-1/2)^2+(-1/(2k))^2$ ，

解得 $m=1/4+1/(4k^2)$ ， $\therefore PB=1/4+1/(4k^2)$ ， $\therefore P$ 点坐标为 $(-1/(2k), 1/4+1/(4k^2))$ ，

当 $x=-1/(2k)$ 时，代入抛物线解析式可得 $y=1/4+1/(4k^2)$ ，

∴点 P 在抛物线上；

(3) 如图 2，连接 CC' ，∵ $l \parallel y$ 轴，∴ $\angle OBC = \angle PCB$ ，又 $PB = PC$ ，

∴ $\angle PCB = \angle PBC$ ，∴ $\angle PBC = \angle OBC$ ，

又 C、 C' 关于 BP 对称，且 C' 在抛物线的对称轴上，即在 y 轴上，

∴ $\angle PBC = \angle PBC'$ ，∴ $\angle OBC = \angle CBP = \angle C'BP = 60^\circ$ ，

在 $Rt\triangle OBC$ 中， $OB = 1/2$ ，则 $BC = 1$ ∴ $OC = 3^{1/2}/2$ ，即 P 点的横坐标为 $3^{1/2}/2$ ，

代入抛物线解析式可得 $y = (3^{1/2}/2)^2 + 1/4 = 1$ ，

∴P 点坐标为 $(3^{1/2}/2, 1)$ 。

例 41 (2016 年福州市中考第 27 题) 已知抛物线 $y = a \cdot x^2 + b \cdot x + c$ ($a \neq 0$) 经过原点, 顶点为 $A(h, k)$ ($h \neq 0$).

- (1) 当 $h=1, k=2$ 时, 求抛物线的解析式;
- (2) 若抛物线 $y = t \cdot x^2$ ($t \neq 0$) 也经过 A 点, 求 a 与 t 之间的关系式;
- (3) 当点 A 在抛物线 $y = x^2 - x$ 上, 且 $-2 \leq h < 1$ 时, 求 a 的取值范围.

【解答】

(1) $\because$ 顶点为 $A(1, 2)$, 设抛物线为 $y = a \cdot (x - 1)^2 + 2$,

$\because$ 抛物线经过原点, $\therefore 0 = a \cdot (0 - 1)^2 + 2$, $\therefore a = -2$, $\therefore$ 抛物线解析式为 $y = -2 \cdot x^2 + 4 \cdot x$.

(2) $\because$ 抛物线经过原点, $\therefore$ 设抛物线为 $y = a \cdot x^2 + b \cdot x$,

$\because h = -b/(2 \cdot a)$, $\therefore b = -2 \cdot a \cdot h$, $\therefore y = a \cdot x^2 - 2 \cdot a \cdot h \cdot x$,

$\because$ 顶点 $A(h, k)$, $\therefore k = a \cdot h^2 - 2 \cdot a \cdot h^2 = -a \cdot h^2$, 抛物线 $y = t \cdot x^2$ 也经过 $A(h, k)$, $\therefore k = t \cdot h^2$, $\therefore t \cdot h^2 = a \cdot h^2 - 2 \cdot a \cdot h^2$, $\therefore t = -a$;

(3) $\because$ 点 A 在抛物线 $y = x^2 - x$ 上, $\therefore k = h^2 - h$, 又 $k = a \cdot h^2 - 2 \cdot a \cdot h^2$,

$\therefore h = 1/(1+a)$, $\because -2 \leq h < 1$, $\therefore -2 \leq 1/(1+a) < 1$,

①当 $1+a > 0$ 时, 即 $a > -1$ 时, $\begin{cases} 1/(1+a) < 1 \\ 1/(1+a) \geq -2 \end{cases}$, 解得 $a > 0$,

②当 $1+a < 0$ 时, 即 $a < -1$ 时, $\begin{cases} 1/(1+a) < 1 \\ 1/(1+a) \geq -2 \end{cases}$, 解得 $a \leq -3/2$,

综上所述, a 的取值范围 $a > 0$ 或 $a \leq -3/2$.

例 42 (2016 年河北省中考第 26 题) 如图 12, 抛物线 L:

$y = -\frac{1}{2}(x-t)(x-t+4)$ (常数 $t > 0$) 与 x 轴从左到右的交点为 B、A, 过线段 OA 的

中点 M 作 $MP \perp x$ 轴, 交双曲线 $y = k/x$ ($k > 0, x > 0$) 于点 P, 且 $OA \cdot MP = 12$.

(1) 求 k 的值;

(2) 当 $t=1$ 时, 求 AB 长, 并求直线 MP 与 L 对称轴之间的距离;

(3) 把 L 在直线 MP 左侧部分的图象 (含与直线 MP 的交点) 记为 G, 用 t 表示图象 G 最高点的坐标;

(4) 设 L 与双曲线有个交点的横坐标为 x_0 , 且满足 $4 \leq x_0 \leq 6$, 通过 L 位置随 t 变化的过程, 直接写出 t 的取值范围.

【解答】

(1) 设点 $P(x, y)$, 则 $MP=y$, 由 OA 的中点为 M 可知 $OA=2x$, 代入 $OA \cdot MP=12$, 得到 $2 \cdot x \cdot y=12$, 即 $x \cdot y=6$. $\therefore k=x \cdot y=6$.

(2) 当 $t=1$ 时, 令 $y=0$, $0 = -\frac{1}{2}(x-1)(x+3)$, 解得 $x=1$ 或 -3 ,

$\therefore$ 点 B 在点 A 左边, $\therefore B(-3, 0)$, $A(1, 0)$. $\therefore AB=4$,

$\therefore$ L 是对称轴 $x=-1$, 且 M 为 $(\frac{1}{2}, 0)$, $\therefore$ MP 与 L 对称轴的距离为 $\frac{3}{2}$.

(3) $\therefore A(t, 0)$, $B(t-4, 0)$, $\therefore$ L 的对称轴为 $x=t-2$,

又 $\therefore$ MP 为 $x=t/2$, 当 $t-2 \leq t/2$, 即 $t \leq 4$ 时, 顶点 $(t-2, 2)$ 就是 G 的最高点.

当 $t > 4$ 时, L 与 MP 的解得 $(t/2, -\frac{1}{8}t^2+t)$ 就是 G 的最高点.

(4) 结论: $5 \leq t \leq 8-2^{1/2}$ 或 $7 \leq t \leq 8+2^{1/2}$.

理由: 对双曲线, 当 $4 \leq x_0 \leq 6$ 时, $1 \leq y_0 \leq 3/2$, 即 L 与双曲线在 C $(4, 3/2)$, D $(6,$

1) 之间的一段有个交点.

①由 $3/2 = -\frac{1}{2}(4-t)(4-t+4)$ 解得 $t=5$ 或 7 .

②由 $1 = -\frac{1}{2} * (6-t) * (6-t+4)$ 解得 $t = 8 + 2^{\frac{1}{2}}$ 和 $8 - 2^{\frac{1}{2}}$.

随 t 的逐渐增加, L 的位置随着 $A(t, 0)$ 向右平移, 如图所示,

当 $t=5$ 时, L 右侧过点 C .

当 $t = 8 - 2^{\frac{1}{2}} < 7$ 时, L 右侧过点 D , 即 $5 \leq t \leq 8 - 2^{\frac{1}{2}}$.

当 $8 - 2^{\frac{1}{2}} < t < 7$ 时, L 右侧离开了点 D , 而左侧未到达点 C , 即 L 与该段无交点, 舍弃.

当 $t=7$ 时, L 左侧过点 C . 当 $t = 8 + 2^{\frac{1}{2}}$ 时, L 左侧过点 D , 即 $7 \leq t \leq 8 + 2^{\frac{1}{2}}$.

例 43 (2016 年江西省中考第 23 题) 设抛物线的解析式为 $y=ax^2$ ，过点 $B_1(1, 0)$ 作 x 轴的垂线，交抛物线于点 $A_1(1, 2)$ ；过点 $B_2(1, 0)$ 作 x 轴的垂线，交抛物线于点 A_2 ；...；过点 $B_n((\frac{1}{2})^{n-1}, 0)$ (n 为正整数) 作 x 轴的垂线，交抛物线于点 A_n ，连接 A_nB_n ， B_nB_{n+1} ，得直角三角形 $A_nB_nB_{n+1}$ 。

(1) 求 a 的值；

(2) 直接写出线段 A_nB_n ， B_nB_{n+1} 的长 (用含 n 的式子表示)；

(3) 在系列 $Rt\triangle A_nB_nB_{n+1}$ 中，探究下列问题：

①当 n 为何值时， $Rt\triangle A_nB_nB_{n+1}$ 是等腰直角三角形？

②设 $1 \leq k < m \leq n$ (k, m 均为正整数)，问是否存在 $Rt\triangle A_kB_kB_{k+1}$ 与 $Rt\triangle A_mB_mB_{m+1}$ 相似？若存在，求出其相似比；若不存在，说明理由。

【解答】

(1) $\because$ 点 $A_1(1, 2)$ 在抛物线的解析式为 $y=ax^2$ 上， $\therefore a=2$ ；

(2) $A_nB_n=2x^2=2 \times [(\frac{1}{2})^{n-1}]^2=(\frac{1}{2})^{2n-3}$ ， $B_nB_{n+1}=(\frac{1}{2})^n$ ；

(3) 由 $Rt\triangle A_nB_nB_{n+1}$ 是等腰直角三角形得 $A_nB_n=B_nB_{n+1}$ ，则： $(\frac{1}{2})^{2n-3}=(\frac{1}{2})^n$ ， $2n-3=n$ ， $n=3$ ， $\therefore$ 当 $n=3$ 时， $Rt\triangle A_nB_nB_{n+1}$ 是等腰直角三角形，

②依题意得， $\angle A_kB_kB_{k+1}=\angle A_mB_mB_{m+1}=90^\circ$ ，

有两种情况：i) 当 $Rt\triangle A_kB_kB_{k+1} \sim Rt\triangle A_mB_mB_{m+1}$ 时，

$$A_kB_k/(A_mB_m)=B_kB_{k+1}/(B_mB_{m+1}),$$

$$(\frac{1}{2})^{2k-3}/(\frac{1}{2})^{2m-3}=(\frac{1}{2})^k/(\frac{1}{2})^m,$$

$$(\frac{1}{2})^{2k-2m}=(\frac{1}{2})^{k-m}, \text{ 所以, } k=m \text{ (舍去),}$$

ii) 当 $Rt\triangle A_kB_kB_{k+1} \sim Rt\triangle B_{m+1}B_mA_m$ 时， $A_kB_k/(B_mB_{m+1})=B_kB_{k+1}/(B_mA_m)$ ，

$$(1/2)^{(2*k-3)}/(1/2)^m=(1/2)^k/(1/2)^{(2*m-3)},$$

$$(1/2)^{(2*k-3-m)}=(1/2)^{(k-2*m+3)}, \therefore k+m=6,$$

$\because 1 \leq k < m \leq n$ (k, m 均为正整数),

$$\therefore \text{取} \begin{cases} k=1 \\ m=5 \end{cases} \text{ 或 } \begin{cases} k=2 \\ m=4 \end{cases};$$

当 $\begin{cases} k=1 \\ m=5 \end{cases}$ 时, $\text{Rt}\triangle A_1B_1B_2 \sim \text{Rt}\triangle B_6B_5A_5$,

相似比为: $A_1*B_1/(B_6*B_5)=2/(1/2)^5=64$,

当 $\begin{cases} k=2 \\ m=4 \end{cases}$ 时, $\text{Rt}\triangle A_2B_2B_3 \sim \text{Rt}\triangle B_5B_4A_4$,

相似比为: $A_2*B_2/(B_5*B_4)=1/2/(1/2)^4=8$,

所以: 存在 $\text{Rt}\triangle A_kB_kB_{k+1}$ 与 $\text{Rt}\triangle A_mB_mB_{m+1}$ 相似, 其相似比为 64: 1 或 8: 1.

例 44 (2016 年金华市中考第 24 题) 在平面直角坐标系中，点 O 为原点，点 A 的坐标为 $(-6, 0)$ 。如图 1，正方形 OBCD 的顶点 B 在 x 轴的负半轴上，点 C 在第二象限。现将正方形 OBCD 绕点 O 顺时针旋转角 α 得到正方形 OEFG。

- (1) 如图 2，若 $\alpha=60^\circ$ ， $OE=OA$ ，求直线 EF 的函数表达式。
- (2) 若 α 为锐角， $\tan\alpha=1/2$ ，当 AE 取得最小值时，求正方形 OEFG 的面积。
- (3) 当正方形 OEFG 的顶点 F 落在 y 轴上时，直线 AE 与直线 FG 相交于点 P， $\triangle OEP$ 的其中两边之比能否为 $2^{1/2} : 1$ ？若能，求点 P 的坐标；若不能，试说明理由。

【解答】

(1) 如图 1，过点 E 作 $EH \perp OA$ 于点 H，EF 与 y 轴的交点为 M。

$\because OE=OA, \alpha=60^\circ, \therefore \triangle AEO$ 为正三角形， $\therefore OH=3, EH=(6^2-3^2)^{1/2}=3 \cdot 3^{1/2}$ 。

$\therefore E(-3, 3 \cdot 3^{1/2})$ 。 $\because \angle AOM=90^\circ, \therefore \angle EOM=30^\circ$ 。

在 $Rt\triangle EOM$ 中， $\because \cos \angle EOM=OE/OM$ ，

即 $3^{1/2}/2=6/OM, \therefore OM=4 \cdot 3^{1/2}$ 。 $\therefore M(0, 4 \cdot 3^{1/2})$ 。

设直线 EF 的函数表达式为 $y=kx+4 \cdot 3^{1/2}$ ，

$\because$ 该直线过点 E $(-3, 3 \cdot 3^{1/2})$ ，

$\therefore -3k+4=3 \cdot 3^{1/2}$ ，

解得 $k=3^{1/2}/3$ ，

所以，直线 EF 的函数表达式为 $y=3^{1/2}/3x+4 \cdot 3^{1/2}$ 。

(2) 如图 2，

射线 OQ 与 OA 的夹角为 α (α 为锐角， $\tan\alpha=1/2$)。

无论正方形边长为多少，绕点 O 旋转角 α 后得到正方

形 OEFG 的顶点 E 在射线 OQ 上，

$\therefore$ 当 $AE \perp OQ$ 时，线段 AE 的长最小．

在 $Rt\triangle AOE$ 中，设 $AE=a$ ，则 $OE=2a$ ，

$\therefore a^2 + (2a)^2 = 6^2$ ，解得 $a_1 = 6 \cdot 5^{1/2}/5$ ， $a_2 = -6 \cdot 5^{1/2}/5$ （舍去），

$\therefore OE = 2a = 12 \cdot 5^{1/2}/5$ ， $\therefore S_{\text{正方形 OEFG}} = OE^2 = 144/5$ ．

(3) ①设正方形边长为 m ．当点 F 落在 y 轴正半轴时．如图 3，

当 P 与 F 重合时， $\triangle PEO$ 是等腰直角三角形，有 $OP/PE = 2^{1/2}$ 或 $OP/OE = 2^{1/2}$ ．

在 $Rt\triangle AOP$ 中， $\angle APO = 45^\circ$ ， $OP = OA = 6$ ， $\therefore$ 点 P_1 的坐标为 $(0, 6)$ ．

②在图 3 的基础上，当减小正方形边长时，

点 P 在边 FG 上， $\triangle OEP$ 的其中两边之比不可能为 $2^{1/2} : 1$ ；

当增加正方形边长时，存在 $PE/OE = 2^{1/2}$ （图 4）和 $OP/PE = 2^{1/2}$ （图 5）两种情况．

如图 4， $\triangle EFP$ 是等腰直角三角形，

有 $PE/EF = 2^{1/2}$ ，即 $PE/OE = 2^{1/2}$ ，此时有 $AP \parallel OF$ ．

在 $Rt\triangle AOE$ 中， $\angle AOE = 45^\circ$ ，

$\therefore OE = 2^{1/2} \cdot OA = 6 \cdot 2^{1/2}$ ，

$\therefore PE = 2^{1/2} \cdot OE = 12$ ， $PA = PE + AE = 18$ ， $\therefore$ 点 P_2 的坐标为 $(-6, 18)$ ．

③如图 5，

过 P 作 $PR \perp x$ 轴于点 R，延长 PG 交 x 轴于点 H．设 $PF = n$ ．

在 $Rt\triangle POG$ 中， $PO^2 = PG^2 + OG^2 = m^2 + (m+n)^2 = 2m^2 + 2mn + n^2$ ，

在 $Rt\triangle PEF$ 中， $PE^2 = PF^2 + EF^2 = m^2 + n^2$ ，当 $PO/PE = 2^{1/2}$ 时，

$\therefore PO^2 = 2PE^2$. $\therefore 2m^2 + 2mn + n^2 = 2(m^2 + n^2)$, 得 $n = 2m$.

$\because EO \parallel PH$, $\therefore \triangle AOE \sim \triangle AHP$,

$\therefore OA/AH = OE/PH = 1/4$, $\therefore AH = 4OA = 24$, 即 $OH = 18$,

$\therefore m = 9 \cdot 2^{1/2}$.

在等腰 $Rt\triangle PRH$ 中, $PR = HR = 2^{1/2}/2 \cdot PH = 36$,

$\therefore OR = RH - OH = 18$,

$\therefore$ 点 P_3 的坐标为 $(-18, 36)$.

④当点 F 落在 y 轴负半轴时,

如图 6,

P 与 A 重合时, 在 $Rt\triangle POG$ 中, $OP = 2^{1/2} \cdot OG$,

又 $\because$ 正方形 $OGFE$ 中, $OG = OE$,

$\therefore OP = 2^{1/2} \cdot OE$. $\therefore$ 点 P_4 的坐标为 $(-6, 0)$.

⑤在图 6 的基础上, 当正方形边长减小时, $\triangle OEP$ 的其中两边之比不可能为 $2^{1/2}: 1$;

当正方形边长增加时, 存在 $PE/PO = 2^{1/2}$ (图 7) 这一种情况.

如图 7, 过 P 作 $PR \perp x$ 轴于点 R ,

设 $PG = n$.

在 $Rt\triangle OPG$ 中, $PO^2 = PG^2 + OG^2 = n^2 + m^2$,

在 $Rt\triangle PEF$ 中, $PE^2 = PF^2 + FE^2 = (m+n)^2 + m^2 = 2m^2 + 2mn + n^2$.

当 $PE/PO = 2^{1/2}$ 时,

$\therefore PE^2 = 2PO^2$. $\therefore 2m^2 + 2mn + n^2 = 2n^2 + 2m^2$, $\therefore n = 2m$,

由于 $NG = OG = m$, 则 $PN = NG = m$,

$\because OE \parallel PN, \therefore \triangle AOE \sim \triangle ANP, \therefore AN/AO = PN/OE = 1$, 即 $AN = OA = 6$.

在等腰 $Rt\triangle ONG$ 中, $ON = 2^{1/2} * m$,

$\therefore 12 = 2^{1/2} * m, \therefore m = 6 * 2^{1/2}$,

在等腰 $Rt\triangle PRN$ 中, $RN = PR = 6$, $\therefore$ 点 P_5 的坐标为 $(-18, 6)$.

所以, $\triangle OEP$ 的其中两边的比能为 $2^{1/2} : 1$, 点 P 的坐标是: $P_1 (0, 6), P_2$

$(-6, 18), P_3 (-18, 36), P_4 (-6, 0), P_5 (-18, 6)$.

例 45(2016 年吉林省中考第 25 题)如图,在等腰直角三角形 ABC 中, $\angle BAC=90^\circ$, $AC=8\text{ cm}$, $AD \perp BC$ 于点 D, 点 P 从点 A 出发, 沿 $A \rightarrow C$ 方向以 $2^{\frac{1}{2}}\text{ cm/s}$ 的速度运动到点 C 停止. 在运动过程中, 过点 P 作 $PQ \parallel AB$ 交 BC 于点 Q, 以线段 PQ 为边作等腰直角三角形 PQM, 且 $\angle PQM=90^\circ$ (点 M、C 位于 PQ 异侧). 设点 P 的运动时间为 $x\text{ (s)}$, $\triangle PQM$ 与 $\triangle ADC$ 重叠部分的面积为 $y\text{ (cm}^2\text{)}$

- (1) 当点 M 落在 AB 上时, $x=$ _____;
- (2) 当点 M 落在 AD 上时, $x=$ _____;
- (3) 求 y 关于 x 的函数解析式, 并写出自变量 x 的取值范围.

【解答】

(1) 当点 M 落在 AB 上时, 四边形 AMQP 是正方形, 此时点 D 与点 Q 重合, $AP=CP=4\sqrt{2}$, 所以 $x=\frac{4\sqrt{2}}{\sqrt{2}}=4$.

故答案为 4.

(2) 如图 1 中, 当点 M 落在 AD 上时, 作 $PE \perp QC$ 于 E.

$\because \triangle MQP, \triangle PQE, \triangle PEC$ 都是等腰直角三角形, $MQ=PQ=PC$

$\therefore DQ=QE=EC,$

$\because PE \parallel AD,$

$\therefore \frac{PA}{AC} = \frac{DE}{DC} = \frac{2}{3}, \because AC=8\sqrt{2},$

$\therefore PA = \frac{16\sqrt{2}}{3},$

$\therefore x = \frac{16\sqrt{2}}{3} \div \sqrt{2} = \frac{16}{3}.$

故答案为 $\frac{16}{3}$.

(3) ①当 $0 < x \leq 4$ 时, 如图 2 中, 设 PM、PQ 分别交 AD 于点 E、F, 则重叠部分为 $\triangle PEF$,

$\because AP = \sqrt{2}x,$

$\therefore EF = PE = x,$

$$\therefore y = S_{\triangle PEF} = \frac{1}{2} \cdot PE \cdot EF = \frac{1}{2} x^2.$$

②当 $4 < x \leq \frac{16}{3}$ 时, 如图 3 中, 设 PM、MQ 分别交 AD 于 E、G, 则重叠部分为四边形 PEGQ.

$$\because PQ = PC = 8\sqrt{2} - \sqrt{2}x,$$

$$\therefore PM = 16 - 2x, \therefore ME = PM - PE = 16 - 3x,$$

$$\therefore y = S_{\triangle PMQ} - S_{\triangle MEG} = \frac{1}{2} (8\sqrt{2} - \sqrt{2}x)^2 - \frac{1}{2} (16 - 3x)^2 = -\frac{7}{2}x^2 + 32x - 64.$$

③当 $\frac{16}{3} < x < 8$ 时, 如图 4 中, 则重合部分为 $\triangle PMQ$,

$$\therefore y = S_{\triangle PMQ} = \frac{1}{2} PQ^2 = \frac{1}{2} (8\sqrt{2} - \sqrt{2}x)^2 = x^2 - 16x + 64.$$

$$\text{综上所述 } y = \begin{cases} \frac{1}{2}x^2 & (0 < x \leq 4) \\ -\frac{7}{2}x^2 + 32x - 64 & (4 < x \leq \frac{16}{3}) \\ x^2 - 16x + 64 & (\frac{16}{3} < x < 8) \end{cases}.$$

例 46 (2016 年南京市中考第 27) 如图 1, 把函数 $y=x$ 的图像上各点的纵坐标变为原来的 2 倍, 横坐标不变, 得到函数 $y=2*x$ 的图像; 也可以把函数 $y=x$ 的图像上各点的横坐标变为原来的 $1/2$ 倍, 纵坐标不变, 得到函数 $y=2*x$ 的图像. 类似地, 我们可以认识其他函数.

(1) 把函数 $y=1/x$ 的图像上各点的纵坐标变为原来的_____倍, 横坐标不变, 得到函数 $y=6/x$ 的图像; 也可以把函数的图像上各点的横坐标变为原来的_____倍, 纵坐标不变, 得到函数 $y=6/x$ 的图像.

(2) 已知下列变化: ①向下平移 2 个单位长度; ②向右平移 1 个单位长度, ③向右平移 $1/2$ 个单位长度; ④纵坐标变为原来的 4 倍, 横坐标不变; ⑤横坐标变为原来的倍, 纵坐标不变; ⑥横坐标变为原来的 2 倍, 纵坐标不变.

(i) 函数 $y=x^2$ 的图像上所有的点经过④→②→①, 得到函数_____的图像;

(ii) 为了得到函数 $y=-1/4*(x-1)^2-2$ 的图像, 可以把函数 $y=-x^2$ 的图像上所有的点 () . A.①→⑤→③ B.①→⑥→③ C.①→②→⑥ D.①→③→⑥

(3) 函数 $y=1/x$ 的图像可以经过怎样的变化得到函数 $y=-(2*x+1)/(2*x+4)$ 的图像? (写出一种即可)

【解答】

(1) 把函数 $y=1/x$ 的图象上各点的纵坐标变为原来的 6 倍, 横坐标不变, 设 $y'=6*y$, $x'=x$, 将 $y=y'/6$, $x=x'$ 代入 $x*y=1$ 可得 $y'=6/x'$, 得到函数 $y=6/x$ 的图像;

也可以把函数 $y=1/x$ 的图象上各点的横坐标变为原来的 6 倍, 纵坐标不变,

设 $y'=y$, $x'=6*x$, 将 $y=y'$, $x=x'/6$ 代入 $x*y=1$ 可得 $y'=6/x'$, 得到函数 $y=6/x$ 的图

象；

(2) ①函数 $y=x^2$ 的图象上所有的点经过“纵坐标变为原来的 4 倍，横坐标不变”的变化后，得到 $y=4x^2$ 的图象； $y=4x^2$ 的图象经过“向右平移 1 个单位长度”的变化后，得到 $y=4(x-1)^2$ 的图象； $y=4(x-1)^2$ 的图象经过“向下平移 2 个单位长度”的变化后，得到 $y=4(x-1)^2-2$ 的图象。

(II) 为了得到函数 $y=-\frac{1}{4}(x-1)^2-2$ 的图象，可以把函数 $y=-x^2$ 的图象上所有的点先向下平移 2 个单位长度，得到 $y=-x^2-2$ 的图象，再把 $y=-x^2-2$ 的图象向右平移 $\frac{1}{2}$ 个单位长度，得到 $y=-(x-\frac{1}{2})^2-2$ 的图象；

最后把 $y=-(x-\frac{1}{2})^2-2$ 的图象的横坐标变为原来的 2 倍，得到 $y=-(x-\frac{1}{2})^2-2$ 的图象，即 $y=-\frac{1}{4}(x-1)^2-2$ 的图象。

$$(3) \because y = \frac{-(2x-1)}{(2x+4)} = \frac{-2x-4+3}{(2x+4)} = \frac{3}{2(x+2)} - 1,$$

$\therefore$ 函数 $y=1/x$ 的图象先将纵坐标变为原来的 $\frac{3}{2}$ 倍，横坐标不变，得到 $y=3/(2x)$ ；再向左平移 2 个单位，向下平移 1 个单位即可得到函数 $y=-(2x+1)/(2x+4)$ 的图象。

故答案为：(1) 6, 6；(2) (I) $y=4(x-1)^2-2$ ；(II) D

例 47 (2016 年陕西省中考第 24 题) 如图，在平面直角坐标系中，点 O 为坐标原点，抛物线 $y=ax^2+bx+5$ 经过点 M (1, 3) 和 N (3, 5) .

(1) 试判断该抛物线与 x 轴交点的情况；

(2) 平移这条抛物线，使平移后的抛物线经过点 A (-2, 0)，且与 y 轴交于点 B，同时满足以 A、O、B 为顶点的三角形是等腰直角三角形，请你写出平移过程，并说明理由.

【解答】

(1) 由抛物线过 M、N 两点，

把 M、N 坐标代入抛物线解析式可得 $\begin{cases} a+b+5=3 \\ 9a+3b+5=5 \end{cases}$ ，解得 $\begin{cases} a=1 \\ b=-3 \end{cases}$ ，

$\therefore$ 抛物线解析式为 $y=x^2-3x+5$ ，

令 $y=0$ 可得 $x^2-3x+5=0$ ，

该方程的判别式为 $\Delta = (-3)^2 - 4 \times 1 \times 5 = 9 - 20 = -11 < 0$ ，

$\therefore$ 抛物线与 x 轴没有交点；

(2) $\because \triangle AOB$ 是等腰直角三角形，A (-2, 0)，点 B 在 y 轴上，

$\therefore$ B 点坐标为 (0, 2) 或 (0, -2)，

可设平移后的抛物线解析式为 $y=x^2+mx+n$ ，

①当抛物线过点 A (-2, 0)，B (0, 2) 时，代入可得 $\begin{cases} n=2 \\ 4-2m+n=0 \end{cases}$ ，解得 $\begin{cases} m=3 \\ n=2 \end{cases}$ ，

$\therefore$ 平移后的抛物线为 $y=x^2+3x+2$ ，

$\therefore$ 该抛物线的顶点坐标为 $(-\frac{3}{2}, -\frac{1}{4})$ ，而原抛物线顶点坐标为 $(\frac{3}{2}, \frac{11}{4})$ ，

∴将原抛物线先向左平移 3 个单位,再向下平移 3 个单位即可获得符合条件的抛物线;

②当抛物线过 A (-2, 0), B (0, -2) 时,代入可得 $\begin{cases} n = -2 \\ 4 - 2m + n = 0 \end{cases}$, 解得 $\begin{cases} m = 1 \\ n = -2 \end{cases}$,

∴平移后的抛物线为 $y = x^2 + x - 2$,

∴该抛物线的顶点坐标为 $(-\frac{1}{2}, -\frac{9}{4})$, 而原抛物线顶点坐标为 $(\frac{3}{2}, \frac{11}{4})$,

∴将原抛物线先向左平移 2 个单位,再向下平移 5 个单位即可获得符合条件的抛物线.

例 48 (2016 年天津市中考第 25 题) 已知抛物线 $C: y=x^2-2x+1$ 的顶点为 P , 与 y 轴的交点为 Q , 点 $F(1, \frac{1}{2})$.

(1) 求点 P, Q 的坐标;

(2) 将抛物线 C 向上平移得到抛物线 C' , 点 Q 平移后的对应点为 Q' , 且 $FQ'=OQ'$.

①求抛物线 C' 的解析式;

②若点 P 关于直线 $Q'F$ 的对称点为 K , 射线 FK 与抛物线 C' 相交于点 A ,

(3) 求点 A 的坐标.

【解答】

$$(I) \because y=x^2-2x+1=(x-1)^2$$

$\therefore$ 顶点 $P(1, 0)$,

$\because$ 当 $x=0$ 时, $y=1$,

$\therefore Q(0, 1)$,

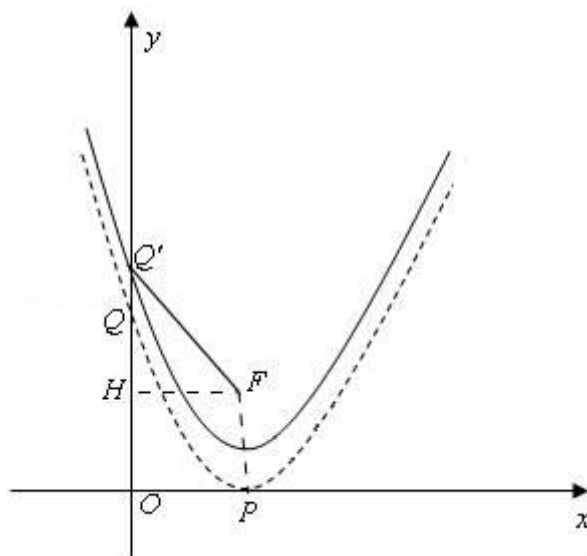
(II) ①设抛物线 C' 的解析式为 $y=x^2-2x+m$,

$\therefore Q'(0, m)$ 其中 $m>1$,

$\therefore OQ'=m$,

$\because F(1, \frac{1}{2})$,

过 F 作 $FH \perp OQ'$, 如图:



$$\therefore FH=1, Q'H=m-\frac{1}{2},$$

$$\text{在 Rt}\triangle FQ'H \text{ 中, } FQ'^2 = \left(m - \frac{1}{2}\right)^2 + 1 = m^2 - m + \frac{5}{4},$$

$$\because FQ'=OQ',$$

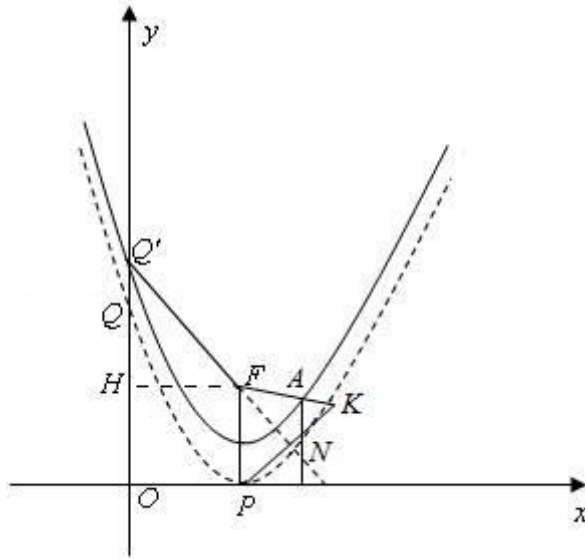
$$\therefore m^2 - m + \frac{5}{4} = m^2,$$

$$\therefore m = \frac{5}{4},$$

$$\therefore \text{抛物线 } C' \text{ 的解析式为 } y = x^2 - 2x + \frac{5}{4},$$

$$\textcircled{2} \text{ 设点 } A(x_0, y_0), \text{ 则 } y_0 = x_0^2 - 2x_0 + \frac{5}{4},$$

过点 A 作 x 轴的垂线，与直线 Q'F 相交于点 N，则可设 N(x_0, n)，



$\therefore AN=y_0-n$, 其中 $y_0>n$,

连接 FP,

$\therefore F(1, \frac{1}{2}), P(1, 0),$

$\therefore \text{FP} \perp x$ 轴,

$$\therefore \text{FP} // \text{AN},$$
$$\therefore \angle \text{ANF} = \angle \text{PFN},$$

连接 PK，则直线 Q'F 是线段 PK 的垂直平分线，

$\therefore FP=FK$, 有 $\angle PFN=\angle AFN$,

$\therefore \angle ANF = \angle AFN$, 则 $AF = AN$,

根据勾股定理，得， $AF_2^2 = (x_0 - 1)^2 + (y_0 - \frac{1}{2})^2$ ，

$$\therefore (x_0 - 1)^2 + (y_0 - \frac{1}{2})^2 = (x_0^2 - 2x_0 + \frac{5}{4}) + y_0^2 - y_0 = y_0^2,$$

$$\therefore AF=y_0,$$
$$\therefore y_0 = y_0 - n,$$
$$\therefore n=0,$$

$$\therefore N(x_0, 0),$$

设直线 QF 的解析式为 $y=kx+b$,

$$\text{则} \begin{cases} b=\frac{5}{4} \\ k+b=\frac{1}{2}, \end{cases}$$

$$\text{解得} \begin{cases} k=-\frac{3}{4} \\ b=\frac{5}{4} \end{cases},$$

$$\therefore y=-\frac{3}{4}x+\frac{5}{4},$$

由点 N 在直线 QF 上, 得, $0=-\frac{3}{4}x_0+\frac{5}{4},$

$$\therefore x_0=\frac{5}{3},$$

将 $x_0=\frac{5}{3}$ 代入 $y_0=x^2-2x_0+\frac{5}{4},$

$$\therefore y_0=\frac{25}{36},$$

$$\therefore A\left(\frac{5}{3}, \frac{25}{36}\right)$$

例 49 (2016 年武汉市中考第 24 题) 抛物线 $y=ax^2+c$ 与 x 轴交于 A、B 两点，顶点为 C，点 P 为抛物线上，且位于 x 轴下方。

(1) 如图 1，若 P (1, -3)、B (4, 0)。

① 求该抛物线的解析式；

② 若 D 是抛物线上一点，满足 $\angle DPO = \angle POB$ ，求点 D 的坐标；

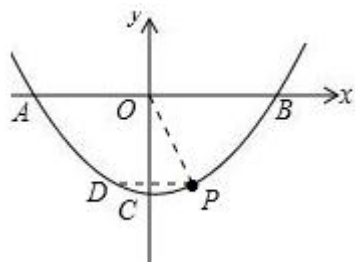
(2) 如图 2，已知直线 PA、PB 与 y 轴分别交于 E、F 两点。当点 P 运动时， $(OF+OE)/OC$ 是否为定值？若是，试求出该定值；若不是，请说明理由。

【解析】

(1) ① 将 P(1, -3)、B(4, 0) 代入 $y=ax^2+c$ 得

$$\begin{cases} 16a+c=0 \\ a+c=0 \end{cases}, \text{解得} \begin{cases} a=\frac{1}{5} \\ c=-\frac{16}{5} \end{cases}, \text{抛物线的解析式为: } y=\frac{1}{5}x^2-\frac{16}{5}.$$

② 如图：



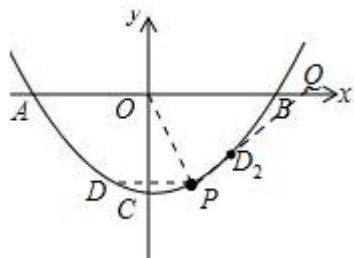
由 $\angle DPO = \angle POB$ 得 $DP \parallel OB$ ，D 与 P 关于 y 轴对称，P(1, -3) 得 D(-1, -3)；

如图，D 在 P 右侧，即图中 D₂，则 $\angle D_2PO = \angle POB$ ，延长 PD₂ 交 x 轴于 Q，则 $QO = QP$ ，

设 Q (q, 0)，则 $(q-1)^2 + 32 = q^2$ ，解得： $q=5$ ， $\therefore Q(5, 0)$ ，则直线 PD₂

为 $y = \frac{3}{4}x - \frac{15}{4}$ ，再联立 $\begin{cases} y = \frac{3}{4}x - \frac{15}{4} \\ y = \frac{1}{5}x^2 - \frac{16}{5} \end{cases}$ 得： $x=1$ 或 $\frac{11}{4}$ ， $\therefore D_2(\frac{11}{4}, -\frac{27}{16})$

∴点 D 的坐标为(-1, -3)或 $(\frac{11}{4}, -\frac{27}{16})$



(2) 设 B (b, 0), 则 A (-b, 0) 有 $ab^2+c=0$, ∴ $b^2=-\frac{c}{a}$, 过点 P (x₀, y₀)

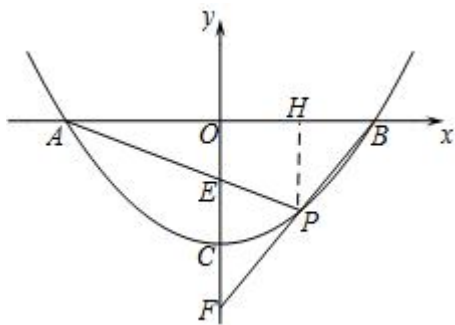
作 PH⊥AB, 有 $y_0=ax^2+c$, 易证: $\triangle PAH \sim \triangle EAO$, 则 $\frac{OE}{OA} = \frac{PH}{HA}$ 即 $\frac{OE}{b} = \frac{-y_0}{x_0+b}$,

$$\therefore OE = \frac{-by_0}{x_0+b},$$

同理得 $\frac{OF}{OB} = \frac{PH}{BH}$ ∴ $\frac{OF}{b} = \frac{-y_0}{b-x_0}$, ∴ $OF = \frac{-by_0}{b-x_0}$, 则 $OE+OF = -by_0 \cdot (\frac{1}{b+x_0} + \frac{1}{b-x_0})$

$$OE+OF = \frac{-2b^2y_0}{b^2-x_0^2} = \frac{-2 \cdot (-\frac{c}{a}) \cdot y_0}{-\frac{c}{a} - \frac{y_0-c}{a}} = -2c$$

$$\therefore \frac{OE+OF}{OC} = \frac{-2c}{-c} = 2.$$



∴ $\frac{OE+OF}{OC}$ 是定值, 等于 2.

例 50 (2016 年义乌市绍兴市中考第 23 题) 对于坐标平面内的点，先将该点向右平移 1 个单位，再向上平移 2 的单位，这种点的运动称为点的斜平移，如点 P (2, 3) 经 1 次斜平移后的点的坐标为 (3, 5)，已知点 A 的坐标为 (1, 0)。

(1) 分别写出点 A 经 1 次，2 次斜平移后得到的点的坐标；

(2) 如图，点 M 是直线 l 上的一点，点 A 关于点 M 的对称点的点 B，点 B 关于直线 l 的对称轴为点 C。

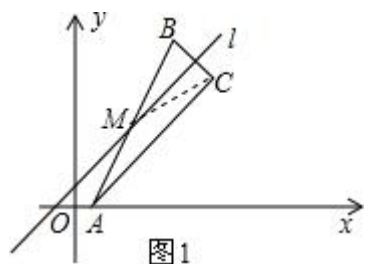
①若 A、B、C 三点不在同一条直线上，判断 $\triangle ABC$ 是否是直角三角形？请说明理由。

②若点 B 由点 A 经 n 次斜平移后得到，且点 C 的坐标为 (7, 6)，求出点 B 的坐标及 n 的值。

【解答】

(1) 点 A 经 1 次平移后得到的点的坐标为 (2, 2)，点 A 经 2 次平移后得到的点的坐标 (3, 4)；

(2) ①连接 CM，如图 1：



由中心对称可知， $AM=BM$ ，由轴对称可知： $BM=CM$ ，

$\therefore AM=CM=BM$ ， $\therefore \angle MAC=\angle ACM$ ， $\angle MBC=\angle MCB$ ，

$\because \angle MAC+\angle ACM+\angle MBC+\angle MCB=180^\circ$ ，

$\therefore \angle ACM+\angle MCB=90^\circ$ ， $\therefore \angle ACB=90^\circ$ ，

例 51 (2016 年长沙市中考第 25 题) 若抛物线 $L: y=ax^2+b/x+c$ (a, b, c 是常数, $abc \neq 0$) 与直线 l 都经过 y 轴上的一点 P , 且抛物线 L 与顶点 Q 在直线 l 上, 则称此直线 l 与该抛物线 L 具有“一带一路”关系, 此时, 直线 l 叫做抛物线 L 的“带线”, 抛物线 L 叫做直线 l 的“路线”.

(1) 若直线 $y=m*x+1$ 与抛物线 $y=x^2-2*x+n$ 具有“一带一路”关系, 求 m, n 的值;

(2) 若某“路线” L 的顶点在反比例函数 $y=6/x$ 的图像上, 它的“带线” l 的解析式为 $y=2*x-4$, 求此“路线” L 的解析式;

(3) 当常数 k 满足 $1/2 \leq k \leq 2$ 时, 求抛物线 $L: y=a*x^2+(3*k^2-2*k+1)*x+k$ 的“带线” l 与 x 轴、 y 轴所围成的三角形面积的取值范围.

【解答】

(1) 令直线 $y=m*x+1$ 中 $x=0$, 则 $y=1$,

即直线与 y 轴的交点为 $(0, 1)$; 将 $(0, 1)$ 代入抛物线 $y=x^2-2*x+n$ 中, 得 $n=1$.

$\therefore$ 抛物线的解析式为 $y=x^2-2*x+1=(x-1)^2$,

$\therefore$ 抛物线的顶点坐标为 $(1, 0)$.

将点 $(1, 0)$ 代入到直线 $y=m*x+1$ 中, 得: $0=m+1$, 解得: $m=-1$.

$\therefore m$ 的值为 -1 , n 的值为 1 .

(2) 将 $y=2*x-4$ 代入到 $y=6/x$ 中有, $2*x-4=6/x$, 即 $2*x^2-4*x-6=0$,

解得: $x_1=-1, x_2=3$. $\therefore$ 该“路线” L 的顶点坐标为 $(-1, -6)$ 或 $(3, 2)$.

令“带线” $l: y=2*x-4$ 中 $x=0$, 则 $y=-4$, $\therefore$ “路线” L 的图象过点 $(0, -4)$.

设该“路线” L 的解析式为 $y=m*(x+1)^2-6$ 或 $y=n*(x-3)^2+2$,

由题意得： $-4=m \cdot (0+1)^2-6$ 或 $-4=n \cdot (0-3)^2+2$ ， 解得： $m=2$ ， $n=-\frac{2}{3}$ 。

$\therefore$ 此“路线”L 的解析式为 $y=2 \cdot (x+1)^2-6$ 或 $y=-(x-3)^2+2$ 。

(3) 令抛物线 L: $y=a \cdot x^2+(3 \cdot k^2-2 \cdot k+1) \cdot x+k$ 中 $x=0$ ， 则 $y=k$ ，

即该抛物线与 y 轴的交点为 $(0, k)$ 。

抛物线 L: $y=a \cdot x^2+(3 \cdot k^2-2 \cdot k+1) \cdot x+k$ 的顶点坐标为 $(-\frac{(3 \cdot k^2-2 \cdot k+1)}{(2 \cdot a)}, \frac{4 \cdot a \cdot k-(3 \cdot k^2-2 \cdot k+1)^2}{(4 \cdot a)})$ ，

设“带线”l 的解析式为 $y=p \cdot x+k$ ， $\because$ 点 $(-\frac{(3 \cdot k^2-2 \cdot k+1)}{(2 \cdot a)}, \frac{4 \cdot a \cdot k-(3 \cdot k^2-2 \cdot k+1)^2}{(4 \cdot a)})$ 在 $y=p \cdot x+k$ 上，

$\therefore \frac{4 \cdot a \cdot k-(3 \cdot k^2-2 \cdot k+1)^2}{(4 \cdot a)} = -p \cdot \frac{(3 \cdot k^2-2 \cdot k+1)}{(2 \cdot a)} + k$ ，

解得： $p=\frac{(3 \cdot k^2-2 \cdot k+1)}{2}$ 。

$\therefore$ “带线”l 的解析式为 $y=\frac{(3 \cdot k^2-2 \cdot k+1)}{2} \cdot x+k$ 。

令“带线”l: $y=\frac{(3 \cdot k^2-2 \cdot k+1)}{2} \cdot x+k$ 中 $y=0$ ， 则 $0=\frac{(3 \cdot k^2-2 \cdot k+1)}{2} \cdot x+k$ ， 解得：
 $x=-\frac{2 \cdot k}{(3 \cdot k^2-2 \cdot k+1)}$ 。

即“带线”l 与 x 轴的交点为 $(-\frac{2 \cdot k}{(3 \cdot k^2-2 \cdot k+1)}, 0)$ ， 与 y 轴的交点为 $(0, k)$ 。

$\therefore$ “带线”l 与 x 轴， y 轴所围成的三角形面积 $S=\frac{1}{2} \cdot |-\frac{2 \cdot k}{(3 \cdot k^2-2 \cdot k+1)}| \cdot |k|$ ，

$\because \frac{1}{2} \leq k \leq 2$ ， $\therefore \frac{1}{2} \leq \frac{1}{k} \leq 2$ ，

$\therefore S=\frac{k^2}{(3 \cdot k^2-2 \cdot k+1)}=\frac{1}{(3-\frac{2}{k}+(\frac{1}{k})^2)}=\frac{1}{((\frac{1}{k}-1)^2+2)}$ ，

当 $\frac{1}{k}=1$ 时， S 有最大值， 最大值为 $\frac{1}{2}$ ；

当 $\frac{1}{k}=2$ 时， S 有最小值， 最小值为 $\frac{1}{3}$ 。

故抛物线 L: $y=a \cdot x^2+(3 \cdot k^2-2 \cdot k+1) \cdot x+k$ 的“带线”l 与 x 轴， y 轴所围成的三角形面积的取值范围为 $\frac{1}{3} \leq S \leq \frac{1}{2}$ 。

例 52 (2016 年长沙市中考第 26 题) 如图, 直线 $l: y=-x+1$ 与 x 轴、 y 轴分别交于 A、B 两点, 点 P、Q 是直线 l 上的两个动点, 且点 P 在第二象限, 点 Q 在第四象限, $\angle POQ=135^\circ$.

(1) 求 $\triangle AOB$ 的周长;

(2) 设 $AQ=t>0$. 试用含 t 的代数式表示点 P 的坐标;

(3) 当动点 P, Q 在直线 l 上运动到使得 $\triangle AOQ$ 与 $\triangle BPO$ 的周长相等时, 记作 $\angle AOQ=m$, 若过点 A 的二次函数 $y=a*x^2+b*x+c$ 同时满足以下两个条件: ① $6*a+3*b+2*c=0$; ② 当 $m \leq x \leq m+2$ 时, 函数 y 的最大值等于 $2/m$, 求二次项系数 a 的值.

【解答】

(1) 在函数 $y=-x+1$ 中, 令 $x=0$, 得 $y=1$,

$\therefore B(0, 1)$, 令 $y=0$, 得 $x=1$, $\therefore A(1, 0)$,

则 $OA=OB=1$, $AB=2^{1/2}$, $\therefore \triangle AOB$ 周长为 $1+1+2^{1/2}=2+2^{1/2}$.

(2) $\because OA=OB$, $\therefore \angle ABO=\angle BAO=45^\circ$, $\therefore \angle PBO=\angle QAO=135^\circ$,

设 $\angle POB=x$, 则 $\angle OPB=\angle AOQ=135^\circ-x-90^\circ=45^\circ-x$,

$\therefore \triangle PBO \sim \triangle OAQ$, $\therefore PB/OA=OB/AQ$, $\therefore PB=OA*OB/AQ=1/t$,

过点 P 作 $PH \perp OB$ 于 H 点, 则 $\triangle PHB$ 为等腰直角三角形,

$\because PB=1/t, \therefore PH=HB=2^{1/2}/(2*t)$, $\therefore P(-2^{1/2}/(2*t), 1+2^{1/2}/(2*t))$.

(3) 由 (2) 可知 $\triangle PBO \sim \triangle OAQ$, 若它们的周长相等, 则相似比为 1, 即全等,

$\therefore PB=OA$, $\therefore 1/t=1$, $\because t>0$, $\therefore t=1$,

同理可得 $Q(1+2^{1/2}/(2*t), -2^{1/2}/(2*t))$,

$$\therefore m = 2^{1/2} / (2^t) / (1 + 2^{1/2} / (2^t)) = 2^{1/2} - 1,$$

$$\because \text{抛物线经过点 A, } \therefore a + b + c = 0,$$

$$\text{又} \because 6a + 3b + 2c = 0, \quad \therefore b = -4a, \quad c = 3a,$$

$$\text{对称轴 } x = 2, \text{ 取值范围 } 2^{1/2} - 1 \leq x \leq 2^{1/2} + 1,$$

①若 $a > 0$, 则开口向上,

$$\text{由题意 } x = 2^{1/2} - 1 \text{ 时取得最大值 } 2/m = 2 \cdot 2^{1/2} + 2,$$

$$\text{即 } (2^{1/2} - 1)^2 a + (2^{1/2} - 1) \cdot b + c = 2 \cdot 2^{1/2} + 2,$$

$$\text{解得 } a = (11 + 8 \cdot 2^{1/2}) / 7.$$

②若 $a < 0$, 则开口向下, 由题意 $x = 2$ 时取得最大 $2 \cdot 2^{1/2} + 2$,

$$\text{即 } 4a + 2b + c = 2 \cdot 2^{1/2} + 2, \text{ 解得 } a = -2 \cdot 2^{1/2} - 2.$$

综上所述所求 a 的值为 $(11 + 8 \cdot 2^{1/2}) / 7$ 或 $-2 \cdot 2^{1/2} - 2$.

例 53 (2016 年株洲市中考第 26 题) 已知二次函数 $y=x^2-(2k+1)x+k^2+k$ ($k > 0$)

(1) 当 $k=1/2$ 时, 求这个二次函数的顶点坐标;

(2) 求证: 关于 x 的一元二次方程 $x^2-(2k+1)x+k^2+k=0$ 有两个不相等的实数根;

(3) 如图, 该二次函数与 x 轴交于 A、B 两点 (A 点在 B 点的左侧), 与 y 轴交于 C 点, P 是 y 轴负半轴上一点, 且 $OP=1$, 直线 AP 交 BC 于点 Q, 求证:
 $1/OA^2+1/AB^2=1/AQ^2$.

【分析】 (1) 直接将 k 的值代入函数解析式, 进而利用配方法求出顶点坐标;

(2) 利用根的判别式得出 $\Delta=1$, 进而得出答案;

(3) 根据题意首先表示出 Q 点坐标, 以及表示出 OA, AB 的长, 再利用两点之间距离求出 AQ 的长, 进而求出答案.

【解答】

(1) 将 $k=\frac{1}{2}$ 代入二次函数可求得,

$$y=x^2+2x+\frac{3}{4}=(x+1)^2-\frac{1}{4},$$

故抛物线的顶点坐标为: $(1, -\frac{1}{4})$;

(2) $\because$ 一元二次方程 $x^2-(2k+1)x+k^2+k=0$,

$$\therefore \Delta=b^2-4ac=[-(2k+1)]^2-4(k^2+k)=1>0,$$

$\therefore$ 关于 x 的一元二次方程 $x^2-(2k+1)x+k^2+k=0$ 有两个不相等的实数根;

(3) 由题意可得: 点 P 的坐标为 $(0, 1)$,

$$\text{则 } 0=x^2-(2k+1)x+k^2+k$$

$$0=(x-k-1)(x-k),$$

$$\text{故 } A(k, 0), B(k+1, 0),$$

$$\text{当 } x=0, \text{ 则 } y=k^2+k,$$

$$\text{故 } C(0, k^2+k)$$

$$\text{则 } AB=k+1-k=1, OA=k,$$

$$\text{可得 } y_{PA}=\frac{1}{k}x-1,$$

$$y_{BC}=-kx+k^2+k,$$

$$\text{当 } \frac{1}{k}x-1=-kx+k^2+k,$$

$$\text{解得: } x=k+\frac{k^2}{k^2+1},$$

$$\text{则代入原式可得: } y=\frac{4+2k+c}{1-\frac{b}{2 \times 1}} \frac{1}{3},$$

$$\text{则点 } Q \text{ 坐标为 } (k+\frac{k^2}{k^2+1}, \frac{k}{k^2+1})$$

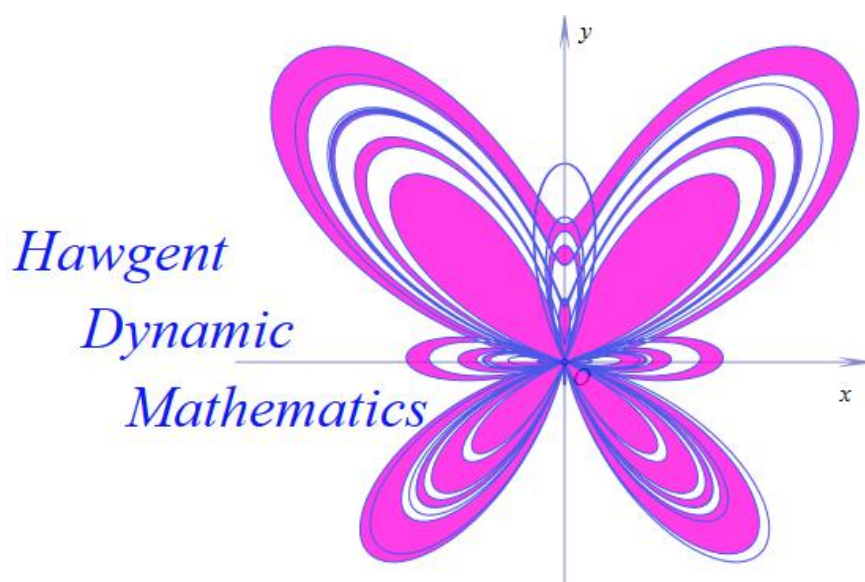
$$\text{运用距离公式得: } AQ^2=(\frac{k^2}{k^2+1})^2+(\frac{k}{k^2+1})^2=\frac{k^2}{k^2+1},$$

$$\text{则 } OA^2=k^2, AB^2=1,$$

$$\text{故 } \frac{1}{OA^2}+\frac{1}{AB^2}=\frac{1}{k^2}+1=\frac{1+k^2}{k^2}=\frac{1}{AQ^2},$$

$$\text{则 } \frac{1}{OA^2}+\frac{1}{AB^2}=\frac{1}{AQ^2}.$$

皓荡的大地，奔腾的骏马
只为向着那，最初的梦想



地址：广州市越秀区桂花岗广州大学北 8 号

广州市越秀区盘福路朱紫后街 1 号

邮件： 11033149@qq.com

电话： 020-36280771

网站： www.hawgent.com

QQ 群： 367878041