

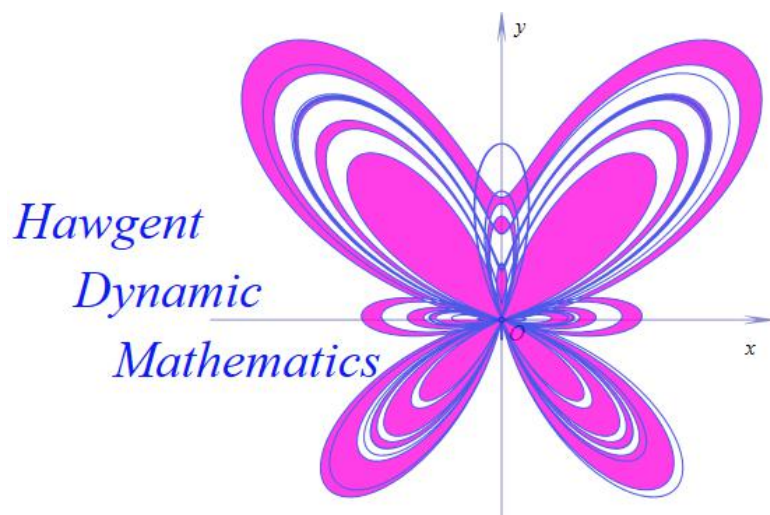


Hawgent 皓骏动态数学课程系列

点的存在性综合问题

(上册)

深入学科，彻底突破数学教学和数学学习中的重点难点问题
开展数学实验、数学教学、数学学习和数学研究的必备工具



皓骏（广州）数学技术中心

Hawgent Technology Centre in Mathematics

内容介绍

在学习数学过程中,有许多问题在查看了详细的解答或听到了老师的讲解之后,很多学生仍然不得其解,即使他们在下一次遇到同一个问题也未必能够给出正确或完整的解答.

这是因为,在学习过程中,数学更加需要理解.

本课程收集并整理了一些综合性很高的数学问题,它们让老师感到难教,让学生感到难学.就是说,对于这类问题许多数学老师都反应他们在花费了很大力气、很多时间的讲解之后,很多学生仍然是似懂非懂.

同样是学习,但方法有优劣之分,效率有高低之分.把看似复杂、抽象的问题变得更容易一些,抓住数学的本质使学生多一些理性思考而少一些机械记忆,让学生感悟到自然朴实的数学思想方法从而能够举一反三,这是我们追求的理念.

Hawgent 皓骏团队利用动态数学技术将这类问题呈现在学生面前,为他们提供了一个动手、观察、探索、猜想和验证的机会与平台,帮助他们利用变化的图形和数据发现问题内在的关系,并逐渐形成真正属于他们自己的解决问题的思路,这是我们追求的目标.

如果这种方式能够得到大家的认同,对我们是一种鼓励,并将激发我们更加努力工作的热情,同时希望有更多志同道合者加入我们的队伍,将这项工作持续下去,越做越好.当然也欢迎各种不同的声音,甚至是批评的意见,从而帮助我们得到提高和成长.

欢迎联系: 11033149@qq.com

目 录

第一部分 因动点产生的相似三角形问题.....	5
例 1 (2008 年杭州市中考第 24 题)	5
例 2 (2008 年济南市中考第 24 题)	6
例 3 (2008 年绍兴市中考第 24 题)	8
例 4 (2009 年临沂市中考第 26 题)	10
例 5 (2010 年义乌市中考第 24 题)	12
例 6 (2012 年宁波市中考第 26 题)	15
例 7 (2012 年天津市中考第 25 题)	18
例 8 (2012 年湖州市中考第 24 题)	20
例 9 (2012 年苏州市中考第 29 题)	22
例 10 (2012 年黄冈市中考第 25 题)	24
例 11 (2012 年福州市中考第 22 题)	26
例 12 (2013 年上海市中考第 24 题)	28
例 13 (2013 年济南市中考第 24 题)	30
例 14 (2013 年徐州市中考第 28 题)	32
例 15 (2013 年陕西省中考第 24 题)	33
例 16 (2013 年乌鲁木齐市中考第 24 题)	34
例 17 (2014 年武汉市中考第 24 题)	36
例 18 (2014 年菏泽市中考第 21 题)	39
例 19 (2015 年盐城市中考第 28 题)	41
例 20 (2016 年湖州市中考第 23 题)	44
第二部分 因动点产生的等腰三角形问题.....	46
例 1 (2008 年温州市中考第 24 题)	46
例 2 (2008 年重庆市中考第 28 题)	48
例 3 (2009 年上海市中考第 24 题)	51
例 4 (2009 年黄冈市中考第 20 题)	52
例 5 (2009 年深圳市中考第 23 题)	54
例 6 (2009 年重庆市中考第 26 题)	56
例 7 (2010 年南通市中考第 27 题)	59
例 8 (2010 年台州市中考第 24 题)	61
例 9 (2011 年湖州市中考第 24 题)	63
例 10 (2011 年盐城市中考第 28 题)	65
例 11 (2012 年扬州市中考第 27 题)	67
例 12 (2012 年临沂市中考第 26 题)	69
例 13 (2014 年长沙市中考第 26 题)	71
例 14 (2014 年金华市中考第 24 题)	73
例 15 (2014 年上海市中考第 25 题)	77
例 16 (2015 年重庆市中考第 25 题)	79
例 17 (2016 年河南省中考第 23 题)	81
例 18 (2016 年山西省中考第 23 题)	83
第三部分 因动点产生的直角三角形问题.....	85
例 1 (2008 年河南省中考第 23 题)	85

例 2 (2008 年天津市中考第 25 题)	87
例 3 (2009 年嘉兴市中考第 24 题)	89
例 4 (2010 年北京市中考第 24 题)	91
例 5 (2011 年沈阳市中考第 25 题)	95
例 6 (2011 年温州市中考第 24 题)	97
例 7 (2011 年浙江省中考第 23 题)	99
例 8 (2012 年广州市中考第 24 题)	100
例 9 (2012 年杭州市中考第 22 题)	102
例 11 (2013 年兰州市中考第 28 题)	105
例 12 (2013 年山西省中考第 26 题)	107
例 13 (2014 年德州市中考第 24 题)	110
例 14 (2014 年苏州市中考第 29 题)	112
例 15 (2014 年重庆市中考第 25 题)	115
例 16 (2016 年义乌市绍兴市中考第 24 题)	118
第四部分 因动点产生的平行四边形问题	120
例 1 (2008 年黄冈市中考第 20 题)	120
例 2 (2008 年金华市中考第 23 题)	122
例 3 (2008 年青岛市中考第 24 题)	123
例 4 (2008 年太原市中考第 29 题)	125
例 5 (2008 年乌鲁木齐市中考第 23 题)	127
例 7 (2009 年福州市中考第 21 题)	130
例 8 (2009 年江西省中考第 24 题)	132
例 9 (2009 年莆田市中考第 25 题)	134
例 10 (2010 年河南省中考第 23 题)	137
例 11 (2010 年山西省中考第 26 题)	140
例 12 (2011 年成都市中考第 28 题)	142
例 13 (2011 年江西省中考第 24 题)	145
例 14 (2011 年上海市中考第 24 题)	148
例 15 (2011 年无锡市中考第 27 题)	149
例 16 (2012 年福州市中考第 21 题)	151
例 17 (2012 年烟台市中考第 26 题)	153
例 18 (2013 年温州市中考第 24 题)	155
例 19 (2014 年陕西省中考第 24 题)	158
例 20 (2014 年山西省中考第 24 题)	160
例 21 (2014 年河南省中考第 23 题)	164
例 25 (2015 年成都市中考第 28 题)	174
例 26 (2015 年黄冈市中考第 24 题)	177
例 27 (2015 年重庆市中考第 26 题)	179
例 28 (2015 年温州市中考第 24 题)	181
例 29 (2016 年泰安市中考第 28 题)	183

第一部分 因动点产生的相似三角形问题

例 1 (2008 年杭州市中考第 24 题) 如图 1, 在直角坐标系 xOy 中, 设点 $A(0, t)$, 点 $Q(t, b)$. 平移二次函数 $y=-t \cdot x^2$ 的图像, 得到的抛物线 F 满足两个条件: ①顶点为 Q , ②与 x 轴相交于 B 、 C 两点 ($|OB| < |OC|$), 连结 AB .

(1) 是否存在这样的抛物线 F , 使得 $|OA|^2 = |OB| \cdot |OC|$? 请你作出判断, 并说明理由;

(2) 如果 $AQ \parallel BC$, 且 $\tan \angle ABO = 3/2$, 求抛物线 F 对应的二次函数的解析式.

【解答】

(1) 因为平移 $y = -tx^2$ 的图像得到的抛物线 F 的顶点为 $Q(t, b)$, 所以 F 的关系式为 $y = -t(x - t)^2 + b$

因为抛物线与 x 轴有两个交点, 因此 $t \cdot b > 0$.

另 $y=0$, 得 $OB = t - (b/t)^{1/2}$, $OC = t + (b/t)^{1/2}$.

$$\text{所以 } |OB| \cdot |OC| = \left| t^2 - \frac{b}{t} \right| = t^2 = |OA|^2$$

$$\text{即 } \left| t^2 - \frac{b}{t} \right| = t^2. \text{ 所以 } b = 2 \cdot t^2 \text{ 时, 存在抛物线 } F \text{ 使得 } |OA|^2 = |OB| \cdot |OC|$$

(2) $\because AQ \parallel BC$, 所以 $t=b$, 于是抛物线 F 为 $y = -t(x-t)^2 + t$

$\therefore$ 解得 $x_1 = t-1$, $x_2 = t+1$.

①当 $t > 0$ 时, 由 $|OB| < |OC|$, 得 $B(t-1, 0)$

如图 2, 当 $t-1 > 0$ 时, 由 $\tan \angle ABO = 3/2 = |OA|/|OB| = t/(t-1)$, 解得 $t=3$

此时二次函数的解析式为 $y = 3x^2 + 18x - 24$

如图 3, 当 $t-1 < 0$ 时, 由 $\tan \angle ABO = 3/2 = |OA|/|OB| = t/(-t+1)$, 解得 $t=3/5$

此时二次函数的解析式为 $y = -\frac{3}{5}x^2 + \frac{18}{25}x + \frac{48}{125}$

例 2 (2008 年济南市中考第 24 题) 已知：抛物线 $y=ax^2+bx+c$ ($a \neq 0$)，顶点 C (1, -3)，与 x 轴交于 A、B 两点，A (-1,0) .

(1) 求抛物线的解析式

(2) 如图 1，以 AB 为直径作圆，与抛物线交与点 D，与抛物线对称轴交于点 E，依次连结 A、D、B、E，点 P 为线段 AB 上一个动点 (P 与 A、B 两点不重合)，过点 P 作 $PM \perp AE$ 于 M， $PN \perp DB$ 于 N，请判断 $PM/BE+PN/AD$ 是否为定值？若是，请求出此定值；若不是，请说明理由.

(3) 在 (2) 的条件下，若点 S 是线段 EP 上一点，过点 S 作 $FG \perp EP$ ，FG 分别与边 AE、BE 相交于点 F、G (F 与 A、E 不重合，G 与 E、B 不重合)，请判断 $PA/PB=EF/EG$ 是否成立，若成立，请给出证明；若不成立，请说明理由.

【解答】

(1) 设抛物线的解析式为 $y=a(x-1)^2-3$

将 A (-1, 0) 代入： $0=a(-1-1)^2-3$ ，解得 $a=\frac{3}{4}$

所以，抛物线的解析式为 $y=\frac{3}{4}(x-1)^2-3$ ，即 $y=\frac{3}{4}x^2-\frac{3}{2}x-\frac{9}{4}$

(2) 是定值， $\frac{PM}{BE} + \frac{PN}{AD} = 1$

$\because AB$ 为直径， $\therefore \angle AEB=90^\circ$ ， $\because PM \perp AE$ ， $\therefore PM \parallel BE$ ， $\therefore \triangle APM \sim \triangle ABE$ ， 所以 $\frac{PM}{BE} = \frac{AP}{AB}$ ①

同理： $\frac{PN}{AD} = \frac{PB}{AB}$ ②

①+②： $\frac{PM}{BE} + \frac{PN}{AD} = \frac{AP}{AB} + \frac{PB}{AB} = 1$

(3) $\because$ 直线 EC 为抛物线对称轴， $\therefore EC$ 垂直平分 AB，

$\therefore EA=EB$ ，

$\because \angle AEB=90^\circ$ ，

$\therefore \triangle AEB$ 为等腰直角三角形，

$\therefore \angle EAB=\angle EBA=45^\circ$

如图，过点 P 作 $PH \perp BE$ 于 H，

由已知及作法可知，四边形 PHEM 是矩形.

$\therefore PH=ME$ 且 $PH \parallel ME$.

在 $\triangle APM$ 和 $\triangle PBH$ 中， $\because \angle AMP = \angle PBH = 90^\circ$ ， $\angle EAB = \angle BPH = 45^\circ$ ，

$\therefore PH=BH$ ，且 $\triangle APM \sim \triangle PBH$ ，

$$\therefore \frac{PA}{PB} = \frac{PM}{BH}, \therefore \frac{PA}{PB} = \frac{PM}{PH} = \frac{PM}{ME} \quad ①$$

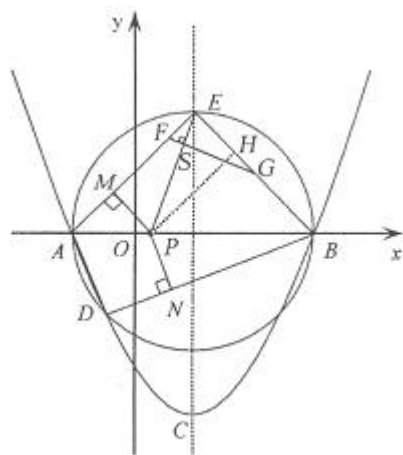
在 $\triangle MEP$ 和 $\triangle EGF$ 中， $\because PE \perp FG$ ， $\therefore \angle FGE + \angle SEG = 90^\circ$ ，

$\because \angle MEP + \angle SEG = 90^\circ$ ， $\therefore \angle FGE = \angle MEP$ ，

$\because \angle MPE = \angle FEG = 90^\circ$ ， $\therefore \triangle MEP \sim \triangle EGF$ ，

$$\therefore \frac{PM}{ME} = \frac{EF}{EG} \quad ②$$

由①、②知： $\frac{PA}{PB} = \frac{EF}{EG}$



第 24 题图

例 3 (2008 年绍兴市中考第 24 题) 将一矩形纸片 OABC 放在平面直角坐标系中, O (0,0), A (6,0), C (0,3). 动点 Q 从点 O 出发以每秒 1 个单位长的速度沿 OC 向终点 C 运动, 运动 $\frac{2}{3}$ 秒时, 动点 P 从点 A 出发以相等的速度沿 AO 向终点 O 运动. 当其中一点到达终点时, 另一点也停止运动, 设点 P 的运动时间为 t (秒)

(1) 用含 t 的代数式表示 OP、OQ;

(2) 当 $t=1$ 时, 如图 1, 将 $\triangle OPQ$ 沿 PQ 翻折, 点 O 恰好落在 CB 边上的点 D 处, 求点 D 的坐标;

(3) 连结 AC, 将 $\triangle OPQ$ 沿 PQ 翻折, 得到 $\triangle EPQ$, 如图 2, 问 PQ 与 AC 能否平行? PE 与 AC 能否垂直? 若能, 求出相应的 t 值; 若不能, 说明理由.

【解答】

$$(1) \quad OP = 6 - t, \quad OQ = t + \frac{2}{3}.$$

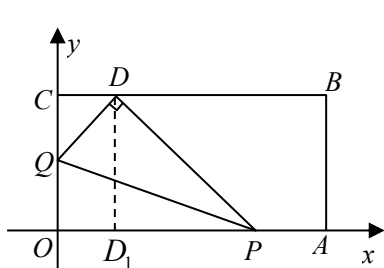


图 1

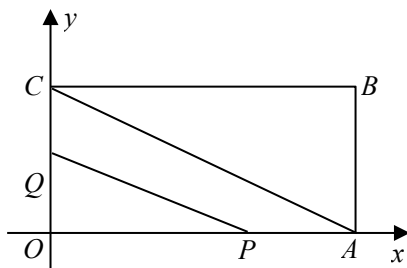


图 2

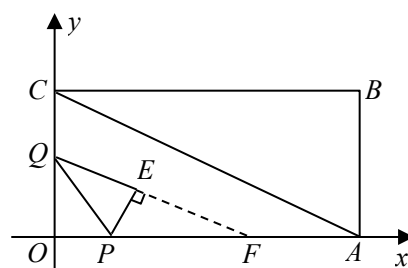


图 3

(2) 当 $t=1$ 时, 过 D 点作 $DD_1 \perp OA$, 交 OA 于 D_1 , 如图 1,

$$\text{则 } DQ = QO = \frac{5}{3}, \quad QC = \frac{4}{3},$$

$$\therefore CD = 1, \quad \therefore D(1,3).$$

(3) ① PQ 能与 AC 平行.

$$\text{若 } PQ \parallel AC, \text{ 如图 2, 则 } \frac{OP}{OQ} = \frac{OA}{OC},$$

$$\text{即 } \frac{6-t}{t+\frac{2}{3}} = \frac{6}{3}, \therefore t = \frac{14}{9}, \text{ 而 } 0 \leq t \leq \frac{7}{3},$$

$$\therefore t = \frac{14}{9}.$$

② PE 不能与 AC 垂直.

若 $PE \perp AC$, 延长 QE 交 OA 于 F , 如图 3,

$$\text{则 } \frac{QF}{AC} = \frac{OQ}{OC} \cdot \frac{QF}{3\sqrt{5}} = \frac{t+\frac{2}{3}}{3}.$$

$$\therefore QF = \sqrt{5} \left(t + \frac{2}{3} \right).$$

$$\therefore EF = QF - QE = QF - OQ$$

$$= \sqrt{5} \left(t + \frac{2}{3} \right) - \left(t + \frac{2}{3} \right)$$

$$= (\sqrt{5} - 1)t + \frac{2}{3}(\sqrt{5} - 1).$$

$$\text{又 } \because \text{Rt}\triangle EPF \sim \text{Rt}\triangle OCA, \therefore \frac{PE}{EF} = \frac{OC}{OA},$$

$$\therefore \frac{6-t}{(\sqrt{5}-1)\left(t+\frac{2}{3}\right)} = \frac{3}{6},$$

$$\therefore t \approx 3.45, \text{ 而 } 0 \leq t \leq \frac{7}{3},$$

$\therefore t$ 不存在.

例 4 (2009 年临沂市中考第 26 题) 如图 1, 抛物线经过点 A (4,0)、B (1,0)、C (0, -2) 三点.

(1) 求此抛物线的解析式;

(2) P 是抛物线上的一个动点, 过 P 作 $PM \perp x$ 轴, 垂足为 M, 是否存在点 P, 使得以 A、P、M 为顶点的三角形与 $\triangle OAC$ 相似? 若存在, 请求出符合条件的点 P 的坐标; 若不存在, 请说明理由;

(3) 在直线 AC 上方的抛物线上有一点 D, 使得 $\triangle DCA$ 的面积最大, 求出点 D 的坐标.

【解答】

(1) $\because$ 该抛物线过点 $C(0, -2)$, $\therefore$ 可设该抛物线的解析式为 $y = ax^2 + bx - 2$.

将 $A(4,0)$, $B(1,0)$ 代入,

$$\text{得} \begin{cases} 16a + 4b - 2 = 0, \\ a + b - 2 = 0. \end{cases} \text{解得} \begin{cases} a = -\frac{1}{2}, \\ b = \frac{5}{2}. \end{cases}$$

$\therefore$ 此抛物线的解析式为 $y = -\frac{1}{2}x^2 + \frac{5}{2}x - 2$.

(2) 存在. 如图, 设 P 点的横坐标为 m ,

则 P 点的纵坐标为 $-\frac{1}{2}m^2 + \frac{5}{2}m - 2$,

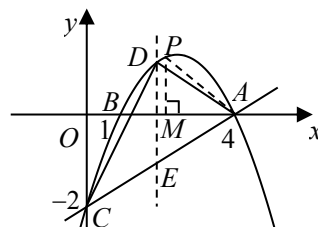
当 $1 < m < 4$ 时,

$$AM = 4 - m, \quad PM = -\frac{1}{2}m^2 + \frac{5}{2}m - 2.$$

又 $\because \angle COA = \angle PMA = 90^\circ$,

$\therefore$ ①当 $\frac{AM}{PM} = \frac{AO}{OC} = \frac{2}{1}$ 时,

$\triangle APM \sim \triangle ACO$,



(第 26 题图)

$$\text{即 } 4-m=2\left(-\frac{1}{2}m^2+\frac{5}{2}m-2\right).$$

解得 $m_1=2$, $m_2=4$ (舍去), $\therefore P(2,1)$.

$$\textcircled{2} \text{ 当 } \frac{AM}{PM} = \frac{OC}{OA} = \frac{1}{2} \text{ 时, } \triangle APM \sim \triangle CAO, \text{ 即 } 2(4-m) = -\frac{1}{2}m^2 + \frac{5}{2}m - 2.$$

解得 $m_1=4$, $m_2=5$ (均不合题意, 舍去)

$\therefore$ 当 $1 < m < 4$ 时, $P(2,1)$.

类似地可求出当 $m > 4$ 时, $P(5,-2)$.

当 $m < 1$ 时, $P(-3,-14)$.

综上所述, 符合条件的点 P 为 $(2,1)$ 或 $(5,-2)$ 或 $(-3,-14)$.

$$(3) \text{ 如图, 设 } D \text{ 点的横坐标为 } t (0 < t < 4), \text{ 则 } D \text{ 点的纵坐标为 } -\frac{1}{2}t^2 + \frac{5}{2}t - 2.$$

过 D 作 y 轴的平行线交 AC 于 E .

由题意可求得直线 AC 的解析式为 $y = \frac{1}{2}x - 2$.

$$\therefore E \text{ 点的坐标为 } \left(t, \frac{1}{2}t - 2\right).$$

$$\therefore DE = -\frac{1}{2}t^2 + \frac{5}{2}t - 2 - \left(\frac{1}{2}t - 2\right) = -\frac{1}{2}t^2 + 2t.$$

$$\therefore S_{\triangle DAC} = \frac{1}{2} \times \left(-\frac{1}{2}t^2 + 2t\right) \times 4 = -t^2 + 4t = -(t-2)^2 + 4.$$

$\therefore$ 当 $t=2$ 时, $\triangle DAC$ 面积最大.

$\therefore D(2,1)$.

例 5 (2010 年义乌市中考第 24 题) 如图 1, 已知梯形 OABC, 抛物线分别过点 O (0,0)、A (2,0)、B (6,3) .

(1) 直接写出抛物线的对称轴、解析式及顶点 M 的坐标;

(2) 将图 1 中梯形 OABX 的上下底边所在的直线 OA、CB 以相同的速度同时向上平移, 分别交抛物线于点 O₁、A₁、C₁、B₁, 得到如图 2 的梯形 O₁A₁B₁C₁ 的面积为 S, A₁、B₁ 的坐标分别为 (x₁, y₁)、(x₂, y₂) .用含 S 的代数式表示 x₂-x₁, 并求出当 S=36 时点 A₁ 的坐标;

(3) 在图 1 中, 设点 D 的坐标为 (1,3), 动点 P 从点 B 出发, 以每秒 1 个单位长度的速度沿着线段 BC 运动, 动点 Q 从点 D 出发, 以与点 P 相同的速度沿着线段 DM 运动. P、Q 两点同时出发, 当点 Q 到达点 M 时, P、Q 两点同时停止运动. 设 P、Q 两点的运动时间为 t, 是否存在某一时刻 t, 使得直线 PQ、直线 AB、x 轴围成的三角形与直线 PQ、直线 AB、抛物线的对称轴围成的三角形相似? 若存在, 请求出 t 的值; 若不存在, 请说明理由.

【解答】

(1) 对称轴: 直线 $x=1$

解析式: $y = \frac{1}{8}x^2 - \frac{1}{4}x$ 或 $y = \frac{1}{8}(x-1)^2 - \frac{1}{8}$

顶点坐标: $M(1, -\frac{1}{8})$

(2) 由题意得 $y_2 - y_1 = 3$

$$y_2 - y_1 = \frac{1}{8}x_2^2 - \frac{1}{4}x_2 - \frac{1}{8}x_1^2 + \frac{1}{4}x_1 = 3$$

$$\text{得: } (x_2 - x_1)\left[\frac{1}{8}(x_2 + x_1) - \frac{1}{4}\right] = 3 \quad \text{①}$$

$$s = \frac{2(x_1 - 1 + x_2 - 1) \times 3}{2} = 3(x_1 + x_2) - 6$$

$$\text{得: } x_1 + x_2 = \frac{s}{3} + 2 \quad \text{②}$$

把②代入①并整理得: $x_2 - x_1 = \frac{72}{s} (s > 0)$ (事实上, 更确切为

$$s > 6\sqrt{6})$$

$$\text{当 } s = 36 \text{ 时, } \begin{cases} x_2 + x_1 = 14 \\ x_2 - x_1 = 2 \end{cases} \text{ 解得: } \begin{cases} x_1 = 6 \\ x_2 = 8 \end{cases}$$

把 $x_1 = 6$ 代入抛物线解析式得 $y_1 = 3$ $\therefore$ 点 $A_1 (6, 3)$

(3) 存在

解法一: 易知直线 AB 的解析式为 $y = \frac{3}{4}x - \frac{3}{2}$, 可得直线 AB 与

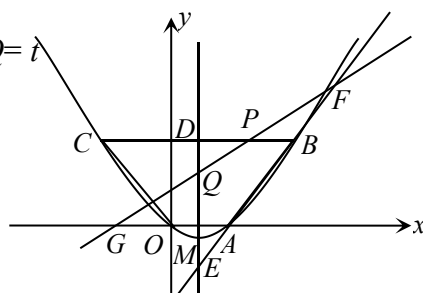
对称轴的

交点 E 的坐标为 $(1, -\frac{3}{4})$

$$\therefore BD = 5, DE = \frac{15}{4}, DP = 5 - t, DQ = t$$

$$\text{当 } PQ \parallel AB \text{ 时, } \frac{DQ}{DE} = \frac{DP}{DB}$$

$$\frac{\frac{t}{15}}{\frac{5-t}{5}} = \frac{5-t}{5} \quad \text{得 } t = \frac{15}{7}$$



下面分两种情况讨论: 设直线 PQ 与直线 AB 、 x 轴的交点分别

为点 F 、 G

① 当 $0 < t < \frac{15}{7}$ 时, 如图 1-1

$$\therefore \triangle FQE \sim \triangle FAG$$

$$\therefore \angle FGA = \angle FEQ$$

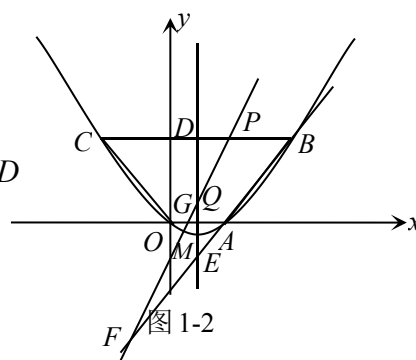
$$\therefore \angle DPQ = \angle DEB \quad \text{易得 } \triangle DPQ \sim \triangle DEB \quad \therefore \frac{DQ}{DB} = \frac{DP}{DE}$$

$$\therefore \frac{t}{5} = \frac{5-t}{\frac{15}{4}} \quad \text{得 } t = \frac{20}{7} > \frac{15}{7} \quad \therefore t = \frac{20}{7} \text{ (舍去)}$$

② 当 $\frac{15}{7} < t < 3\frac{1}{8}$ 时, 如图 1-2

$$\therefore \triangle FQE \sim \triangle FAG \quad \therefore \angle FAG = \angle FQE$$

$$\therefore \angle DQP = \angle FQE \quad \angle FAG = \angle EBD$$



$\therefore \angle DQP = \angle DBE$ 易得 $\triangle DPQ \sim \triangle DEB$

$$\therefore \frac{DQ}{DB} = \frac{DP}{DE}$$

$$\therefore \frac{t}{5} = \frac{5-t}{\frac{15}{4}}, \quad \therefore t = \frac{20}{7}$$

$\therefore$ 当 $t = \frac{20}{7}$ 秒时, 使直线 PQ 、直线 AB 、 x 轴围成的三角形

与直线 PQ 、直线 AB 、抛物线的对称轴围成的三角形相似

(注: 未求出 $t = \frac{15}{7}$ 能得到正确答案不扣分)

解法二: 可将 $y = \frac{x^2}{8} - \frac{x}{4}$ 向左平移一个单位得到 $y = \frac{x^2}{8} - \frac{1}{8}$,

再用解法一类似的方法可求得

$$x_2' - x_1' = \frac{72}{S}, \quad A_1'(5, 3), \quad t = \frac{20}{7}$$

$$\therefore x_2 - x_1 = \frac{72}{S} \quad A_1(6, 3), \quad t = \frac{20}{7}.$$

例 6 (2012 年宁波市中考第 26 题) 如图 1, 二次函数 $y=ax^2+bx+c$ 的图象交 x 轴于 $A(-1, 0)$, $B(2, 0)$, 交 y 轴于 $C(0, -2)$, 过 A 、 C 画直线.

- (1) 求二次函数的解析式;
- (2) 点 P 在 x 轴正半轴上, 且 $PA=PC$, 求 OP 的长;
- (3) 点 M 在二次函数图象上, 以 M 为圆心的圆与直线 AC 相切, 切点为 H .

①若 M 在 y 轴右侧, 且 $\triangle CHM \sim \triangle AOC$ (点 C 与点 A 对应), 求点 M 的坐标;

②若 $\odot M$ 的半径为 $\frac{4}{5}\sqrt{5}$, 求点 M 的坐标.

【解答】

解: (1) $\because$ 二次函数 $y=ax^2+bx+c$ 的图象交 x 轴于 $A(-1, 0), B(2, 0)$

$\therefore$ 设该二次函数的解析式为: $y=a(x+1)(x-2)$

又二次函数 $y=ax^2+bx+c$ 的图象交 y 轴于 $C(0, -2)$

将 $x=0, y=-2$ 代入, 得 $-2=a(0+1)(0-2)$

解得, $a=1$

$\therefore$ 抛物线的解析式为 $y=(x+1)(x-2)$, 即 $y=x^2-x-2$

(2) 设 $OP=x$, 则 $PC=PA=x+1$

在 $Rt\triangle POC$ 中, $OP=x, PC=x+1, OC=2$

由勾股定理, 得 $x^2+2^2=(x+1)^2$

解得, $x=\frac{3}{2}$, 即 $OP=\frac{3}{2}$

(3) ① $\because \triangle CHM \sim \triangle AOC$, 点 C 与点 A 对应

$\therefore \angle MCH = \angle CAO$

情形 1: 如图, 当 H 在点 C 下方时

$$\because \angle MCH = \angle CAO$$

$$\therefore CM \parallel x \text{ 轴}, \therefore y_M = -2$$

点 M 在二次函数图像上

$$\therefore x^2 - x - 2 = -2$$

$$\text{解得 } x = 0 \text{ (舍去) 或 } x = 1, \therefore M(1, -2)$$

情形 2: 如图, 当 H 在点 C 上方时

$$\because \angle M'CH = \angle CAO$$

由 (2) 得, M' 为直线 CP 与抛物线的另一交点

设直线 CM' 的解析式为 $y = kx - 2$

$$\text{把 } P(\frac{3}{2}, 0) \text{ 的坐标代入, 得 } \frac{3}{2}k - 2 = 0$$

$$\text{解得, } k = \frac{4}{3}, \therefore y = \frac{4}{3}x - 2$$

$$\text{由 } \frac{4}{3}x - 2 = x^2 - x - 2, \text{ 解得, } x = 0 \text{ (舍去) 或 } x = \frac{7}{3}$$

$$\text{此时 } y = \frac{10}{9}, \therefore M'(\frac{7}{3}, \frac{10}{9})$$

$$\therefore \text{点 } M \text{ 的坐标为 } (1, -2) \text{ 或 } (\frac{7}{3}, \frac{10}{9})$$

②【解析】以 M 为圆心的圆与直线 AC 相切, 则点 M 到直线 AC 的距离即为圆半径 $\frac{4}{5}\sqrt{5}$ 。因为 M 同时也在抛物线上, 因此利用平行线间距离处处相等的性质, 先在 x 轴上找到与直线 AC 距离为 $\frac{4}{5}\sqrt{5}$ 的点 D , 过点 D 作与直线 AC 平行的直线, 根据平行直线的解析式中 k 相等的性质确定直线解析式, 再联立直线与抛物线解析式求得 M 坐标。

在 x 轴上取一点 D , 过点 D 作 $DE \perp AC$ 于点 E , 使 $DE = \frac{4}{5}\sqrt{5}$

$$\because \angle COA = \angle DEA = 90^\circ, \angle OAC = \angle EAD$$

$$\therefore \triangle AED \sim \triangle AOC, \therefore \frac{AD}{AC} = \frac{DE}{OC}$$

$$\therefore \frac{AD}{\sqrt{5}} = \frac{\frac{4}{5}\sqrt{5}}{2}, \text{ 解得 } AD = 2$$

$$\therefore D(1,0) \text{ 或 } D(-3,0)$$

过点 C 作 $DM \parallel AC$ ，交抛物线于点 M，

设直线 AC 的解析式为 $y=kx-2$ ，将 A (-1, 0) 代入可得， $-k-2=0$ ，解得 $k=-2$ ，

$\therefore$ 设直线 DM 解析式为 $y=-2x+b$ ，将 D (1,0) 或 D (-3,0) 代入可得：

$$-2+b=0 \text{ 或 } 6+b, \text{ 解得 } b=2 \text{ 或 } b=-6,$$

则直线 DM 的解析式为 $y=-2x+2$ 或 $y=-2x-6$ ；

$$\text{当 } -2x-6=x^2-x-2 \text{ 时， } x^2+x+4=0,$$

$$\Delta=1-16=-15<0, \text{ 方程无实数解；}$$

$$\text{当 } -2x+2=x^2-x-2 \text{ 时， } x^2+x-4=0,$$

$$\text{解得 } x_1=(-1-17^{(1/2)})/2, x_2=(-1+17^{(1/2)})/2,$$

$$\therefore \text{点 M 的坐标为 } ((-1-17^{(1/2)})/2, 3+17^{(1/2)}) \text{ 或 } ((-1+17^{(1/2)})/2, 3-17^{(1/2)})$$

例 7 (2012 年天津市中考第 25 题) 已知一个矩形纸片 OACB，将该纸片放置在平面直角坐标系中，点 A (11, 0)，点 B (0, 6)，点 P 为 BC 边上的动点 (点 P 不与点 B、C 重合)，经过点 O、P 折叠该纸片，得点 B' 和折痕 OP。设 $BP=t$ 。

- (1) 如图①，当 $\angle BOP=30^\circ$ 时，求点 P 的坐标；
- (2) 如图②，经过点 P 再次折叠纸片，使点 C 落在直线 PB' 上，得点 C' 和折痕 PQ，若 $AQ=m$ ，试用含有 t 的式子表示 m；
- (3) 在 (2) 的条件下，当点 C' 恰好落在边 OA 上时，求点 P 的坐标 (直接写出结果即可)。

【解答】

(I) 根据题意， $\angle OBP=90^\circ$ ， $OB=6$ 。

在 $Rt\triangle OBP$ 中，由 $\angle BOP=30^\circ$ ， $BP=t$ ，得 $OP=2t$ 。

$\because OP^2=OB^2+BP^2$ ，即 $(2t)^2=6^2+t^2$ ，解得： $t_1=2\sqrt{3}$ ， $t_2=-2\sqrt{3}$

(舍去)。

$\therefore$ 点 P 的坐标为 $(2\sqrt{3}, 6)$ 。

(II) $\because \triangle OB'P$ 、 $\triangle QC'P$ 分别是由 $\triangle OBP$ 、 $\triangle QCP$ 折叠得到的，

$\therefore \triangle OB'P \cong \triangle OBP$ ， $\triangle QC'P \cong \triangle QCP$ 。

$\therefore \angle OPB' = \angle OPB$ ， $\angle QPC' = \angle QPC$ 。

$\because \angle OPB' + \angle OPB + \angle QPC' + \angle QPC = 180^\circ$ ， $\therefore \angle OPB + \angle QPC = 90^\circ$ 。

$\because \angle BOP + \angle OPB = 90^\circ$ ， $\therefore \angle BOP = \angle CPQ$ 。

又 $\because \angle OBP = \angle C = 90^\circ$ ， $\therefore \triangle OBP \sim \triangle PCQ$ 。 $\therefore \frac{OB}{PC} = \frac{BP}{CQ}$ 。

由题意设 $BP=t$ ， $AQ=m$ ， $BC=11$ ， $AC=6$ ，则 $PC=11-t$ ， $CQ=6-m$ 。

$\therefore \frac{6}{11-t} = \frac{t}{6-m}$ 。 $\therefore m = \frac{1}{6}t^2 - \frac{11}{6}t + 6$ ($0 < t < 11$)。

例 8 (2012 年湖州市中考第 24 题) 如图 1, 已知菱形 ABCD 的边长为 $2\sqrt{3}$, 点 A 在 x 轴负半轴上, 点 B 在坐标原点, 点 D 的坐标为 $(-\sqrt{3}, 3)$, 抛物线 $y=ax^2+b$ ($a \neq 0$) 经过 AB、CD 的中点.

(1) 求这条抛物线的函数解析式;

(2) 将菱形 ABCD 以每秒 1 个单位长度的速度沿 x 轴正方向匀速平移 (如图 2), 过点 B 作 $BE \perp CD$ 于点 E, 交抛物线于点 F, 连结 DF、AF. 设菱形 ABCD 平移的时间为 t 秒 ($0 < t < \sqrt{3}$)

①是否存在这样的 t, 使 $\triangle ADF$ 与 $\triangle DEF$ 相似? 若存在, 求出 t 的值; 若不存在, 请说明理由;

②连接 FC, 以点 F 为旋转中心, 将 $\triangle FEC$ 按顺时针方向旋转 180° 得 $\triangle F'E'C$, 当 $\triangle F'E'C$ 落在 x 轴与抛物线在 x 轴上方的部分围成的图形中 (包括边界) 时, 求 t 的取值范围. (写出答案即可)

【解答】

(1) 由题意得 AB 的中点坐标为 $(-3, 0)$, CD 的中点坐标为 $(0, 3)$,

分别代入 $y=ax^2+b$, 得 $\begin{cases} (-3)^2 a + b = 0 \\ b = 3 \end{cases}$, 解得, $\begin{cases} a = -1 \\ b = 3 \end{cases}$ 。

$\therefore$ 这条抛物线的函数解析式为 $y=-x^2+3$ 。

(2) ①存在。如图 2 所示, 在 $Rt\triangle BCE$ 中, $\angle BEC=90^\circ$, $BE=3$, $BC=2\sqrt{3}$,

$\therefore \sin C = \frac{BE}{BC} = \frac{3}{2\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$ 。 $\therefore \angle C=60^\circ$, $\angle CBE=30^\circ$ 。 $\therefore EC = \frac{1}{2}BC = \sqrt{3}$, $DE = \sqrt{3}$ 。

又 $\because AD \parallel BC$, $\therefore \angle ADC + \angle C = 180^\circ$ 。 $\therefore \angle ADC = 180^\circ - 60^\circ = 120^\circ$

要使 $\triangle ADF$ 与 $\triangle DEF$ 相似, 则 $\triangle ADF$ 中必有一个角为直角。

(I) 若 $\angle ADF=90^\circ$, $\angle EDF=120^\circ-90^\circ=30^\circ$ 。

在 $Rt\triangle DEF$ 中, $DE=\sqrt{3}$, 得 $EF=1$, $DF=2$ 。

又 $\because E(t, 3), F(t, -t^2+3)$, $\therefore EF=3-(-t^2+3)=t^2$ 。 $\therefore t^2=1$ 。

$\because t>0$, $\therefore t=1$ 。

此时 $\frac{AD}{DE}=\frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{3}}=2, \frac{DF}{EF}=2$, $\therefore \frac{AD}{DE}=\frac{DF}{EF}$ 。

又 $\because \angle ADF=\angle DEF$, $\therefore \triangle ADF \sim \triangle DEF$ 。

(II) 若 $\angle DFA=90^\circ$, 可证得 $\triangle DEF \sim \triangle FBA$, 则 $\frac{DE}{FB}=\frac{EF}{BA}$ 。

设 $EF=m$, 则 $FB=3-m$ 。

$\therefore \frac{\sqrt{3}}{3-m}=\frac{m}{2\sqrt{3}}$, 即 $m^2-3m+6=0$, 此方程无实数根。 $\therefore$ 此时 t 不存在。

(III) 由题意得, $\angle DAF<\angle DAB=60^\circ$, $\therefore \angle DAF \neq 90^\circ$, 此时 t 不存在。

综上所述, 存在 $t=1$, 使 $\triangle ADF$ 与 $\triangle DEF$ 相似。

$$\textcircled{2} \sqrt{6}-\sqrt{3} \leq t \leq \frac{\sqrt{6}}{2}。$$

如图 3 所示, 依题意作出旋转后的三角形 $\triangle FE'C'$, 过 C' 作 $MN \perp x$ 轴, 分别交抛物线、 x 轴于点 M 、点 N 。

观察图形可知, 欲使 $\triangle FE'C'$ 落在指定区域内,

必须满足: $EE' \leq BE$ 且 $MN \geq C'N$ 。

$\because F(t, 3-t^2)$, $\therefore EF=3-(-t^2+3)=t^2$, $\therefore EE'=2EF=2t^2$,

由 $EE' \leq BE$, 得 $2t^2 \leq 3$, 解得 $t \leq \sqrt{6}/2$ 。

$\because C'E'=CE=\sqrt{3}$, $\therefore C'$ 点的横坐标为 $t-\sqrt{3}/2$,

$\therefore MN=3-(t-\sqrt{3}/2)^2$, 又 $C'N=BE'=BE-EE'=3-2t^2$,

由 $MN \geq C'N$, 得 $3-(t-\sqrt{3}/2)^2 \geq 3-2t^2$,

解得 $t \geq \sqrt{6}/2 - \sqrt{3}/2$ 或 $t \leq \sqrt{6}/2 - 3$ (舍)。

$\therefore t$ 的取值范围为: $\sqrt{6}/2 - \sqrt{3}/2 \leq t \leq \sqrt{6}/2$ 。

例 9 (2012 年苏州市中考第 29 题) 如图 1, 已知抛物线 $y = \frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{4}(b+1)x + \frac{b}{4}$ (b 是实数且 $b > 2$) 与 x 轴的正半轴分别交于点 A、B (点 A 位于点 B 左侧), 与 y 轴的正半轴交于点 C.

(1) 点 B 的坐标为_____, 点 C 的坐标为_____ (用含 b 的代数式表示);

(2) 请你探索在第一象限内是否存在点 P, 使得四边形 PCOB 的面积等于 $2b$, 且 $\triangle PBC$ 是以点 P 为直角顶点的等腰直角三角形? 如果存在, 求出点 P 的坐标; 如果不存在, 请说明理由;

(3) 请你进一步探索在第一象限内是否存在点 Q, 使得 $\triangle QCO$ 、 $\triangle QOA$ 和 $\triangle QAB$ 中的任意两个三角形均相似 (全等可看作相似的特殊情况)? 如果存在, 求出点 Q 的坐标; 如果不存在, 请说明理由.

【解答】

解: (1) $B(b, 0)$, $C(0, \frac{b}{4})$.

(2) 假设存在这样的点 P, 使得四边形 PCOB 的面积等于 $2b$, 且 $\triangle PBC$ 是以点 P 为直角顶点的等腰直角三角形.

设点 P 坐标 (x, y) , 连接 OP,

$$\text{则 } S_{\text{四边形PCOB}} = S_{\triangle PCO} + S_{\triangle POB} = \frac{1}{2} \cdot \frac{b}{4} \cdot x + \frac{1}{2} \cdot b \cdot y = 2b$$

$$\therefore x + 4y = 16.$$

过 P 作 $PD \perp x$ 轴, $PE \perp y$ 轴, 垂足分别为 D、E,

$$\therefore \angle PEO = \angle EOD = \angle ODP = 90^\circ. \therefore \text{四边形 PEOD 是矩形}. \therefore \angle EPD = 90^\circ.$$

$$\because \triangle PBC \text{ 是等腰直角三角形}, \therefore PC = PB, \angle BPC = 90^\circ.$$

$$\therefore \angle EPC = \angle BPD. \therefore \triangle PEC \cong \triangle PDB \text{ (AAS)}. \therefore PE = PD, \text{ 即 } x = y.$$

$$\text{由} \begin{cases} x=y \\ x+4y=16 \end{cases} \text{解得, } x=y=16/5.$$

由 $\triangle PEC \cong \triangle PDB$ 得 $EC=DB$, 即, $16/5-b/4=b-16/5$ 解得 $b=128/25 > 2$ 符合题意。

$\therefore$ 点 P 坐标为 $(16/5, 16/5)$ 。

(3) 存在, 假设存在这样的点 Q , 使得 $\triangle QCO$, $\triangle QOA$ 和 $\triangle QAB$ 中的任意两个三角形均相似, 由条件可知: 要使 $\triangle QOA$ 与 $\triangle QAB$ 相似, 只能 $\angle QAO = \angle BAQ = 90^\circ$, 即 $QA \perp x$ 轴; 要使 $\triangle QOA$ 与 $\triangle OQC$ 相似, 只能 $\angle QCO = 90^\circ$ 或 $\angle OQC = 90^\circ$ 。再分别讨论求出满足题意 Q 的坐标即可。

①当 $\angle OCQ = 90^\circ$ 时, $\triangle QOA \cong \triangle OQC$, $\therefore AQ = CO = b/4$ 。

$$\text{由 } AQ^2 = OA \cdot AB \text{ 得: } \left(\frac{b}{4}\right)^2 = b-1, \text{ 解得: } b = 8 \pm 4\sqrt{3}.$$

$$\because b > 2, \therefore b = 8 + 4\sqrt{3}, \frac{b}{4} = 2 + \sqrt{3}. \therefore \text{点 } Q \text{ 坐标为 } (1, 2 + \sqrt{3}).$$

②当 $\angle OQC = 90^\circ$ 时, $\triangle QOA \sim \triangle OCQ$, $\therefore \frac{OQ}{CO} = \frac{AQ}{QC}$, 即。 $OQ^2 = AQ \cdot CO$

$$\text{又 } AQ^2 = OA \cdot AB, \therefore AQ \cdot CO = OA \cdot OB, \text{ 即 } AQ \cdot \frac{b}{4} = 1 \cdot b, \text{ 解得: } AQ = 4$$

此时 $b = 17 > 2$ 符合题意。 $\therefore$ 点 Q 坐标为 $(1, 4)$ 。

综上所述: 存在点 $Q (1, 2 + \sqrt{3})$ 或 $(1, 4)$, 使得 $\triangle QCO$ 、 $\triangle QOA$ 和 $\triangle QAB$ 中的任意两个三角形均相似。

例 10（2012 年黄冈市中考第 25 题） 如图，已知抛物线的方程 C_1 ：
 $y = \frac{1}{m}(x+2)(x-m)$ ($m > 0$) 与 x 轴相交于点 B、C，与 y 轴相交于点 E，且点 B
 在点 C 的左侧。

- (1) 若抛物线 C_1 过点 M (2, 2)，求实数 m 的值；
- (2) 在 (1) 的条件下，求 $\triangle BCE$ 的面积；
- (3) 在 (1) 的条件下，在抛物线的对称轴上找一点 H，使 $BH+EH$ 最小，
 并求出点 H 的坐标；
- (4) 在第四象限内，抛物线 C_1 上是否存在点 F，使得以点 B、C、F 为顶点的
 三角形与 $\triangle BCE$ 相似？若存在，求 m 的值；若不存在，请说明理由。

【解答】

(1) $\because$ 抛物线 C_1 过点 M(2, 2)， $\therefore 2 = -\frac{1}{m}(2+2)(2-m)$ ，解得 $m=4$ 。

(2) 由 (1) 得 $y = \frac{1}{4}(x+2)(x-4)$ 。

令 $x=0$ ，得 $y=2$ 。 $\therefore E(0, 2)$ ， $OE=2$ 。

令 $y=0$ ，得 $0 = \frac{1}{4}(x+2)(x-4)$ ，解得 $x_1 = -2$ ， $x_2 = 4$ 。

$\therefore B(-2, 0)$ ， $C(4, 0)$ ， $BC=6$ 。

$\therefore \triangle BCE$ 的面积 $= \frac{1}{2} \times 6 \times 2 = 6$ 。

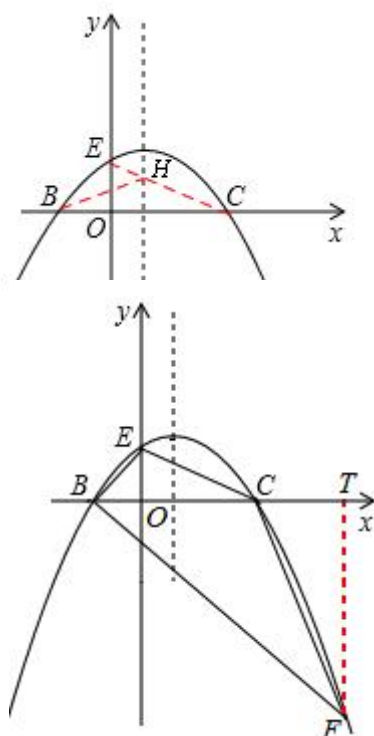
(3) 由 (2) 可得 $y = \frac{1}{4}(x+2)(x-4)$ 的对称轴为 $x=1$ 。

连接 CE，交对称轴于点 H，由轴对称的性质和两点之间线段最短的性质，
 知此时 $BH+EH$ 最小。

设直线 CE 的解析式为 $y=kx+b$ ，则

$$\begin{cases} 4k+b=0 \\ b=2 \end{cases}, \text{解得} \begin{cases} k=-\frac{1}{2} \\ b=2 \end{cases}。 \therefore \text{直线 CE 的解析式为 } y=-\frac{1}{2}x+2。$$

当 $x=1$ 时， $y=3/2$ 。 $\therefore H(1, 3/2)$ 。



(4) 存在。分两种情形讨论：

①当 $\triangle BEC \sim \triangle BCF$ 时，如图所示。

则 $BE/BC=BC/BF$ ， $\therefore BC^2=BE \cdot BF$ 。

由 (2) 知 $B(-2, 0)$ ， $E(0, 2)$ ，即 $OB=OE$ ，

$\therefore \angle EBC=45^\circ$ ， $\therefore \angle CBF=45^\circ$ 。

作 $FT \perp x$ 轴于点 F ，则 $BT=TF$ 。

$\therefore$ 令 $F(x, -x-2)$ ($x>0$)，

又点 F 在抛物线上， $\therefore -x-2=-1/m^2(x+2)(x-m)$ ，

$\because x+2>0$ ($\because x>0$)， $\therefore x=2m$ ， $F(2m, -2m-2)$ 。

此时

$$BF = \sqrt{(2m+2)^2 + (-2m-2)^2} = 2\sqrt{2}(m+1), BE = 2\sqrt{2}, BC = m+2,$$

又 $BC^2=BE \cdot BF$ ， $\therefore (m+2)^2 = 2\sqrt{2} \cdot 2\sqrt{2}(m+1)$ ，解得 $m=2 \pm 2\sqrt{2}$ 。

$\because m>0$ ， $\therefore m=2+2\sqrt{2}$ 。

②当 $\triangle BEC \sim \triangle FCB$ 时，如答图 3 所示。 则 $BC/BF=EC/BC$ ， $\therefore BC^2=EC \cdot BF$ 。

同①， $\because \angle EBC=\angle CFB$ ， $\triangle BTF \sim \triangle COE$ ，

$\therefore$ 可令 $F(x, -2/\pi^2(x+2))$ ($x>0$)

又点 F 在抛物线上， $\therefore -2/\pi^2(x+2) = -1/\pi^2(x+2)(x-m)$ ，

$\because x+2>0$ ($\because x>0$)， $\therefore x=m+2$ ， $\therefore F(m+2, -2/\pi^2(m+2))$ ，

$EC = (m^2+4)^{1/2}$ ， $BC=m+2$ ，

又 $BC^2=EC \cdot BF$ ， $\therefore (m+2)^2 = (m^2+4)^{1/2}((m+2)^2+4*(m+4)^2/m^2)^{1/2}$ 整理得：

$0=16$ ，显然不成立。

综合①②得，在第四象限内，抛物线上存在点 F ，使得以点 B 、 C 、 F 为顶点的三角形与 $\triangle BCE$

相似， $m=2+2\sqrt{2}$ 。

例 11 (2012 年福州市中考第 22 题) 如图 1, 已知抛物线 $y = ax^2 + bx$ ($a \neq 0$) 经过 A (3, 0)、B (4, 4) 两点.

(1) 求抛物线的解析式;

(2) 将直线 OB 向下平移 m 个单位长度后, 得到的直线与抛物线只有一个公共点 D, 求 m 的值及点 D 的坐标;

(3) 如图 2, 若点 N 在抛物线上, 且 $\angle NBO = \angle ABO$, 则在 (2) 的条件下, 求出所有满足

$\triangle POD \sim \triangle NOB$ 的点 P 的坐标 (点 P、O、D 分别与点 N、O、B 对应).

【解答】

(1) 可采用待定系数法。则有 $\begin{cases} 9a + 3b = 0 \\ 16a + 4b = 4 \end{cases}$ 得 $\begin{cases} a = 1 \\ b = -3 \end{cases}$

解析式为: $y = x^2 - 3x$;

(2) 可解的直线 OB 的解析式为 $y = x$;

设平移后的表达式为 $y = x - m$; $\because$ 直线与抛物线只有一个公共点,

$\therefore$ 即有 $x^2 - 3x = x - m$;

$\therefore x^2 - 4x + m = 0$; $\Delta = b^2 - 4ac = (-4)^2 - 4 \times 1 \times m = 0$; $m = 4$

解析式 为: $y = x - 4$; 则可得点 D 的坐标是(2, -2)。

③方法一:

情况一: 可过点 B 分别作 x 轴和 y 轴的垂线 BF 和 BE;

$\because$ 易证四边形 BFOE 为正方形, 且 $\angle NBO = \angle ABO$,

OB 为正方形的对角线平分一组对角; $\therefore \angle EBO = \angle FBO = 45^\circ$, $\angle EBH = \angle FBA$ (等式的性质)

$\therefore \triangle EBH \cong \triangle FBA$ (“ASA”), $EH = AF$, 点 H 的坐标为 (0,3)

$\because$ 点 H 的坐标为 (0,3), 点 B 的坐标为 (4,4), 可用待定系数法解:

直线 NB 的表达式为: $y = \frac{1}{4}x + 3$, 即有 $\frac{1}{4}x + 3 = x^2 - 3x$

得 $x_1 = -\frac{3}{4}; x_2 = 4$ (不合题意, 舍去)

$\therefore$ 点 N 的坐标为 $(-\frac{3}{4}, \frac{45}{16})$;

$\because OD$ 的长为 $2\sqrt{2}$; OB 的长为 $4\sqrt{2}$; $\therefore$ 相似比为 $\frac{OD}{OB} = \frac{1}{2}$;

$\because$ 直线 OD 的解析式为 $y = -x$, 直线 OB 的解析式为 $y = x$, 即有 $\angle AOD = \angle AOB$;

且 $\angle ODP_1 = \angle NBO = \angle ABO$; $\therefore$ 也有 $\triangle ODG \sim \triangle OBA$, 相似比为 $\frac{OD}{OB} = \frac{1}{2}$;

$\frac{OG}{OA} = \frac{OD}{OB} = \frac{DG}{BA} = \frac{1}{2}$; 得 OG 得值为 $\frac{3}{2}$; P_1D 的解析式为 $y = -4x + 6$;

过点 N 与点 P_1 作 y 轴和 x 轴的垂线 NK, P_1I ; 则有

$\triangle NKO \sim \triangle P_1IO$; P_1I 的长为 $\frac{3}{8}$; 带入 $y = -4x + 6$;

可知 OI 为 $\frac{45}{32}$; 点 P_1 的坐标为 $(\frac{45}{32}, \frac{3}{8})$;

情况二: 可过点 P_2 和点 N 作 y 轴的垂线 P_2L 与 NM ;

$\because \triangle P_2LO \sim \triangle NMO$ (注: 若有 $\triangle POD \sim \triangle NOB$, 则 $\angle POD = \angle NOB$)

$\therefore$ 相似比为 $\frac{OD}{OB} = \frac{1}{2}$; $P_2L = \frac{3}{8}$; $LO = \frac{45}{32}$;

$\therefore$ 点 P_1 的坐标为 $(-\frac{3}{8}, -\frac{45}{32})$;

故综上所述点 P 可为 $(\frac{45}{32}, \frac{3}{8})$; $(-\frac{3}{8}, -\frac{45}{32})$ 。

方法二: ① $\because$ 直线 OD 的解析式为 $y = -x$, 直线 OB 的解析式为 $y = x$; $\therefore OB \perp OD$; 便可

将 $\triangle OBN$ 旋转 90° , 使得 OB 位于直线 OD 上;

如图所示: $DP \parallel N^1B^1$, 同理可知点 P 为 $(\frac{45}{32}, \frac{3}{8})$;

将 $\triangle OPD$ 沿着直线 OD 翻折, 即为另一 P 点 $(-\frac{3}{8}, -\frac{45}{32})$ 。

② 可过 x 轴作 $\triangle OBN$ 的轴对称图形, 如图所示: $DP \parallel N^1B^1$

同理可知点 P 为 $(-\frac{3}{8}, -\frac{45}{32})$ 。

将 $\triangle OPD$ 沿着直线 OD 翻折, $(\frac{45}{32}, \frac{3}{8})$ 。

例 12 (2013 年上海市中考第 24 题) 如图 1, 在平面直角坐标系 xOy 中, 顶点为 M 的抛物线 $y=ax^2+bx(a>0)$ 经过点 A 和 x 轴正半轴上的点 B , $AO=BO=2$, $\angle AOB=120^\circ$.

- (1) 求这条抛物线的表达式;
- (2) 连结 OM , 求 $\angle AOM$ 的大小;
- (3) 如果点 C 在 x 轴上, 且 $\triangle ABC$ 与 $\triangle AOM$ 相似, 求点 C 的坐标.

【解答】

(1) 如图 2, 过点 A 作 $AH \perp y$ 轴, 垂足为 H .
 在 $Rt\triangle AOH$ 中, $AO=2$, $\angle AOH=30^\circ$,
 所以 $AH=1$, $OH=\sqrt{3}$. 所以 $A(-1, \sqrt{3})$.
 因为抛物线与 x 轴交于 O 、 $B(2,0)$ 两点,
 设 $y=ax(x-2)$, 代入点 $A(-1, \sqrt{3})$, 可得 $a=\frac{\sqrt{3}}{3}$.
 所以抛物线的表达式为 $y=\frac{\sqrt{3}}{3}x(x-2)=\frac{\sqrt{3}}{3}x^2-\frac{2\sqrt{3}}{3}x$.
 (2) 由 $y=\frac{\sqrt{3}}{3}x^2-\frac{2\sqrt{3}}{3}x=\frac{\sqrt{3}}{3}(x-1)^2-\frac{\sqrt{3}}{3}$,
 得抛物线的顶点 M 的坐标为 $(1, -\frac{\sqrt{3}}{3})$. 所以 $\tan \angle BOM = \frac{\sqrt{3}}{3}$.

所以 $\angle BOM=30^\circ$. 所以 $\angle AOM=150^\circ$.

(3) 由 $A(-1, \sqrt{3})$ 、 $B(2,0)$ 、 $M(1, -\frac{\sqrt{3}}{3})$,
 得 $\tan \angle ABO = \frac{\sqrt{3}}{3}$, $AB=2\sqrt{3}$, $OM=\frac{2\sqrt{3}}{3}$.

所以 $\angle ABO=30^\circ$, $\frac{OA}{OM}=\sqrt{3}$.

因此当点 C 在点 B 右侧时, $\angle ABC=\angle AOM=150^\circ$.

$\triangle ABC$ 与 $\triangle AOM$ 相似, 存在两种情况:

①当 $\frac{BA}{BC} = \frac{OA}{OM} = \sqrt{3}$ 时, $BC = \frac{BA}{\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = 2$. 此时 $C(4,0)$.

②当 $\frac{BC}{BA} = \frac{OA}{OM} = \sqrt{3}$ 时, $BC = \sqrt{3}BA = \sqrt{3} \times 2\sqrt{3} = 6$. 此时 $C(8,0)$.

例 13 (2013 年济南市中考第 24 题) 如图 1, 在直角坐标系中有一直角三角形 $\triangle AOB$, O 为坐标原点, $OA=1$, $\tan \angle BAO=3$, 将此三角形绕原点 O 逆时针旋转 90° , 得到 $\triangle DOC$. 抛物线 $y=ax^2+bx+c$ 经过点 A 、 B 、 C .

(1) 求抛物线的解析式;

(2) 若点 P 是第二象限内抛物线上的动点, 其横坐标为 t .

①设抛物线对称轴 l 与 x 轴交于点 E , 连结 PE , 交 CD 于 F . 求出 $\triangle CEF$ 与 $\triangle COD$ 相似时点 P 的坐标;

②是否存在一点 P , 使 $\triangle PCD$ 的面积最大? 若存在, 求出 $\triangle PCD$ 面积的最大值; 若不存在, 请说明理由.

【解答】

(1) 在 $Rt\triangle AOB$ 中, $OA=1$, $\tan \angle BAO=OB/OA=3$,

$\therefore OB=3OA=3$.

$\because \triangle DOC$ 是由 $\triangle AOB$ 绕点 O 逆时针旋转 90° 而得到的,

$\therefore \triangle DOC \cong \triangle AOB$, $\therefore OC=OB=3$, $OD=OA=1$,

$\therefore A$ 、 B 、 C 的坐标分别为 $(1, 0)$, $(0, 3)$ $(-3, 0)$.

代入解析式为 $\begin{cases} a+b+c=0 \\ 9a-3b+c=0 \\ c=3 \end{cases}$, 解得: $\begin{cases} a=-1 \\ b=-2 \\ c=3 \end{cases}$.

$\therefore$ 抛物线的解析式为 $y=-x^2-2x+3$;

(2) ① $\because$ 抛物线的解析式为 $y=-x^2-2x+3$, $\therefore$ 对称轴 $l=-b/2a=-1$,

$\therefore E$ 点的坐标为 $(-1, 0)$.

如图, 当 $\angle CEF=90^\circ$ 时, $\triangle CEF \sim \triangle COD$.

此时点 P 在对称轴上，即点 P 为抛物线的顶点，P (-1, 4)；

当 $\angle CFE=90^\circ$ 时， $\triangle CFE \sim \triangle COD$ ，

过点 P 作 $PM \perp x$ 轴于点 M，则 $\triangle EFC \sim \triangle EMP$ 。

$\therefore EM/MP = EF/FC = DO/OC = 1/3$ ， $\therefore MP = 3EM$ 。

$\because$ P 的横坐标为 t， $\therefore P(t, -t^2 - 2t + 3)$ 。

$\because$ P 在二象限， $\therefore PM = -t^2 - 2t + 3$ ， $EM = -1 - t$ ，

$\therefore -t^2 - 2t + 3 = 3(-1 - t)$ ，解得： $t_1 = -2$ ， $t_2 = -3$ （与 C 重合，舍去），

$\therefore t = -2$ 时， $y = -(-2)^2 - 2 \times (-2) + 3 = 3$ 。

$\therefore P(-2, 3)$ 。

$\therefore$ 当 $\triangle CEF$ 与 $\triangle COD$ 相似时，P 点的坐标为：(-1, 4) 或 (-2, 3)；

② 设直线 CD 的解析式为 $y = kx + b$ ，由题意，得
$$\begin{cases} -3k + b = 0 \\ b = 1 \end{cases}$$
，

解得：
$$\begin{cases} k = \frac{1}{3} \\ b = 1 \end{cases}$$
， $\therefore$ 直线 CD 的解析式为： $y = \frac{1}{3}x + 1$ 。

设 PM 与 CD 的交点为 N，则点 N 的坐标为 $(t, \frac{1}{3}t + 1)$ ，

$\therefore NM = \frac{1}{3}t + 1$ 。 $\therefore PN = PM - NM = -t^2 - 2t + 3 - (\frac{1}{3}t + 1) = -t^2 - \frac{7}{3}t + 2$ 。

$\because S_{\triangle PCD} = S_{\triangle PCN} + S_{\triangle PDN}$ ，

$\therefore S_{\triangle PCD} = \frac{1}{2} PM \cdot CM + \frac{1}{2} PN \cdot OM = \frac{1}{2} PN (CM + OM) = \frac{1}{2} PN \cdot OC = \frac{1}{2} \times 3$

$(-t^2 - \frac{7}{3}t + 2) = -\frac{3}{2}(t + \frac{7}{6})^2 + \frac{121}{24}$ ，

$\therefore$ 当 $t = -\frac{7}{6}$ 时， $S_{\triangle PCD}$ 的最大值为 $\frac{121}{24}$ 。

例 14 (2013 年徐州市中考第 28 题) 如图 1, 二次函数 $y=(1/2)x^2+bx-3/2$ 的图像与 x 轴交于 $A(-3,0)$ 和点 B , 以 AB 为边在 x 轴上方作正方形 $ABCD$, 点 P 是 x 轴上一动点, 连结 DP , 过点 P 作 DP 的垂线与 y 轴交于点 E .

(1) 请直接写出点 D 的坐标: _____;

(2) 当点 P 在线段 AO (点 P 不与 A 、 O 重合) 上运动时, 线段 OE 的长有最大值, 求出这个最大值;

(3) 是否存在这样的点 P , 使 $\triangle PED$ 是等腰三角形? 若存在, 请求出点 P 的坐标及此时 $\triangle PED$ 与正方形 $ABCD$ 重叠部分的面积; 若不存在, 请说明理由.

【解答】

(1) $(-3, 4)$

(2) 设 $PA=t$, $OE=l$,

由 $\angle DAP = \angle POE = \angle DPE = 90^\circ$,

得 $\triangle DAP \sim \triangle POE$,

$$\therefore \frac{4}{3-t} = \frac{t}{l}$$

$$\therefore l = -\frac{1}{4}t^2 + \frac{3}{4}t = -\frac{1}{4}(t-\frac{3}{2})^2 + \frac{9}{16}$$

$\therefore$ 当 $t=\frac{3}{2}$ 时, l 有最大值 $\frac{9}{16}$, 即 P 为 AO 中点时, OE 的最大值为 $\frac{9}{16}$.

(3) 存在

① 当 P 在 y 轴左侧时, P 点的坐标为 $(-4, 0)$

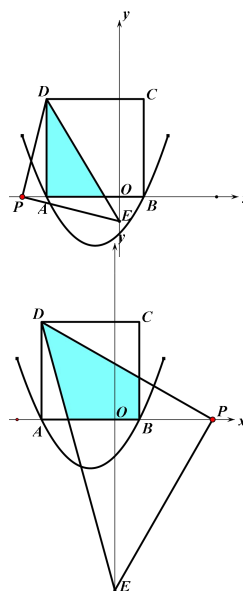
由 $\triangle PAD \cong \triangle PEO$, 得 $OE=PA=1$, $\therefore OP=OA+PA=4$,

$$\therefore AG = \frac{4}{5}AO = \frac{12}{5},$$

$$\therefore \text{重叠部分的面积} = \frac{1}{2} \times 4 \times \frac{12}{5} = \frac{24}{5}$$

② 当 P 在 y 轴右侧时, P 点的坐标为 $(4, 0)$

(仿照① 的步骤, 此时的重叠部分的面积为 $\frac{712}{77}$)



例 15 (2013 年陕西省中考第 24 题) 在平面直角坐标系中，一个二次函数的图象经过点 A (1, 0)、B (3, 0) 两点.

- (1) 写出这个二次函数的对称轴；
- (2) 设这个二次函数的顶点为 D，与 y 轴交于点 C，它的对称轴与 x 轴交于点 E，连接 AC、DE 和 DB，当 $\triangle AOC$ 与 $\triangle DEB$ 相似时，求这个二次函数的表达式.

【解答】

(1) 二次函数图像的对称轴为直线 $x=2$ ；

(2) 设二次函数的表达式为 $y=a*(x-1)*(x-3)$ ($a \neq 0$),

当 $x=0$ 时, $y=3*a$, 当 $2x$ 时, ya .

$\therefore$ 点 C 坐标为 $(0, 3*a)$, 顶点 D 坐标为 $(2, -a)$

$\therefore OC=|3*a|$, 又 $\because A(1, 0), B(2, 0)$

$\therefore OA=1, EB=1, DE=|-a|=a$

当 $\triangle AOC$ 与 $\triangle DEB$ 相似时,

①假设 $\angle OCA = \angle EBD$,

可得 $AO/DE = OC/EB$. 即 $1/|a| = |3*a|/1$

$\therefore a = 3^{(1/2)}/3$ 或 $a = -3^{(1/2)}/3$

②假设 $\angle OCA = \angle EDB$, 可得 $AO/EB = OC/ED$

$\therefore 1/1 = |3*a|/|a|$ 此方程无解

综上所述, 所求二次函数的表达式为 $y = 3^{(1/2)}/3 * x^2 - 4*3^{(1/2)}/3 * x + 3^{(1/2)}$ 或 $y = -3^{(1/2)}/3 * x^2 + 4*3^{(1/2)}/3 * x - 3^{(1/2)}$

例 16 (2013 年乌鲁木齐市中考第 24 题) 如图 1. 在平面直角坐标系中, 边长为 $2^{\frac{1}{2}}$ 的正方形 ABCD 的顶点 A、B 在 x 轴上, 连接 OD、BD, $\triangle BOD$ 的外心 I 在中线 BF 上, BF 与 AD 交于点 E.

(1) 求证: $\triangle OAD \cong \triangle EAB$;

(2) 求过点 O、E、B 的抛物线所表示的二次函数解析式;

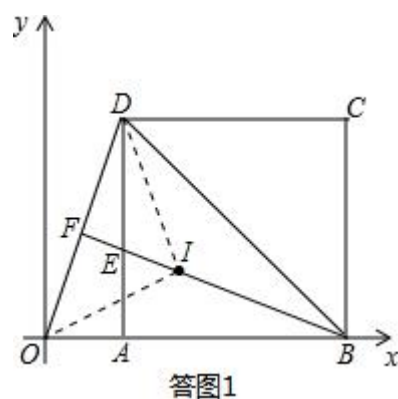
(3) 在 (2) 中的抛物线上是否存在点 P, 其关于直线 BF 的对称点在 x 轴上?

若有, 求出点 P 的坐标;

(4) 连接 OE, 若点 M 是直线 BF 上的一动点, 且 $\triangle BMD$ 与 $\triangle OED$ 相似, 求点 M 的坐标.

【解答】

(1) 证明: 如答图 1 所示, 连接 ID, IO,



$\because I$ 为 $\triangle BOD$ 的外心, $\therefore IO = ID$,

又 F 为 OD 的中点, $\therefore IF \perp OD$.

$\therefore \angle DEF + \angle FDE = \angle AEB + \angle ABE = 90^\circ$, 又 $\angle DEF = \angle AEB$,

$\therefore \angle FDE = \angle EBA$. 而 $DA = BA$, 且 $\angle OAD = \angle EAB = 90^\circ$,

$\therefore \triangle OAD \cong \triangle EAB$.

(2) 由 (1) 知 $IF \perp OD$, 又 BF 为中线,

$$\therefore BO=BD=2^{1/2} \cdot AB=2,$$

$$\therefore OA=BO-AB=2-2^{1/2}.$$

由 (1) 知 $\triangle OAD \cong \triangle EAB$, $\therefore AE=OA=2-2^{1/2}$,

$$\therefore E(2-2^{1/2}, 2-2^{1/2}), B(2, 0).$$

设过点 O 、 B 、 E 的抛物线解析式为 $y=ax^2+bx$,

$$\text{则有} \begin{cases} 4a+2b=0 \\ a(2-2^{1/2})^2+b(2-2^{1/2})=(2-2^{1/2}) \end{cases},$$

$$\text{解得} \begin{cases} a=-2^{1/2}/2 \\ b=2^{1/2} \end{cases},$$

$$\therefore \text{抛物线的解析式为: } y=-2^{1/2}/2 \cdot x^2+2^{1/2} \cdot x.$$

(3) $\because$ 直线 BD 与 x 轴关于直线 BF 对称,

$\therefore$ 抛物线与直线 BD 的交点, 即为所求之点 P .

由 (2) 可知, $B(2, 0)$, $D(2-2^{1/2}, 2^{1/2})$,

可得直线 BD 的解析式为 $y=-x+2$.

$\because$ 点 P 既在直线 $y=-x+2$ 上, 也在抛物线 $y=-2^{1/2}/2 \cdot x^2+2^{1/2} \cdot x$ 上,

$$\therefore -x+2=-2^{1/2}/2 \cdot x^2+2^{1/2} \cdot x, \text{ 解此方程得: } x=2 \text{ 或 } x=2^{1/2},$$

当 $x=2$ 时, $y=-x+2=0$; 当 $x=2^{1/2}$ 时, $y=-x+2=2-2^{1/2}$,

$\therefore$ 点 P 的坐标为 $(2, 0)$ (与点 B 重合), 或 $(2^{1/2}, 2-2^{1/2})$.

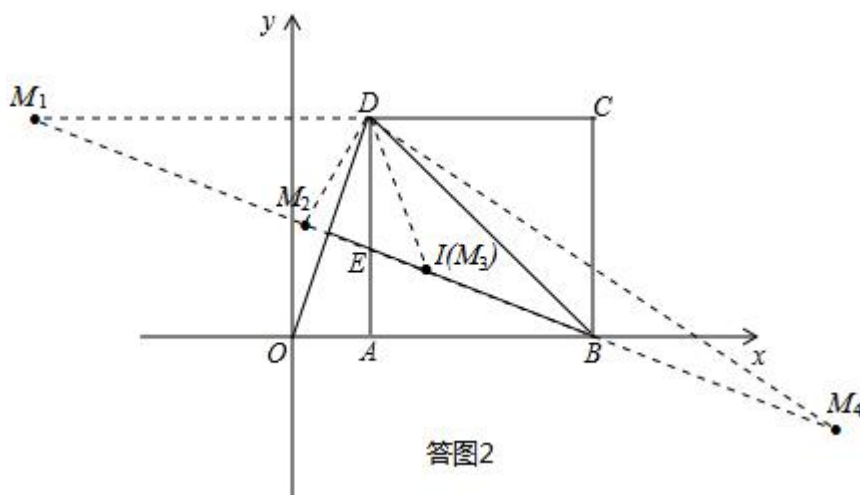
(4) 解: $\because \angle DBO=45^\circ$, $BD=BO$, $BF \perp OD$,

$\therefore \angle EBA=22.5^\circ$, 由 (1) 知 $\angle ODA=22.5^\circ$, 故 $\angle DOA=67.5^\circ$, $OA=EA$,

$\therefore \angle EOA = 45^\circ$, $\angle DOE = 22.5^\circ$, 即 $\triangle OED$ 是顶角为 135° 的等腰三角形.

若 $\triangle BMD$ 与 $\triangle OED$ 相似, 则 $\triangle BMD$ 必须是等腰三角形.

如答图 2 所示, 在直线 BF 上能使 $\triangle BMD$ 为等腰三角形的点 M 有 4 个, 分别记为 M_1, M_2, M_3, M_4 , 其中符合题意的是点 M_1, M_3 .



$\because DM_1 = DB = 2$, $OA = 2 - 2^{1/2}$, $\therefore M_1 (-2^{1/2}, 2^{1/2})$.

由 (1) 知 $B(2, 0)$, $E(2 - 2^{1/2}, 2 - 2^{1/2})$, 故直线 BE 的解析式为 $y = (1 - 2^{1/2})x - 2 + 2 \cdot 2^{1/2}$.

I 是 $\triangle BOD$ 的外心, 它是 OB 的垂直平分线 $x = 1$ 与 OD 的垂直平分线 BE 的交点, $\therefore I(1, 2^{1/2} - 1)$, 即 $M_3(1, 2^{1/2} - 1)$.

故符合题意的 M 点的坐标为 $(-2^{1/2}, 2^{1/2})$, $(1, 2^{1/2} - 1)$.

例 17 (2014 年武汉市中考第 24 题) 如图 1, $Rt\triangle ABC$ 中, $\angle ACB = 90^\circ$, $AC = 6$ cm, $BC = 8$ cm, 动点 P 从点 B 出发, 在 BA 边上以每秒 5 cm 的速度向点 A 匀速运动, 同时动点 Q 从点 C 出发, 在 CB 边上以每秒 4 cm 的速度向点 B 匀速运动, 运动时间为 t 秒 ($0 < t < 2$), 连结 PQ .

(1) 若 $\triangle BPQ$ 与 $\triangle ABC$ 相似, 求 t 的值;

(2) 如图 2, 连结 AQ 、 CP , 若 $AQ \perp CP$, 求 t 的值;

(3) 试证明：PQ 的中点在 $\triangle ABC$ 的一条中位线上.

【解答】

(1) ①当 $\triangle BPQ \sim \triangle BAC$ 时,

$$\because \frac{BP}{BA} = \frac{BQ}{BC}, \quad BP=5t, \quad QC=4t, \quad AB=10\text{cm}, \quad BC=8\text{cm}, \quad \therefore \frac{5t}{10} = \frac{8-4t}{8}, \quad \text{解得 } t=1;$$

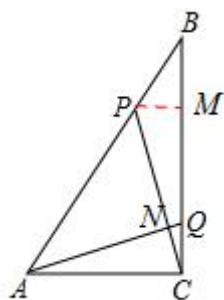
$$\text{②当 } \triangle BPQ \sim \triangle BCA \text{ 时, } \because \frac{BP}{BC} = \frac{BQ}{BA}, \quad \therefore \frac{5t}{8} = \frac{8-4t}{10}, \quad \text{解得 } t = \frac{32}{41}.$$

$\therefore t=1$ 或 $\frac{32}{41}$ 时, $\triangle BPQ$ 与 $\triangle ABC$ 相似.

(2) 如答图, 过 P 作 $PM \perp BC$ 于点 M, AQ, CP 交于点 N, 则有 $PB=5t$, $PM=3t$, $MC=8-4t$,

$\because \angle NAC + \angle NCA = 90^\circ$, $\angle PCM + \angle NCA = 90^\circ$, $\therefore \angle NAC = \angle PCM$ 且 $\angle ACQ = \angle PMC = 90^\circ$,

$$\therefore \triangle ACQ \sim \triangle CMP. \therefore \frac{AC}{CM} = \frac{CQ}{MP} \therefore \frac{6}{8-4t} = \frac{4t}{3t}, \quad \text{解得: } t = \frac{7}{8}.$$



(3) 如答图, 过 P 作 $PD \perp AC$ 于点 D, 连接 DQ, BD, BD 交 PQ 于点 M,

$$\text{则 } PD = AP \cdot \cos \angle APD = AP \cdot \cos \angle ABC = (10-5t) \cdot \frac{8}{10} = 8-4t,$$

$\therefore BQ = 8-4t$, $\therefore PD=BQ$ 且 $PD \parallel BQ. \therefore$ 四边形 PDQB 是平行四边形. $\therefore$ 点 M 是 PQ 和 BD 的中点.

过点 M 作 $EF \parallel AC$ 分别交 BC, BA 于 E, F 两点,

则 $\frac{BE}{EC} = \frac{BM}{MD} = 1$, 即点 E 为 BC 的中点.

同理, 点 F 为 BA 的中点.

$\therefore$ PQ 中点在 $\triangle ABC$ 的中位线上.

例 18 (2014 年菏泽市中考第 21 题) 如图 1, 在平面直角坐标系中, 已知抛物线 $y=x^2-2mx+m^2-9$.

- (1) 求证: 无论 m 为何值, 该抛物线与 x 轴总有两个交点;
- (2) 该抛物线与 x 轴交于点 A 、 B 两点, 点 A 在点 B 的左侧, 且 $OA < OB$, 与 y 轴的交点坐标为 $(0, -5)$, 求该抛物线的解析式;
- (3) 在 (2) 的条件下, 抛物线的对称轴与 x 轴的交点为 N , 若点 M 是线段 AN 上的任意一点, 过点 M 作直线 $MC \perp x$ 轴, 交抛物线于点 C , 记点 C 关于抛物线对称轴的对称点为 D , 点 P 是线段 MC 上的一点, 且满足 $MP = \frac{1}{4}MC$, 连结 CD 、 PD , 作 $PE \perp PD$ 交 x 轴于点 E , 问是否存在这样的点 E , 使得 $PE = PD$, 若存在, 求出点 E 的坐标; 若不存在, 请说明理由.

【解答】

- (1) 令 $y=0$, 则 $x^2-2mx+m^2-9=0$,
 $\because \Delta = (-2m)^2 - 4m^2 + 36 > 0$,
 $\therefore$ 无论 m 为何值时方程 $x^2-2mx+m^2-9=0$ 总有两个不相等的实数根,
 $\therefore$ 抛物线 $y=x^2-2mx+m^2-9$ 的开口向上, 顶点在 x 轴的下方,
 $\therefore$ 该抛物线与 x 轴总有两个交点.
- (2) $\because$ 抛物线 $y=x^2-2mx+m^2-9$ 与 y 轴交点坐标为 $(0, -5)$,
 $\therefore -5 = m^2 - 9$.
 解得: $m = \pm 2$.
 当 $m = -2$, $y=0$ 时, $x^2+4x-5=0$
 解得: $x_1 = -5$, $x_2 = 1$,
 $\therefore$ 抛物线 $y=x^2-2mx+m^2-9$ 与 x 轴交于 A , B 两点 (点 A 在点 B 的左侧, 且 $OA < OB$),
 $\therefore m = -2$ 不符合题意, 舍去.
 $\therefore m = 2$.
 $\therefore$ 抛物线的解析式为 $y=x^2-4x-5$;
- (3) 如图 2, 假设 E 点存在,
 $\because MC \perp EM$, $CD \perp MC$,
 $\therefore \angle EMP = \angle PCD = 90^\circ$.

$$\therefore \angle MEP + \angle MPE = 90^\circ$$

$$\because PE \perp PD, \therefore \angle EPD = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle MPE + \angle DPC = 90^\circ$$

$$\therefore \angle MEP = \angle CPD.$$

在 $\triangle EMP$ 和 $\triangle PCD$ 中,

$$\begin{cases} \angle EMP = \angle PCD \\ \angle MEP = \angle CPD, \\ PE = PD \end{cases}$$

$$\therefore \triangle EMP \cong \triangle PCD \text{ (AAS).}$$

$$\therefore PM = DC, EM = PC$$

设 $C(x_0, y_0)$, 则 $D(4-x_0, y_0)$, $P(x_0, 1/4*y_0)$.

$$\therefore 2x_0 - 4 = 1/4*y_0.$$

$\because$ 点 C 在抛物线 $y = x^2 - 4x - 5$ 上;

$$\therefore y_0 = x_0^2 - 4x_0 - 5$$

$$\therefore 2x_0 - 4 = 1/4*(x_0^2 - 4x_0 - 5).$$

解得: $x_{01} = 1, x_{02} = 11$ (舍去),

$$\therefore P(1, -2).$$

$$\therefore PC = 6. \therefore ME = PC = 6.$$

$$\therefore E(7, 0).$$

例 19 (2015 年盐城市中考第 28 题) 如图 1, 在平面直角坐标系中, 将抛物线 $y=x^2$ 的对称轴绕着点 $P(0, 2)$ 顺时针旋转 45° 后与该抛物线交于 A 、 B 两点, 点 Q 是该抛物线上的一点。

(1) 求直线 AB 的函数表达式;

(2) 如图 1, 若点 Q 在直线 AB 的下方, 求点 Q 到直线 AB 的距离的最大值;

如图 2, 若点 Q 在 y 轴左侧, 且点 $T(0, t)$ ($t < 2$) 是射线 PO 上的一点, 当以 P 、 B 、 Q 为顶点的三角形与 $\triangle PAT$ 相似时, 求所有满足条件的 t 的值。

【解答】

(1) 如图①, 设直线 AB 与 x 轴的交点为 M .

$\because \angle OPA = 45^\circ, \therefore OM = OP = 2$, 即 $M(-2, 0)$.

设直线 AB 的解析式为 $y = kx + b$ ($k \neq 0$), 将 $M(-2, 0)$, $P(0, 2)$ 两点坐标代入, 得 $\begin{cases} 2 = k \times 0 + b \\ 0 = k \times (-2) + b \end{cases}$, 解得 $\begin{cases} k = 1 \\ b = 2 \end{cases}$.

故直线 AB 的解析式为 $y = x + 2$;

(2) 如图①, 过点 Q 作 x 轴的垂线 QC , 交 AB 于点 C , 再过点 Q 作直线 AB 的垂线, 垂足为 D , 根据条件可知 $\triangle QDC$ 为等腰直角三角形, 则 $QD = \frac{\sqrt{2}}{2} QC$.

设 $Q(m, m^2)$, 则 $C(m, m+2)$.

$\therefore QC = m + 2 - m^2 = -\left(m - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{9}{4}$, $QD = \frac{\sqrt{2}}{2} QC = \frac{\sqrt{2}}{2} \left[-\left(m - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{9}{4}\right]$.

故当 $m = \frac{1}{2}$ 时, 点 Q 到直线 AB 的距离最大, 最大值为 $\frac{9\sqrt{2}}{8}$;

(3) $\because \angle APT = 45^\circ, \therefore \triangle PBQ$ 中必有一个内角为 45° ,

由图知, $\angle BPQ=45^\circ$ 不合题意.

①如图②, 若 $\angle PBQ=45^\circ$, 过点 B 作 x 轴的平行线, 与抛物线和 y 轴分别交于点 Q'、F. 此时满足 $\angle PBQ'=45^\circ$.

$\because Q'(-2, 4), F(0, 4),$

$\therefore$ 此时 $\triangle BPQ'$ 是等腰直角三角形, 由题意知 $\triangle PAT$ 也是等腰直角三角形.

(i) 当 $\angle PTA=90^\circ$ 时, 得到: $PT=AT=1$, 此时 $t=1$;

(ii) 当 $\angle PAT=90^\circ$ 时, 得到: $PT=2$, 此时 $t=0$.

②如图③, 若 $\angle PQB=45^\circ$, ①中是情况之一, 答案同上;

先以点 F 为圆心, FB 为半径作圆, 则 P、B、Q' 都在圆 F 上, 设圆 F 与 y 轴左侧的抛物线交于另一点 Q''.

则 $\angle PQ''B=\angle PQ'B=45^\circ$ (同弧所对的圆周角相等), 即这里的交点 Q'' 也是符合要求.

设 $Q''(n, n^2)$ ($-2 < n < 0$), 由 $FQ''=2$, 得

$n^2 + (4 - n^2)^2 = 2^2$, 即 $n^4 - 7n^2 + 12 = 0$.

解得 $n^2=3$ 或 $n^2=4$, 而 $-2 < n < 0$, 故 $n=-\sqrt{3}$, 即 $Q''(-\sqrt{3}, 3)$.

可证 $\triangle PFQ''$ 为等边三角形,

所以 $\angle PFQ''=60^\circ$, 又 $PQ''=PQ'$,

所以 $\angle PBQ''=\frac{1}{2}\angle PFQ''=30^\circ$.

则在 $\triangle PQ''B$ 中, $\angle PQ''B=45^\circ$, $\angle PBQ''=30^\circ$.

(i) 若 $\triangle Q''PB \sim \triangle PAT$, 则过点 A 作 y 轴的垂线, 垂足为 E.

则 $ET=\sqrt{3}AE=\sqrt{3}$, $OE=1$, 所以 $OT=\sqrt{3}-1$,

解得 $t=1-\sqrt{3}$;

(ii) 若 $\triangle Q''BP \sim \triangle PAT$, 则过点 T 作直线 AB 垂线, 垂足为 G.

设 $TG=a$, 则 $PG=OG=a$, $AG=\sqrt{3}TG=\sqrt{3}a$, $AP=\sqrt{2}$,

$\therefore \sqrt{3}a+a=\sqrt{2}$, 解得 $PT=\sqrt{2}a=\sqrt{3}-1$,

$\therefore OT=OP-PT=3-\sqrt{3}$, $\therefore t=3-\sqrt{3}$.

综上所述, 所求的 t 的值为 $t=1$ 或 $t=0$ 或 $t=1-\sqrt{3}$ 或 $t=3-\sqrt{3}$.

例 20 (2016 年湖州市中考第 23 题) 如图, 已知二次函数 $y=-x^2+bx+c$ (b, c 为常数) 的图象经过点 $A(3, 1)$ 、点 $C(0, 4)$, 顶点为点 M , 过点 A 作 $AB \parallel x$ 轴, 交 y 轴于点 D , 交该二次函数图象于点 B , 连结 BC .

- (1) 求该二次函数的解析式及点 M 的坐标;
- (2) 若将该二次函数图象向下平移 m ($m > 0$) 个单位, 使平移后得到的二次函数图象的顶点落在 $\triangle ABC$ 的内部 (不包括 $\triangle ABC$ 的边界), 求 m 的取值范围;
- (3) 点 P 是直线 AC 上的动点, 若点 P 、点 C 、点 M 所构成的三角形与 $\triangle BCD$ 相似, 请直接写出所有点 P 的坐标 (直接写出结果, 不必写解答过程).

【分析】

- (1) 将点 A 、点 C 的坐标代入函数解析式, 即可求出 b, c 的值, 通过配方法得到点 M 的坐标;
- (2) 点 M 是沿着对称轴直线 $x=1$ 向下平移的, 可先求出直线 AC 的解析式, 将 $x=1$ 代入求出点 M 在向下平移时与 AC 、 AB 相交时 y 的值, 即可得到 m 的取值范围;
- (3) 由题意分析可得 $\angle MCP=90^\circ$, 则若 $\triangle PCM$ 与 $\triangle BCD$ 相似, 则要进行分类讨论, 分成 $\triangle PCM \sim \triangle BDC$ 或 $\triangle PCM \sim \triangle CDB$ 两种, 然后利用边的对应比值求出点坐标.

【解答】

- (1) 把点 $A(3, 1)$, 点 $C(0, 4)$ 代入二次函数 $y=-x^2+bx+c$, 得
$$\begin{cases} -9+3b+c=1 \\ c=4 \end{cases}$$

解得 $b=2, c=4$. $\therefore$ 二次函数解析式为 $y = -x^2 + 2x + 4 = -(x-1)^2 + 5$, $\therefore$ 顶点 M 的坐标为 $(1, 5)$;

(2) 设直线 AC 解析式为 $y=kx+b$, 把点 A $(3, 1)$, C $(0, 4)$ 代入得, 解得 $\therefore$ 直线 AC 的解析式为 $y=-x+4$, 如图所示, 对称轴直线 $x=1$ 与 $\triangle ABC$ 两边 AC、AB 分别交于点 E、点 F, 把 $x=1$ 代入直线 AC 解析式 $y=-x+4$ 解得 $y=3$, 则点 E 坐标为 $(1, 3)$, 点 F 坐标为 $(1, 1)$ $\therefore 1 < 5-m < 3$, 解得 $2 < m < 4$;

(3) 符合题意的点 P 有 4 个: $P_1 (3,1)$ 、 $P_2 (-3,7)$ 、 $P_3 (1/3, 11/3)$ 、 $P_4 (-1/3, 13/3)$

思路: 求出点 B、D 的坐标, 继而求得 $BD:CD=1:3$; 因为 $\triangle MCP \sim \triangle BCD$, 所有 $MC:CP=1:3(3:1)$.

第二部分 因动点产生的等腰三角形问题

例 1 (2008 年温州市中考第 24 题) 如图 1, 在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中, $\angle A=90^\circ$, $AB=6$, $AC=8$, D 、 E 分别是边 AB 、 AC 的中点, 点 P 从点 D 出发沿 DE 方向运动, 过点 P 作 $PQ \perp BC$ 与 Q , 过点 Q 作 $QR \parallel BA$ 交 AC 于 R , 当点 Q 于点 C 重合时, 点 P 停止运动. 设 $BQ=x$, $QR=y$.

- (1) 求点 D 到 BC 的距离 DH 的长;
- (2) 求 y 关于 x 的函数关系式 (不要求写出自变量的取值范围);
- (3) 是否存在点 P , 使 $\triangle PQR$ 为等腰三角形? 若存在, 请求出所有满足要求的 x 的值; 若不存在, 请说明理由.

解: (1) $\because \angle A = \text{Rt}\angle$, $AB=6$, $AC=8$, $\therefore BC=10$.

$\because$ 点 D 为 AB 中点, $\therefore BD = \frac{1}{2}AB = 3$.

$\because \angle DHB = \angle A = 90^\circ$, $\angle B = \angle B$.

$\therefore \triangle BHD \sim \triangle BAC$,

$\therefore \frac{DH}{AC} = \frac{BD}{BC}$, $\therefore DH = \frac{BD}{BC} \cdot AC = \frac{3}{10} \times 8 = \frac{12}{5}$.

(2) $\because QR \parallel AB$, $\therefore \angle QRC = \angle A = 90^\circ$.

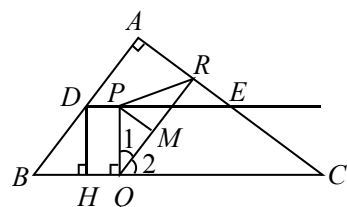
$\because \angle C = \angle C$, $\therefore \triangle RQC \sim \triangle ABC$,

$\therefore \frac{RQ}{AB} = \frac{QC}{BC}$, $\therefore \frac{y}{6} = \frac{10-x}{10}$,

即 y 关于 x 的函数关系式为: $y = -\frac{3}{5}x + 6$.

(3) 存在, 分三种情况:

①当 $PQ = PR$ 时, 过点 P 作 $PM \perp QR$ 于 M , 则 $QM = RM$.

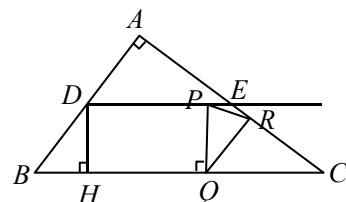


$$\because \angle 1 + \angle 2 = 90^\circ, \quad \angle C + \angle 2 = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle 1 = \angle C.$$

$$\therefore \cos \angle 1 = \cos C = \frac{8}{10} = \frac{4}{5}, \quad \therefore \frac{QM}{QP} = \frac{4}{5},$$

$$\therefore \frac{\frac{1}{2} \left(-\frac{3}{5}x + 6 \right)}{\frac{12}{5}} = \frac{4}{5}, \quad \therefore x = \frac{18}{5}.$$



$$\textcircled{2} \text{ 当 } PQ = RQ \text{ 时, } -\frac{3}{5}x + 6 = \frac{12}{5},$$

$$\therefore x = 6.$$

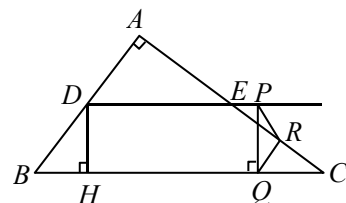
$\textcircled{3}$ 当 $PR = QR$ 时, 则 R 为 PQ 中垂线上的点,

于是点 R 为 EC 的中点,

$$\therefore CR = \frac{1}{2}CE = \frac{1}{4}AC = 2.$$

$$\because \tan C = \frac{QR}{CR} = \frac{BA}{CA},$$

$$\therefore \frac{-\frac{3}{5}x + 6}{2} = \frac{6}{8}, \quad \therefore x = \frac{15}{2}.$$



综上所述, 当 x 为 $\frac{18}{5}$ 或 6 或 $\frac{15}{2}$ 时, $\triangle PQR$ 为等腰三角形.

例 2 (2008 年重庆市中考第 28 题) 已知: 如图 1, 抛物线 $y=ax^2-2ax+c$ ($a \neq 0$)

与 y 轴交于点 $C(0,4)$, 与 x 轴交于点 A 、 B , 点 A 的坐标为 $(4,0)$.

(1) 求该抛物线的解析式;

(2) 点 Q 是线段 AB 上的动点, 过点 Q 作 $QE \parallel AC$, 交 BC 于点 E , 连结 CQ . 当 $\triangle CQE$ 的面积最大时, 求点 Q 的坐标;

(3) 若平行于 x 轴的动直线 l 与该抛物线交于点 P , 与直线 AC 交于点 F , 点 D 的坐标为 $(2,0)$. 问: 是否存在这样的直线 l , 使得 $\triangle ODF$ 是等腰三角形? 若存在, 请求出点 P 的坐标; 若不存在, 请说明理由.

【解答】

$$(1) \text{ 由题意, 得 } \begin{cases} 0 = 16a - 8a + c \\ 4 = c \end{cases}$$

$$\text{解得 } \begin{cases} a = -\frac{1}{2} \\ c = 4 \end{cases}$$

$$\therefore \text{ 所求抛物线的解析式为: } y = -\frac{1}{2}x^2 + x + 4.$$

(2) 设点 Q 的坐标为 $(m, 0)$, 过点 E 作 $EG \perp x$ 轴于点 G .

$$\text{由 } -\frac{1}{2}x^2 + x + 4 = 0,$$

$$\text{得 } x_1 = -2, x_2 = 4$$

$$\therefore \text{ 点 } B \text{ 的坐标为 } (-2, 0)$$

$$\therefore AB = 6, BQ = m + 2$$

$$\because QE \parallel AC$$

$$\therefore \triangle BQE \sim \triangle BAC$$

$$\therefore \frac{EG}{CO} = \frac{BQ}{BA}$$

$$\text{即 } \frac{EG}{4} = \frac{m+2}{6}$$

$$\therefore EG = \frac{2m+4}{3}$$

$$\begin{aligned}
\therefore S_{\triangle CQE} &= S_{\triangle CBQ} - S_{\triangle EBQ} \\
&= \frac{1}{2} BQ \cdot CO - \frac{1}{2} BQ \cdot EG \\
&= \frac{1}{2} (m+2) \left(4 - \frac{2m+4}{3} \right) \\
&= -\frac{1}{3} m^2 + \frac{2}{3} m + \frac{8}{3} \\
&= -\frac{1}{3} (m-1)^2 + 3
\end{aligned}$$

又 $\because -2 \leq m \leq 4$

$\therefore$ 当 $m=1$ 时, $S_{\triangle CQE}$ 有最大值 3, 此时 $Q(1, 0)$.

(3) 存在. 在 $\triangle ODF$ 中.

(i) 若 $DO=DF$

$\because A(4, 0), D(2, 0)$

$\therefore AD=OD=DF=2$

又在 $Rt\triangle AOC$ 中, $OA=OC=4$

$\therefore \angle OAC=45^\circ$

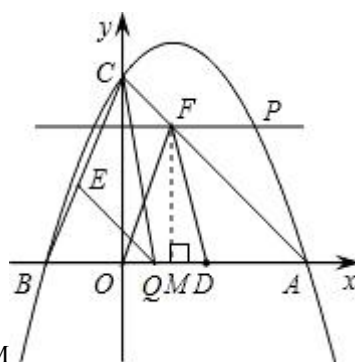
$\therefore \angle DFA=\angle OAC=45^\circ$

$\therefore \angle ADF=90^\circ$. 此时, 点 F 的坐标为 $(2, 2)$

$$\text{由 } -\frac{1}{2}x^2+x+4=2,$$

$$\text{得 } x_1=1+\sqrt{5}, x_2=1-\sqrt{5}$$

此时, 点 P 的坐标为: $P(1+\sqrt{5}, 2)$ 或 $P(1-\sqrt{5}, 2)$.



(ii) 若 $FO=FD$, 过点 F 作 $FM \perp x$ 轴于点 M

由等腰三角形的性质得: $OM = \frac{1}{2} OD = 1$

$\therefore AM=3$

$\therefore$ 在等腰直角 $\triangle AMF$ 中, $MF=AM=3$

$\therefore F(1, 3)$

$$\text{由 } -\frac{1}{2}x^2+x+4=3,$$

$$\text{得 } x_1=1+\sqrt{3}, x_2=1-\sqrt{3}$$

此时，点 P 的坐标为：P $(1+\sqrt{3}, 3)$ 或 P $(1-\sqrt{3}, 3)$ 。

(iii) 若 $OD=OF$

$\because OA=OC=4$ ，且 $\angle AOC=90^\circ$

$$\therefore AC=4\sqrt{2}$$

$\therefore$ 点 O 到 AC 的距离为 $2\sqrt{2}$ ，而 $OF=OD=2 < 2\sqrt{2}$ ，与 $OF \geq 2\sqrt{2}$ 矛盾，所以 AC 上不存在点使得

$OF=OD=2$ ，

此时，不存在这样的直线 l，使得 $\triangle ODF$ 是等腰三角形

综上所述，存在这样的直线 l，使得 $\triangle ODF$ 是等腰三角形

所求点 P 的坐标为：P $(1+\sqrt{5}, 2)$ 或 P $(1-\sqrt{5}, 2)$ 或 P $(1+\sqrt{3}, 3)$ 或 P $(1-\sqrt{3}, 3)$ 。

例 3 (2009 年上海市中考第 24 题) 在平面直角坐标系内，O 为原点，点 A 的坐标为 (1,0)，点 C 的坐标为 (0,4)，直线 CM//x 轴 (如图 1 所示) .点 B 与点 A 关于原点对称，直线 $y=x+b$ (b 为常数) 经过点 B，且与直线 CM 相交于点 D，连结 OD.

- (1) 求 b 的值和点 D 的坐标；
- (2) 设点 P 在 x 轴的正半轴上，若 POD 是等腰三角形，求点 P 的坐标；
- (3) 在 (2) 的条件下，如果以 PD 为半径的圆 P 与圆 O 外切，求圆 O 的半径.

【解答】

解：(1) $\because$ 点 A 的坐标为 (1,0)，点 B 与点 A 关于原点对称，

$\therefore$ 点 B 的坐标为 (-1,0) .

$\because$ 直线 $y = x + b$ 经过点 B， $\therefore -1 + b = 0$ ，得 $b = 1$.

$\because$ 点 C 的坐标为 (0,4)，直线 CM // x 轴， $\therefore$ 设点 D 的坐标为 (x,4) .

$\because$ 直线 $y = x + 1$ 与直线 CM 相交于点 D， $\therefore x = 3$. $\therefore$ D 的坐标为 (3,4) .

(2) $\because$ D 的坐标为 (3,4)， $\therefore OD = 5$.

当 $PD = OD = 5$ 时，点 P 的坐标为 (6,0)；

当 $PO = OD = 5$ 时，点 P 的坐标为 (5,0)，

当 $PO = PD$ 时，设点 P 的坐标为 (x,0) ($x > 0$)，

$\therefore x = \sqrt{(x-3)^2 + 4^2}$ ，得 $x = \frac{25}{6}$ ， $\therefore$ 点 P 的坐标为 $(\frac{25}{6}, 0)$.

综上所述，所求点 P 的坐标是 (6,0)、(5,0) 或 $(\frac{25}{6}, 0)$.

(3) 当以 PD 为半径的圆 P 与圆 O 外切时，

若点 P 的坐标为 (6,0)，则圆 P 的半径 $PD = 5$ ，圆心距 $PO = 6$ ，

$\therefore$ 圆 O 的半径 $r = 1$.

若点 P 的坐标为 (5,0)，则圆 P 的半径 $PD = 2\sqrt{5}$ ，圆心距 $PO = 5$ ，

$\therefore$ 圆 O 的半径 $r = 5 - 2\sqrt{5}$.

综上所述，所求圆 O 的半径等于 1 或 $5 - 2\sqrt{5}$.

例 4 (2009 年黄冈市中考第 20 题) 如图 1, 在平面直角坐标系 xOy 中, 抛物线 $y = \frac{1}{18}x^2 - \frac{4}{9}x - 10$ 与 x 轴交于点 A, 与 y 轴交于点 B, 过点 B 作 x 轴的平行线 BC, 交抛物线于点 C, 连结 AC. 现有两动点 P、Q 分别从 O、C 两点同时出发, 点 P 以每秒 4 个单位的速度沿 OA 向终点 A 移动, 点 Q 以每秒 1 个单位的速度沿 CB 向点 B 移动, 点 P 停止运动时, 点 Q 也同时停止运动. 线段 OC, PQ 相交于点 D, 过点 D 作 $DE \parallel OA$, 交 CA 于点 E, 射线 QE 交 x 轴于点 F. 设动点 P、Q 移动的时间为 t (单位: 秒)

- (1) 求 A、B、C 三点的坐标和抛物线的顶点的坐标;
- (2) 当 t 为何值时, 四边形 PQCA 为平行四边形? 请写出计算过程;
- (3) 当 $0 < t < 9/2$ 时, $\triangle PQF$ 的面积是否总为定值? 若是, 求出此定值; 若不是, 请说明理由;
- (4) 当 t 为何值时, $\triangle PQF$ 为等腰三角形? 请写出解答过程.

【解答】

: (1) $y = \frac{1}{18}(x^2 - 8x - 180)$, 令 $y = 0$ 得 $x^2 - 8x - 180 = 0$, $(x - 18)(x + 10) = 0$

$\therefore x = 18$ 或 $x = -10 \therefore A(18, 0)$;

在 $y = \frac{1}{18}x^2 - \frac{4}{9}x - 10$ 中, 令 $x = 0$ 得 $y = -10$ 即 $B(0, -10)$;

由于 $BC \parallel OA$, 故点 C 的纵坐标为 -10 , 由 $-10 = \frac{1}{18}x^2 - \frac{4}{9}x - 10$ 得 $x = 8$ 或 $x = 0$

即 $C(8, -10)$ 且易求出顶点坐标为 $(4, -\frac{98}{9})$

于是, $A(18, 0), B(0, -10), C(8, -10)$, 顶点坐标为 $(4, -\frac{98}{9})$ 。

(2) 若四边形 PQCA 为平行四边形, 由于 $QC \parallel PA$. 故只要 $QC = PA$ 即可, 而

$$PA=18-4t, CQ=t \text{ 故 } 18-4t=t \text{ 得 } t=\frac{18}{5};$$

(3) 设点 P 运动 t 秒, 则 $OP=4t, CQ=t$, $0 < t < 4.5$, 说明 P 在线段 OA 上, 且不与点 OA、重合,

$$\text{由于 } QC \parallel OP \text{ 知 } \triangle QDC \sim \triangle PDO, \text{ 故 } \frac{QD}{DP} = \frac{QC}{OP} = \frac{t}{4t} = \frac{1}{4}$$

$$\therefore AF=4t=OP \therefore PF=PA+AF=PA+OP=18$$

$$\text{又点 } Q \text{ 到直线 } PF \text{ 的距离 } d=10, \therefore S_{\triangle PQF} = \frac{1}{2} \cdot PF \cdot d = \frac{1}{2} \times 18 \times 10 = 90,$$

于是 $\triangle PQF$ 的面积总为 90。

(4) 由上知, $P(4t, 0), F(18+4t, 0), Q(8-t, -10)$, $0 < t < 4.5$ 。构造直角三角形后易得

$$PQ^2 = (4t-8+t)^2 + 10^2 = (5t-8)^2 + 100, \quad ,$$

$$FO^2 = (18+4t-8+t)^2 + 10^2 = (5t+10)^2 + 100$$

二、若 $FP=PQ$, 即 $18^2 = (5t-8)^2 + 100$, 故 $25(t+2)^2 = 224$,

$$\because 2 \leq t+2 \leq 6.5 \therefore t+2 = \sqrt{\frac{224}{25}} = \frac{4\sqrt{14}}{5} \therefore t = \frac{4\sqrt{14}}{5} - 2$$

三、若 $QP=QF$, 即 $(5t-8)^2 + 100 = (5t+10)^2 + 100$, 无 $0 \leq t \leq 4.5$ 的 t 满足条件;

四、若 $PQ=PF$, 即 $(5t-8)^2 + 100 = 18^2$, 得 $(5t-8)^2 = 224$, $\therefore t = \frac{8+4\sqrt{14}}{5} > 4.5$ 或

$t = \frac{8-4\sqrt{14}}{5} < 0$ 都不满足 $0 \leq t \leq 4.5$, 故无 $0 \leq t \leq 4.5$ 的 t 满足方程;

综上所述: 当 $t = \frac{4\sqrt{14}}{5} - 2$ 时, $\triangle PQR$ 是等腰三角形。

例 5 (2009 年深圳市中考第 23 题) 如图 1, 在平面直角坐标系中, 直线 $l: y = -2x - 8$ 分别与 x 轴, y 轴相交于 A 、 B 两点, 点 $P(0, k)$ 是 y 轴的负半轴上的一个动点, 以 P 为圆心, 3 为半径作 $\odot P$.

- (1) 连结 PA , 若 $PA = PB$, 试判断 $\odot P$ 与 x 轴的位置关系, 并说明理由;
- (2) 当 k 为何值时, 以 $\odot P$ 与直线 l 的两个交点和圆心 P 为顶点的三角形是正三角形?

【解答】

(1) $\odot P$ 与 x 轴相切.

$\because$ 直线 $y = -2x - 8$ 与 x 轴交于 $A(4, 0)$,

与 y 轴交于 $B(0, -8)$,

$\therefore OA = 4, OB = 8$.

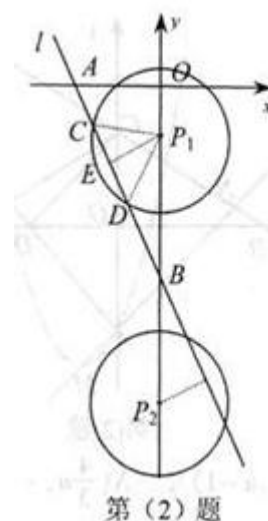
由题意, $OP = -k$,

$\therefore PB = PA = 8 + k$.

在 $Rt\triangle AOP$ 中, $k^2 + 4^2 = (8 + k)^2$,

$\therefore k = -3, \therefore OP$ 等于 $\odot P$ 的半径,

$\therefore \odot P$ 与 x 轴相切.



(2) 设 $\odot P$ 与直线 l 交于 C, D 两点, 连结 PC, PD 当圆心 P 在线段 OB 上时, 作 $PE \perp CD$ 于 E .

$\because \triangle PCD$ 为正三角形, $\therefore DE = \frac{1}{2} CD = \frac{3}{2}, PD = 3$,

$\therefore PE = \frac{3\sqrt{3}}{2}$.

$\because \angle AOB = \angle PEB = 90^\circ, \angle ABO = \angle PBE$,

$$\therefore \triangle AOB \sim \triangle PEB,$$

$$\therefore \frac{AO}{AB} = \frac{PE}{PB}, \text{ 即 } \frac{4}{4\sqrt{5}} = \frac{\frac{3\sqrt{3}}{2}}{PB},$$

$$\therefore PB = \frac{3\sqrt{15}}{2},$$

$$\therefore PO = BO - PB = 8 - \frac{3\sqrt{15}}{2},$$

$$\therefore P(0, \frac{3\sqrt{15}}{2} - 8),$$

$$\therefore k = \frac{3\sqrt{15}}{2} - 8.$$

当圆心 P 在线段 OB 延长线上时,同理可得 $P(0, -\frac{3\sqrt{15}}{2} - 8)$,

$$\therefore k = -\frac{3\sqrt{15}}{2} - 8,$$

$\therefore$ 当 $k = \frac{3\sqrt{15}}{2} - 8$ 或 $k = -\frac{3\sqrt{15}}{2} - 8$ 时, 以 $\odot P$ 与直线 l 的两个交点和圆心 P 为顶

点的三角形是正三角形.

例 6 (2009 年重庆市中考第 26 题) 已知：如图 1，在平面直角坐标系 xOy 中，矩形 $OABC$ 的边 OA 在 y 轴的正半轴上， OC 在 x 轴的正半轴上， $OA=2$ ， $OC=3$ ，过原点 O 作 $\angle AOC$ 的平分线交 AB 于点 D ，连结 DC ，过点 D 作 $DE \perp DC$ ，交 OA 于点 E 。

(1) 求过点 E 、 D 、 C 的抛物线的解析式；

(2) 将 $\angle EDC$ 绕点 D 按顺时针方向旋转后，角的一边与 y 轴的正半轴交于点 F ，另一边与线段 OC 交于点 G 。如果 DF 与 (1) 中的抛物线交于另一点 M ，点 M 的横坐标为 $6/5$ ，那么 $EF=2 \cdot GO$ 是否成立？若成立，请给予证明；若不成立，请说明理由；

(3) 对于 (2) 中的点 G ，在位于第一象限内的该抛物线上是否存在点 Q ，使得直线 GQ 与 AB 的交点 P 与点 C 、 G 构成的 $\triangle PCG$ 是等腰三角形？若存在，请求出点 Q 的坐标；若存在，请说明理由。

【解答】

(1) 由已知，得 $C(3,0)$ ， $D(2,2)$ ，

$$\because \angle ADE = 90^\circ - \angle CDB = \angle BCD,$$

$$\therefore AE = AD \cdot \tan \angle ADE = 2 \times \tan \angle BCD = 2 \times \frac{1}{2} = 1.$$

$$\therefore E(0,1).$$

设过点 E 、 D 、 C 的抛物线的解析式为 $y = ax^2 + bx + c (a \neq 0)$ 。

将点 E 的坐标代入，得 $c = 1$ 。

将 $c = 1$ 和点 D 、 C 的坐标分别代入，得

$$\begin{cases} 4a+2b+1=2, \\ 9a+3b+1=0. \end{cases}$$

解这个方程组，得
$$\begin{cases} a=-\frac{5}{6} \\ b=\frac{13}{6} \end{cases}$$

故抛物线的解析式为 $y = -\frac{5}{6}x^2 + \frac{13}{6}x + 1$.

(2) $EF = 2GO$ 成立.

$\because$ 点 M 在该抛物线上，且它的横坐标为 $\frac{6}{5}$,

$\therefore$ 点 M 的纵坐标为 $\frac{12}{5}$.

设 DM 的解析式为 $y = kx + b_1 (k \neq 0)$,

将点 D 、 M 的坐标分别代入，得

$$\begin{cases} 2k + b_1 = 2, \\ \frac{6}{5}k + b_1 = \frac{12}{5}. \end{cases} \quad \text{解得} \quad \begin{cases} k = -\frac{1}{2}, \\ b_1 = 3. \end{cases}$$

$\therefore DM$ 的解析式为 $y = -\frac{1}{2}x + 3$.

$\therefore F(0,3)$, $EF = 2$.

过点 D 作 $DK \perp OC$ 于点 K ,

则 $DA = DK$.

$\because \angle ADK = \angle FDG = 90^\circ$,

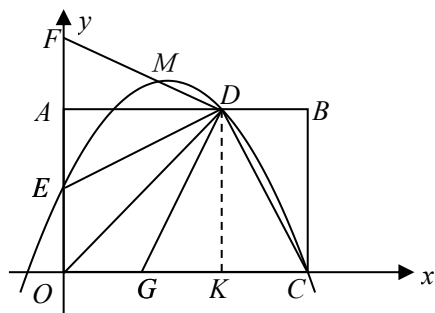
$\therefore \angle FDA = \angle GDK$.

又 $\because \angle FAD = \angle GKD = 90^\circ$,

$\therefore \triangle DAF \cong \triangle DKG$.

$\therefore KG = AF = 1$.

$\therefore GO = 1$. $\therefore EF = 2GO$.



(3) $\because$ 点 P 在 AB 上, $G(1,0)$, $C(3,0)$, 则设 $P(1,2)$.

$$\therefore PG^2 = (t-1)^2 + 2^2, PC^2 = (3-t)^2 + 2^2, GC = 2.$$

①若 $PG = PC$, 则 $(t-1)^2 + 2^2 = (3-t)^2 + 2^2$,

解得 $t = 2$. $\therefore P(2,2)$, 此时点 Q 与点 P 重合.

$$\therefore Q(2,2).$$

②若 $PG = GC$, 则 $(t-1)^2 + 2^2 = 2^2$,

解得 $t = 1$, $\therefore P(1,2)$, 此时 $GP \perp x$ 轴.

GP 与该抛物线在第一象限内的交点 Q 的横坐标为 1,

$$\therefore \text{点 } Q \text{ 的纵坐标为 } \frac{7}{3}.$$

$$\therefore Q\left(1, \frac{7}{3}\right).$$

③若 $PC = GC$, 则 $(3-t)^2 + 2^2 = 2^2$,

解得 $t = 3$, $\therefore P(3,2)$, 此时 $PC = GC = 2$, $\triangle PCG$ 是等腰直角三角形.

过点 Q 作 $QH \perp x$ 轴于点 H ,

则 $QH = GH$, 设 $QH = h$,

$$\therefore Q(h+1, h).$$

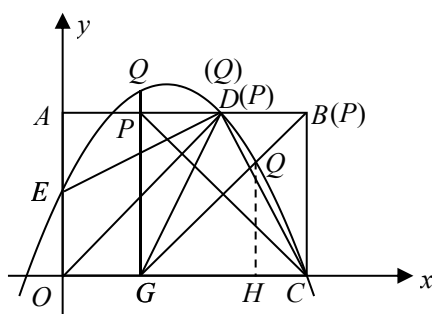
$$\therefore -\frac{5}{6}(h+1)^2 + \frac{13}{6}(h+1) + 1 = h.$$

解得 $h_1 = \frac{7}{5}$, $h_2 = -2$ (舍去).

$$\therefore Q\left(\frac{12}{5}, \frac{7}{5}\right).$$

综上所述, 存在三个满足条件的点 Q ,

$$\text{即 } Q(2,2) \text{ 或 } Q\left(1, \frac{7}{3}\right) \text{ 或 } Q\left(\frac{12}{5}, \frac{7}{5}\right).$$



例 7 (2010 年南通市中考第 27 题) 如图 1, 在矩形 ABCD 中, $AB=m$ (m 是大于 0 的常数), $BC=8$, E 为线段 BC 上的动点 (不与 B 、 C 重合). 连结 DE , 作 $EF \perp DE$, EF 与射线 BA 交于点 F , 设 $CE=x$, $BF=y$.

- (1) 求 y 关于 x 的函数关系式;
- (2) 若 $x=8$, 求 x 为何值时, y 的值最大, 最大值是多少?
- (3) 若 $y=12/m$, 要使 $\triangle DEF$ 为等腰三角形, m 的值应为多少?

【解答】

$$(1) \because EF \perp DE, \therefore \angle DEF = 90^\circ, \therefore \angle BEF + \angle CED = 90^\circ$$

$$\because \angle BEF + \angle BFE = 90^\circ, \therefore \angle BFE = \angle CED$$

$$\text{又} \because \angle B = \angle C = 90^\circ, \therefore \triangle BEF \sim \triangle CDE$$

$$\therefore \frac{BF}{BE} = \frac{CE}{CD}, \text{即} \frac{y}{8-x} = \frac{x}{m}$$

$$\therefore y = -\frac{1}{m}x^2 + \frac{8}{m}x$$

$$(2) \text{若 } m=8, \text{ 则 } y = -\frac{1}{8}x^2 + x = -\frac{1}{8}(x-4)^2 + 2$$

$$\therefore \text{当 } x=4 \text{ 时, } y \text{ 的值最大, } y_{\text{最大}}=2$$

$$(3) \text{若 } y = \frac{12}{m}, \text{ 则 } -\frac{1}{m}x^2 + \frac{8}{m}x = \frac{12}{m}$$

$$\therefore x^2 - 8x + 12 = 0, \text{ 解得 } x_1=2, x_2=6$$

$$\because \triangle DEF \text{ 为直角三角形, } \therefore \text{要使 } \triangle DEF \text{ 为等腰三角形, 只能 } DE = EF$$

$$\text{又 } DE^2 = CD^2 + CE^2 = m^2 + x^2, EF^2 = BE^2 + BF^2 = (8-x)^2 + y^2 = (8-x)^2 + \frac{144}{m^2}$$

$$\therefore m^2 + x^2 = (8-x)^2 + \frac{144}{m^2}, \text{ 即 } m^2 + 16x - 64 - \frac{144}{m^2} = 0$$

$$\text{当 } x=2 \text{ 时, } m^2 - 32 - \frac{144}{m^2} = 0, \text{ 即 } m^4 - 32m^2 - 144 = 0$$

$$\text{解得 } m^2 = 36 \text{ 或 } m^2 = -4 \text{ (舍去)}$$

$$\because m > 0, \therefore m = 6$$

$$\text{当 } x=6 \text{ 时, } m^2 + 32 - \frac{144}{m^2} = 0, \text{ 即 } m^4 + 32m^2 - 144 = 0$$

$$\text{解得 } m^2 = -36 \text{ (舍去) 或 } m^2 = 4$$

$$\because m > 0, \therefore m = 2$$

例 8 (2010 年台州市中考第 24 题) 如图 1, $\text{Rt}\triangle ABC$ 中, $\angle C=90^\circ$, $BC=6$, $AC=8$, 点 P 、 Q 都是斜边 AB 上的动点, 点 P 从 B 向 A 运动 (不与点 B 重合), 点 Q 从 A 向 B 运动, $BP=AQ$. 点 D 、 E 分别是点 A 、 B 以 Q 、 P 为对称中心的对称点, $HQ \perp AB$ 于 Q , 交 AC 于点 H , 当点 E 到达顶点 A 时, P 、 Q 同时停止运动, 设 BP 的长为 x , $\triangle HDE$ 的面积为 y .

- (1) 求证: $\triangle DHQ \sim \triangle ABC$;
- (2) 求 y 关于 x 的函数关系式并求 y 的最大值;
- (3) 当 x 为何值时, $\triangle HDE$ 为等腰三角形?

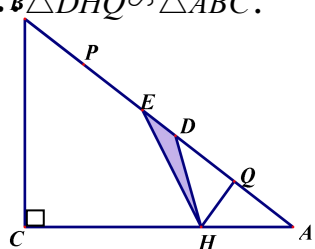
【解答】

(1) $\because A$ 、 D 关于点 Q 成中心对称, $HQ \perp AB$,

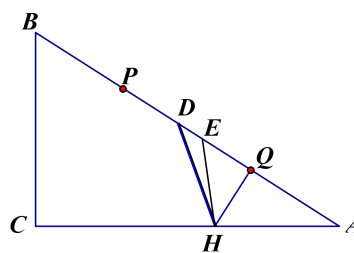
$$\therefore \angle HQD = \angle C = 90^\circ, HD = HA,$$

$$\therefore \angle HDQ = \angle A,$$

$$\therefore \triangle DHQ \sim \triangle ABC.$$



(图 1)



(图 2)

(2) ①如图 1, 当 $0 < x \leq 2.5$ 时,

$$ED = 10 - 4x, QH = AQ \tan \angle A = \frac{3}{4}x,$$

$$\text{此时 } y = \frac{1}{2}(10 - 4x) \times \frac{3}{4}x = -\frac{3}{2}x^2 + \frac{15}{4}x.$$

$$\text{当 } x = \frac{5}{4} \text{ 时, 最大值 } y = \frac{75}{32}.$$

②如图 2, 当 $2.5 < x \leq 5$ 时,

$$ED = 4x - 10, \quad QH = AQ \tan \angle A = \frac{3}{4}x,$$

$$\text{此时 } y = \frac{1}{2}(4x - 10) \times \frac{3}{4}x = \frac{3}{2}x^2 - \frac{15}{4}x.$$

$$\text{当 } x = 5 \text{ 时, 最大值 } y = \frac{75}{4}.$$

$$\therefore y \text{ 与 } x \text{ 之间的函数解析式为 } y = \begin{cases} -\frac{3}{2}x^2 + \frac{15}{4}x & (0 < x \leq 2.5), \\ \frac{3}{2}x^2 - \frac{15}{4}x & (2.5 < x \leq 5). \end{cases}$$

$$y \text{ 的最大值是 } \frac{75}{4}.$$

(3) ①如图 1, 当 $0 < x \leq 2.5$ 时,

$$\text{若 } DE = DH, \because DH = AH = \frac{QA}{\cos \angle A} = \frac{5}{4}x, \quad DE = 10 - 4x,$$

$$\therefore 10 - 4x = \frac{5}{4}x, \quad x = \frac{40}{21}.$$

显然 $ED = EH$, $HD = HE$ 不可能;

②如图 2, 当 $2.5 < x \leq 5$ 时,

$$\text{若 } DE = DH, \quad 4x - 10 = \frac{5}{4}x, \quad x = \frac{40}{11};$$

若 $HD = HE$, 此时点 D, E 分别与点 B, A 重合, $x = 5$;

若 $ED = EH$, 则 $\triangle EDH \sim \triangle HDA$,

$$\therefore \frac{ED}{DH} = \frac{DH}{AD}, \quad \frac{4x - 10}{\frac{5}{4}x} = \frac{\frac{5}{4}x}{2x}, \quad x = \frac{320}{103}.$$

$\therefore$ 当 x 的值为 $\frac{40}{21}, \frac{40}{11}, 5, \frac{320}{103}$ 时, $\triangle HDE$ 是等腰三角形.

例 9 (2011 年湖州市中考第 24 题) 如图 1, 已知正方形 OABC 的边长为 2, 顶点 A、C 分别在 x、y 轴的正半轴上, M 是 BC 的中点. P (0, m) 是线段 OC 上一动点 (C 点除外), 直线 PM 交 AB 的延长线于点 D.

- (1) 求点 D 的坐标 (用含 m 的代数式表示);
- (2) 当 $\triangle APD$ 是等腰三角形时, 求 m 的值;
- (3) 设过 P、M、B 三点的抛物线与 x 轴正半轴交于点 E, 过点 O 作直线 ME 的垂线, 垂足为 H (如图 2). 当 P 从 O 向 C 运动时, 点 H 也随之运动, 请直接写出点 H 所经过的路长 (不必写解答过程)

【解答】

(1) 由题意得 $CM=BM$,

$$\because \angle PMC = \angle DMB,$$

$$\therefore Rt\triangle PMC \cong Rt\triangle DMB,$$

$$\therefore DB = PC,$$

$$\therefore DB = 2 - m, \quad AD = 4 - m,$$

$$\therefore \text{点 } D \text{ 的坐标为 } (2, 4 - m).$$

(2) 分三种情况

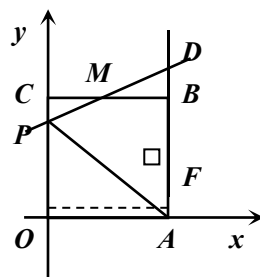
① 若 $AP=AD$, 则 $4+m^2=(4-m)^2$, 解得 $m=\frac{3}{2}$

若 $PD=PA$

过 P 作 $PF \perp AB$ 于点 F (如图),

$$\text{则 } AF=FD=\frac{1}{2}AD=\frac{1}{2}(4-m)$$

$$\text{又 } OP=AF,$$



$$\therefore m = \frac{1}{2}(4-m) \quad m = \frac{4}{3}$$

③若 $PD=DA$,

$$\because \triangle PMC \cong \triangle DMB,$$

$$\therefore PM = \frac{1}{2}PD = \frac{1}{2}AD = \frac{1}{2}(4-m),$$

$$\because PC^2 + CM^2 = PM^2,$$

$$\therefore (2-m)^2 + 1 = \frac{1}{4}(4-m)^2,$$

解得 $m_1 = \frac{2}{3}, m_2 = 2$ (舍去)。

综上所述, 当 $\triangle APD$ 是等腰三角形时, m 的值为 $\frac{3}{2}$ 或 $\frac{4}{3}$ 或 $\frac{2}{3}$

(3) 点 H 所经过的路径长为 $\frac{\sqrt{5}}{4}\pi$

例 10 (2011 年盐城市中考第 28 题) 如图 1, 已知一次函数 $y=-x+7$ 与正比例函数 $y=\frac{4}{3}x$ 的图像交于点 A, 且与 x 轴交于点 B.

(1) 求点 A 和点 B 的坐标;

(2) 过点 A 作 $AC \perp y$ 轴于点 C, 过点 B 作直线 $l \parallel y$ 轴. 动点 P 从点 O 出发, 以每秒 1 个单位长的速度, 沿 O-C-A 的路线向 A 运动; 同时直线 l 从点 B 出发, 以相同速度向左平移, 在平移过程中, 直线 l 交 x 轴于点 R, 交线段 BA 或线段 AO 于点 Q. 当 P 到达点 A 时, 点 P 和直线 l 都停止运动. 在运动过程中, 设动点 P 运动的时间为 t 秒.

①当 t 为何值时, 以 A、P、R 为顶点的三角形的面积为 8?

②是否存在以 A、P、Q 为顶点的三角形是等腰三角形? 若存在, 求 t 的值; 若不存在, 请说明理由.

【解答】

(1) 根据题意, 得 $\begin{cases} y=-x+7 \\ y=\frac{4}{3}x \end{cases}$, 解得 $\begin{cases} x=3 \\ y=4 \end{cases}$, $\therefore A(3, 4)$.

令 $y=-x+7=0$, 得 $x=7$. $\therefore B(7, 0)$.

(2) ①当 P 在 OC 上运动时, $0 \leq t < 4$.

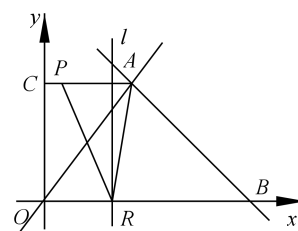
由 $S_{\triangle APR} = S_{\text{梯形 COBA}} - S_{\triangle ACP} - S_{\triangle POR} - S_{\triangle ARB} = 8$, 得

$$\frac{1}{2}(3+7) \times 4 - \frac{1}{2} \times 3 \times (4-t) - \frac{1}{2}t(7-t) - \frac{1}{2} \times 4 = 8$$

整理, 得 $t^2 - 8t + 12 = 0$, 解之得 $t_1 = 2, t_2 = 6$ (舍)

当 P 在 CA 上运动, $4 \leq t < 7$.

由 $S_{\triangle APR} = \frac{1}{2} \times (7-t) \times 4 = 8$, 得 $t = 3$ (舍)



∴当 $t=2$ 时, 以 A 、 P 、 R 为顶点的三角形的面积为 8.

②当 P 在 OC 上运动时, $0 \leq t < 4$. 此时直线 l 交 AB 于 Q .

$$\therefore AP = \sqrt{(4-t)^2 + 3^2}, AQ = \sqrt{2}t, PQ = 7-t$$

当 $AP = AQ$ 时, $(4-t)^2 + 3^2 = 2(4-t)^2$, 整理得, $t^2 - 8t + 7 = 0$. $\therefore t=1, t=7$ (舍)

当 $AP = PQ$ 时, $(4-t)^2 + 3^2 = (7-t)^2$, 整理得, $6t = 24$. $\therefore t=4$ (舍去)

当 $AQ = PQ$ 时, $2(4-t)^2 = (7-t)^2$ 整理得, $t^2 - 2t - 17 = 0$. $\therefore t = 1 \pm 3\sqrt{2}$ (舍)

当 P 在 CA 上运动时, $4 \leq t < 7$. 此时直线 l 交 AO 于 Q .

过 A 作 $AD \perp OB$ 于 D , 则 $AD = BD = 4$.

设直线 l 交 AC 于 E , 则 $QE \perp AC$, $AE = RD = t-4$, $AP = 7-t$.

$$\text{由 } \cos \angle OAC = \frac{AE}{AQ} = \frac{AC}{AO}, \text{ 得 } AQ = \frac{5}{3}(t-4).$$

当 $AP = AQ$ 时, $7-t = \frac{5}{3}(t-4)$, 解得 $t = \frac{41}{8}$.

当 $AQ = PQ$ 时, $AE = PE$, 即 $AE = \frac{1}{2}AP$

得 $t-4 = \frac{1}{2}(7-t)$, 解得 $t=5$.

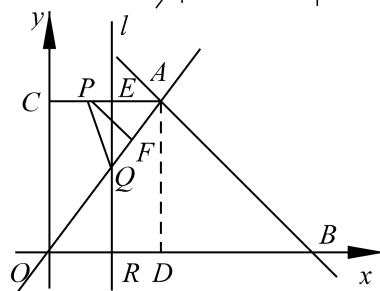
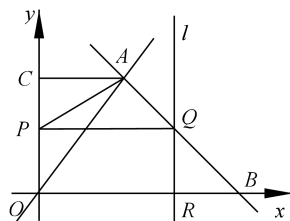
当 $AP = PQ$ 时, 过 P 作 $PF \perp AQ$ 于 F

$$AF = \frac{1}{2}AQ = \frac{1}{2} \times \frac{5}{3}(t-4).$$

在 $Rt\triangle APF$ 中, 由 $\cos \angle PAF = \frac{AF}{AP} = \frac{3}{5}$, 得 $AF = \frac{3}{5}AP$

$$\text{即 } \frac{1}{2} \times \frac{5}{3}(t-4) = \frac{3}{5} \times (7-t), \text{ 解得 } t = \frac{226}{43}.$$

∴综上所述, $t=1$ 或 $\frac{41}{8}$ 或 5 或 $\frac{226}{43}$ 时, $\triangle APQ$ 是等腰三角形.



例 11 (2012 年扬州市中考第 27 题) 已知抛物线 $y = ax^2 + bx + c$ 经过 A (-1, 0)、B (3, 0)、C (0, 3) 三点, 直线 l 是抛物线的对称轴.

- (1) 求抛物线的函数关系式;
- (2) 设点 P 是直线 l 上的一个动点, 当 $\triangle PAC$ 的周长最小时, 求点 P 的坐标;
- (3) 在直线 l 上是否存在点 M, 使 $\triangle MAC$ 为等腰三角形? 若存在, 直接写出所有符合条件的点 M 的坐标; 若不存在, 请说明理由.

【解答】

(1) $\because A(-1, 0)$ 、 $B(3, 0)$ 经过抛物线 $y = ax^2 + bx + c$,
 $\therefore$ 可设抛物线为 $y = a(x+1)(x-3)$.
又 $\because C(0, 3)$ 经过抛物线, $\therefore$ 代入, 得 $3 = a(0+1)(0-3)$, 即 $a = -1$.
 $\therefore$ 抛物线的解析式为 $y = -(x+1)(x-3)$, 即 $y = -x^2 + 2x + 3$.

(2) 连接 BC , 直线 BC 与直线 l 的交点为 P .

则此时的点 P , 使 $\triangle PAC$ 的周长最小.

设直线 BC 的解析式为 $y = kx + b$,

将 $B(3, 0)$, $C(0, 3)$ 代入, 得: $\begin{cases} 3k + b = 0 \\ b = 3 \end{cases}$, 解得: $\begin{cases} k = -1 \\ b = 3 \end{cases}$.

$\therefore$ 直线 BC 的函数关系式 $y = -x + 3$.

当 $x = 1$ 时, $y = 2$, 即 P 的坐标 $(1, 2)$.

(3) 存在。点 M 的坐标为 $(1, \sqrt{6})$, $(1, -\sqrt{6})$, $(1, 1)$, $(1, 0)$ 。

由于 $\triangle MAC$ 的腰和底没有明确, 因此要分三种情况来讨论: ① $MA = AC$ 、② $MA = MC$ 、③ $AC = MC$; 可先设出 M 点的坐标, 然后用 M 点纵坐标表示 $\triangle MAC$ 的三边长, 再按上面的三种情况列式求解:

$\because$ 抛物线的对称轴为: $x = 1$, $\therefore$ 设 $M(1, m)$ 。

$\because A(-1, 0)$ 、 $C(0, 3)$, $\therefore MA^2 = m^2 + 4$, $MC^2 = m^2 - 6m + 10$, $AC^2 = 10$ 。

①若 $MA=MC$ ，则 $MA^2=MC^2$ ，得： $m^2+4=m^2-6m+10$ ，得： $m=1$ 。

②若 $MA=AC$ ，则 $MA^2=AC^2$ ，得： $m^2+4=10$ ，得： $m=\pm\sqrt{6}$ 。

③若 $MC=AC$ ，则 $MC^2=AC^2$ ，得： $m^2-6m+10=10$ ，得： $m=0$ ， $m=6$ ，

当 $m=6$ 时， M 、 A 、 C 三点共线，构不成三角形，不合题意，故舍去。

综上所述，符合条件的 M 点，且坐标为 $(1, \sqrt{6})$ ， $(1, -\sqrt{6})$ ， $(1, 1)$ ， $(1, 0)$ 。

例 12 (2012 年临沂市中考第 26 题) 如图，点 A 在 x 轴上，OA=4，将线段 OA 绕点 O 顺时针旋转 120° 至 OB 的位置。

- (1) 求点 B 的坐标；
- (2) 求经过点 A、O、B 的抛物线的解析式；
- (3) 在此抛物线的对称轴上，是否存在点 P，使得以点 P、O、B 为顶点的三角形是等腰三角形？若存在，求点 P 的坐标；若不存在，说明理由。

【解答】

(1) 如图，过 B 点作 $BC \perp x$ 轴，垂足为 C，则 $\angle BCO = 90^\circ$ 。

$\because \angle AOB = 120^\circ$ ， $\therefore \angle BOC = 60^\circ$ 。

又 $\because OA = OB = 4$ ，

$\therefore OC = \frac{1}{2} \cdot OB = \frac{1}{2} \times 4 = 2$ ， $BC = OB \cdot \sin 60^\circ = 4 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = 2\sqrt{3}$ 。

$\therefore$ 点 B 的坐标为 $(-2, -2\sqrt{3})$ 。

(2) $\because$ 抛物线过原点 O 和点 A、B，

$\therefore$ 可设抛物线解析式为 $y = ax^2 + bx$ ，将 A (4, 0)，B $(-2, -2\sqrt{3})$ 代入，得

$$\begin{cases} 16a + 4b = 0 \\ 4a - 2b = -2\sqrt{3} \end{cases}, \text{解得} \begin{cases} a = -\frac{\sqrt{3}}{6} \\ b = \frac{2\sqrt{3}}{3} \end{cases}.$$

$\therefore$ 此抛物线的解析式为 $y = -\frac{\sqrt{3}}{6}x^2 + \frac{2\sqrt{3}}{3}x$ 。

(3) 存在

如图，抛物线的对称轴是 $x=2$ ，直线 $x=2$ 与 x 轴的交点为 D，设点 P 的坐标为 $(2, y)$ 。

①若 $OB = OP$ ，则 $2^2 + |y|^2 = 4^2$ ，解得 $y = \pm 2\sqrt{3}$ ，

当 $y = 2\sqrt{3}$ 时，在 $\text{Rt}\triangle POD$ 中， $\angle POD = 90^\circ$ ， $\sin \angle POD = PD/OP = \sqrt{3}/2$ ，

$$\therefore \angle POD = 60^\circ$$

$$\therefore \angle POB = \angle BOC + \angle AOB = 60^\circ + 120^\circ = 180^\circ, \text{ 即 } P、O、B \text{ 三点在同一直线上。}$$

$$\therefore y = 2\sqrt{3} \text{ 不符合题意, 舍去。}$$

$$\therefore \text{点 } P \text{ 的坐标为 } (2, -2\sqrt{3})。$$

$$\textcircled{2} \text{ 若 } OB = PB, \text{ 则 } 4^2 + |y + 2\sqrt{3}|^2 = 4^2, \text{ 解得 } y = -2\sqrt{3}。$$

$$\therefore \text{点 } P \text{ 的坐标为 } (2, -2\sqrt{3})。$$

$$\textcircled{3} \text{ 若 } OP = BP, \text{ 则 } 2^2 + |y|^2 = 4^2 + |y + 2\sqrt{3}|^2, \text{ 解得 } y = -2\sqrt{3}。$$

$$\therefore \text{点 } P \text{ 的坐标为 } (2, -2\sqrt{3})。$$

综上所述, 符合条件的点 P 只有一个, 其坐标为 $(2, -2\sqrt{3})$ 。

例 13 (2014 年长沙市中考第 26 题) 如图 1, 抛物线 $y=ax^2+bx+c$ (a 、 b 、 c 是常数, $a \neq 0$) 的对称轴为 y 轴. 且经过 $(0, 0)$ 和 $(\sqrt{2}, 1/16)$ 两点, 点 P 在该抛物线上运动, 以点 P 为圆心的圆 P 总经过定点 $A(0, 2)$.

- (1) 求 a 、 b 、 c 的值;
- (2) 求证: 在点 P 运动的过程中, 圆 P 始终与 x 轴相交;
- (3) 设圆 P 与 x 轴相交于 $M(x_1, 0)$ 、 $N(x_2, 0)$ ($x_2 > x_1$) 两点, 当 $\triangle AMN$ 为等腰三角形时, 求圆心 P 的纵坐标.

【解答】

(1) $\because$ 抛物线 $y=ax^2+bx+c$ (a 、 b 、 c 是常数, $a \neq 0$) 的对称轴为 y 轴, 且经过 $(0, 0)$ 和 $(\sqrt{2}, 1/16)$ 两点,

$\therefore$ 抛物线的一般式为: $y=ax^2$,

$\therefore 1/16=a(\sqrt{2})^2$,

解得: $a=\pm 1/4$,

$\because$ 图象开口向上,

$\therefore a=1/4$,

$\therefore$ 抛物线解析式为: $y=1/4x^2$,

故 $a=1/4$, $b=c=0$;

(2) 设 $P(x, y)$, $\odot P$ 的半径 $r=\sqrt{x^2+(y-2)^2}$,

又 $\because y=1/4x^2$, 则 $r=\sqrt{x^2+(1/4x^2-2)^2}$,

化简得: $r=\sqrt{1/16x^4+4}>1/4x^2$,

∴点 P 在运动过程中，⊙P 始终与 x 轴相交；

(3) 设 P (a, $\frac{1}{4}a^2$),

∵ $PA = \sqrt{\frac{1}{16}a^4 + 4}$,

作 PH ⊥ MN 于 H,

则 PM = PN = $\sqrt{\frac{1}{16}a^4 + 4}$,

又 ∵ PH = $\frac{1}{4}a^2$,

则 MH = NH = $\sqrt{\frac{1}{16}a^4 + 4 - (\frac{1}{4}a^2)^2} = 2$,

故 MN = 4,

∴ M (a-2, 0), N (a+2, 0),

又 ∵ A (0, 2),

∴ AM = $\sqrt{(a-2)^2 + 4}$, AN = $\sqrt{(a+2)^2 + 4}$,

当 AM = AN 时, $\sqrt{(a-2)^2 + 4} = \sqrt{(a+2)^2 + 4}$,

解得: a = 0,

当 AM = MN 时, $\sqrt{(a-2)^2 + 4} = 4$,

解得: $a = 2 \pm 2\sqrt{3}$, 则 $\frac{1}{4}a^2 = 4 \pm 2\sqrt{3}$;

综上所述, P 的纵坐标为: 0 或 $4 + 2\sqrt{3}$ 或 $4 - 2\sqrt{3}$.

例 14 (2014 年金华市中考第 24 题) 如图，直角梯形 ABCO 的两边 OA、OC 在坐标轴的正半轴上，BC // x 轴，OA=OC=4，以直线 x=1，为对称轴的抛物线经过 A、B、C 三点.

(1) 求该抛物线的函数解析式；

(2) 已知直线的解析式为 $y=x+m$ ，它与 x 轴交于点 G，在梯形 ABCO 的一边上取点 P；①如图 1，当 $m=0$ 时，点 P 是抛物线的对称轴与 BC 的交点，过点 P 作 $PH \perp$ 直线 l 于点 H，连结 OP，试求 $\triangle OPH$ 的面积；②如图 2，当 $m=-3$ 时，过点 P 作 x 轴、直线 l 的垂线，垂足分别为 E、F. 是否存在这样的点 P，使以 P、E、F 为顶点的三角形是等腰三角形？若存在，求出点 P 的坐标；若不存在，请说明理由.

【解答】

(1) 由题意得：A (4, 0)，C (0, 4).

设抛物线的解析式为 $y=ax^2+bx+c$ ，则有

$$\begin{cases} 16a+4b+c=0 \\ c=4 \\ -b/2a \end{cases}, \text{ 解得 } \begin{cases} a=-1/2 \\ b=1 \\ c=4 \end{cases},$$

$\therefore$ 抛物线的函数解析式为： $y=-1/2x^2+x+4$.

(2) ①当 $m=0$ 时，直线 l: $y=x$.

$\because$ 抛物线对称轴为 $x=1$ ， $\therefore CP=1$.

如答图 1，延长 HP 交 y 轴于点 M，则 $\triangle OMH$ 、 $\triangle CMP$ 均为等腰直角三角形.

$\therefore CM=CP=1$ ， $\therefore OM=OC+CM=5$.

$$S_{\triangle OPH} = S_{\triangle OMH} - S_{\triangle OMP} = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{2^{\frac{1}{2}}}{2} \cdot OM \right)^2 - \frac{1}{2} \cdot OM \cdot OP = \frac{1}{2} \cdot$$

$$\left(\frac{2^{\frac{1}{2}}}{2} \cdot 5 \right)^2 - \frac{1}{2} \cdot 5 \cdot 1 = \frac{15}{4},$$

$$\therefore S_{\triangle OPH} = \frac{15}{4}.$$

②当 $m = -3$ 时，直线 $l: y = x - 3$.

设直线 l 与 x 轴、 y 轴交于点 G 、点 D ，则 $G(3, 0)$ ， $D(-3, 0)$.

假设存在满足条件的点 P .

i) 当点 P 在 OC 边上时，如答图 2-1 所示，此时点 E 与点 O 重合.

设 $PE = a$ ($0 < a \leq 4$)，则 $PD = 3 + a$ ， $PF = \frac{2^{\frac{1}{2}}}{2} \cdot PD = \frac{2^{\frac{1}{2}}}{2} \cdot (3 + a)$.

过点 F 作 $FN \perp y$ 轴于点 N ，则 $FN = PN = \frac{2^{\frac{1}{2}}}{2} \cdot PF$,

$$\therefore EN = |PN - PE| = \frac{2^{\frac{1}{2}}}{2} \cdot |PF - PE|.$$

在 $Rt\triangle ENF$ 中，由勾股定理得： $EF = \sqrt{EN^2 + FN^2} = \sqrt{PE^2 - \sqrt{2}PE \cdot PF + PF^2}$.

若 $PE = PF$ ，则： $a = \frac{2^{\frac{1}{2}}}{2} \cdot (3 + a)$ ，解得 $a = 3 \cdot (2^{\frac{1}{2}} + 1) > 4$ ，故此种情形不存在；

若 $PF = EF$ ，则： $PF = \sqrt{PE^2 - \sqrt{2}PE \cdot PF + PF^2}$ ，整理得 $PE = \frac{2^{\frac{1}{2}}}{2} \cdot PF$ ，即 $a = 3 + a$ ，不成立，故此种情形不存在；

若 $PE = EF$ ，则： $PE = \sqrt{PE^2 - \sqrt{2}PE \cdot PF + PF^2}$ ，整理得 $PF = PE$ ，即 $\frac{2^{\frac{1}{2}}}{2} \cdot (3 + a) = \frac{2^{\frac{1}{2}}}{2} \cdot a$ ，解得 $a = 3$. $\therefore P(0, 3)$.

ii) 当点 P 在 BC 边上时，如答图 2 所示，此时 $PE = 4$.

设 $CP = a$ ($0 \leq a \leq 2$)，则 $P(a, 4)$ ；

设直线 PE 与直线 l 交点为 Q ，则 $Q(a, a - 3)$ ， $\therefore PQ = 7 - a$.

$$\therefore PF = \frac{2^{\frac{1}{2}}}{2} \cdot (7 - a).$$

与 i) 同理，可求得： $EF = \sqrt{PE^2 - \sqrt{2}PE \cdot PF + PF^2}$.

若 $PE=PF$, 则 $2^{(1/2)/2} \cdot (7-a) = 4$, 解得 $a = 7 - 4 \cdot 2^{(1/2)} > 2$, 故此种情形不存在;

若 $PF=EF$, 则 $PF = \sqrt{PE^2 - \sqrt{2}PE \cdot PF + PF^2}$, 整理得 $PE = 2^{(1/2)} \cdot 2^{(1/2)} \cdot PF$, 即 $4 = 2^{(1/2)/2} \cdot (7-a)$, 解得 $a = 3 > 2$, 故此种情形不存在;

若 $PE=EF$, 则 $PE = \sqrt{PE^2 - \sqrt{2}PE \cdot PF + PF^2}$, 整理得 $PF = 2^{(1/2)} \cdot PE$, 即 $2^{(1/2)/2} \cdot (7-a) = 4 \cdot 2^{(1/2)}$, 解得 $a = -1$, 故此种情形不存在.

$\because A(4, 0), B(2, 4), \therefore$ 可求得直线 AB 解析式为: $y = -2x + 8$;

联立 $y = -2x + 8$ 与 $y = x - 3$, 解得 $x = 11/3, y = 2/3$.

设直线 BC 与直线 l 交于点 K , 则 $K(11/3, 2/3)$.

iii) 当点 P 在线段 BK 上时, 如答图 2-3 所示.

设 $P(a, 8-2a) (2 \leq a \leq 11/3)$, 则 $Q(a, a-3)$,

$\therefore PE = 8-2a, PQ = 11-3a, \therefore PF = 2^{(1/2)/2} \cdot (11-3a)$.

与 i) 同理, 可求得: $EF = \sqrt{PE^2 - \sqrt{2}PE \cdot PF + PF^2}$.

若 $PE=PF$, 则 $8-2a = 2^{(1/2)/2} \cdot (11-3a)$, 解得 $a = 1 - 2 \cdot 2^{(1/2)} < 0$, 故此种情形不存在;

若 $PF=EF$, 则 $PF = \sqrt{PE^2 - \sqrt{2}PE \cdot PF + PF^2}$, 整理得 $PE = 2^{(1/2)} \cdot PF$, 即 $8-2a = 2^{(1/2)} \cdot 2^{(1/2)/2} \cdot (11-3a)$, 解得 $a = 3$, 符合条件, 此时 $P(3, 2)$;

若 $PE=EF$, 则 $PE = \sqrt{PE^2 - \sqrt{2}PE \cdot PF + PF^2}$, 整理得 $PF = 2^{(1/2)} \cdot PE$, 即 $2^{(1/2)/2} \cdot (11-3a) = 2^{(1/2)} \cdot (8-2a)$, 解得 $a = 5 > 11/3$, 故此种情形不存在.

iiii) 当点 P 在线段 KA 上时, 如答图 2-4 所示.

$\because PE, PF$ 夹角为 $135^\circ, \therefore$ 只可能是 $PE=PF$ 成立.

∴点 P 在 $\angle KGA$ 的平分线上.

设此角平分线与 y 轴交于点 M, 过点 M 作 $MN \perp$ 直线 l 于点 N, 则 $OM=MN$,
 $MD=2^{1/2} \cdot MN$,

由 $OD=OM+MD=3$, 可求得 M $(0, 3 - 3 \cdot 2^{1/2})$.

又 G $(3, 0)$, 可求得直线 MG 的解析式为: $y = (2^{1/2} - 1) \cdot x + 3 - 3$.

联立直线 MG: $y = (2^{1/2} - 1) \cdot x + 3 - 3$ 与直线 AB: $y = -2x + 8$,

可求得: P $(1 + 2 \cdot 2^{1/2}, 6 - 4 \cdot 2^{1/2})$.

iiii) 当点 P 在 OA 边上时, 此时 $PE=0$, 等腰三角形不存在.

综上所述, 存在满足条件的点 P, 点 P 坐标为: $(0, 3)$ 、 $(3, 2)$ 、 $(1 + 2 \cdot 2^{1/2}, 6 - 4 \cdot 2^{1/2})$.

例 15 (2014 年上海市中考第 25 题) 如图 1, 已知在平行四边形 ABCD 中, AB=5, BC=8, $\cos B=4/5$, 点 P 是边 BC 上的动点, 以 CP 为半径的圆 C 与边 AD 交于点 E、F (点 F 在点 E 的右侧), 射线 CE 与射线 BA 交于点 G.

- (1) 当圆 C 经过点 A 时, 求 CP 的长;
- (2) 连结 AP, 当 $AP \parallel CG$ 时, 求弦 EF 的长;
- (3) 当 $\triangle AGE$ 是等腰三角形时, 求圆 C 的半径长.

【解答】 (1) 如图 1, 设 $\odot O$ 的半径为 r ,

当点 A 在 $\odot C$ 上时, 点 E 和点 A 重合, 过点 A 作 $AH \perp BC$ 于 H,

$$\therefore BH = AB \cdot \cos B = 4,$$

$$\therefore AH = 3, CH = 4,$$

$$\therefore AC = \sqrt{AH^2 + CH^2} = 5,$$

$$\therefore \text{此时 } CP = r = 5;$$

(2) 如图 2, 若 $AP \parallel CE$, APCE 为平行四边形,

$$\therefore CE = CP,$$

$\therefore$ 四边形 APCE 是菱形, 连接 AC、EP, 则 $AC \perp EP$,

$$\therefore AM = CM = \frac{5}{2},$$

由 (1) 知, $AB = AC$, 则 $\angle ACB = \angle B$,

$$\therefore CP = CE = \frac{CM}{\cos \angle ACB} = \frac{25}{8},$$

$$\therefore EF = 2 \sqrt{\left(\frac{25}{8}\right)^2 - 3^2} = \frac{7}{4}$$

(3) 如图 3: 过点 C 作 $CN \perp AD$ 于点 N, 过点 A 作 $AQ \perp BC$ 于点 Q,

$$\therefore \cos B = \frac{4}{5}$$

$$\therefore \angle B < 45^\circ,$$

$$\therefore \angle BCG < 90^\circ,$$

$\therefore \angle BGC > 45^\circ$,
 $\therefore \angle BGC > \angle B = \angle GAE$, 即 $\angle BGC \neq \angle GAE$,
 又 $\angle AEG = \angle BCG \geq \angle ACB = \angle B = \angle GAE$,
 $\therefore$ 当 $\angle AEG = \angle GAE$ 时, A、E、G 重合, 则 $\triangle AGE$ 不存在.
 即 $\angle AEG \neq \angle GAE$
 $\therefore$ 只能 $\angle AGE = \angle AEG$,
 $\because AD \parallel BC$,
 $\therefore \triangle GAE \sim \triangle GBC$,

$$\therefore \frac{AE}{BC} = \frac{AG}{BG} \quad \text{即} \quad \frac{AE}{8} = \frac{AE}{AE+5}$$

解得, $AE=3$, $EN=AN-AE=1$

$$\therefore CE = \sqrt{EN^2 + CN^2} = \sqrt{3^2 + 1^2} = \sqrt{10}$$

例 16 (2015 年重庆市中考第 25 题) 如图 1, 在 $\triangle ABC$ 中, $\angle ACB=90^\circ$, $\angle BAC=60^\circ$, 点 E 是 $\angle BAC$ 的平分线上的一点, 过点 E 作 AE 的垂线, 过点 A 作 AB 的垂线, 两垂线交于点 D, 连结 DB, 点 F 是 BD 的中点, $DH \perp AC$, 垂足为 H。连结 EF、HF。

(1) 如图 1, 若点 H 是 AC 的中点, $AC=2\sqrt{3}$, 求 AB、BD 的长;

(2) 如图 1, 求证: $HF=EF$;

如图 2, 连结 CF、CE, 猜想: $\triangle CEF$ 是否是等腰三角形? 若是, 请证明; 若不是, 请说明理由。

【分析】

(1) 根据直角三角形的性质和三角函数即可得到结果;

(2) 如图 1, 连接 AF, 证出 $\triangle DAE \cong \triangle ADH$, $\triangle DHF \cong \triangle AEF$, 即可得到结果;

(3) 如图 2, 取 AB 的中点 M, 连接 CM, FM, 在 $Rt\triangle ADE$ 中, $AD=2AE$, 根据三角形的中位线的性质得到 $AD=2FM$, 于是得到 $FM=AE$, 由 $\angle CAE = \frac{1}{2}\angle CAB = 30^\circ$ $\angle CMF = \angle AMF - \angle AMC = 30^\circ$, 证得 $\triangle ACE \cong \triangle MCF$, 问题即可得证。

【解答】

解: (1) $\because \angle ACB=90^\circ$, $\angle BAC=60^\circ$,

$$\therefore \angle ABC=30^\circ, \therefore AB=2AC=2 \times 2\sqrt{3}=4\sqrt{3},$$

$$\because AD \perp AB, \angle CAB=60^\circ, \therefore \angle DAC=30^\circ,$$

$$\because AH=\frac{1}{2}AC=\sqrt{3}, \therefore AD=\frac{AH}{\cos 30^\circ}=2,$$

$$\therefore BD=\sqrt{AB^2+AD^2}=2\sqrt{13};$$

(2) 如图 1, 连接 AF,

$\because$ AE 是 $\angle BAC$ 角平分线, $\therefore \angle HAE = 30^\circ$,

$\therefore \angle ADE = \angle DAH = 30^\circ$,

在 $\triangle DAE$ 与 $\triangle ADH$ 中, $\begin{cases} \angle AHD = \angle DEA = 90^\circ \\ \angle ADE = \angle DAH \\ AD = AD \end{cases}$,

$\therefore \triangle DAE \cong \triangle ADH$, $\therefore DH = AE$,

$\because$ 点 F 是 BD 的中点, $\therefore DF = AF$,

$\because \angle EAF = \angle EAB - \angle FAB = 30^\circ - \angle FAB$

$\angle FDH = \angle FDA - \angle HDA = \angle FDA - 60^\circ = (90^\circ - \angle FBA) - 60^\circ = 30^\circ - \angle FBA$,

$\therefore \angle EAF = \angle FDH$,

在 $\triangle DHF$ 与 $\triangle AEF$ 中, $\begin{cases} DH = AE \\ \angle HDF = \angle EAF \\ DF = AF \end{cases}$,

$\therefore \triangle DHF \cong \triangle AEF$, $\therefore HF = EF$;

(3) 如图 2, 取 AB 的中点 M, 连接 CM, FM,

在 $Rt\triangle ADE$ 中, $AD = 2AE$,

$\because DF = BF$, $AM = BM$, $\therefore AD = 2FM$, $\therefore FM = AE$,

$\because \angle ABC = 30^\circ$, $\therefore AC = CM = \frac{1}{2}AB = AM$,

$\because \angle CAE = \frac{1}{2}\angle CAB = 30^\circ$, $\angle CMF = \angle AMF - \angle AMC = 30^\circ$,

在 $\triangle ACE$ 与 $\triangle MCF$ 中, $\begin{cases} AC = CM \\ \angle CAE = \angle CMF \\ AE = MF \end{cases}$,

$\therefore \triangle ACE \cong \triangle MCF$,

$\therefore CE = CF$, $\angle ACE = \angle MCF$,

$\because \angle ACM = 60^\circ$, $\therefore \angle ECF = 60^\circ$,

$\therefore \triangle CEF$ 是等边三角形.

例 17 (2016 年河南省中考第 23 题) 如图 1, 直线 $y=-\frac{4}{3}x+n$ 交 x 轴于点 A, 交 y 轴于点 C (0, 4), 抛物线 $y=\frac{2}{3}x^2+bx+c$ 经过点 A, 交 y 轴于点 B (0, -2). 点 P 为抛物线上一个动点, 经过点 P 作 x 轴的垂线 PD, 过点 B 作 $BD \perp PD$ 于点 D, 连接 PB, 设点 P 的横坐标为 m .

(1) 求抛物线的解析式;

(2) 当 $\triangle BDP$ 为等腰直角三角形时, 求线段 PD 的长;

(3) 如图 2, 将 $\triangle BDP$ 绕点 B 逆时针旋转, 得到 $\triangle BD'P'$, 且旋转角 $\angle PBP' = \angle OAC$, 当点 P 的对应点 P' 落在坐标轴上时, 请直接写出点 P 的坐标.

【解答】

(1) 将点 C 代入直线 $y=-\frac{4}{3}x+n$, 得 $n=4$. 所以 $y=-\frac{4}{3}x+4$, 求得 A (3,0).

$\because$ 抛物线 $y=\frac{2}{3}x^2+bx+c$ 经过点 A (3,0)、B (0, -2), $\therefore \begin{cases} 0 = 6 + 3b + c \\ -2 = c \end{cases}$, 得

$b=-\frac{3}{4}$, $c=-2$. $\therefore$ 抛物线的解析式为 $y=\frac{2}{3}x^2-\frac{4}{3}x-2$

(2) $\because$ 点 P 的横坐标为 m , $\therefore P (m, \frac{2}{3}m^2-\frac{4}{3}m-2)$, 若 $\triangle BDP$ 为等腰直角三角形, 则 $PD=BD$.

①当点 P 在直线 BD 上方时, $PD=\frac{2}{3}m^2-\frac{4}{3}m$.

(I) 若点 P 在 y 轴左侧, 则 $m < 0$, $BD=-m$.

$\therefore \frac{2}{3}m^2-\frac{4}{3}m=-m$, $\therefore m_1=0$ (舍去), $m_2=\frac{1}{2}$ (舍去).

(II) 若点 P 在 y 轴右侧, 则 $m > 0$, $BD=m$.

$\therefore \frac{2}{3}m^2-\frac{4}{3}m=m$, $\therefore m_1=0$ (舍去), $m_2=\frac{7}{2}$.

②当点 P 在直线 BD 下方时, $m > 0$, $BD=m$, $PD=-\frac{2}{3}m^2+\frac{4}{3}m$.

$\therefore -\frac{2}{3}m^2+\frac{4}{3}m=m$, $\therefore m_1=0$ (舍去), $m_2=\frac{1}{2}$.

综上, $m=7/2$ 或 $1/2$. 即当 $\triangle BDP$ 为等腰直角三角形, PD 的长为 $7/2$ 或 $1/2$.

(3) 点 P 的坐标为 $(25/9, 11/32)$ 、 $(5^{1/2}, (4-4*5^{1/2})/3)$ 或 $(-5^{1/2}, (4+4*5^{1/2}))$

$\because$ $\text{Rt}\triangle AOC$ 的三边比是 3:4:5.

①当点 P' 落在 x 轴上时, 过点 D' 作 $D'N \perp x$ 轴, 垂足为 N , 交 BD 于点 M , $\angle DBD' = \angle ND'P' = \angle PBP'$.

如图 1, $ND' - MD' = 2$, 即 $2/3 * (2/3 * m^2 - 4/3 * m) - (-4/5 * m) = 2$.

如图 2, $ND' + MD' = 2$, 即 $2/3 * (2/3 * m^2 - 4/3 * m) + (-4/5 * m) = 2$.

$\therefore P_1(4-4*5^{1/2})/3$ 、 $P_2(-5^{1/2}, (4+4*5^{1/2}))$

②当点 P' 落在 y 轴上时, 如图 3, 过点 D' 作 $D'M \perp x$ 轴, 交 BD 于点 M , 过点 P' 作 $P'N \perp y$ 轴, 交 MD' 的延长线于点 N , $\angle DBD' = \angle ND'P' = \angle PBP'$.

$\because P'N = BM$, 即 $m/5 * (2/3 * m^2 - 4/3 * m) = 3/5 * m$

$\therefore P_3(25/9, 11/32)$.

例 18 (2016 年山西省中考第 23 题) 如图，在平面直角坐标系中，已知抛物线 $y=ax^2+bx-8$ 与 x 轴交于 A, B 两点，与 y 轴交于点 C，直线 l 经过坐标原点 O，与抛物线的一个交点为 D，与抛物线的对称轴交于点 E，连接 CE，已知点 A、D 的坐标分别为 $(-2, 0)$ ， $(6, -8)$ 。

- (1) 求抛物线的函数表达式，并分别求出点 B 和点 E 的坐标；
- (2) 试探究抛物线上是否存在点 F，使 $\triangle FOE \cong \triangle FCE$ ，若存在，请直接写出点 F 的坐标；若不存在，请说明理由；
- (3) 若点 P 是 y 轴负半轴上的一个动点，设其坐标为 $(0, m)$ ，直线 PB 与直线 l 交于点 Q。试探究：当 m 为何值时， $\triangle OPQ$ 是等腰三角形。

【解答】

$$(1) \text{ 抛物线 } y=ax^2+bx-8 \text{ 经过点 } A(-2, 0), D(6, -8), \therefore \begin{cases} 4a-2b-8=0 \\ 36a+6b-8=-8 \end{cases}$$

解得 $a=1/2$ ， $b=-3$ ； $\therefore$ 抛物线的函数表达式为 $y=1/2x^2-3x-8$ ；

$$\therefore y=1/2x^2-3x-8=1/2(x-3)^2-25/2,$$

$\therefore$ 抛物线的对称轴为直线 $x=3$ ，又 $\therefore$ 抛物线与 x 轴交于 A, B 两点，点 A 的坐标为 $(-2, 0)$ ， $\therefore$ 点 B 的坐标为 $(8, 0)$ ；

设直线 l 的函数表达式为 $y=kx$ 。

$\therefore$ 点 D $(6, -8)$ 在直线 l 上， $\therefore 6k=-8$ ，解得 $k=-4/3$ 。直线 l 的函数表达式为 $y=-4/3x$ 。

$\therefore$ 点 E 为直线 l 和抛物线对称轴的交点。 $\therefore$ 点 E 的横坐标为 3，即点 E 的坐标为 $(3, -4)$ 。

(2) 当点 F 在 OC 的垂直平分线上时, 抛物线上存在点 F, 使 $\triangle FOE \cong \triangle FCE$. 即

$\frac{1}{2}x^2 - 3x - 8 = -4$, 所以点 F 的坐标为 $(3 + 17^{1/2}, -4)$ 或 $(3 - 17^{1/2}, -4)$.

(3) 作 $QH \perp x$ 轴于 H. 在 $\triangle OQH$ 中, $OH = 3n, QH = 4n, OQ = 5n$.

由 $QH/PO = BH/BO$ 得 $4n/(-m) = (8 - 3n)/8$. 解得 $n = 8m/(3m - 32)$.

所以 $OQ = 5n = 40m/(3m - 32)$. 在 $\triangle POQ$ 中, $OP = -m, OQ = 40m/(3m - 32), \cos \angle POQ = 4/5$.

①当 $OP = OQ$ 时, 解方程 $-m = 40m/(3m - 32)$, 得 $m = -8/3$;

②当 $QO = QP$ 时, $\frac{1}{2}OP = \frac{4}{5}OQ$. 解方程 $-\frac{1}{2}m = \frac{4}{5} \cdot \frac{40m}{3m - 32}$, 得 $m = -32/3$.

③当 $PO = PQ$ 时, $\frac{1}{2}OQ = \frac{4}{5}OP$. 解方程 $\frac{1}{2} \cdot \frac{40m}{3m - 32} = -\frac{4}{5}m$, 得 $m = 7/3$ (舍去).

第三部分 因动点产生的直角三角形问题

例 1 (2008 年河南省中考第 23 题) 如图 1, 直线 $y=-\frac{4}{3}x+4$ 和 x 轴、 y 轴的交点分别为 B 、 C , 点 A 的坐标是 $(-2,0)$.

(1) 试说明 $\triangle ABC$ 是等腰三角形;

(2) 动点 M 从 A 出发沿 x 轴向点 B 运动, 同时动点 N 从点 B 出发沿线段 BC 向点 C 运动, 运动的速度均为每秒 1 个单位长度, 当其中一个动点到达终点时, 他们都停止运动, 设 M 运动 t 秒时, $\triangle MON$ 的面积为 S .

①求 S 与 t 的函数关系式;

②设点 M 在线段 OB 上运动时, 是否存在 $S=4$ 的情形? 若存在, 求出对应 t 的值; 若不存在, 请说明理由;

③在运动过程中, 当 $\triangle MON$ 为直角三角形时, 求 t 的值.

【解答】

(1) $\because$ 当 $x=0$ 和 $x=4$ 时, y 的值相等, $\therefore c=16a+4b+c$,

$$\therefore b=-4a, \therefore x=-\frac{b}{2a}=\frac{-4a}{2a}=2$$

将 $x=3$ 代入 $y=4x-16$, 得 $y=-4$,

将 $x=2$ 代入 $y=4x-16$, 得 $y=-8$

$\therefore$ 设抛物线的解析式为 $y=a(x-2)^2-8$

将点 $(3,-4)$ 代入, 得 $-4=a(x-2)^2-8$, 解得 $a=4$.

$\therefore$ 抛物线 $y=4(x-2)^2-8$, 即 $y=4x^2-16x+8$

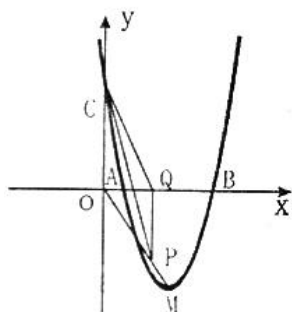
(2) 设直线 OM 的解析式为 $y=kx$, 将点 $M(2,-8)$ 代入, 得 $k=-4$,

$$\therefore y=-4x$$

则点 $P(t,-4t)$, $PQ=4t$, 而 $OC=8$, $OQ=t$.

$$S = S_{\triangle COQ} + S_{\triangle OPQ} = \frac{1}{2} \times 8 \times t + \frac{1}{2} \times t \times 4t = 2t^2 + 4t$$

t 的取值范围为: $0 < t \leq 2$.



(3) 随着点 p 的运动, 四边形 $PQCO$ 的面积 S 有最大值.

从图像可看出, 随着点 p 由 $O \rightarrow M$ 运动, $\triangle COQ$ 的面积与 $\triangle OPQ$ 的面积在不断增大, 即 S 不断变大, 显当然点 P 运动到点 M 时, S 最值

此时 $t = 2$ 时, 点 Q 在线段 AB 的中点上

$$\text{因而 } S = \frac{1}{2} \times 2 \times 8 + \frac{1}{2} \times 2 \times 8 = 16.$$

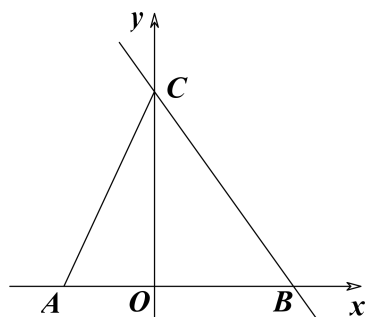
当 $t = 2$ 时, $OC = MQ = 8$, $OC \parallel MQ$, $\therefore$ 四边形 $PQCO$ 是平行四边形.

(4) 随着点 P 的运动, 存在 $t = \frac{8}{17}\sqrt{17}$, 能满足 $PO = OC$

设点 $P(t, -4t)$, $PQ = 4t$, $OQ = t$. 由勾股定理, 得 $OP^2 = (4t)^2 + t^2 = 17t^2$.

$$\because PO = OC, \therefore 17t^2 = 8^2, t_1 = \frac{8}{17}\sqrt{17} < 2, t_2 = -\frac{8}{17}\sqrt{17} \text{ (不合题意)}$$

$$\therefore \text{当 } t = \frac{8}{17}\sqrt{17} \text{ 时, } PO = OC$$



例 2 (2008 年天津市中考第 25 题) 已知 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中, $\angle ACB=90^\circ$, $CA=CB$, 有一个圆心角为 45° , 半径的长等于 CA 的扇形 CEF 绕点 C 旋转, 且直线 CE , CF 分别与直线 AB 交于点 M , N .

(1) 当扇形 CEF 绕点 C 在 $\angle ACB$ 的内部旋转时, 如图 1, 求证:
 $MN^2=AM^2+BN^2$; 思路点拨: 考虑 $MN^2=AM^2+BN^2$ 符合勾股定理的形式, 需转化为直角三角形中解决. 可将 $\triangle ACM$ 沿直线 CE 对折, 得 $\triangle DCM$, 连 DN , 只需证 $DN=BN$, $\angle MDN=90^\circ$ 就可以了. 请你完成证明过程.

(2) 当扇形 CEF 绕点 C 旋转至图 2 的位置时, 关系式
 $MN^2=AM^2+BN^2$ 是否仍然成立? 若成立, 请证明; 若不成立, 请说明理由.

【解答】

(I) 证明 将 $\triangle ACM$ 沿直线 CE 对折, 得 $\triangle DCM$, 连 DN , 则 $\triangle DCM \cong \triangle ACM$.

有 $CD=CA$, $DM=AM$, $\angle DCM=\angle ACM$, $\angle CDM=\angle A$.

又由 $CA=CB$, 得 $CD=CB$.

由 $\angle DCN=\angle ECF-\angle DCM=45^\circ-\angle DCM$,

$\angle BCN=\angle ACB-\angle ECF-\angle ACM$

$=90^\circ-45^\circ-\angle ACM=45^\circ-\angle ACM$,

得 $\angle DCN=\angle BCN$.

又 $CN=CN$,

$\therefore \triangle CDN \cong \triangle CBN$.

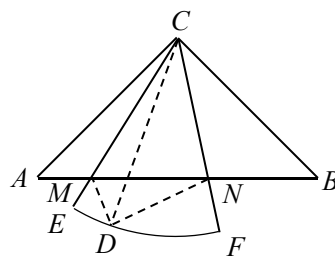
有 $DN=BN$, $\angle CDN=\angle B$.

$\therefore \angle MDN=\angle CDM+\angle CDN=\angle A+\angle B=90^\circ$.

$\therefore$ 在 $\text{Rt}\triangle MDN$ 中, 由勾股定理,

得 $MN^2=DM^2+DN^2$. 即 $MN^2=AM^2+BN^2$.

(II) 关系式 $MN^2=AM^2+BN^2$ 仍然成立.



证明 将 $\triangle ACM$ 沿直线 CE 对折,得 $\triangle GCM$,连 GN ,

则 $\triangle GCM \cong \triangle ACM$.

有 $CG = CA$, $GM = AM$,

$\angle GCM = \angle ACM$, $\angle CGM = \angle CAM$.

又由 $CA = CB$,得 $CG = CB$.

由 $\angle GCN = \angle GCM + \angle ECF = \angle GCM + 45^\circ$,

$\angle BCN = \angle ACB - \angle ACN = 90^\circ - (\angle ECF - \angle ACM) = 45^\circ + \angle ACM$.

得 $\angle GCN = \angle BCN$.

又 $CN = CN$,

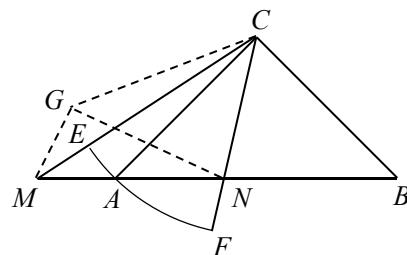
$\therefore \triangle CGN \cong \triangle CBN$.

有 $GN = BN$, $\angle CGN = \angle B = 45^\circ$, $\angle CGM = \angle CAM = 180^\circ - \angle CAB = 135^\circ$,

$\therefore \angle MGN = \angle CGM - \angle CGN = 135^\circ - 45^\circ = 90^\circ$.

$\therefore$ 在 $\text{Rt}\triangle MGN$ 中,由勾股定理,

得 $MN^2 = GM^2 + GN^2$. 即 $MN^2 = AM^2 + BN^2$.



例 3 (2009 年嘉兴市中考第 24 题) 如图 1, 已知 A、B 是线段 MN 上的两点, MN=4, MA=1, MB>1. 以 A 为中心顺时针旋转点 M, 以 B 为中心逆时针旋转点 N, 使 M、N 两点重合成一点 C, 构成 $\triangle ABC$, 设 $AB=x$.

- (1) 求 x 的取值范围;
- (2) 若 $\triangle ABC$ 为直角三角形, 求 x 的值;
- (3) 探究: $\triangle ABC$ 的最大面积?

【解答】

(1) 在 $\triangle ABC$ 中, $\because AC=1, AB=x, BC=3-x$.

$$\therefore \begin{cases} 1+x>3-x \\ 1+3-x>x \end{cases}, \text{解得 } 1<x<2.$$

(2) ①若 AC 为斜边, 则 $1=x^2+(3-x)^2$, 即 $x^2-3x+4=0$, 无解.

②若 AB 为斜边, 则 $x^2=(3-x)^2+1$, 解得 $x=\frac{5}{3}$, 满足 $1<x<2$.

③若 BC 为斜边, 则 $(3-x)^2=1+x^2$, 解得 $x=\frac{4}{3}$, 满足 $1<x<2$.

$$\therefore x=\frac{5}{3} \text{ 或 } x=\frac{4}{3}.$$

(3) 在 $\triangle ABC$ 中, 作 $CD \perp AB$ 于 D ,

设 $CD=h$, $\triangle ABC$ 的面积为 S , 则 $S=\frac{1}{2}xh$.

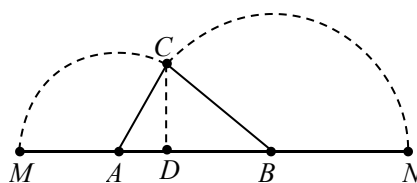
①若点 D 在线段 AB 上,

$$\text{则 } \sqrt{1-h^2} + \sqrt{(3-x)^2-h^2} = x.$$

$$\therefore (3-x)^2-h^2 = x^2 - 2x\sqrt{1-h^2} + 1-h^2, \text{ 即 } x\sqrt{1-h^2} = 3x-4.$$

$$\therefore x^2(1-h^2) = 9x^2 - 24x + 16, \text{ 即 } x^2h^2 = -8x^2 + 24x - 16.$$

$$\therefore S^2 = \frac{1}{4}x^2h^2 = -2x^2 + 6x - 4 = -2\left(x - \frac{3}{2}\right)^2 + \frac{1}{2} \quad \left(\frac{4}{3} \leq x < 2\right).$$



(第 24 题-1)

当 $x = \frac{3}{2}$ 时 (满足 $\frac{4}{3} \leq x < 2$), s^2 取最大值 $\frac{1}{2}$, 从而 S 取最大值 $\frac{\sqrt{2}}{2}$.

②若点 D 在线段 MA 上,

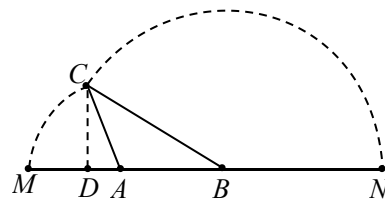
$$\text{则 } \sqrt{(3-x)^2 - h^2} - \sqrt{1-h^2} = x.$$

$$\text{同理可得, } S^2 = \frac{1}{4}x^2h^2 = -2x^2 + 6x - 4$$

$$= -2\left(x - \frac{3}{2}\right)^2 + \frac{1}{2} \quad \left(1 < x \leq \frac{4}{3}\right),$$

易知此时 $S < \frac{\sqrt{2}}{2}$.

综合①②得, $\triangle ABC$ 的最大面积为 $\frac{\sqrt{2}}{2}$.



(第 24 题-2)

例 4 (2010 年北京市中考第 24 题) 在平面直角坐标系 xOy 中，抛物线 $y=-(m-1)/4 \cdot x^2 + 5 \cdot m/4 \cdot x + m^2 - 3m + 2$ 与 x 轴的交点分别为原点 O 和点 A ，点 $B(2, n)$ 在这条抛物线上.

(1) 求点 B 的坐标；

(2) 点 P 在线段 OA 上，从点 O 出发向点 A 运动，过点 P 作 x 轴的垂线，与直线 OB 交于点 E ，延长 PE 到点 D ，使得 $ED=PE$ ，以 PD 为斜边，在 PD 为斜边，在 PD 右侧作等腰直角三角形 PCD (当点 P 运动时，点 C 、 D 也随之运动).

①当等腰直角三角形 PCD 的顶点 C 落在此抛物线上时，求 OP 的长；

②若点 P 从点 O 出发向 A 作匀速运动，速度为每秒 1 个单位，同时线段 OA 上另一个点 Q 从点 A 出发向点 O 作匀速运动，速度为每秒 2 个单位 (当点 Q 到达点 O 时停止运动，点 P 也停止运动) .过 Q 作 x 轴的垂线，与直线 AB 交于点 F ，延长 QF 到点 M ，使得 $FM=QF$ ，以 QM 为斜边，在 QM 的左侧作等腰直角三角形 QMN (当点 Q 运动时，点 M 、 N 也随之运动) .若点 P 运动到 t 秒时，两个等腰直角三角形分别有一条边恰巧落在同一条直线上，求此刻 t 的值.

【解答】

(1) $\because$ 抛物线 $y = -\frac{m-1}{4}x^2 + \frac{5m}{4}x + m^2 - 3m + 2$ 经过原点，

$$\therefore m^2 - 3m + 2 = 0,$$

解得 $m_1 = 1$ ， $m_2 = 2$ ，

由题意知 $m \neq 1$ ，

$$\therefore m = 2,$$

∴ 抛物线的解析式为 $y = -\frac{1}{4}x^2 + \frac{5}{2}x$,

∵ 点 B (2, n) 在抛物线 $y = -\frac{1}{4}x^2 + \frac{5}{2}x$ 上,

∴ $n=4$,

∴ B 点的坐标为 (2, 4).

(2) 设直线 OB 的解析式为 $y=k_1x$,

求得直线 OB 的解析式为 $y=2x$,

∵ A 点是抛物线与 x 轴的一个交点, 可求得 A 点的坐标为 (10, 0),

设 P 点的坐标为 (a, 0),

则 E 点的坐标为 (a, 2a),

根据题意作等腰直角三角形 PCD,

如图 1, 可求得点 C 的坐标为 (3a, 2a),

由 C 点在抛物线上,

$$\text{得: } 2a = -\frac{1}{4} \cdot (3a)^2 + \frac{5}{2} \cdot 3a,$$

$$\text{即 } \frac{9}{4}a^2 - \frac{11}{2}a = 0,$$

$$\text{解得 } a_1 = \frac{22}{9}, a_2 = 0 \text{ (舍去),}$$

$$\therefore OP = \frac{22}{9}.$$

依题意作等腰直角三角形 QMN, 设直线 AB 的解析式为 $y=k_2x+b$,

由点 A (10, 0), 点 B (2, 4), 求得直线 AB 的解析式为 $y = -\frac{1}{2}x + 5$,

当 P 点运动到 t 秒时, 两个等腰直角三角形分别有一条边恰好落在同一条直线上,

有以下三种情况:

第一种情况: CD 与 NQ 在同一条直线上.

如图 2 所示. 可证 $\triangle DPQ$ 为等腰直角三角形. 此时 OP 、 DP 、 AQ 的长可依次表示为 t 、 $4t$ 、 $2t$ 个单位.

$$\therefore PQ=DP=4t,$$

$$\therefore t+4t+2t=10,$$

$$\therefore t=\frac{10}{7}.$$

第二种情况: PC 与 MN 在同一条直线上. 如图 3 所示. 可证 $\triangle PQM$ 为等腰直角三

角形. 此时 OP 、 AQ 的长可依次表示为 t 、 $2t$ 个单位.

$$\therefore OQ=10-2t,$$

$$\because F \text{ 点在直线 } AB \text{ 上},$$

$$\therefore FQ=t,$$

$$\therefore MQ=2t,$$

$$\therefore PQ=MQ=CQ=2t,$$

$$\therefore t+2t+2t=10,$$

$$\therefore t=2.$$

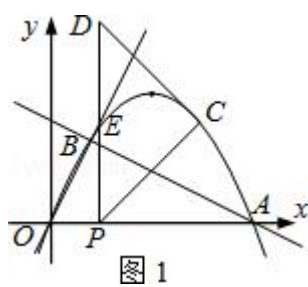
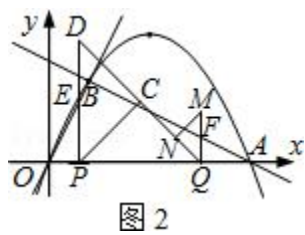
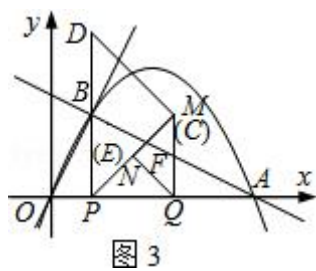
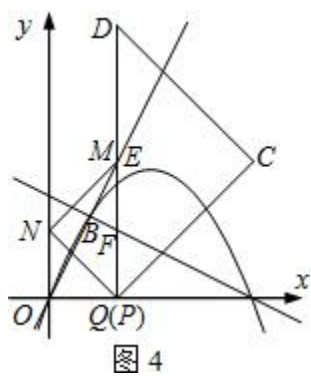
第三种情况: 点 P 、 Q 重合时, PD 、 QM 在同一条直线上, 如图 4 所示. 此时 OP 、

AQ 的长可依次表示为 t 、 $2t$ 个单位.

$$\therefore t+2t=10,$$

$$\therefore t=\frac{10}{3}.$$

综上, 符合题意的 t 值分别为 $\frac{10}{7}$, 2 , $\frac{10}{3}$



例 5 (2011 年沈阳市中考第 25 题) 如图 1, 已知抛物线 $y=x^2+bx+c$ 与 x 轴交于 A、B 两点 (点 A 在点 B 左侧), 与 y 轴交于点 C (0, -3), 对称轴是直线 $x=1$, 直线 BC 与抛物线的对称轴交于点 D.

(1) 求抛物线的函数表达式;

(2) 求直线 BC 的函数表达式;

(3) 点 E 为 y 轴上一动点, CE 的垂直平分线交 CE 于点 F, 交抛物线于 P、Q 两点, 且点 P 在第三象限.

①当线段 $PQ=\frac{3}{4}AB$ 时, 求 $\tan \angle CED$ 的值;

②当以 C、D、E 为顶点的三角形是直角三角形时, 请直接写出点 P 的坐标.

【解答】

(1) $\because$ 抛物线的对称轴为直线 $x=1$,

$$\therefore -\frac{b}{2a} = -\frac{b}{2 \times 1} = 1$$

$$\therefore b = -2.$$

$\because$ 抛物线与 y 轴交于点 C (0, -3),

$$\therefore c = -3,$$

$\therefore$ 抛物线的函数表达式为 $y=x^2-2x-3$.

(2) $\because$ 抛物线与 x 轴交于 A、B 两点,

当 $y=0$ 时, $x^2-2x-3=0$.

$$\therefore x_1 = -1, x_2 = 3.$$

$\because$ A 点在 B 点左侧,

$$\therefore A(-1, 0), B(3, 0)$$

设过点 $B(3, 0)$ 、 $C(0, -3)$ 的直线的函数表达式为 $y=kx+m$,

$$\text{则} \begin{cases} 0=3k+m \\ -3=m \end{cases}, \therefore \begin{cases} k=1 \\ m=-3 \end{cases}$$

$\therefore$ 直线 BC 的函数表达式为 $y=x-3$.

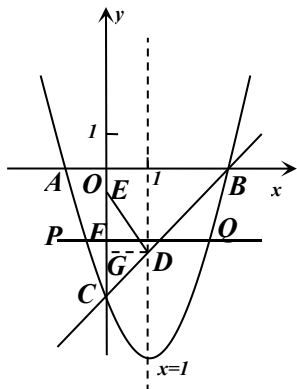
$$(3) \textcircled{1} \because AB=4, PO=\frac{3}{4}AB,$$

$$\therefore PO=3$$

$\because PO \perp y$ 轴

$\therefore PO \parallel x$ 轴, 则由抛物线的对称性可得点 P 的横坐标为 $-\frac{1}{2}$,

$$\therefore P\left(-\frac{1}{2}, -\frac{7}{4}\right)$$



$$\therefore F\left(0, -\frac{7}{4}\right), \therefore FC=3-OF=3-\frac{7}{4}=\frac{5}{4}.$$

$$\because PO \text{ 垂直平分 } CE \text{ 于点 } F, \therefore CE=2FC=\frac{5}{2}$$

$\because$ 点 D 在直线 BC 上, $\therefore$ 当 $x=1$ 时, $y=-2$, 则 $D(1, -2)$.

过点 D 作 $DG \perp CE$ 于点 G ,

$$\therefore DG=1, CG=1, \therefore GE=CE-CG=\frac{5}{2}-1=\frac{3}{2}.$$

$$\text{在 } Rt\triangle EGD \text{ 中, } \tan \angle CED = \frac{GD}{EG} = \frac{2}{3}.$$

$$\textcircled{2} P_1(1-\sqrt{2}, -2), P_2\left(1-\frac{\sqrt{6}}{2}, \frac{5}{2}\right).$$

例 6 (2011 年温州市中考第 24 题) 如图 1, 在平面直角坐标系中, O 是坐标原点, 点 A 的坐标为 $(-4,0)$, 点 B 的坐标为 $(0, b)$ ($b>0$). P 是直线 AB 上的一个动点, 作 $PC \perp x$ 轴, 垂足为 C . 记点 P 关于 y 轴的对称点为 P' (点 P' 不在 y 轴上), 连结 PP' 、 $P'A$ 、 $P'C$. 设点 P 的横坐标为 a .

(1) 当 $b=3$ 时, ①求直线 AB 的解析式;

②若点 P' 的坐标是 $(-1, m)$, 求 m 的值;

(2) 若点 P 在第一象限, 记直线 AB 与 $P'C$ 的交点为 D . 当 $P'D:DC=1:3$ 时, 求 a 的值;

(3) 是否同时存在 a 、 b , 使 $P'CA$ 为等腰直角三角形? 若存在, 请求出所有满足要求的 a 、 b 的值; 若不存在, 请说明理由.

【解答】

(1) ①设直线 AB 的解析式为 $y=kx+3$,

把 $x=-4, y=0$ 代入得: $-4k+3=0$,

$\therefore k=3/4, \therefore$ 直线的解析式是: $y=3/4x+3$,

②由已知得点 P 的坐标是 $(1, m)$,

$\therefore m=3/4 \times 1 + 3 = 15/4$;

(2) $\because PP' \parallel AC, \triangle PP'D \sim \triangle ACD$,

$\therefore P'D/DC = P'P/CA$, 即 $2a/(a+4)=1/3$,

$\therefore a=4/5$;

(3) 以下分三种情况讨论.

①当点 P 在第一象限时,

1) 若 $\angle AP'C=90^\circ$, $P'A=P'C$, (如图 1)

过点 P' 作 $P'H \perp x$ 轴于点 H.

$$\therefore PP'=CH=AH=P'H=1/2AC,$$

$$\therefore 2a=(1/2)(a+4),$$

$$\therefore a=4/3,$$

$$\because P'H=PC=1/2AC, \triangle ACP \sim \triangle AOB,$$

$$\therefore OB/OA=PC/AC=1, \text{ 即 } b/4=1/2,$$

$$\therefore b=2.$$

2) 若 $\angle P'AC=90^\circ$, $P'A=CA$,

则 $PP''=AC$,

$$\therefore 2a=a+4, \therefore a=4,$$

$$\because P'A=PC=AC, \triangle ACP \sim \triangle AOB,$$

$$\therefore UB/OA=PC/AC=1, \text{ 即 } b/4=1, \therefore b=4.$$

3) 若 $\angle P'CA=90^\circ$,

则点 P', P 都在第一象限内, 这与条件矛盾.

$\therefore \triangle P'CA$ 不可能是以 C 为直角顶点的等腰直角三角形.

②当点 P 在第二象限时, $\angle P'CA$ 为钝角 (如图 3), 此时 $\triangle P'CA$ 不可能是等腰直角三角形;

③当 P 在第三象限时, $\angle P'CA$ 为钝角 (如图 4), 此时 $\triangle P'CA$ 不可能是等腰直角三角形.

$\therefore$ 所有满足条件的 a, b 的值为 $a=4/3, b=2$

或 $a=4, b=4$.

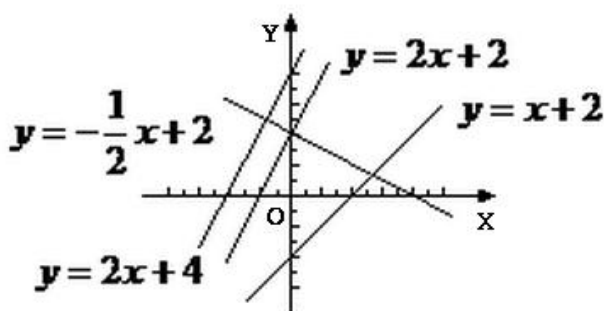
例 7 (2011 年浙江省中考第 23 题) 设直线 $l_1: y=k_1x+b_1$ 与 $l_2: y=k_2x+b_2$, 若 $l_1 \perp l_2$, 垂足为 H, 则称直线 l_1 与 l_2 是点 H 的直角线.

(1) 已知直线① $y=-\frac{1}{2}x+2$; ② $y=x+2$; ③ $y=2x+2$; ④ $y=2x+4$ 和点 $C(0,2)$, 则直线_____和直线_____是点 C 的直角线 (填序号即可);

(2) 如图 1, 在平面直角坐标系中, 直角梯形 OABC 的顶点 $A(3,0)$ 、 $B(2,7)$ 、 $C(0,7)$, P 为线段 OC 上一点, 设过 B、P 两点的直线为 l_1 , 过 A、P 两点的直线 l_2 , 若 l_1 与 l_2 是点 P 的直角线, 求直线 l_1 与 l_2 的解析式.

【解答】

(1) 画图象可知, 直线①与直线③是点 C 的直角线;



(2)

设 P 坐标为

$(0, m)$, 则 $PA \perp PB$ 于点 P. 因此, $AB^2 = (3-2)^2 + 7^2 = 50$.

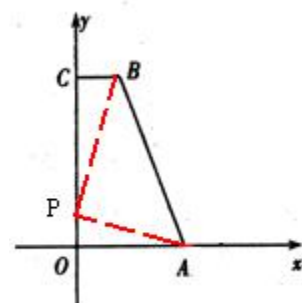
又 $\because PA^2 = PO^2 + OA^2 = m^2 + 3^2$, $PB^2 = PC^2 + BC^2 = (7-m)^2 + 2^2$,

$$\therefore AB^2 = PA^2 + PB^2 = m^2 + 3^2 + (7-m)^2 + 2^2 = 50.$$

解得: $m_1=1$, $m_2=6$.

当 $m=1$ 时, l_1 为: $y=3x+1$, l_2 为: $y=-\frac{1}{3}x+1$;

当 $m=6$ 时, l_1 为: $y=\frac{1}{2}x+6$, l_2 为: $y=2x+6$.



例 8 (2012 年广州市中考第 24 题) 如图, 抛物线 $y=-\frac{3}{8}x^2-\frac{3}{4}x+3$ 与 x 轴交于 A、B 两点 (点 A 在点 B 的左侧), 与 y 轴交于点 C.

- (1) 求点 A、B 的坐标;
- (2) 设 D 为已知抛物线的对称轴上的任意一点, 当 $\triangle ACD$ 的面积等于 $\triangle ACB$ 的面积时, 求点 D 的坐标;
- (3) 若直线 l 过点 E (4, 0), M 为直线 l 上的动点, 当以 A、B、M 为顶点所作的直角三角形有且只有三个时, 求直线 l 的解析式.

【解答】

(1) 在 $y=-\frac{3}{8}x^2-\frac{3}{4}x+3$ 中, 令 $y=0$, 即 $-\frac{3}{8}x^2-\frac{3}{4}x+3=0$, 解得 $x_1=-4$, $x_2=2$ 。

$\because$ 点 A 在点 B 的左侧, $\therefore$ A、B 点的坐标为 A (-4, 0)、B (2, 0)。

(2) 由 $y=-\frac{3}{8}x^2-\frac{3}{4}x+3$ 得, 对称轴为 $x=-1$ 。

在 $y=-\frac{3}{8}x^2-\frac{3}{4}x+3$ 中, 令 $x=0$, 得 $y=3$ 。

$\therefore OC=3, AB=6, S_{\triangle ACB}=\frac{1}{2}AB \cdot OC=\frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 3=9$

在 $Rt\triangle AOC$ 中, $AC=\sqrt{OA^2+OC^2}=\sqrt{4^2+3^2}=5$

设 $\triangle ACD$ 中 AC 边上的高为 h , 则有 $\frac{1}{2}AC \cdot h=9$, 解得 $h=\frac{18}{5}$ 。

如图 1, 在坐标平面内作直线平行于 AC , 且到 AC 的距离 $=h=\frac{18}{5}$, 这样的直线有 2 条, 分别是 L_1 和 L_2 , 则直线与对称轴 $x=-1$ 的两个交点即为所求的点 D。

设 L_1 交 y 轴于 E, 过 C 作 $CF \perp L_1$ 于 F, 则 $CF=h=\frac{18}{5}$,

$$\therefore CE = \frac{CF}{\sin \angle CEF} = \frac{CF}{\sin \angle OCA} = \frac{\frac{18}{5}}{\frac{4}{5}} = \frac{9}{2}。$$

设直线 AC 的解析式为 $y=kx+b$,

$$\text{将 A } (-4, 0), \text{ B } (0, 3) \text{ 坐标代入, 得 } \begin{cases} -4k+b=0 \\ b=3 \end{cases}, \text{ 解得 } \begin{cases} k=\frac{3}{4} \\ b=3 \end{cases}。$$

∴直线 AC 解析式为 $y=3/4*x+3$ 。

直线 L_1 可以看做直线 AC 向下平移 CE 长度单位 ($9/2$ 个长度单位) 而形成的,

∴直线 L_1 的解析式为 $y=3/4*x+3-9/2=3/4*x-3/2$ 。

则 D_1 的纵坐标为 $3/4*x+3-9/2=3/4*x-3/2$ 。∴ $D_1 (-4, -9/4)$ 。

同理, 直线 AC 向上平移 $9/2$ 个长度单位得到 L_2 , 可求得 $D_2 (-1, 27/4)$ 。

综上所述, D 点坐标为: $D_1 (-4, -9/4)$, $D_2 (-1, 27/4)$ 。

(3) 如图 2, 以 AB 为直径作 $\odot F$, 圆心为 F . 过 E 点作 $\odot F$ 的切线, 这样的切线有 2 条.

连接 FM , 过 M 作 $MN \perp x$ 轴于点 N .

∵ $A (-4, 0)$, $B (2, 0)$, ∴ $F (-1, 0)$, $\odot F$ 半径 $FM=FB=3$ 。

又 $FE=5$, 则在 $Rt\triangle MEF$ 中, -

$$ME=\sqrt{5^2-3^2}=4, \sin \angle MFE=4/5, \cos \angle MFE=3/5。$$

在 $Rt\triangle FMN$ 中, $MN=FM \cdot \sin \angle MFE=3 \times 4/5=12/5$,

$$FN=FM \cdot \cos \angle MFE=3 \times 3/5=9/5。$$

则 $ON=4/5$ 。∴ M 点坐标为 $(4/5, 12/5)$ 。

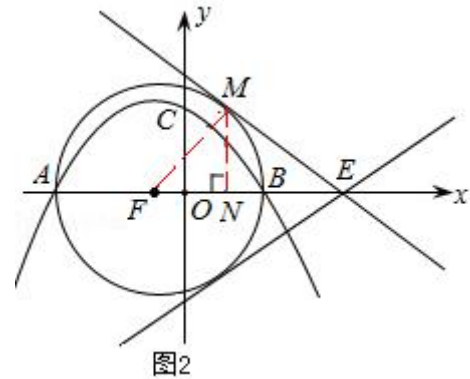
直线 l 过 $M (4/5, 12/5)$, $E (4, 0)$,

$$\text{设直线 } l \text{ 的解析式为 } y=k_1x+b_1, \text{ 则有 } \begin{cases} \frac{4}{5}k+b=\frac{12}{5} \\ 4k+b=0 \end{cases}, \text{ 解得 } k=-3/4, b=3。$$

∴直线 l 的解析式为 $y=-3/4*x+3$ 。

同理, 可以求得另一条切线的解析式为 $y=-3/4*x-3$ 。

综上所述, 直线 l 的解析式为 $y=-3/4*x+3$ 或 $y=-3/4*x-3$ 。



例 9 (2012 年杭州市中考第 22 题) 在平面直角坐标系内，反比例函数和二次函数 $y=k(x^2+x-1)$ 的图象交于点 A (1, k) 和点 B (-1, -k)。

- (1) 当 $k=-2$ 时，求反比例函数的解析式；
- (2) 要使反比例函数和二次函数都是 y 随着 x 的增大而增大，求 k 应满足的条件以及 x 的取值范围；
- (3) 设二次函数的图象的顶点为 Q，当 $\triangle ABQ$ 是以 AB 为斜边的直角三角形时，求 k 的值。

【解答】

(1) 当 $k=-2$ 时，A (1, -2)，

$\because A$ 在反比例函数图象上， $\therefore$ 设反比例函数的解析式为： $y=m/x$ 。

将 A (1, -2) 代入得： $-2=m/1$ ，解得： $m=-2$ 。

$\therefore$ 反比例函数的解析式为： $y=-2/x$ 。

(2) $\because$ 要使反比例函数和二次函数都是 y 随着 x 的增大而增大， $\therefore k < 0$ 。

$\because$ 二次函数 $y=k(x^2+x-1) = k(x+1/2)^2 - 5/4k$ ， $\therefore$ 它的对称轴为：直线 $x=-1/2$ 。

要使二次函数 $y=k(x^2+x-1)$ 满足上述条件，在 $k < 0$ 的情况下， x 必须在对称轴的左边，即 $x < -1/2$ 时，才能使得 y 随着 x 的增大而增大。

$\therefore$ 综上所述， $k < 0$ 且 $x < -1/2$ 。

(3) 由 (2) 可得：Q (-1/2, 5/4k)。

$\because \triangle ABQ$ 是以 AB 为斜边的直角三角形，A 点与 B 点关于原点对称，(如图是其中的一种情况)

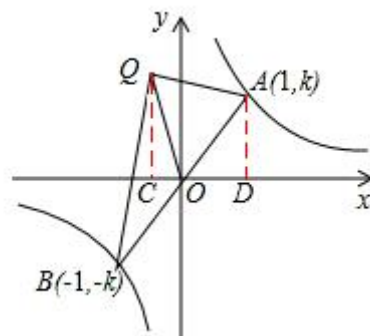
$\therefore$ 原点 O 平分 AB， $\therefore OQ=OA=OB$ 。

作 $AD \perp OC$ ， $QC \perp OC$ ，垂足分别为点 C，D。

$$\therefore OQ = \sqrt{CQ^2 + OC^2} = \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{25}{16}k^2}。$$

$$\because OA = \sqrt{AD^2 + OD^2} = \sqrt{1+k^2}，$$

$$\therefore \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{25}{16}k^2} = \sqrt{1+k^2}，解得：k = \pm \frac{2}{3}\sqrt{3}。$$



例 10 (2013 年湛江市中考第 26 题) 如图 1, 在平面直角坐标系中, 顶点为 (3, 4) 的抛物线交 y 轴于 A 点, 交 x 轴于 B、C 两点 (点 B 在点 C 的左侧), 已知 A 点坐标为 (0, -5).

(1) 求此抛物线的解析式;

(2) 过点 B 作线段 AB 的垂线交抛物线于点 D, 如果以点 C 为圆心的圆与直线 BD 相切, 请判断抛物线的对称轴 l 与圆 C 的位置关系, 并给出证明;

(3) 在抛物线上是否存在一点 P, 使 $\triangle ACP$ 是以 AC 为直角边的直角三角形, 若存在, 求出点 P 的坐标; 若不存在, 请说明理由.

【解答】

(1) 由题意可设此抛物线的解析式为: $y = a(x-3)^2 + 4$

$\because$ 此抛物线过点 A (0, -5), $\therefore -5 = a(0-3)^2 + 4, \therefore a = -1$

$\therefore$ 此抛物线的解析式为: $y = -(x-3)^2 + 4$, 即 $y = -x^2 + 6x - 5$

(2) 此时抛物线的对称轴与 $\odot C$ 相离。证明:

令 $y = 0$, 即 $-x^2 + 6x - 5 = 0$, 得 $x = 1$ 或 $x = 5$, $\therefore B(1, 0), C(5, 0)$

设直线 AB 的解析式为: $y = kx + b$, 则 $\begin{cases} k + b = 0 \\ b = -5 \end{cases}$, $\begin{cases} k = 5 \\ b = -5 \end{cases}$

$\because$ 直线 AB 与直线 BD 垂直, $\therefore$ 直线 BD 可表示为: $y = -\frac{1}{k}x + t = -\frac{1}{5}x + t$,

$\because B(1, 0)$, $\therefore -\frac{1}{5} \times 1 + t = 0, \therefore t = \frac{1}{5}$, $\therefore$ 直线 BD 为: $y = -\frac{1}{5}x + \frac{1}{5}$

$\therefore$ 点 C 到直线 BD 的距离为: $d = \frac{|5 + 5 \times 0 - 1|}{\sqrt{1^2 + 5^2}} = \frac{4}{\sqrt{26}}$

$\because$ 点 C 为圆心的圆与直线 BD 相切, $\therefore \odot C$ 的半径为: $r = d = \frac{4}{\sqrt{26}}$

又点 C 到抛物线对称轴的距离为: $5 - 3 = 2$ 而 $2 > \frac{4}{\sqrt{26}}$, $\therefore$ 所以此时抛物线的对称轴

与 $\odot C$ 相离。

(3) 假设存在满足条件的点 $P(x_p, y_p)$, ,

$$\therefore A(0, -5), C(5, 0), AC^2 = OA^2 + OC^2 = 50$$

$$\therefore AP^2 = (x_p - 0)^2 + (y_p + 5)^2 = x_p^2 + y_p^2 + 10y_p + 25$$

$$CP^2 = (x_p - 5)^2 + (y_p - 0)^2 = x_p^2 + y_p^2 - 10x_p + 25$$

① 当 $\angle A = 90^\circ$ 时, 在 $Rt\triangle CAP$ 中, 由勾股定理, 得 $AC^2 + AP^2 = CP^2$

$$\therefore 50 + x_p^2 + y_p^2 + 10y_p + 25 = x_p^2 + y_p^2 - 10x_p + 25, \text{ 整理, 得 } x_p + y_p + 5 = 0$$

$$\therefore \text{点 } P(x_p, y_p) \text{ 在抛物线 } y = -x^2 + 6x - 5 \text{ 上, } \therefore y_p = -x_p^2 + 6x_p - 5,$$

$$\therefore x_p + (-x_p^2 + 6x_p - 5) + 5 = 0, \text{ 解得 } x_p = 7 \text{ 或 } x_p = 0, \therefore y_p = -12 \text{ 或 } y_p = -5$$

$$\therefore \text{点 } P \text{ 为 } (7, -12) \text{ 或 } (0, -5) \text{ (舍去)}$$

② 当 $\angle C = 90^\circ$ 时, 在 $Rt\triangle ACP$ 中, 由勾股定理, 得 $AC^2 + CP^2 = AP^2$

$$\therefore 50 + x_p^2 + y_p^2 - 10x_p + 25 = x_p^2 + y_p^2 + 10y_p + 25, \text{ 整理, 得 } x_p + y_p - 5 = 0$$

例 11 (2013 年兰州市中考第 28 题) 如图 1, 在平面直角坐标系 xOy 中, A 、 B 为 x 轴上的两点, C 、 D 为 y 轴上的两点, 经过 A 、 C 、 B 的抛物线的一部分 C_1 与经过 A 、 D 、 B 的抛物线的一部分 C_2 组合成一条封闭曲线, 我们把这条封闭曲线称为“蛋线”. 已知点 C 的坐标 $(0, -\frac{3}{2})$, 点 M 是抛物线 C_2 : $y=mx^2-2mx-3m(m<0)$ 的顶点.

(1) 求 A 、 B 两点的坐标;

(2) “蛋线”在第四象限上是否存在一点 P , 使得 PBC 的面积最大? 若存在, 求出 $\triangle PBC$ 面积的最大值;

(3) 当 $\triangle PBC$ 为直角三角形时, 求 m 的值.

【解答】

$$(1) y=mx^2-2mx-3m=m(x-3)(x+1),$$

$$\because m \neq 0,$$

$$\therefore \text{当 } y=0 \text{ 时, } x_1=-1, x_2=3,$$

$$\therefore A(-1, 0), B(3, 0);$$

(2) 设 $C_1: y=ax^2+bx+c$, 将 A 、 B 、 C 三点的坐标代入

$$\text{得: } \begin{cases} a-b+c=0 \\ 9a+3b+c=0 \\ c=-\frac{3}{2} \end{cases}, \text{ 解得 } \begin{cases} a=\frac{1}{2} \\ b=-1 \\ c=-\frac{3}{2} \end{cases},$$

$$\text{故 } C_1: y=\frac{1}{2}x^2-x-\frac{3}{2}.$$

如图: 过点 P 作 $PQ \parallel y$ 轴, 交 BC 于 Q ,

由 B、C 的坐标可得直线 BC 的解析式为: $y = \frac{1}{2}x - \frac{3}{2}$,

设 P $(x, \frac{1}{2}x^2 - x - \frac{3}{2})$, 则 Q $(x, \frac{1}{2}x - \frac{3}{2})$,

$$PQ = \frac{1}{2}x - \frac{3}{2} - (\frac{1}{2}x^2 - x - \frac{3}{2}) = -\frac{1}{2}x^2 + \frac{3}{2}x,$$

$$S_{\triangle PBC} = \frac{1}{2}PQ \cdot OB = \frac{1}{2} \times (-\frac{1}{2}x^2 + \frac{3}{2}x) \times 3 = -\frac{3}{4}(x - \frac{3}{2})^2 + \frac{27}{16},$$

当 $x = \frac{3}{2}$ 时, $S_{\triangle PBC}$ 有最大值, $S_{\max} = \frac{27}{16}$,

$$\frac{1}{2} \times (\frac{3}{2})^2 - \frac{3}{2} - \frac{3}{2} = -\frac{15}{8},$$

$$P(\frac{3}{2}, -\frac{15}{8});$$

$$(3) y = mx^2 - 2mx - 3m = m(x-1)^2 - 4m,$$

顶点 M 坐标 $(1, -4m)$,

当 $x=0$ 时, $y=-3m$,

$\therefore D(0, -3m), B(3, 0)$,

$$\therefore DM^2 = (0-1)^2 + (-3m+4m)^2 = m^2 + 1,$$

$$MB^2 = (3-1)^2 + (0+4m)^2 = 16m^2 + 4,$$

$$BD^2 = (3-0)^2 + (0+3m)^2 = 9m^2 + 9,$$

当 $\triangle BDM$ 为 $Rt\triangle$ 时有: $DM^2 + BD^2 = MB^2$ 或 $DM^2 + MB^2 = BD^2$.

$$\textcircled{1} DM^2 + BD^2 = MB^2 \text{ 时有: } m^2 + 1 + 9m^2 + 9 = 16m^2 + 4,$$

解得 $m=-1$ ($\because m < 0, \therefore m=1$ 舍去);

$$\textcircled{2} DM^2 + MB^2 = BD^2 \text{ 时有: } m^2 + 1 + 16m^2 + 4 = 9m^2 + 9,$$

$$\text{解得 } m = -\frac{\sqrt{2}}{2} \text{ (} m = \frac{\sqrt{2}}{2} \text{ 舍去)}.$$

综上, $m=-1$ 或 $-\frac{\sqrt{2}}{2}$ 时, $\triangle BDM$ 为直角三角形.

例 12 (2013 年山西省中考第 26 题) 如图 1, 抛物线 $y = \frac{1}{4}x^2 - \frac{3}{2}x - 4$ 与 x 轴交于 A、B 两点 (点 B 在点 A 的右侧), 与 y 轴交于点 C, 连结 BC, 以 BC 为一边, 点 O 为对称中心作菱形 BDEC, 点 P 是 x 轴上的一个动点, 设点 P 的坐标为 $(m, 0)$, 过点 P 作 x 轴的垂线 l 交抛物线于点 Q.

(1) 求点 A、B、C 的坐标;

(2) 当点 P 在线段 OB 上运动时, 直线 l 分别交 BD、BC 于点 M、N. 试探究 m 为何值时, 四边形 CQMD 是平行四边形, 此时, 请判断四边形 CQBM 的形状, 并说明理由;

(3) 当点 P 在线段 EB 上运动时, 是否存在点 Q, 使 $\triangle BDQ$ 为直角三角形, 若存在, 请直接写出 Q 的坐标; 若不存在, 请说明理由.

【解答】

(1) 当 $y=0$ 时, $\frac{1}{4}x^2 - \frac{3}{2}x - 4 = 0$, 解得, $x_1 = -2, x_2 = 8$

$\because$ 点 B 在点 A 的右侧,

$\therefore$ 点 A、B 的坐标分别为: $(-2, 0), (8, 0)$

当 $x=0$ 时, $y=-4$

$\therefore$ 点 C 的坐标为 $(0, -4)$,

(2) 由菱形的对称性可知, 点 D 的坐标为 $(0, 4)$.

设直线 BD 的解析式为 $y=kx+b$, 则 $\begin{cases} b=4 \\ 8k+b=0 \end{cases}$ 解得, $k=-\frac{1}{2}, b=4$.

$\therefore$ 直线 BD 的解析式为 $y = -\frac{1}{2}x + 4$.

$\because l \perp x$ 轴, $\therefore$ 点 M、Q 的坐标分别是 $(m, -\frac{1}{2}m + 4), (m, \frac{1}{4}m^2 - \frac{3}{2}m - 4)$

如图, 当 $MQ=DC$ 时, 四边形 CQMD 是平行四边形.

$\therefore (-\frac{1}{2}m + 4) - (\frac{1}{4}m^2 - \frac{3}{2}m - 4) = 4 - (-4)$

化简得: $m^2 - 4m = 0$ 解得, $m_1=0$, (舍去) $m_2=4$.

∴当 $m=4$ 时, 四边形 CQMD 是平行四边形.

此时, 四边形 CQBM 是平行四边形.

解法一: ∵ $m=4$, ∴点 P 是 OB 中点. ∵ $l \perp x$ 轴, ∴ $l \parallel y$ 轴.

$$\therefore \triangle BPM \sim \triangle BOD. \therefore \frac{BP}{BO} = \frac{BM}{BD} = \frac{1}{2}. \therefore BM = DM$$

∵四边形 CQMD 是平行四边形, ∴ $DM \parallel CQ$. ∴ $BM \parallel CQ$. ∴四边形 CQBM 为平行四边形.

解法二: 设直线 BC 的解析式为 $y=k_1x+b_1$, 则 $\begin{cases} b_1 = -4 \\ 8k_1 + b_1 = 0 \end{cases}$ 解得, $k_1 = \frac{1}{2}$, $b_1 = -4$

∴直线 BC 的解析式为 $y = \frac{1}{2}x - 4$

又 ∵ $l \perp x$ 轴交 BC 于点 N. ∴ $x=4$ 时, $y=-2$. ∴点 N 的坐标为 (4, -2) 由上面可知, 点 M, Q 的坐标分别为: (4, 2), Q(4, -6).

$$\therefore MN = 2 - (-2) = 4, NQ = -2 - (-6) = 4. \therefore MN = NQ.$$

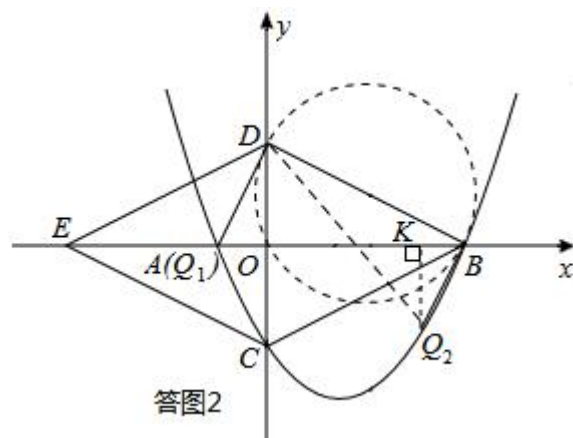
又 ∵四边形 CQMD 是平行四边形. ∴ $DB \parallel CQ$, ∴ $\angle 3 = \angle 4$,

又 $\angle 1 = \angle 2$, ∴ $\triangle BMN \cong \triangle CQN$. ∴ $BN = CN$.

∴四边形 CQBM 为平行四边形.

(3) 抛物线上存在两个这样的点 Q, 分别是 $Q_1(-2, 0)$, $Q_2(6, -4)$.

若 $\triangle BDQ$ 为直角三角形, 可能有三种情形, 如答图 2 所示:



①以点 Q 为直角顶点.

此时以 BD 为直径作圆, 圆与抛物线的交点, 即为所求之 Q 点.

∵P 在线段 EB 上运动,

∴ $-8 \leq x_Q \leq 8$, 而由图形可见, 在此范围内, 圆与抛物线并无交点, 故此种情形不存在.

②以点 D 为直角顶点.

连接 AD, ∵ $OA=2$, $OD=4$, $OB=8$, $AB=10$,

由勾股定理得: $AD=2\sqrt{5}$, $BD=4\sqrt{5}$,

$$\therefore AD^2 + BD^2 = AB^2,$$

∴ $\triangle ABD$ 为直角三角形, 即点 A 为所求的点 Q.

∴ $Q_1(-2, 0)$;

③以点 B 为直角顶点.

如图, 设 Q2 点坐标为 (x, y) , 过点 Q2 作 $Q_2K \perp x$ 轴于点 K, 则 $Q_2K = -y$, $OK = x$, $BK = 8 - x$.

易证 $\triangle Q_2KB \sim \triangle BOD$,

$$\therefore \frac{Q_2K}{OB} = \frac{BK}{OD}, \text{ 即 } \frac{-y}{8} = \frac{8-x}{4}, \text{ 整理得: } y = 2x - 16.$$

$$\because \text{点 Q 在抛物线上, } \therefore y = \frac{1}{4}x^2 - \frac{3}{2}x - 4.$$

$$\therefore \frac{1}{4}x^2 - \frac{3}{2}x - 4 = 2x - 16, \text{ 解得 } x = 6 \text{ 或 } x = 8,$$

当 $x = 8$ 时, 点 Q2 与点 B 重合, 故舍去;

当 $x = 6$ 时, $y = -4$,

$\therefore Q_2(6, -4)$.

例 13 (2014 年德州市中考第 24 题) 如图 1, 在平面直角坐标系中, 已知点 A 的坐标是 (4, 0), 并且 $OA=OC=4OB$, 动点 P 在过 A、B、C 三点的抛物线上.

(1) 求抛物线的解析式;

(2) 是否存在点 P, 使得 $\triangle ACP$ 是以 AC 为直角边的直角三角形? 若存在, 求出所有符合条件的点 P 的坐标; 若不存在, 请说明理由;

(3) 过动点 P 作 PE 垂直 y 轴于点 E, 交直线 AC 于点 D, 过点 D 作 x 轴的垂线, 垂足为 F. 连结 EF, 当线段 EF 最短时, 求点 P 的坐标.

【解答】

(1) 由 A (4, 0), 可知 $OA=4$,

$\because OA=OC=4OB$, $\therefore OA=OC=4$, $OB=1$,

$\therefore C(0, 4)$, $B(-1, 0)$.

设抛物线的解析式是 $y=ax^2+bx+c$,

$$\text{则 } \begin{cases} ab+c=0 \\ 16a+4b+c=0 \\ c=4 \end{cases}, \quad \text{解得: } a=1, b=3, c=4,$$

则抛物线的解析式是: $y=-x^2+3x+4$;

(2) 存在.

第一种情况

当以 C 为直角顶点时, 过点 C 作 $CP_1 \perp AC$, 交抛物线于点 P_1 .

过点 P_1 作 y 轴的垂线, 垂足是 M.

$\because \angle ACP_1=90^\circ$, $\therefore \angle MCP_1+\angle ACO=90^\circ$.

$\because \angle ACO + \angle OAC = 90^\circ, \therefore \angle MCP_1 = \angle OAC.$

$\because OA = OC, \therefore \angle MCP_1 = \angle OAC = 45^\circ, \therefore \angle MCP_1 = \angle MP_1C, \therefore MC = MP_1,$

设 $P(m, -m^2 + 3m + 4)$, 则 $m = -m^2 + 3m + 4 - 4$,

解得: $m_1 = 0$ (舍去), $m_2 = 2. \therefore -m^2 + 3m + 4 = 6$, 即 $P(2, 6).$

第二种情况

当点 A 为直角顶点时, 过 A 作 AP_2 , AC 交抛物线于点 P_2 ,

过点 P_2 作 y 轴的垂线, 垂足是 N , AP 交 y 轴于点 F .

$\therefore P_2N \parallel x$ 轴, 由 $\angle CAO = 45^\circ, \therefore \angle OAP = 45^\circ,$

$\therefore \angle FP_2N = 45^\circ, AO = OF. \therefore P_2N = NF,$

设 $P_2(n, -n^2 + 3n + 4)$, 则 $n = (-n^2 + 3n + 4) + 4$,

解得: $n_1 = -2, n_2 = 4$ (舍去), $\therefore -n^2 + 3n + 4 = -6$,

则 P_2 的坐标是 $(-2, -6).$

综上所述, P 的坐标是 $(2, 6)$ 或 $(-2, -6);$

(3) 连接 OD , 由题意可知, 四边形 $OFDE$ 是矩形, 则 $OD = EF.$

根据垂线段最短, 可得当 $OD \perp AC$ 时, OD 最短, 即 EF 最短.

由 (1) 可知, 在直角 $\triangle AOC$ 中, $OC = OA = 4$,

根据等腰三角形的性质, D 是 AC 的中点.

又 $\because DF \parallel OC, \therefore DF = \frac{1}{2} \cdot OC = 2,$

$\therefore$ 点 P 的纵坐标是 $2.$ 则 $-x^2 + 3x + 1 = 2,$

解得: $x = 3 \pm \sqrt{17} / 2,$

$\therefore$ 当 EF 最短时, 点 P 的坐标是: $(3 + \sqrt{17} / 2, 2)$ 或 $(3 - \sqrt{17} / 2, 2).$

例 14(2014 年苏州市中考第 29 题)如图 1,二次函数 $y=a(x^2-2mx-3m^2)$ (其中 $a>0$, $m>0$) 的图像与 x 轴分别交于 A、B (点 A 位于点 B 的左侧), 与 y 轴交于点 C (0, -3), 点 D 在二次函数的图像上, $CD \parallel AB$, 连结 AD.过点 A 作射线 AE 交二次函数的图像与点 E, AB 平分 $\angle DAE$.

- (1) 用含 m 的式子表示 a ;
- (2) 求证: AD/AE 为定值;
- (3) 该二次函数的图像的顶点为 F.探索: 在 x 轴的负半轴上是否存在点 G, 连结 GF, 以线段 GF、AD、AE 的长度为三边的三角形是直角三角形? 如果存在, 只要找出一个满足要求的点 G 即可, 并用含 m 的代数式表示该点的横坐标; 如果不存在, 请说明理由.

【解答】

(1) 解: 将 C (0, -3) 代入二次函数 $y=a(x^2-2mx-3m^2)$,
 则 $-3=a(0-0-3m^2)$,
 解得 $a=\frac{1}{m^2}$.

(2) 证明: 如图 1, 过点 D、E 分别作 x 轴的垂线, 垂足为 M、N.

由 $a(x^2-2mx-3m^2)=0$,

解得 $x_1=-m$, $x_2=3m$,

则 A (-m, 0), B (3m, 0).

$\because CD \parallel AB$, $\therefore$ D 点的纵坐标为 -3,

又 $\because$ D 点在抛物线上,

∴将 D 点纵坐标代入抛物线方程得 D 点的坐标为 $(2m, -3)$.

∵AB 平分 $\angle DAE$,

∴ $\angle DAM = \angle EAN$,

∵ $\angle DMA = \angle ENA = 90^\circ$,

∴ $\triangle ADM \sim \triangle AEN$.

$$\therefore \frac{AD}{AE} = \frac{AM}{AN} = \frac{DM}{EN}.$$

设 E 坐标为 $(x, \frac{1}{m^2}(x^2 - 2mx - 3m^2))$,

$$\therefore \frac{3}{\frac{1}{m^2}(x^2 - 2mx - 3m^2)} = \frac{3m}{x - (-m)},$$

∴ $x = 4m$, ∴ E $(4m, 5)$,

∵ $AM = AO + OM = m + 2m = 3m$, $AN = AO + ON = m + 4m = 5m$,

∴ $\frac{AD}{AE} = \frac{AM}{AN} = \frac{3}{5}$, 即为定值.

(3) 解: 如图 2, 记二次函数图象顶点为 F, 则 F 的坐标为 $(m, -4)$, 过点 F 作 $FH \perp x$ 轴于点 H.

连接 FC 并延长, 与 x 轴负半轴交于一点, 此点即为所求的点 G.

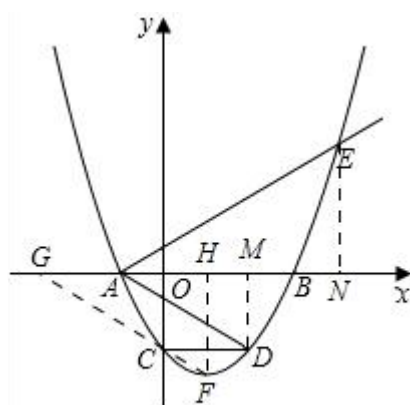


图 2

$$\therefore \tan \angle CGO = \frac{OC}{OG}, \tan \angle FGH = \frac{HF}{HG},$$

$$\therefore \frac{OC}{OG} = \frac{HF}{HG},$$

$$\therefore OG = 3m.$$

$$\because GF = \sqrt{GH^2 + HF^2} = \sqrt{16m^2 + 16} = 4\sqrt{m^2 + 1},$$

$$AD = \sqrt{AM^2 + MD^2} = \sqrt{9m^2 + 9} = 3\sqrt{m^2 + 1},$$

$$\therefore \frac{GF}{AD} = \frac{4}{3}.$$

$$\therefore \frac{AD}{AE} = \frac{3}{5},$$

$$\therefore AD : GF : AE = 3 : 4 : 5,$$

$\therefore$ 以线段 GF, AD, AE 的长度为三边长的三角形是直角三角形, 此时 G 点的横坐标为 -3m.

例 15 (2014 年重庆市中考第 25 题) 如图 1, 已知抛物线 $y=-x^2+2x+3$ 与 x 轴交于 A、B 两点 (点 A 在点 B 的左边), 与 y 轴交于点 C, 连结 BC.

(1) 求 A、B、C 三点的坐标;

(2) 若点 P 为线段 BC 上的一点 (不与 B、C 重合), $PM \parallel y$ 轴, 且 PM 交抛物线于点 M, 交 x 轴于点 N, 当 $\triangle BCM$ 的面积最大时, 求 $\triangle BPN$ 的周长;

(3) 在 (2) 的条件下. 当 BCM 的面积最大时, 在抛物线的对称轴上存在点 Q, 使得 $\triangle CNQ$ 为直角三角形, 求点 Q 的坐标.

【解答】

(1) 由抛物线的解析式 $y=-x^2+2x+3$,

$\therefore C(0, 3)$,

令 $y=0$, $-x^2+2x+3=0$, 解得 $x=3$ 或 $x=-1$;

$\therefore A(-1, 0)$, $B(3, 0)$.

(2) 设直线 BC 的解析式为: $y=kx+b$,

(2) 则有: $\begin{cases} 3k+b=0 \\ b=3 \end{cases}$, 解得 $\begin{cases} k=-1 \\ b=3 \end{cases}$,

$\therefore$ 直线 BC 的解析式为: $y=-x+3$.

设 $P(x, -x+3)$, 则 $M(x, -x^2+2x+3)$,

$\therefore PM = (-x^2+2x+3) - (-x+3) = -x^2+3x$.

$\therefore S_{\triangle BCM} = S_{\triangle PMC} + S_{\triangle PMB}$

$= \frac{1}{2} PM \cdot (x_P - x_C) + \frac{1}{2} PM \cdot (x_B - x_P) = \frac{1}{2} PM \cdot (x_B - x_C) = \frac{3}{2} PM$.

$\therefore S_{\triangle BCM} = \frac{3}{2} (-x^2+3x) = -\frac{3}{2} (x-\frac{3}{2})^2 + \frac{27}{8}$.

∴当 $x=\frac{3}{2}$ 时, $\triangle BCM$ 的面积最大.

此时 $P\left(\frac{3}{2}, \frac{3}{2}\right)$, ∴ $PN=ON=\frac{3}{2}$,

∴ $BN=OB-ON=3-\frac{3}{2}=\frac{3}{2}$.

在 $Rt\triangle BPN$ 中, 由勾股定理得: $PB=\frac{3\sqrt{2}}{2}$.

$C\triangle BCN=BN+PN+PB=3+\frac{3\sqrt{2}}{2}$.

∴当 $\triangle BCM$ 的面积最大时, $\triangle BPN$ 的周长为 $3+\frac{3\sqrt{2}}{2}$.

$$(3) \because y=-x^2+2x+3=-(x-1)^2+4$$

∴抛物线的对称轴为直线 $x=1$.

在 $Rt\triangle CNO$ 中, $OC=3$, $ON=\frac{3}{2}$, 由勾股定理得: $CN=\frac{3\sqrt{5}}{2}$.

设点 D 为 CN 中点, 则 $D\left(\frac{3}{4}, \frac{3}{2}\right)$, $CD=ND=\frac{3\sqrt{5}}{2}$.

如解答图, $\triangle CNQ$ 为直角三角形,

①若点 Q 为直角顶点.

作 $Rt\triangle CNO$ 的外接圆 $\odot D$, 与对称轴交于 Q_1 、 Q_2 两点,

由圆周角定理可知, Q_1 、 Q_2 两点符合题意.

连接 Q_1D , 则 $Q_1D=CD=ND=\frac{3\sqrt{5}}{2}$.

过点 D 作对称轴的垂线, 垂足为 E ,

则 $E\left(1, \frac{3}{2}\right)$, $Q_1E=Q_2E$, $DE=1-\frac{3}{4}=\frac{1}{4}$.

在 $Rt\triangle Q_1DE$ 中, 由勾股定理得:

$$Q_1E = \sqrt{Q_1D^2 - DE^2} = \frac{\sqrt{11}}{2}.$$

$$\therefore Q_1 \left(1, \frac{3+\sqrt{11}}{2}\right), Q_2 \left(1, \frac{3-\sqrt{11}}{2}\right);$$

②若点 N 为直角顶点.

过点 N 作 $NF \perp CN$, 交对称轴于点 Q_3 , 交 y 轴于点 F.

$$\text{易证 } Rt\triangle NFO \sim Rt\triangle CNO, \text{ 则 } \frac{OF}{ON} = \frac{ON}{OC}, \text{ 即 } \frac{OF}{\frac{3}{2}} = \frac{\frac{3}{2}}{3},$$

$$\text{解得 } OF = \frac{3}{4}.$$

$$\therefore F \left(0, -\frac{3}{4}\right), \text{ 又 } \because N \left(\frac{3}{2}, 0\right),$$

$$\therefore \text{可求得直线 FN 的解析式为: } y = \frac{1}{2}x - \frac{3}{4}.$$

$$\text{当 } x=1 \text{ 时, } y = -\frac{1}{4}, \therefore Q_3 \left(1, -\frac{1}{4}\right);$$

③当点 C 为直角顶点时.

过点 C 作 $Q_4C \perp CN$, 交对称轴于点 Q_4 .

$$\because Q_4C \parallel FN, \therefore \text{可设直线 } Q_4C \text{ 的解析式为: } y = \frac{1}{2}x + b,$$

$$\because \text{点 } C(0, 3) \text{ 在该直线上, } \therefore b=3.$$

$$\therefore \text{直线 } Q_4C \text{ 的解析式为: } y = \frac{1}{2}x + 3,$$

$$\text{当 } x=1 \text{ 时, } y = \frac{7}{2}, \therefore Q_4 \left(1, \frac{7}{2}\right).$$

综上所述, 满足条件的点 Q 有 4 个,

$$\text{其坐标分别为: } Q_1 \left(1, \frac{3+\sqrt{11}}{2}\right), Q_2 \left(1, \frac{3-\sqrt{11}}{2}\right),$$

$$Q_3 \left(1, -\frac{1}{4}\right), Q_4 \left(1, \frac{7}{2}\right).$$

例 16 (2016 年义乌市绍兴市中考第 24 题) 如图, 在矩形 ABCO 中, 点 O 为坐标原点, 点 B 的坐标为 (4, 3), 点 A、C 在坐标轴上, 点 P 在 BC 边上, 直线 $l_1: y=2x+3$, 直线 $l_2: y=2x-3$

(1) 分别求直线 l_1 与 x 轴、直线 l_2 与 AB 的交点坐标;

(2) 已知点 M 在第一象限, 且是直线 l_2 上的点, 若 $\triangle APM$ 是等腰直角三角形, 求点 M 的坐标;

(3) 我们把直线 l_1 和直线 l_2 上的点所组成的图形称为图形 F. 已知矩形 ANPQ 的顶点 N 在图形 F 上, Q 是坐标平面内的点, 且 N 点的横坐标为 x, 请直接写出 x 的取值范围 (不用说明理由).

【解答】

(1) 直线 l_1 : 当 $y=0$ 时, $2x+3=0$, $x=-3/2$, 则直线 l_1 与 x 轴坐标为 $(-3/2, 0)$;
直线 l_2 : 当 $y=3$ 时, $2x-3=3$, $x=3$ 则直线 l_2 与 AB 的交点坐标为 $(3, 3)$;

(2) ①若点 A 为直角顶点时, 点 M 在第一象限, 连结 AC, $\angle APB > \angle ACB > 45^\circ$, $\therefore \triangle APM$ 不可能是等腰直角三角形, $\therefore$ 点 M 不存在

②若点 P 为直角顶点时, 点 M 在第一象限, 如图, 过点 M 作 $MN \perp CB$, 交 CB 的延长线于点 N, 则 $Rt\triangle ABP \cong Rt\triangle PNM$, $\therefore AB=PN=4$, $MN=BP$.

设 M $(x, 2x-3)$, 则 $MN=x-4$, $\therefore 2x-3=4+3-(x-4)$, $x=14/3$, $\therefore M(14/3, 19/3)$;

③若点 M 为直角顶点时, 点 M 在第一象限, 如图, 设 $M_1(x, 2x-3)$, 过点 M_1 作 $M_1G_1 \perp OA$, 交 BC 于点 H_1 , 则 $Rt\triangle AM_1G_1 \cong Rt\triangle PM_1H_1$, $\therefore AG_1=M_1H_1=3-(2x-3)$, $\therefore x+3-(2x-3)=4$, $x=2$ $\therefore M_1(2, 1)$;

设 $M_2(x, 2x - 3)$ ，同理可得 $x + 2x - 3 - 3 = 4$ ， $\therefore x = 10/3$ ， $\therefore M_2(10/3, 11/3)$ ；

综上所述，点 M 的坐标为 $(14/3, 19/3)$ ， $(2, 1)$ ， $(10/3, 11/3)$ ；

(3) x 的取值范围为 $-2/5 \leq x < 0$ 或 $0 < x \leq 4/5$ 或 $(11 + 31^{1/2})/5 \leq x \leq 18/5$ 或 $(11 - 31^{1/2})/5 \leq x \leq 2$.

第四部分 因动点产生的平行四边形问题

例 1 (2008 年黄冈市中考第 20 题) 已知：如图 1，在直角梯形 COAB 中，OC//AB，以 O 为原点建立平面直角坐标系，A, B, C 三点的坐标分别为 A (8,0)，B (8,10)，C (0,4)，点 D 为线段 BC 的中点，动点 P 从点 O 出发，以每秒 1 个单位的速度，沿折线 OABD 的路线移动，移动的时间为 t 秒.

(1) 求直线 BC 的解析式；

(2) 若动点 P 在线段 OA 上移动，当 t 为何值时，四边形 OPDC 的面积是梯形 COAB 的面积 的 $\frac{2}{7}$ ？

(3) 动点 P 从点 O 出发，沿折线 OABD 的路线移动的过程中，设 $\triangle OPD$ 的面积为 S，请直接写出 S 与 t 的函数关系式，并指出自变量 t 的取值范围；

(4) 当动点 P 在线段 AB 上移动时，能否在线段 OA 上找到一点 Q，使四边形 CQPD 为矩形？若能，请求出此时动点 P 的坐标；若不能，请说明理由.

【解答】

(1) 设直线 BC 的解析式为 $y=kx+b$ 依题意得：

$$4=k \times 0 + b$$

$$10=8k+b$$

$$\text{解之得：} k = \frac{3}{4}; \quad b = 4$$

所以直线 BC 的解析式为 $y = \frac{3}{4}x + 4$

$$(2) \quad t = \frac{16}{7}$$

$$(3) \quad s = \frac{7}{2}t \quad (8 > t > 0)$$

$$s=44-2x \quad (18>x\geq 8)$$

$$s=-\frac{8}{5}t+\frac{184}{5}$$

(4) 不存在。理由如下：过 C 作 $CM\perp AB$ 于 M, 易知 $CM=OA=8$
 $AM=OC=4$, 所以 $BM=6$. 假设四边形 CQPD 为矩形, 则 $PQ=CD=5, PQ\parallel CD$,
 根据 $Rt\triangle PAQ\sim Rt\triangle BDP$ 可求 $PB=5, PB=PD$, 这与三角形 PBD 是直角三角形
 相矛盾, 所以假设不成立在 OA 上不存在点 Q, 使四边形 CQPD 为矩形

例 2 (2008 年金华市中考第 23 题) 如图 1, 已知双曲线 $y=k/x$ ($k>0$) 与直线 $y=k'/x$ 交于 A, B 两点, 点 A 在第一象限, 试解答下列问题:

(1) 若点 A 的坐标为 (4,2), 则点 B 的坐标为_____; 若点 A 的横坐标为 m, 则点 B 的坐标可表示为_____;

(2) 如图 2, 过原点 O 作另一条直线 l, 交双曲线 $y=k/x$ ($k>0$) 于 P、Q 两点, 点 P 在第一象限.

①说明四边形 APBQ 一定是平行四边形;

②设点 A、P 的横坐标分别为 m、n, 四边形 APBQ 可能是矩形吗? 可能是正方形吗? 若可能, 直接写出 m、n 应满足的条件; 若不可能, 请说明理由.

【解答】

解: (1) (-4, -2), $(-m, -k/m)$

(2) ①因为点 A 与点 B 关于原点中心对称, 所以 $OA=OB$. 同理, $OP=OQ$.
所以四边形 APBQ 一定是平行四边形.

②当 $mn=k$ 时, 四边形 APBQ 是矩形

四边形 APBQ 不可能成为正方形

例 3 (2008 年青岛市中考第 24 题) 已知：如图 1-5-21①，在 $\text{Rt}\triangle ACB$ 中， $\angle C=90^\circ$ ， $AC=4\text{cm}$ ， $BC=3\text{cm}$ ，点 P 由 B 出发沿 BA 方向向点 A 匀速运动，速度为 1cm/s ；点 Q 由 A 出发沿 AC 方向向点 C 匀速运动，速度为 2cm/s ；连接 PQ 。若设运动的时间为 t (s) ($0 < t < 2$)，解答下列问题：

- (1) 当 t 为何值时， $PQ \parallel BC$ ？
- (2) 设 $\triangle AQP$ 的面积为 y (cm^2)，求 y 与 t 之间的函数关系式；
- (3) 是否存在某一时刻 t ，使线段 PQ 恰好把 $\text{Rt}\triangle ACB$ 的周长和面积同时平分？若存在，求出此时 t 的值；若不存在，说明理由；
- (4) 如图 1-5-21②，连接 PC ，并把 $\triangle PQC$ 沿 QC 翻折，得到四边形 $PQP'C$ ，那么是否存在某一时刻 t ，使四边形 $PQP'C$ 为菱形？若存在，求出此时菱形的边长；若不存在，说明理由。

【解答】

(1) 在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中， $AB = \sqrt{BC^2 + AC^2} = 5$ ，

由题意知： $AP = 5 - t$ ， $AQ = 2t$ ，

若 $PQ \parallel BC$ ，则 $\triangle APQ \sim \triangle ABC$ ，

$$\therefore \frac{AQ}{AC} = \frac{AP}{AB},$$

$$\therefore \frac{2t}{4} = \frac{5-t}{5},$$

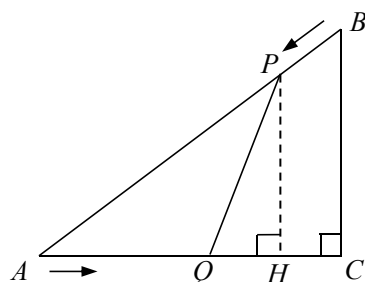
$$\therefore t = \frac{10}{7}.$$

(2) 过点 P 作 $PH \perp AC$ 于 H 。

$\because \triangle APH \sim \triangle ABC$ ，

$$\therefore \frac{PH}{BC} = \frac{AP}{AB},$$

$$\therefore \frac{PH}{3} = \frac{5-t}{5},$$



图①

$$\therefore PH = 3 - \frac{3}{5}t,$$

$$\therefore y = \frac{1}{2} \times AQ \times PH = \frac{1}{2} \times 2t \times (3 - \frac{3}{5}t) = -\frac{3}{5}t^2 + 3t.$$

(3) 若 PQ 把 $\triangle ABC$ 周长平分,

$$\text{则 } AP + AQ = BP + BC + CQ.$$

$$\therefore (5-t) + 2t = t + 3 + (4-2t),$$

解得: $t=1$.

若 PQ 把 $\triangle ABC$ 面积平分,

$$\text{则 } S_{\triangle APQ} = \frac{1}{2} S_{\triangle ABC}, \quad \text{即 } -\frac{3}{5}t^2 + 3t = 3.$$

$\because t=1$ 代入上面方程不成立,

$\therefore$ 不存在这一时刻 t , 使线段 PQ 把 $\text{Rt}\triangle ACB$ 的周长和面积同时平分.

(4) 过点 P 作 $PM \perp AC$ 于 M , $PN \perp BC$ 于 N ,

若四边形 $PQP'C$ 是菱形, 那么 $PQ = PC$.

$\because PM \perp AC$ 于 M ,

$$\therefore QM = CM.$$

$\because PN \perp BC$ 于 N , 易知 $\triangle PBN \sim \triangle ABC$.

$$\therefore \frac{PN}{AC} = \frac{BP}{AB}, \quad \therefore \frac{PN}{4} = \frac{t}{5},$$

$$\therefore PN = \frac{4t}{5},$$

$$\therefore QM = CM = \frac{4t}{5},$$

$$\therefore \frac{4}{5}t + \frac{4}{5}t + 2t = 4,$$

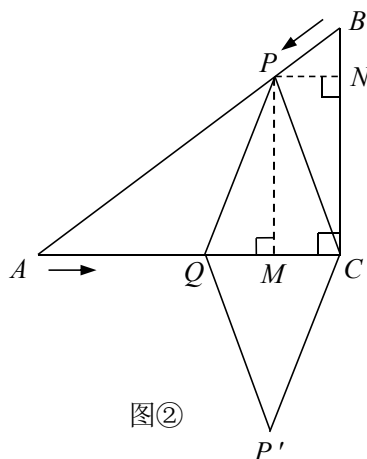
$$\text{解得: } t = \frac{10}{9}.$$

$\therefore$ 当 $t = \frac{10}{9}$ 时, 四边形 $PQP'C$ 是菱形.

$$\text{此时 } PM = 3 - \frac{3}{5}t = \frac{7}{3}, \quad CM = \frac{4}{5}t = \frac{8}{9},$$

$$\text{在 } \text{Rt}\triangle PMC \text{ 中, } PC = \sqrt{PM^2 + CM^2} = \sqrt{\frac{49}{9} + \frac{64}{81}} = \frac{\sqrt{505}}{9},$$

$\therefore$ 菱形 $PQP'C$ 边长为 $\frac{\sqrt{505}}{9}$.



图②

例 4 (2008 年太原市中考第 29 题) 如图 1, 在平面直角坐标系 xOy 中, 直线 $y=x+1$ 与 $y=-\frac{3}{4}x+3$ 交于点 A , 分别交 x 轴于点 B 和点 C , 点 D 是直线 AC 上的一个动点.

(1) 求点 A 、 B 、 C 的坐标;

(2) 当 $\triangle CBD$ 为等腰三角形时, 求点 D 的坐标;

(3) 在直线 AB 上是否存在点 E , 使得以点 E 、 D 、 O 、 A 为顶点的四边形是平行四边形? 如果存在, 直接写出 BE/CD 的值; 如果不存在, 请说明理由.

【解答】

(1) 在 $y=x+1$ 中, 当 $y=0$ 时, $x+1=0$,

$\therefore x=-1$, 点 B 的坐标为 $(-1,0)$.

在 $y=-\frac{3}{4}x+3$ 中, 当 $y=0$ 时, $-\frac{3}{4}x+3=0$, $\therefore x=4$, 点 C 的坐标为 $(4,0)$.

由题意, 得
$$\begin{cases} y=x+1, \\ y=-\frac{3}{4}x+3. \end{cases} \text{ 解得 } \begin{cases} x=\frac{8}{7}, \\ y=\frac{15}{7}. \end{cases}$$

$\therefore$ 点 A 的坐标为 $(\frac{8}{7}, \frac{15}{7})$.

(2) 当 $\triangle CBD$ 为等腰三角形时, 有以下三种情况, 如图 (1). 设动点 D 的坐标为 (x, y) .

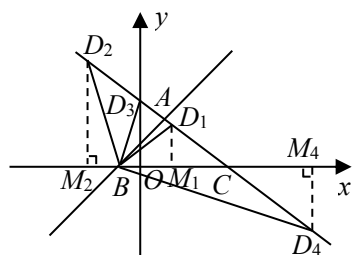


图 (1)

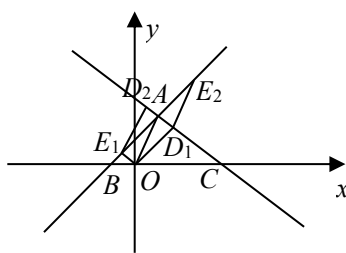


图 (2)

由 (1), 得 $B(-1,0)$, $C(4,0)$, $\therefore BC=5$.

①当 $BD_1 = D_1C$ 时, 过点 D_1 作 $D_1M_1 \perp x$ 轴, 垂足为点 M_1 , 则 $BM_1 = M_1C = \frac{1}{2}BC$.

$$\therefore BM_1 = \frac{5}{2}, OM_1 = \frac{5}{2} - 1 = \frac{3}{2}, x = \frac{3}{2}.$$

$$\therefore y = -\frac{3}{4} \times \frac{3}{2} + 3 = \frac{15}{8}, \text{ 点 } D_1 \text{ 的坐标为 } \left(\frac{3}{2}, \frac{15}{8}\right).$$

②当 $BC = BD_2$ 时, 过点 D_2 作 $D_2M_2 \perp x$ 轴, 垂足为点 M_2 , 则 $D_2M_2^2 + M_2B^2 = D_2B^2$.

$$\therefore M_2B = -x - 1, D_2M_2 = -\frac{3}{4}x + 3, D_2B = 5,$$

$$\therefore (-x-1)^2 + \left(-\frac{3}{4}x+3\right)^2 = 5^2.$$

$$\text{解, 得 } x_1 = -\frac{12}{5}, x_2 = 4 \text{ (舍去)}. \text{ 此时, } y = -\frac{3}{4} \times \left(-\frac{12}{5}\right) + 3 = \frac{24}{5}.$$

$$\therefore \text{点 } D_2 \text{ 的坐标为 } \left(-\frac{12}{5}, \frac{24}{5}\right).$$

③当 $CD_3 = BC$, 或 $CD_4 = BC$ 时, 同理可得 $D_3(0,3)$, $D_4(8,-3)$.

由此可得点 D 的坐标分别为 $D_1\left(\frac{3}{2}, \frac{15}{8}\right)$, $D_2\left(-\frac{12}{5}, \frac{24}{5}\right)$, $D_3(0,3)$, $D_4(8,-3)$.

例 5 (2008 年乌鲁木齐市中考第 23 题) 如图 1 在平面直角坐标系中, 以点 $C(1,1)$ 为圆心, 交 x 轴于 A 、 B 两点, 开口向下的抛物线经过点 A 、 B , 且其顶点 P 在 $\odot O$ 上.

- (1) 求 $\angle ACB$ 的大小;
- (2) 写出 A 、 B 两点的坐标;
- (3) 试确定此抛物线的解析式;
- (4) 在该抛物线上是否存在一点 D , 使线段 OP 与 CD 互相平分? 若存在, 求出点 D 的坐标; 若不存在, 请说明理由.

【解答】

(1) 作 $CH \perp x$ 轴, H 为垂足,

$\because CH = 1$, 半径 $CB = 2$

$\therefore \angle BCH = 60^\circ$, $\therefore \angle ACB = 120^\circ$

(2) $\because CH = 1$, 半径 $CB = 2$

$\therefore HB = \sqrt{3}$, 故 $A(1-\sqrt{3}, 0)$, $B(1+\sqrt{3}, 0)$

(3) 由圆与抛物线的对称性可知抛物线的顶点 P 的坐标为 $(1, 3)$

设抛物线解析式 $y = a(x-1)^2 + 3$

把点 $B(1+\sqrt{3}, 0)$ 代入上式, 解得 $a = -1$

$\therefore y = -x^2 + 2x + 2$

(4) 假设存在点 D 使线段 OP 与 CD 互相平分, 则四边形 $OCPD$ 是平行四边形

$\therefore PC \parallel OD$ 且 $PC = OD$.

$\because PC \parallel y$ 轴, $\therefore$ 点 D 在 y 轴上.

又 $\because PC = 2$, $\therefore OD = 2$, 即 $D(0, 2)$.

又 $D(0, 2)$ 满足 $y = -x^2 + 2x + 2$, $\therefore$ 点 D 在抛物线上

所以存在 $D(0, 2)$ 使线段 OP 与 CD 互相平分.

例 6 (2008 年盐城市中考第 27 题) 如图 1, 直线 $y=3^{1/2}/3 \cdot x+b$ 经过点 B $(-3^{1/2}, 2)$, 且与 x 轴交于点 A, 将抛物线 $y=1/3 \cdot x^2$ 沿 x 轴作左右平移, 记平移后的抛物线为 C, 其顶点为 P.

- (1) 求 $\angle BAO$ 的度数;
- (2) 抛物线 C 与 y 轴交于点 E, 与直线 AB 交于两点, 其中一个交点为 F, 当线段 EF // x 轴, 求平移后的抛物线 C 对应的函数关系式;
- (3) 在抛物线 $y=1/3 \cdot x^2$ 平移的过程中, 将 $\triangle PAB$ 沿直线 AB 翻折得到 $\triangle DAB$, 点 D 能否落在抛物线 C 上? 若能, 求出此时抛物线 C 的顶点 P 的坐标; 若不能, 说明理由.

【解答】

(1) $\because$ 点 B 在直线 AB 上, 求得 $b=3$,

$$\therefore \text{直线 AB: } y = \frac{\sqrt{3}}{3}x + 3,$$

$$\therefore A(-3\sqrt{3}, 0), \text{ 即 } OA=3\sqrt{3}.$$

作 $BH \perp x$ 轴, 垂足为 H. 则 $BH=2$, $OH=\sqrt{3}$, $AH=2\sqrt{3}$.

$$\therefore \tan \angle BAO = \frac{BH}{AH} = \frac{\sqrt{3}}{3}, \therefore \angle BAO = 30^\circ.$$

(2) 设抛物线 C 顶点 P $(t, 0)$, 则抛物线 C: $y = \frac{1}{3}(x-t)^2$,

$$\therefore E(0, \frac{1}{3}t^2)$$

$\because EF \parallel x$ 轴, $\therefore$ 点 E、F 关于抛物线 C 的对称轴对称, $\therefore F(2t, \frac{1}{3}t^2)$.

$$\because \text{点 F 在直线 AB 上, } \therefore \frac{1}{3}t^2 = \frac{\sqrt{3}}{3} \cdot 2t + 3, \therefore t_1 = -\sqrt{3}, t_2 = 3\sqrt{3}.$$

$$\therefore \text{抛物线 C 为 } y = \frac{1}{3}(x+\sqrt{3})^2 \text{ 或 } y = \frac{1}{3}(x-3\sqrt{3})^2.$$

(3) 假设点 D 落在抛物线 C 上,

不妨设此时抛物线顶点 P $(t, 0)$, 则抛物线 C: $y = \frac{1}{3}(x-t)^2$, $AP=3\sqrt{3}+t$,

连接 DP, 作 $DM \perp x$ 轴, 垂足为 M. 由已知, 得 $\triangle PAB \cong \triangle DAB$,

又 $\angle BAO = 30^\circ$, $\therefore \triangle PAD$ 为等边三角形. $PM = AM = \frac{1}{2}(3\sqrt{3} + t)$,

$$\therefore \tan \angle DAM = \frac{DM}{AM} = \sqrt{3}, \therefore DM = \frac{1}{2}(9 + \sqrt{3}t).$$

$$OM = OP + PM = -t + \frac{1}{2}(3\sqrt{3} + t) = \frac{1}{2}(3\sqrt{3} - t),$$

$$\therefore M \left[-\frac{1}{2}(3\sqrt{3} - t), 0 \right], \therefore D \left[-\frac{1}{2}(3\sqrt{3} - t), \frac{1}{2}(9 + \sqrt{3}t) \right].$$

$\because$ 点 D 落在抛物线 C 上,

$$\therefore \frac{1}{2}(9 + \sqrt{3}t) = \frac{1}{3} \left[-\frac{1}{2}(3\sqrt{3} - t) - t \right]^2, \text{即 } t^2 = 27, \therefore t = \pm 3\sqrt{3}.$$

当 $t = -3\sqrt{3}$ 时, 此时点 P $(-3\sqrt{3}, 0)$, 点 P 与点 A 重合, 不能构成三角形, 不符合题意, 舍去. 所以点 P 为 $(3\sqrt{3}, 0)$

$\therefore$ 当点 D 落在抛物线 C 上顶点 P 为 $(3\sqrt{3}, 0)$.

例 7 (2009 年福州市中考第 21 题) 如图 1, 等边 $\triangle ABC$ 的边长为 4, E 是边 BC 上的动点, $EH \perp AC$ 于 H, 过 E 作 $EF \parallel AC$, 交线段 AB 于点 F, 在线段 AC 上取点 P, 使 $PE = EB$. 设 $EC = x$ ($0 < x \leq 2$).

- (1) 请直接写出图中与线段 EF 相等的两条线段 (不再另外添加辅助线);
- (2) Q 是线段 AC 上的动点, 当四边形 EFPQ 是平行四边形时, 求平行四边形 EFPQ 的面积 (用含 x 的代数式表示);
- (3) 当 (2) 中的平行四边形 EFPQ 面积最大值时, 以 E 为圆心, r 为半径作圆, 根据 $\odot E$ 与此时平行四边形 EFPQ 四条边交点的总个数, 求相应的 r 的取值范围.

【解答】

(1) BE、PE、BF 三条线段中任选两条.

(2) 在 $Rt\triangle CHE$ 中, $\angle CHE = 90^\circ$ $\angle C = 60^\circ$,

$$\therefore EH = \frac{\sqrt{3}}{2}x$$

$$\therefore PQ = EF = BE = 4 - x$$

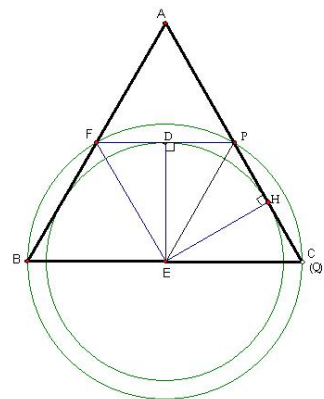
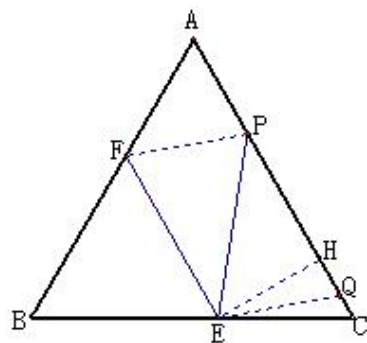
$$\therefore S_{\square EFPQ} = -\frac{\sqrt{3}}{2}x^2 + 2\sqrt{3}x.$$

(3)

$$S_{\square EFPQ} = -\frac{\sqrt{3}}{2}x^2 + 2\sqrt{3}x$$

$$= -\frac{\sqrt{3}}{2}(x-2)^2 + 2\sqrt{3}$$

$\therefore$ 当 $x = 2$ 时, $S_{\square EFPQ}$ 有最大值.



此时 E、F、P 分别为 $\triangle ABC$ 三边 BC、AB、AC 的中点，且点 C、点 Q 重合

$\therefore$ 平行四边形 EFPQ 是菱形.

过 E 点作 $ED \perp FP$ 于 D,

$\therefore ED = EH = \sqrt{3}$.

$\therefore$ 当 $\odot E$ 与 $\square EFPQ$ 四条边交点的总个数是 2 个时, $0 < r < \sqrt{3}$;

当 $\odot E$ 与 $\square EFPQ$ 四条边交点的总个数是 4 个时, $r = \sqrt{3}$;

当 $\odot E$ 与 $\square EFPQ$ 四条边交点的总个数是 6 个时, $\sqrt{3} < r < 2$;

当 $\odot E$ 与 $\square EFPQ$ 四条边交点的总个数是 3 个时, $r = 2$ 时;

当 $\odot E$ 与 $\square EFPQ$ 四条边交点的总个数是 0 个时, $r > 2$ 时.

例 8 (2009 年江西省中考第 24 题) 如图 1, 抛物线 $y=-x^2+2x+3$ 与 x 轴相交于 A、B 两点 (点 A 在点 B 的左侧), 与 y 轴相交于点 C, 顶点为 D.

- (1) 直接写出 A、B、C 三点的坐标和抛物线的对称轴;
- (2) 连结 BC, 与抛物线的对称轴交于点 E, 点 P 为线段 BC 上的一个动点, 过点 P 作 $PF \parallel DE$ 交抛物线于点 F, 设点 P 的横坐标为 m .

①用含 m 的代数式表示线段 PF 的长, 并求出当 m 为何值时, 四边形 PEDF 为平行四边形?

②设 BCF 的面积为 S , 求 S 与 m 的函数关系.

【解答】

(1) $A(-1, 0)$, $B(3, 0)$, $C(0, 3)$.

抛物线的对称轴是: $x=1$.

(2) ①设直线 BC 的函数关系式为: $y=kx+b$.

把 $B(3, 0)$, $C(0, 3)$ 分别代入得:

$$\begin{cases} 3k+b=0, \\ b=3 \end{cases} \text{ 解得: } k=-1, b=3.$$

所以直线 BC 的函数关系式为: $y=-x+3$.

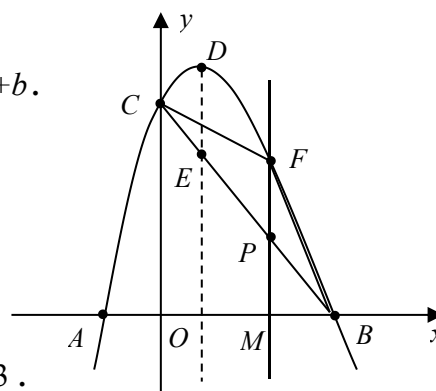
当 $x=1$ 时, $y=-1+3=2$, $\therefore E(1, 2)$.

当 $x=m$ 时, $y=-m+3$,

$\therefore P(m, -m+3)$.

在 $y=-x^2+2x+3$ 中, 当 $x=1$ 时, $y=4$.

$\therefore D(1, 4)$.



(第 24 题)

当 $x = m$ 时, $y = -m^2 + 2m + 3$, $\therefore F(m, -m^2 + 2m + 3)$.

$\therefore$ 线段 $DE = 4 - 2 = 2$, 线段 $PF = -m^2 + 2m + 3 - (-m + 3) = -m^2 + 3m$.

$\because PF \parallel DE$,

$\therefore$ 当 $PF = ED$ 时, 四边形 $PEDF$ 为平行四边形.

由 $-m^2 + 3m = 2$, 解得: $m_1 = 2$, $m_2 = 1$ (不合题意, 舍去).

因此, 当 $m = 2$ 时, 四边形 $PEDF$ 为平行四边形.

② 设直线 PF 与 x 轴交于点 M , 由 $B(3, 0)$, $O(0, 0)$, 可得:

$$OB = OM + MB = 3.$$

$$\because S = S_{\triangle BPF} + S_{\triangle CPF}.$$

$$\text{即 } S = \frac{1}{2}PF \cdot BM + \frac{1}{2}PF \cdot OM = \frac{1}{2}PF \cdot (BM + OM) = \frac{1}{2}PF \cdot OB.$$

$$\therefore S = \frac{1}{2} \times 3(-m^2 + 3m) = -\frac{3}{2}m^2 + \frac{9}{2}m \quad (0 \leq m \leq 3).$$

例 9 (2009 年莆田市中考第 25 题) 已知，如图抛物线 $y=ax^2+3ax+c$ ($a>0$) 与 y 轴交与点 C ，与 x 轴交于 A 、 B 两点，点 A 在点 B 的左侧，点 B 的坐标为 $(1,0)$ ， $OC=3OB$.

- (1) 求抛物线的解析式；
- (2) 若点 D 是线段 AC 下方抛物线上的动点，求四边形 $ABCD$ 面积的最大值；
- (3) 若点 E 在 x 轴上，点 P 在抛物线上，是否存在 A 、 C 、 E 、 P 为顶点且以 AC 为一边的平行四边形？若存在，求点 P 的坐标；若不存在，请说明理由.

【解答】

$$(1) \because \text{对称轴 } x = -\frac{3a}{2a} = -\frac{3}{2}$$

$$\text{又} \because OC=3OB=3, \quad a > 0,$$

$$\therefore C(0, -3)$$

方法一：把 $B(1,0)$ 、 $C(0, -3)$ 代入 $y=ax^2+3ax+c$ 得：

$$\begin{cases} c = -3 \\ a + 3a + c = 0 \end{cases} \quad \text{解得：} \quad a = \frac{3}{4}, \quad c = -3$$

$$\therefore y = \frac{3}{4}x^2 + \frac{9}{4}x - 3$$

方法二： $\because B(1, 0), \therefore A(-4, 0)$

可令 $y = a(x+4)(x-1)$ 把 $C(0, -3)$ 代入得：

$$a = \frac{3}{4}$$

$$\therefore y = \frac{3}{4}(x+4)(x-1)$$

$$= \frac{3}{4}x^2 + \frac{9}{4}x - 3$$

(2) 方法一：过点 D 作 $DM \parallel y$ 轴分别交线段 AC 和 x 轴于点 M、N。

$$\begin{aligned} \because S_{\text{四边形}ABCD} &= S_{\triangle ABC} + S_{\triangle ACD} \\ &= \frac{15}{2} + \frac{1}{2} \times DM \times (AN + ON) = \frac{15}{2} + 2DM \end{aligned}$$

$$\because A(-4, 0), C(0, -3)$$

设直线 AC 的解析式为 $y = kx + b$

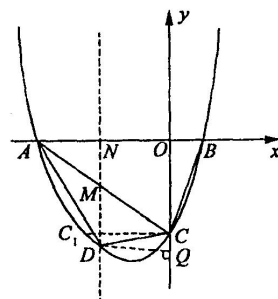
$$\text{代入求得: } y = \frac{3}{4}x - 3$$

$$\text{令 } D(x, \frac{3}{4}x^2 + \frac{9}{4}x - 3), M(x, -\frac{3}{4}x - 3)$$

$$DM = -\frac{3}{4}x - 3 - (\frac{3}{4}x^2 + \frac{9}{4}x - 3) = -\frac{3}{4}(x+2)^2 + 3$$

当 $x = -2$ 时, DM 有最大值 3

此时四边形 ABCD 面积有最大值 $\frac{27}{2}$ 。



方法二：过点 D 作 $DQ \perp y$ 轴于 Q，过点 C 作 $CC_1 \parallel x$ 轴交抛物线于 C_1 ，从图象中可判断当点 D 在 CC_1 下方的抛物线上运动时，四边形 ABCD 才有最大值。

$$\begin{aligned} \text{则 } S_{\text{四边形}ABCD} &= S_{\triangle OBC} + S_{\text{梯形}AOQD} - S_{\triangle DQC} = \frac{3}{2} + \frac{1}{2} \times (4 + DQ) \times OQ - \frac{1}{2} \times DQ \times (OQ - 3) \\ &= \frac{3}{2} + 2OQ + \frac{3}{2}DQ \end{aligned}$$

$$\text{令 } D(x, \frac{3}{4}x^2 + \frac{9}{4}x - 3)$$

$$\text{则 } S_{\text{四边形}ABCD} = \frac{3}{2} - 2(\frac{3}{4}x^2 + \frac{9}{4}x - 3) - \frac{3}{2}x = -\frac{3}{2}(x+2)^2 + \frac{27}{2}$$

当 $x = -2$ 时, 四边形 ABCD 面积有最大值 $\frac{27}{2}$ 。

(3) 如图所示, 讨论: ①过点 C 作 $CP_1 \parallel x$ 轴交抛物线于点 P_1 , 过点 P_1 作 $P_1E_1 \parallel AC$ 交 x 轴于点 E_1 , 此时四边形 ACP_1E_1 为平行四边形,

$$\because C(0, -3)$$

$$\text{令 } \frac{3}{4}x^2 + \frac{9}{4}x - 3 = -3 \text{ 得:}$$

$$x_1 = 0, x_2 = 3$$

例 10 (2010 年河南省中考第 23 题) 如图 1, 在平面直角坐标系中, 已知抛物线经过 A (-4,0)、B (0, -4)、C (2,0) 三点.

(1) 求抛物线的解析式;

(2) 若点 M 为第三象限内抛物线上一动点, 点 M 的横坐标为 m, $\triangle AMB$ 的面积为 S, 求 S 关于 m 的函数关系式, 并求出 S 的最大值;

(3) 若点 P 是抛物线上的动点, 点 Q 是直线 $y=-x$ 上的动点, 判断有几个位置能使以点 P、Q、B、O 为顶点的四边形为平行四边形, 直接写出相应的点 Q 的坐标.

【解答】

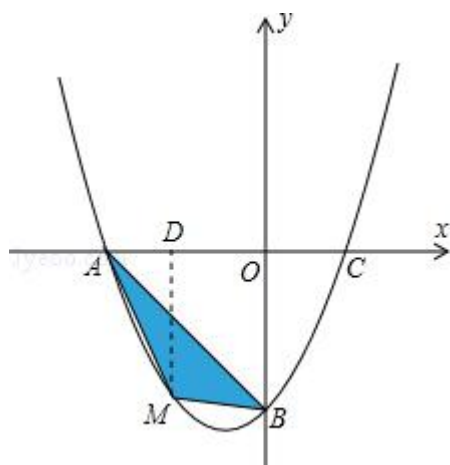
(1) 设抛物线的解析式为 $y=ax^2+bx+c$ ($a \neq 0$),

$$\text{则有} \begin{cases} 16a - 4b + c = 0 \\ c = -4 \\ 4a + 2b + c = 0 \end{cases}$$

$$\text{解得} \begin{cases} a = \frac{1}{2} \\ b = 1 \\ c = -4 \end{cases},$$

$\therefore$ 抛物线的解析式为 $y = \frac{1}{2}x^2 + x - 4$.

(2) 过点 M 作 $MD \perp x$ 轴于点 D, 设 M 点的坐标为 (m, n),



则 $AD=m+4$, $MD=-n$, $n=\frac{1}{2}m^2+m-4$,

$$\therefore S = S_{\triangle AMD} + S_{\text{梯形} DMBO} - S_{\triangle ABO}$$

$$= \frac{1}{2} (m+4) (-n) + \frac{1}{2} (-n+4) (-m) - \frac{1}{2} \times 4 \times 4$$

$$= -2n - 2m - 8$$

$$= -2 \times \left(\frac{1}{2}m^2 + m - 4 \right) - 2m - 8$$

$$= -m^2 - 4m \quad (-4 < m < 0);$$

$$\therefore S_{\text{最大值}} = 4.$$

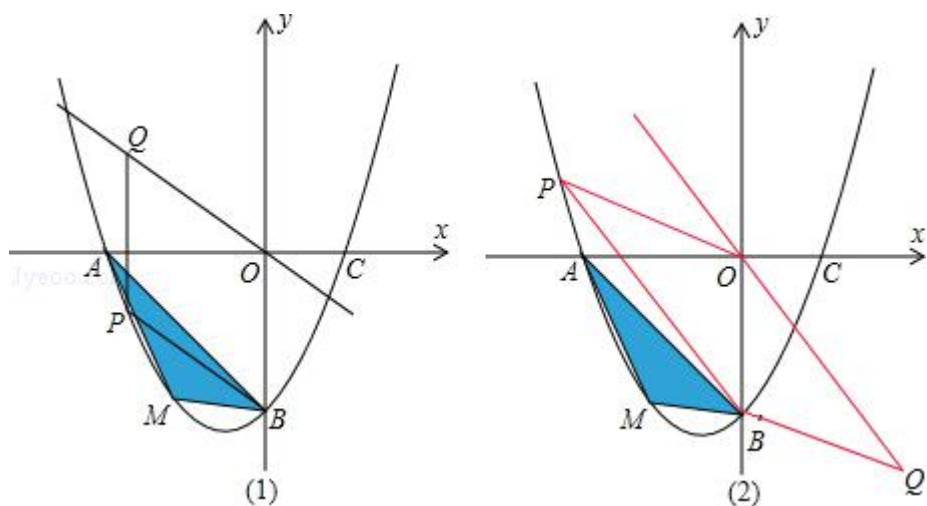
$$(3) \text{ 设 } P \left(x, \frac{1}{2}x^2 + x - 4 \right).$$

①如图 1, 当 OB 为边时, 根据平行四边形的性质知 $PQ \parallel OB$,

$\therefore Q$ 的横坐标等于 P 的横坐标,

又 $\because$ 直线的解析式为 $y = -x$,

则 $Q(x, -x)$.



由 $PQ=OB$ ，得 $|-x - (\frac{1}{2}x^2 + x - 4)| = 4$ ，解得 $x=0, -4, -2 \pm 2\sqrt{5}$. $x=0$ 不合题意，舍去. 由此可得 $Q(-4, 4)$ 或 $(-2+2\sqrt{5}, 2-2\sqrt{5})$ 或 $(-2-2\sqrt{5}, 2+2\sqrt{5})$;

②如图 2，当 BO 为对角线时，知 A 与 P 应该重合， $OP=4$. 四边形 $PBQO$ 为平行四边形则 $BQ=OP=4$ ， Q 横坐标为 4，代入 $y=-x$ 得出 Q 为 $(4, -4)$ ，与题意不符.

故满足题意的 Q 点的坐标有四个，分别是 $(-4, 4)$ ， $(4, -4)$ ， $(-2+2\sqrt{5}, 2-2\sqrt{5})$ ， $(-2-2\sqrt{5}, 2+2\sqrt{5})$.

例 11 (2010 年山西省中考第 26 题) 在直角梯形 OABC 中, $CB \parallel OA$, $\angle COA = 90^\circ$, $CB = 3$, $OA = 6$, $BA = 3\sqrt{5}$. 分别以 OA、OC 边所在直线为 x 轴、y 轴建立如图 1 所示的平面直角坐标系.

(1) 求点 B 的坐标;

(2) 已知 D、E 分别为线段 OC、OB 上的点, $OD = 5$, $OE = 2EB$, 直线 DE 交 x 轴于点 F, 求直线 DE 的解析式;

(3) 点 M 是 (2) 中直线 DE 上的一个动点, 在 x 轴上方的平面内是否存在另一点 N, 使以 O、D、M、N 为顶点的四边形是菱形? 若存在, 请求出点 N 的坐标; 若不存在, 请说明理由.

【解答】

(1) 如图 1, 作 $BH \perp x$ 轴于点 H, 则四边形 OHBC 为矩形,

$$\therefore OH = CB = 3, \therefore AH = OA - OH = 6 - 3 = 3,$$

$$\text{在 Rt}\triangle ABH \text{ 中, } BH = \sqrt{BA^2 - AH^2} = \sqrt{(3\sqrt{5})^2 - 3^2} = 6,$$

$\therefore$ 点 B 的坐标为 (3, 6)。

(2) 如图 1, 作 $EG \perp x$ 轴于点 G, 则 $EG \parallel BH$,

$$\therefore \triangle OEG \sim \triangle OBH, \therefore \frac{OE}{OB} = \frac{OG}{OH} = \frac{EG}{BH}, \text{ 又 } \because OE = 2EB,$$

$$\therefore \frac{OE}{OB} = \frac{2}{3}, \therefore \frac{2}{3} = \frac{OG}{3} = \frac{EG}{6}, \therefore OG = 2, EG = 4, \therefore \text{点 E 的坐标为 (2, 4)}.$$

4)。

又 $\because$ 点 D 的坐标为 (0, 5), 设直线 DE 的解析式为 $y = kx + b$, 则

$$\begin{cases} 2k + b = 4 \\ b = 5 \end{cases}, \text{ 解得 } k = -\frac{1}{2},$$

$$b = 5. \therefore \text{直线 DE 的解析式为: } y = -\frac{1}{2}x + 5.$$

(3) 答: 存在。

① 如图 1, 当 $OD = DM = MN = NO = 5$ 时, 四边形 ODMN 为菱形. 作 $MP \perp y$ 轴于点 P,

$$\text{则 } MP \parallel x \text{ 轴, } \therefore \triangle MPD \sim \triangle FOD, \therefore \frac{MP}{OF} = \frac{PD}{OD} = \frac{MD}{FD}.$$

又 $\because$ 当 $y=0$ 时, $-\frac{1}{2}x+5=0$, 解得 $x=10$ 。 $\therefore F$ 点的坐标为 $(10, 0)$,

$\therefore OF=10$ 。

在 $\text{Rt}\triangle ODF$ 中, $FD=\sqrt{OD^2+OF^2}=\sqrt{5^2+10^2}=5\sqrt{5}$,

$$\therefore \frac{MP}{10}=\frac{PD}{5}=\frac{5}{5\sqrt{5}},$$

$\therefore MP=2\sqrt{5}$, $PD=\sqrt{5}$ 。 $\therefore$ 点 M 的坐标为 $(-2\sqrt{5}, 5+\sqrt{5})$ 。

$\therefore$ 点 N 的坐标为 $(-2\sqrt{5}, \sqrt{5})$ 。

② 如图 2, 当 $OD=DN=NM=MO=5$ 时, 四边形 $ODNM$ 为菱形。延长 NM 交 x 轴于点 P , 则 $MP\perp x$ 轴。

$\because$ 点 M 在直线 $y=-\frac{1}{2}x+5$ 上, $\therefore$ 设 M 点坐标为

$(a, -\frac{1}{2}a+5)$, 在 $\text{Rt}\triangle OPM$ 中, $OP^2+PM^2=OM^2$,

$\therefore a^2+(-\frac{1}{2}a+5)^2=5^2$, 解得 $a_1=4$, $a_2=0$ (舍去),

$\therefore$ 点 M 的坐标为 $(4, 3)$, $\therefore$ 点 N 的坐标为 $(4, 8)$ 。

③ 如图 3, 当 $OM=MD=DN=NO$ 时, 四边形 $OMDN$ 为菱形。连接 NM , 交 OD 于点 P , 则 NM 与 OD 互相垂直平分, $\therefore y_M=y_N=OP=\frac{5}{2}$, $\therefore -\frac{1}{2}x_M+5=\frac{5}{2}$, $\therefore x_M=5$,

$\therefore x_N=-x_M=-5$, $\therefore$ 点 N 的坐标为 $(-5, \frac{5}{2})$ 。

综上所述, x 轴上方的点 N 有三个, 分别为 $N_1(-2\sqrt{5}, \sqrt{5})$,

$N_2(4, 8)$, $N_3(-5, \frac{5}{2})$ 。

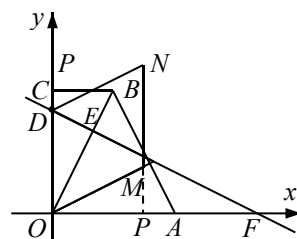


圖 2

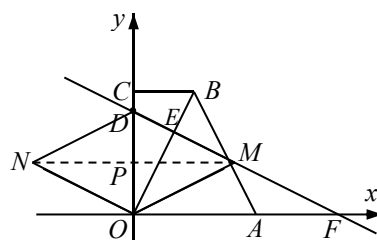


圖 3

例 12 (2011 年成都市中考第 28 题) 如图 1, 在平面直角坐标系 xOy 中, $\triangle ABC$ 的两个顶点 A 、 B 在 x 轴上, 顶点 C 在 y 轴的负半轴上, 已知 $|OA|:|OB|=1:5$, $|OB|=|OC|$, $\triangle ABC$ 的面积 $S_{\triangle ABC}=15$, 抛物线 $y=ax^2+bx+c$ ($a \neq 0$) 经过 A 、 B 、 C 三点.

(1) 求此抛物线的函数表达式;

(2) 设 E 是 y 轴右侧抛物线上异于点 B 的一个动点, 过点 E 作 x 轴的平行线交抛物线于另一点 F , 过点 F 作 FG 垂直于 x 轴于点 G , 再过点 E 作 EH 垂直于 x 轴于点 H , 得到矩形 $EFGH$. 则在点 E 的运动过程中, 当矩形 $EFGH$ 为正方形时, 求出该正方形的边长;

(3) 在抛物线上是否存在异于 B 、 C 的点 M , 使 $\triangle MBC$ 中 BC 边上的高为 $7\sqrt{2}$? 若存在, 求出点 M 的坐标; 若不存在, 请说明理由.

【解答】

(1) $\because |OA|:|OB|=1:5$, 设 $|OA|=t$ ($t > 0$), 则 $|OB|=5t$

$$\therefore |AB|=6t$$

$$\text{又 } |OB|=|OC|, \therefore |OC|=5t$$

$$\because S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} \cdot |AB| \cdot |OC| = \frac{1}{2} \times 6t \times 5t = 15$$

$$\therefore t^2 = 1, \text{ 即 } t = \pm 1.$$

$$\text{而 } t > 0, \therefore t = 1.$$

$$\therefore |OA|=1, |OB|=|OC|=5 \quad \therefore \triangle ABC \text{ 三个顶点的坐标分别是}$$

$$A(-1, 0), B(5, 0), C(0, -5)$$

$\therefore$ 抛物线 $y = ax^2 + bx + c$ 经过 A 、 B 、 C 三点,

∴ 设 $y = a(x+1)(x-5)$ ，把 $C(0, -5)$ 代入得 $a = 1$

∴ 此抛物线的函数表达式为 $y = x^2 - 4x - 5$

(2) 设点 E 的坐标为 $(x, x^2 - 4x - 5)$ ，

∵ 点 E 在 Y 轴右侧的抛物线上，∴ $x > 0$ 。

有抛物线的对称性，知点 F 与点 E 关于抛物线的对称轴 $x=2$ 对称，

易得点 F 的坐标为 $(4-x, x^2 - 4x - 5)$ 。

要使矩形 EFGH 能成为正方形，有 $|EH| = |EF|$ ，

$$\text{则 } |x^2 - 4x - 5| = |2x - 4|$$

$$\therefore x^2 - 4x - 5 = 2x - 4 \quad \text{①}$$

$$\text{或 } x^2 - 4x - 5 = -2x + 4 \quad \text{②}$$

由①得， $x^2 - 6x - 1 = 0$ ，解得 $x_1 = 3 + \sqrt{10}$ ， $x_2 = 3 - \sqrt{10}$ （舍去）

由②得， $x^2 - 2x - 9 = 0$ ，解得 $x_3 = 1 + \sqrt{10}$ ， $x_4 = 1 - \sqrt{10}$ （舍去）

当 $x = 3 + \sqrt{10}$ 时， $|EF| = 2(3 + \sqrt{10}) - 4 = 2 + 2\sqrt{10}$

此时正方形 EFGH 的边长为 $2 + 2\sqrt{10}$ 。

当 $x = 1 + \sqrt{10}$ 时， $|EF| = 2(1 + \sqrt{10}) - 4 = 2\sqrt{10} - 2$

此时正方形 EFGH 的边长为 $2\sqrt{10} - 2$ 。

∴ 当矩形 EFGH 为正方形时，该正方形的边长为 $2 + 2\sqrt{10}$ 或 $2\sqrt{10} - 2$ 。

(3) 假设存在点 M，使 $\triangle MBC$ 中 BC 边上的高为 $7\sqrt{2}$ 。

∴ M 点应在与直线 BC 平行，且相距 $7\sqrt{2}$ 的两条平行直线 l_1 和 l_2 上。

由平行线的性质可得： l_1 和 l_2 与 y 轴的交点到直线 BC 的距离也为 $7\sqrt{2}$ 。

如图，设 l_1 与 y 轴交于 P 点，过 P 作 PQ 与直线 BC 垂直，垂足为点 Q，

∵ $|OB| = |OC|$ ，∴ $\angle OBC = \angle OCB = 45^\circ$

在 $\text{Rt}\triangle PQC$ 中, $|PQ| = 7\sqrt{2}$, $\angle PCQ = \angle OCB = 45^\circ$

$\therefore$ 由勾股定理, 得 $|PC| = \sqrt{2}|PQ| = 14$

$\therefore$ 直线 l_1 与 y 轴的交点坐标为 $P(0, 9)$

同理可求得: l_2 与 y 轴交点坐标为 $R(0, -19)$,

易知直线 BC 的函数表达式 $y = x - 5$ 。

$\therefore$ 直线 l_1 和 l_2 的函数表达式分别为 $l_1: y = x + 9$; $l_2: y = x - 19$ 。

根据题意, 列出方程组: ① $\begin{cases} y = x^2 - 4x - 5 \\ y = x + 9 \end{cases}$, ② $\begin{cases} y = x^2 - 4x - 5 \\ y = x - 19 \end{cases}$

由①得, $x^2 - 5x - 14 = 0$, 解得 $\begin{cases} x_1 = 7 \\ y_1 = 16 \end{cases}$; $\begin{cases} x_2 = -2 \\ y_2 = 7 \end{cases}$

由②得, $x^2 - 5x + 14 = 0$

$\therefore \Delta = -31 < 0$ $\therefore$ 此方程无实数根。

$\therefore$ 在抛物线上存在点 M , 使 $\triangle MBC$ 中 BC 边上的高为 $7\sqrt{2}$, 其坐标分别为:

$M_1(7, 16)$ 、 $M_2(-2, 7)$

另解: 易求直线 BC 的表达式为: $y = x - 5$

整理得 $x - y - 5 = 0$

设 $M(a, a^2 - 4a - 5)$

由点到直线的距离得 $d = \frac{|a - (a^2 - 4a - 5) - 5|}{\sqrt{1^2 + 1^2}} = 7\sqrt{2}$

解得 $|-a^2 + 5a| = 14$

$\therefore a^2 - 5a - 14 = 0$ 或 $a^2 - 5a + 14 = 0$ (无实数根)

$\therefore a = -2$ 或 $a = 7$

代入得 $M_1(7, 16)$ 、 $M_2(-2, 7)$ 。

例 13 (2011 年江西省中考第 24 题) 将抛物线 $c_1: y = -\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}$

沿 x 轴翻折, 得到抛物线 c_2 , 如图 1 所示.

(1) 请直接写出抛物线 c_2 的表达式;

(2) 现将抛物线 c_1 向左平移 m 个单位长度, 平移后得到新抛物线的顶点为 M , 与 x 轴的交点从左到右依次为 A 、 B ; 将抛物线 c_2 向右也平移 m 个单位长度, 平移后得到新抛物线的顶点为 N , 与 x 轴的交点从左到右依次是 D 、 E .

①当 B 、 D 是线段 AE 的三等分点时, 求 m 的值;

②在平移过程中, 是否存在以点 A 、 N 、 E 、 M 为顶点的四边形是矩形的情形? 若存在, 请求出此时 m 的值; 若不存在, 请说明理由.

【解答】

$$(1) \quad y = \sqrt{3}x^2 - \sqrt{3}.$$

$$(2) \quad \text{①令 } -\sqrt{3}x^2 + \sqrt{3} = 0, \text{ 得: } x_1 = -1, x_2 = 1,$$

则抛物线 c_1 与 x 轴的两个交点坐标为 $(-1, 0)$, $(1, 0)$.

$$\therefore A(-1-m, 0), B(1-m, 0).$$

$$\text{同理可得: } D(-1+m, 0), E(1+m, 0).$$

当 $AD = \frac{1}{3}AE$ 时, 如图①,

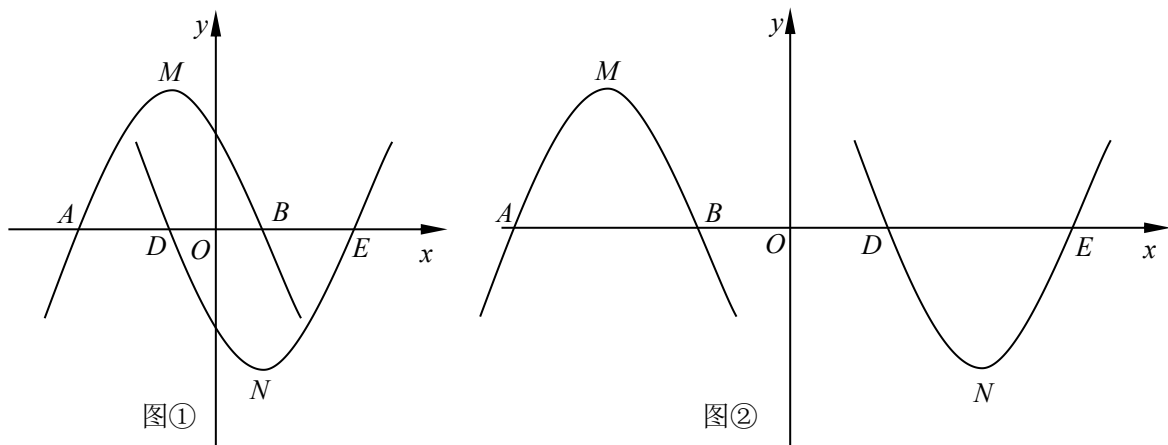
$$(-1+m) - (-1-m) = \frac{1}{3}[(1+m) - (-1-m)],$$

$$\therefore m = \frac{1}{2}.$$

当 $AB = \frac{1}{3}AE$ 时, 如图②, $(1-m) - (-1-m) = \frac{1}{3}[(1+m) - (-1-m)],$

$$\therefore m = 2.$$

$\therefore$ 当 $m = \frac{1}{2}$ 或 2 时, B 、 D 是线段 AE 的三等分点.



②存在.

方法一

理由：连接 AN 、 NE 、 EM 、 MA . 依题意可得： $M(-m, \sqrt{3})$, $N(m, -\sqrt{3})$.

即 M , N 关于原点 O 对称, $\therefore OM = ON$.

$\because A(-1-m, 0)$, $E(1+m, 0)$, $\therefore A$, E 关于原点 O 对称, $\therefore OA = OE$,

$\therefore$ 四边形 $ANEM$ 为平行四边形.

要使平行四边形 $ANEM$ 为矩形, 必需满足 $OM = OA$,

即 $m^2 + (\sqrt{3})^2 = (-1-m)^2$, $\therefore m = 1$.

$\therefore$ 当 $m = 1$ 时, 以点 A , N , E , M 为顶点的四边形是矩形.

方法二

理由：连接 AN 、 NE 、 EM 、 MA . 依题意可得： $M(-m, \sqrt{3})$, $N(m, -\sqrt{3})$.

即 M , N 关于原点 O 对称, $\therefore OM = ON$.

$\because A(-1-m, 0)$, $E(1+m, 0)$, $\therefore A$, E 关于原点 O 对称, $\therefore OA = OE$,

$\therefore$ 四边形 $ANEM$ 为平行四边形. $\because AM^2 = (-m+1+m)^2 + (\sqrt{3})^2 = 4$,

$ME^2 = (1+m+m)^2 + (\sqrt{3})^2 = 4m^2 + 4m + 4$,

$AE^2 = (1+m+1+m)^2 = 4m^2 + 8m + 4$,

若 $AM^2 + ME^2 = AE^2$ ，则 $4 + 4m^2 + 4m + 4 = 4m^2 + 8m + 4$ ， $\therefore m = 1$ 。

此时 $\triangle AME$ 是直角三角形，且 $\angle AME = 90^\circ$ 。

$\therefore$ 当 $m = 1$ 时，以点 A, N, E, M 为顶点的四边形是矩形。

例 14 (2011 年上海市中考第 24 题) 已知平面直角坐标系 xOy (如图 1), 一次函数 $y=\frac{3}{4}x+3$ 的图像与 y 轴交于点 A , 点 M 在正比例函数 $y=\frac{3}{2}x$ 的图像上, 且 $MO=MA$. 二次函数 $y=x^2+bx+c$ 的图像经过点 A 、 M .

(1) 求线段 AM 的长;

(2) 求这个二次函数的解析式;

(3) 如果点 B 在 y 轴上, 且位于点 A 下方, 点 C 在上述函数图像上, 点 D 在一次函数 $y=\frac{3}{4}x+3$ 的图像上, 且四边形 $ABCD$ 是菱形, 求点 C 的坐标.

【解答】

(1) 根据两点之间距离公式, 设 $M(a, \frac{3}{2}a)$, 由 $|MO|=|MA|$, 解得: $a=1$, 则 $M(1, \frac{3}{2})$,

$$\text{即 } AM = \frac{\sqrt{13}}{2}.$$

(2) $\because A(0, 3)$, $\therefore c=3$, 将点 M 代入 $y=x^2+bx+3$, 解得: $b=-\frac{5}{2}$, 即:
 $y=x^2-\frac{5}{2}x+3$.

(3) $C(2, 2)$ (根据以 AC 、 BD 为对角线的菱形)。注意: A 、 B 、 C 、 D 是按顺序的。

[解] 设 $B(0, m)$ ($m < 3$), $C(n, n^2 - \frac{5}{2}n + 3)$, $D(n, \frac{3}{4}n + 3)$,

$$|AB| = 3 - m, \quad |DC| = y_D - y_C = \frac{3}{4}n + 3 - (n^2 - \frac{5}{2}n + 3) = \frac{13}{4}n - n^2,$$

$$|AD| = \sqrt{(n-0)^2 - (\frac{3}{4}n + 3 - 3)^2} = \frac{5}{4}n,$$

$$|AB| = |DC| \Rightarrow 3 - m = \frac{13}{4}n - n^2 \dots \textcircled{1}, \quad |AB| = |AD| \Rightarrow 3 - m = \frac{5}{4}n \dots \textcircled{2}.$$

解 $\textcircled{1}$, $\textcircled{2}$, 得 $n_1=0$ (舍去), 或者 $n_2=2$, 将 $n=2$ 代入 $C(n, n^2 - \frac{5}{2}n + 3)$,

得 $C(2, 2)$ 。

例 15 (2011 年无锡市中考第 27 题) 如图 1, 已知 $O(0, 0)$ 、 $A(4, 0)$ 、 $B(4, 3)$. 动点 P 从 O 点出发, 以每秒 3 个单位的速度, 沿 $\triangle OAB$ 的边 OA 、 AB 、 BO 作匀速运动; 动直线 l 从 AB 位置出发, 以每秒 1 个单位的速度向 x 轴负方向作匀速平移运动. 若它们同时出发, 运动的时间为 t 秒, 当点 P 运动到 O 时, 它们都停止运动.

(1) 当 P 在线段 OA 上运动时, 求直线 l 与以 P 为圆心、1 为半径的圆相交时 t 的取值范围;

(2) 当 P 在线段 AB 上运动时, 设直线 l 分别与 OA 、 OB 交于 C 、 D , 试问: 四边形 $CPBD$ 是否可能是菱形? 若能, 求出此时 t 的值; 若不能, 请说明理由, 并说明如何改变直线 l 的出发时间, 使得四边形 $CPBD$ 会是菱形.

【解答】

(1) 设经过 t 秒, P 点坐标为 $(3t, 0)$, 直线 l 从 AB 位置向 x 轴负方向作匀速平移运动时与 x 轴交点为 $F(4-t, 0)$, 则 $\because$ 圆的半径为 1, $\therefore$ 要直线 l 与圆相交即要 $PF < 1$

$$\therefore \text{当 } F \text{ 在 } P \text{ 左侧, } PF \text{ 的距离为 } 4-t-3t < 1 \Rightarrow t > \frac{3}{4}$$

$$\text{当 } F \text{ 在 } P \text{ 右侧, } PF \text{ 的距离为 } 3t-(4-t) < 1 \Rightarrow t < \frac{5}{4}$$

$\therefore$ 当 P 在线段 OA 上运动时, 直线 l 与以 P 为圆心、1 为半径的圆相交时 t 的取值范围为 $\frac{3}{4} < t < \frac{5}{4}$.

(2) 当 P 在线段 AB 上运动时, 设直线 l 分别与 OA 、 OB 交于 C 、 D , 不可能为菱形. 理由是: 易知 $CA=t$, $PA=3t-4$, $OB=5$ ($\because OA=4, BA=3$)

$\therefore$ 要使 $CPBD$ 为菱形必须其首先应是平行四边形, 已知 $DC \parallel BP$, 从而要 $CP \parallel DB$, $\therefore$ 必须 $\frac{OA}{CA} = \frac{BA}{PA}$

$$\text{即要 } \frac{4}{t} = \frac{3}{3t-4} \Rightarrow 12t-16=3t \Rightarrow t=\frac{16}{9}。 \text{此时 } CA=\frac{16}{9}, PA=\frac{4}{3}, CP=\frac{CA \cdot OB}{OA}=\frac{20}{9},$$

$$BP=3-\left(3 \cdot \frac{16}{9}-4\right)=\frac{5}{3}。 \therefore \text{此时四边形 } CPBD \text{ 邻边 } CP \neq BP$$

从上可知, PB:CB:PC=3:4:5, 故设 PB=3m, CB=4m, PC=5m, 则 AP=3-3m

$$\because AP=CP, \therefore 3m-3=5m \Rightarrow m=\frac{3}{8} \quad \text{由 } 3m=3t-4 \Rightarrow 3 \cdot \frac{3}{8}=3t-4 \Rightarrow t=\frac{41}{8}$$

$$\text{令 } 4m=t+k \Rightarrow 4 \cdot \frac{3}{8}=\frac{41}{24}+k \Rightarrow k=-\frac{5}{24}$$

即将直线 l 的出发时间推迟 $\frac{5}{24}$ 秒, 四边形 CPBD 会是菱形。

例 16 (2012 年福州市中考第 21 题) 如图 1, 在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中, $\angle C=90^\circ$, $AC=6$, $BC=8$, 动点 P 从点 A 开始沿边 AC 向点 C 以每秒 1 个单位长度的速度运动, 动点 Q 从点 C 开始沿边 CB 向点 B 以每秒 2 个单位长度的速度运动, 过点 P 作 $PD\parallel BC$, 交 AB 于点 D , 连接 PQ . 点 P 、 Q 分别从点 A 、 C 同时出发, 当其中一点到达端点时, 另一点也随之停止运动, 设运动时间为 t 秒 ($t\geq 0$).

(1) 直接用含 t 的代数式分别表示: $QB=\underline{\hspace{2cm}}$, $PD=\underline{\hspace{2cm}}$;

(2) 是否存在 t 的值, 使四边形 $PDBQ$ 为菱形? 若存在, 求出 t 的值; 若不存在, 说明理由. 并探究如何改变点 Q 的速度 (匀速运动), 使四边形 $PDBQ$ 在某一时刻为菱形, 求点 Q 的速度;

(3) 如图 2, 在整个运动过程中, 求出线段 PQ 中点 M 所经过的路径长.

【解答】

① $QB=8-2t$; $PD=\frac{4t}{3}$ (易证 $\triangle APD\sim\triangle ACB$, 列比例式求解.)

② 不存在, 理由如下: 当 $PD=QB$ 时, 四边形 $PDBQ$ 为平行四边形, 即 $\frac{4t}{3}=8-2t$, 得 $t=\frac{12}{5}$; 而又有 $BD=PD$, 即 $10-\frac{5t}{3}=\frac{4t}{3}$; $t=\frac{10}{3}$, 此两 t 值不等, 则表明不存在此点。

设: 点 Q 的速度为 v 。

当其为菱形时, 既要满足 $BQ=PD$; 此时 t 值为 $\frac{10}{3}$ 。

还应满足 $PD=BD$, 即 $8-\frac{10}{3}v=\frac{4}{3}\times\frac{10}{3}$; $v=\frac{16}{15}$;

③ 方法一:

建立平面直角坐标系, 依题意可知 $0\leq t\leq 4$;

PQ 的中点始端为 M_1 ; 终端为 M_3 ; 点 M_1 的坐标为 $(3,0)$; 点 M_3 的坐标为 $(1,4)$; 则直线 M_1M_3 的解析式为 $y=-2x+6$,

点 Q 的坐标为 $(0, 2t)$; 点 P 的坐标为 $(6-t,0)$;

点 M_2 的坐标为 $(\frac{6-t}{2}, t)$; 将其代入直线 M_1M_3 的解析式为 $y = -2x + 6$ 中, 符合函数解析式, 即为点 M_2 在直线 M_1M_3 上。

$EM_1 = CM_1 - CE = 3 - 1 = 2$; $M_3E = 4$; 由勾股定理可得 M_1M_3 的值 $= \sqrt{4 + 16} = 2\sqrt{5}$

线段 PQ 中点 M 所经过的路径长为 $2\sqrt{5}$ 。

例 17 (2012 年烟台市中考第 26 题) 如图 1, 在平面直角坐标系中, 已知矩形 ABCD 的三个顶点 B (1, 0), C (3, 0), D (3, 4). 以 A 为顶点的抛物线 $y=ax^2+bx+c$ 过点 C. 动点 P 从点 A 出发, 沿线段 AB 向点 B 运动. 同时动点 Q 从点 C 出发, 沿线段 CD 向点 D 运动. 点 P, Q 的运动速度均为每秒 1 个单位. 运动时间为 t 秒. 过点 P 作 $PE \perp AB$ 交 AC 于点 E.

- (1) 直接写出点 A 的坐标, 并求出抛物线的解析式;
- (2) 过点 E 作 $EF \perp AD$ 于 F, 交抛物线于点 G, 当 t 为何值时, $\triangle ACG$ 的面积最大? 最大值为多少?
- (3) 在动点 P, Q 运动的过程中, 当 t 为何值时, 在矩形 ABCD 内 (包括边界) 存在点 H, 使以 C、Q、E、H 为顶点的四边形为菱形? 请直接写出 t 的值.

【解答】

(1) A (1, 4)。

由题意, 设抛物线解析式为 $y=a(x-1)^2+4$

$\because$ 抛物线过点 C (3, 0), $\therefore 0=a(3-1)^2+4$, 解得, $a=-1$ 。

$\therefore$ 抛物线的解析式为 $y=-(x-1)^2+4$, 即 $y=-x^2+2x+3$ 。

(2) 设直线 AC 的解析式为 $y=kx+b$

$\because$ A (1,4), C (3,0),

$$\therefore \begin{cases} 4=k+b \\ 0=3k+b \end{cases}, \text{解得} \begin{cases} k=-2 \\ b=6 \end{cases}。$$

$\therefore$ 直线 AC 的解析式为 $y=-2x+6$.

$\because$ 点 P (1, 4-t),

$\therefore$ 将 $y=4-t$ 代入 $y=-2x+6$ 中, 解得点 E 的横坐标为 $x=1+\frac{t}{2}$ 。

$\therefore$ 点 G 的横坐标为 $1+\frac{t}{2}$, 代入抛物线的解析式中, 可求点 G 的纵坐标为 $4-\frac{t^2}{4}$ 。

$$\therefore GE = \left(4 - \frac{t^2}{4}\right) - (4 - t) = 4 - \frac{t^2}{4}。$$

又点 A 到 GE 的距离为 $\frac{t}{2}$ ， C 到 GE 的距离为 $2 - \frac{t}{2}$ ，

$$\therefore S_{\triangle ACG} = S_{\triangle AEG} + S_{\triangle CEG} = \frac{1}{2} \cdot EG \cdot \frac{t}{2} + \frac{1}{2} \cdot EG \left(2 - \frac{t}{2}\right) = EG = t - \frac{t^2}{4} = -\frac{1}{4}(t - 2)^2 + 1。$$

$\therefore$ 当 $t=2$ 时， $S_{\triangle ACG}$ 的最大值为 1。

$$(3) \quad t = \frac{20}{13} \text{ 或 } t = 20 - 8\sqrt{5}。$$

例 18 (2013 年温州市中考第 24 题) 如图 1, 在平面直角坐标系中, 直线 AB 与 x 轴、y 轴分别交于点 A (6, 0) 、B (0, 8), 点 C 的坐标为 (0, m), 过点 C 作 $CE \perp AB$ 于点 E, 点 D 为 x 轴上一动点, 连结 CD、DE, 以 CD、DE 为边作平行四边形 CDEF.

- (1) 当 $0 < m < 8$ 时, 求 CE 的长 (用含 m 的代数式表示);
- (2) 当 $m=3$ 时, 是否存在点 D, 使平行四边形 CDEF 的顶点 F 恰巧落在 y 轴上? 若存在, 求出点 D 的坐标; 若不存在, 请说明理由;
- (3) 点 D 在整个运动过程中, 若存在唯一的位置, 使得平行四边形 CDEF 为矩形, 请求出所有满足条件的 m 的值.

【解答】

(1) 如图 1, $\because A(6, 0), B(0, 8),$

$$\therefore OA=6, OB=8. \therefore AB=10.$$

$$\because \angle CEB = \angle AOB = 90^\circ,$$

$$\text{又} \because \angle OBA = \angle EBC,$$

$$\therefore \triangle BCE \sim \triangle BAO.$$

$$\therefore \frac{CE}{OA} = \frac{BC}{AB} \text{ 即 } \frac{CE}{6} = \frac{8-m}{10},$$

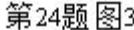
$$\therefore CE = \frac{24}{5} - \frac{3}{5}m.$$

(2) $\because m=3,$

$$\therefore BC=8-m=5, CE = \frac{24}{5} - \frac{3}{5}m = 3,$$

$$\therefore BE=4, \therefore AE=AB-BE=6.$$

$\because$ 点 F 落在 y 轴上 (如图 2),


$$\therefore \triangle EDA \sim \triangle BOA.$$

$$\therefore OD = \frac{12}{5}.$$

(3) 取 CE 的中点 P , 过点 P 作 $PG \perp y$ 轴于点 G ,

(I) 当 $m > 0$ 时.

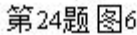
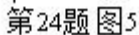
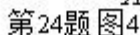
易证 $\angle GCP = \angle BAO$,

$$\therefore CG = CP \cos \angle GCP = \frac{3}{5} \left(\frac{12}{5} - \frac{3}{10}m \right) = \frac{36}{25} - \frac{9}{50}m$$

由题意, 得 $OG=CP$,

(ii) 当 $m \geq 8$ 时, $OG > CP$, 显然不存在满足条件的 m 的值.

(II) 当 $m=0$ 时, 即点 C 与原点 O 重合 (如图 4), 满足题意.



综上所述, m 的值为 $\frac{6}{7}$ 或 0 或 $-\frac{9}{2}$ 或 $-\frac{96}{13}$.

例 19 (2014 年陕西省中考第 24 题) 如图 1, 已知抛物线 $C: y = -x^2 + bx + c$ 经过 $A(-3, 0)$ 和 $B(0, 3)$ 两点. 将这条抛物线的顶点记为 M , 它的对称轴与 x 轴的交点记为 N .

(1) 求抛物线 C 的表达式;

(2) 求点 M 的坐标;

(3) 将抛物线 C 平移到抛物线 C' , 抛物线 C' 的顶点记为 M' , 它的对称轴与 x 轴的交点记为 N' . 如果以点 M 、 N 、 M' 、 N' 为顶点的四边形是面积为 16 的平行四边形, 那么应该将抛物线 C 怎么平移? 为什么?

【解答】

(1) $\because$ 抛物线 $y = -x^2 + bx + c$ 经过 $A(-3, 0)$ 和 $B(0, 3)$ 两点,

$$\therefore \begin{cases} -9 - 3b + c = 0 \\ c = 3 \end{cases}, \text{ 解得 } \begin{cases} b = -2 \\ c = 3 \end{cases},$$

故此抛物线的解析式为: $y = -x^2 - 2x + 3$;

(2) $\because$ 由 (1) 知抛物线的解析式为: $y = -x^2 - 2x + 3$,

$$\therefore \text{当 } x = -\frac{b}{2a} = -\frac{-2}{2 \times (-1)} = -1 \text{ 时, } y = 4,$$

$$\therefore M(-1, 4).$$

(3) 由题意, 以点 M 、 N 、 M' 、 N' 为顶点的平行四边形的边 MN 的对边只能是 $M'N'$,

$$\therefore MN \parallel M'N' \text{ 且 } MN = M'N'.$$

$$\therefore MN \cdot NN' = 16,$$

$$\therefore NN' = 4.$$

i) 当 M 、 N 、 M' 、 N' 为顶点的平行四边形是 $\square MNN'M'$ 时, 将抛物线 C 向左或向

右平移 4 个单位可得符合条件的抛物线 C' ;

ii) 当 M 、 N 、 M' 、 N' 为顶点的平行四边形是 $\square MNM'N'$ 时, 将抛物线 C 先向左或向右平移 4 个单位, 再向下平移 8 个单位, 可得符合条件的抛物线 C' .

$\therefore$ 上述的四种平移, 均可得到符合条件的抛物线 C' .

例 20 (2014 年山西省中考第 24 题) 如图 1, 在平面直角坐标系中, 四边形 OABC 是平行四边形, A、C 两点的坐标分别是 (4, 0)、(-2, 3), 抛物线 W 经过 O、A、C 三点, D 是顶点.

(1) 求抛物线 W 的解析式及顶点 D 的坐标;

(2) 将抛物线 W 和平行四边形 OABC 一起向右平移 4 个单位后, 再向下平移 m 个单位, 得到抛物线 W' 和平行四边形 O'A'B'C'. 再向下平移的过程中, 设平行四边形 OABC 和平行四边形 O'A'B'C' 重叠部分的面积为 S, 试探究: 当 m 为何值时 S 有最大值, 并求出 S 的最大值.

(3) 在 (2) 的条件下, 当 S 取得最大值时, 设此时抛物线 W' 的顶点为 F, 若点 M 是 x 轴上的动点, 点 N 是抛物线 W' 上的动点, 试判断是否存在这样的点 M 和点 N, 使得以 D、F、M、N 为顶点的四边形是平行四边形, 若存在, 请直接写出点 M 的坐标; 若不存在, 请说明理由.

【解答】

(1) 设抛物线 W 的解析式为 $w = ax^2 + bx + c$,

$\because$ 抛物线 W 经过 O (0, 0)、A (4, 0)、C (-2, 3) 三点,

$$\therefore \begin{cases} c = 0 \\ 16a + 4b + c = 0 \\ 4a - 2b + c = 3 \end{cases}, \text{解得} \begin{cases} a = \frac{1}{4} \\ b = -1 \\ c = 0 \end{cases},$$

$\therefore$ 抛物线 W 的解析式为 $w = \frac{1}{4}x^2 - x$.

$$\therefore w = \frac{1}{4}x^2 - x = \frac{1}{4}(x-2)^2 - 1,$$

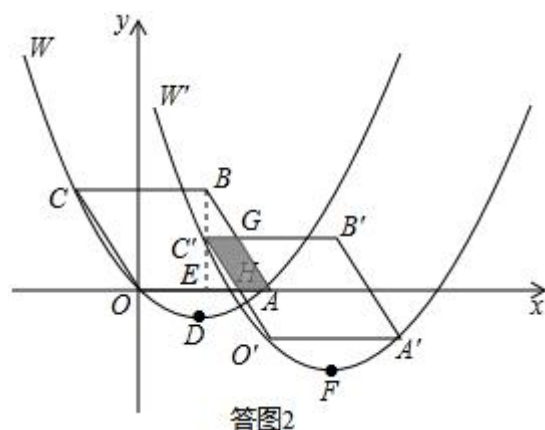
∴ 顶点 D 的坐标为 (2, -1).

(2) 由 $\square OABC$ 得, $CB \parallel OA$, $CB=OA=4$.

又 $\because C$ 点坐标为 (-2, 3),

∴ B 点的坐标为 (2, 3).

如答图 2, 过点 B 作 $BE \perp x$ 轴于点 E, 由平移可知, 点 C' 在 BE 上, 且 $BC'=m$.



∴ $BE=3$, $OE=2$, $\therefore EA=OA-OE=2$.

$\because C'B' \parallel x$ 轴,

∴ $\triangle BC'G \sim \triangle BEA$,

$$\therefore \frac{BC'}{BE} = \frac{C'G}{EA}, \text{ 即 } \frac{m}{3} = \frac{C'G}{2},$$

∴ $C'G=m$.

由平移知, $\square O'A'B'C'$ 与 $\square OABC$ 的重叠部分四边形 $C'HAG$ 是平行四边形.

$$\therefore S = C'G \cdot C'E = \frac{2}{3}m(3-m) = -\frac{2}{3}(m-\frac{3}{2})^2 + \frac{3}{2},$$

∴ 当 $m=\frac{3}{2}$ 时, S 有最大值为 $\frac{3}{2}$.

(3) 答: 存在.

在 (2) 的条件下, 抛物线 W 向右平移 4 个单位, 再向下平移 $\frac{3}{2}$ 个单位, 得到抛

物线 W' ,

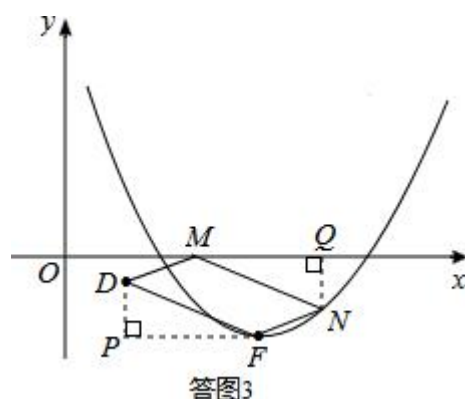
$$\because D(2, -1), \therefore F(6, -\frac{5}{2});$$

$$\therefore \text{抛物线 } W' \text{ 的解析式为: } y = \frac{1}{4}(x-6)^2 - \frac{5}{2}.$$

设 $M(t, 0)$,

以 D 、 F 、 M 、 N 为顶点的四边形是平行四边形,

①若点 N 在 x 轴下方, 如答题 3 所示:



过点 D 作 $DP \parallel y$ 轴, 过点 F 作 $FP \perp DP$ 于点 P ,

$$\because D(2, -1), F(6, -\frac{5}{2}), \therefore DP = \frac{3}{2}, FP = 4;$$

过点 N 作 $NQ \perp x$ 轴于点 Q ,

由四边形 $FDMN$ 为平行四边形, 易证 $\triangle DFP \cong \triangle NMQ$,

$$\therefore MQ = FP = 4, NQ = DP = \frac{3}{2},$$

$$\therefore N(4+t, -\frac{3}{2}),$$

将点 N 坐标代入抛物线 W' 的解析式 $y = \frac{1}{4}(x-6)^2 - \frac{5}{2}$,

$$\text{得: } \frac{1}{4}(t-2)^2 - \frac{5}{2} = -\frac{3}{2},$$

解得: $t=0$ 或 $t=4$,

$\therefore$ 点 M 的坐标为 $(0, 0)$ 或 $(4, 0)$;

②若点 N 在 x 轴上方, (请自行作图)

与①同理，得 $N(t-4, \frac{3}{2})$

将点 N 坐标代入抛物线 W' 的解析式 $y = \frac{1}{4}(x-6)^2 - \frac{5}{2}$,

得: $\frac{1}{4}(t-10)^2 - \frac{5}{2} = \frac{3}{2}$, 解得: $t=6$ 或 $t=14$,

$\therefore$ 点 M 的坐标为 $(6, 0)$ 或 $(14, 0)$.

综上所述，存在这样的点 M 和点 N ，点 M 的坐标分别为 $(0, 0)$, $(4, 0)$, $(6, 0)$, $(14, 0)$.

例 21 (2014 年河南省中考第 23 题) 如图 1, 抛物线 $y = -x^2 + bx + c$ 与 x 轴交于 $A(-1, 0)$ 、 $B(5, 0)$ 两点, 直线 $y = -\frac{3}{4}x + 3$ 与 y 轴交于点 C , 与 x 轴交于点 D , 点 P 是 x 轴上方的抛物线上的一个动点, 过点 P 作 $PF \perp x$ 轴于点 F , 交直线 CD 于点 E . 设点 P 的横坐标为 m .

(1) 求该抛物线的解析式;

(2) 若 $PE = 5EF$, 求 m 的值;

(3) 若点 E' 是点 E 关于直线 PC 的对称点, 是否存在点 P , 使得 E' 落在 y 轴上? 若存在, 请直接写出相应的点 P 的坐标; 若不存在, 请说明理由.

【解答】

(1) 将 A 、 B 两点坐标代入抛物线 $y = -x^2 + bx + c$,

解关于 b 、 c 的二元一次方程组, 解得 $b = 4$, $c = 5$, 并代回解析式求得抛物线的解析式为: $y = -x^2 + 4x + 5$.

(2) 因为抛物线与 y 轴交于 $(0, 5)$ 一次函数与 y 轴交于 $(0, 3)$,

若满足 $PE = 5EF$, 则动点 P 必在 y 轴右侧, 且在 x 轴上方,

所以 P 点横坐标 m 的范围是 $0 < m < 5$, 用 m 表示出点 P , E , F 的坐标,

$P(m, -m^2 + 4m + 5)$, $E(m, -\frac{3}{4}m + 3)$, $F(m, 0)$,

则线段 $PE = |y_P - y_E| = |(-m^2 + 4m + 5) - (-\frac{3}{4}m + 3)| = |-m^2 + \frac{19}{4}m + 2|$,

线段 $EF = |y_E - y_F| = |(-\frac{3}{4}m + 3) - 0| = |-\frac{3}{4}m + 3|$.

由题意, $PE = 5EF$, 即: $|-m^2 + \frac{19}{4}m + 2| = 5|-\frac{3}{4}m + 3| = |-\frac{15}{4}m + 15|$,

分两种情况讨论:

①当点 E 在点 F 上方时, 则 $-m^2 + \frac{19}{4}m + 2 = -\frac{15}{4}m + 15$,

整理得： $2m^2 - 17m + 26 = 0$ ，解得： $m_1 = 2$ 或 $m_2 = \frac{13}{2}$ （舍去）；

②当点 E 在点 F 下方时，E 点的纵坐标是负的，开出相反数，

所以 $-m^2 + \frac{19}{4}m + 2 = -(-\frac{15}{4}m + 15)$ ，

整理得： $m^2 - m - 17 = 0$ ，解得： $m_1 = \frac{1 + \sqrt{69}}{2}$ 或 $m_2 = \frac{1 - \sqrt{69}}{2}$ （舍去）

所以结论是 $m = 2$ 或 $m = \frac{1 + \sqrt{69}}{2}$ 。

(3) 若点 E 和 E' 关于直线 PC 对称，则 $\angle E'CP = \angle ECP$ ，

因为 PE 平行 y 轴所以 $\angle EPC = \angle PCE = \angle E'CP$ ，

所以 $PE = EC$ ， $CE = CE'$ ， $PE = CE'$ ，PE 平行 CE' ，

所以四边形 PECE' 是菱形，过 E 做 EH 垂直 y 轴于 H，

可证三角形 CHE 相似三角形 COD，

因为 $EH = m$ ，所以 $CE : m = CD : OD = 5 : 4$ ，所以 $CE = \left| \frac{5}{4}m \right|$ ，

因为 $PE = -m^2 + \frac{19}{4}m + 2$ ，列式 $PE = CE$ ，

当 $-1 < m < 0$ 时， $-m^2 + \frac{19}{4}m + 2 = -\frac{5}{4}m$ ；

$0 < m < 5$ 时， $-m^2 + \frac{19}{4}m + 2 = \frac{5}{4}m$ ，

解得： $m_1 = -\frac{1}{2}$ ， $m_2 = 4$ ， $m_3 = 3 - \sqrt{11}$ ， $m_4 = 3 + \sqrt{11}$ （舍去）

代入抛物线解析式求出纵坐标，所以存在满足条件的点 P，

可求得点 P 坐标为 $(-\frac{1}{2}, \frac{11}{4})$ ， $(4, 5)$ ， $(3 - \sqrt{11}, 2\sqrt{11} - 3)$ 。

例 22 (2014 年衡阳市中考第 27 题) 如图 1, 已知直线 AB 分别交 x 轴、y 轴于点 A (-4, 0)、B (0, 3) 两点, 点 P 从点 A 出发, 以每秒 1 个单位的速度沿直线 AB 向点 B 移动. 同时, 将直线 $y=\frac{3}{4}x$ 以每秒 0.6 个单位的速度向上移动, 分别交 AO、BO 于点 C、D, 设运动时间为 t 秒 ($0 < t < 5$) .

(1) 证明: 在运动过程中, 四边形 ACDP 总是平行四边形;

(2) 当 t 取何值时, 四边形 ACDP 为菱形? 且指出此时以点 D 为圆心、以 DO 为半径的圆与直线 AB 的位置关系, 并说明理由.

【解答】

(1) 设直线 AB 的解析式为 $y=kx+b$, 由题意, 得

$$\begin{cases} 0 = -4k + b \\ 3 = b \end{cases},$$

$$\text{解得: } \begin{cases} k = -\frac{3}{4} \\ b = 3 \end{cases},$$

$$\therefore y = -\frac{3}{4}x + 3.$$

$$\therefore \text{直线 AB} \parallel \text{直线 } y = \frac{3}{4}x.$$

$$\because A(-4, 0), B(0, 3),$$

$$\therefore OA=4, OB=3,$$

在 $\text{Rt}\triangle AOB$ 中, 由勾股定理, 得

$$AB=5.$$

$$\therefore \sin \angle BAO = \frac{3}{5}, \tan \angle DCO = \frac{3}{4}.$$

作 $PE \perp AO$,

$$\therefore \angle PEA = \angle PEO = 90^\circ$$

$$\because AP=t,$$

$$\therefore PE = 0.6t.$$

$$\because OD = 0.6t,$$

$$\therefore PE = OD.$$

$$\because \angle BOC = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle PEA = \angle BOC,$$

$$\therefore PE \parallel DO.$$

$\therefore$ 四边形 PEOD 是平行四边形,

$$\therefore PD \parallel AO.$$

$$\because AB \parallel CD,$$

$\therefore$ 四边形 ACDP 总是平行四边形;

$$(2) \because AB \parallel CD,$$

$$\therefore \angle BAO = \angle DCO,$$

$$\therefore \tan \angle DCO = \tan \angle BAO = \frac{3}{4}.$$

$$\because DO = 0.6t,$$

$$\therefore CO = 0.8t,$$

$$\therefore AC = 4 - 0.8t.$$

$\because$ 四边形 ACDP 为菱形,

$$\therefore AP = AC,$$

$$\therefore t = 4 - 0.8t,$$

$$\therefore t = \frac{20}{9}.$$

$$\therefore DO = \frac{4}{3}, AC = \frac{20}{9}.$$

$$\because PD \parallel AC,$$

$$\therefore \angle BPD = \angle BAO,$$

$$\therefore \sin \angle BPD = \sin \angle BAO = \frac{3}{5}.$$

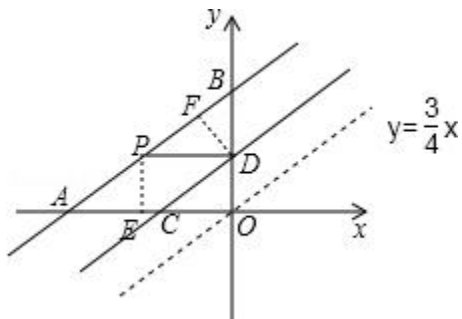
作 $DF \perp AB$ 于 F .

$$\therefore \angle DFP = 90^\circ,$$

$$\therefore DF = \frac{4}{3}.$$

$$\therefore DF = DO.$$

$\therefore$ 以点 D 为圆心, 以 DO 长为半径的圆与直线 AB 相切.



例 23 (2014 年连云港市中考第 26 题) 已知二次函数 $y=x^2+bx+c$, 其图像抛物线交 x 轴于 $A(1,0)$ 、 $B(3,0)$ 两点, 交 y 轴于点 C . 直线 l 过点 C , 且交抛物线于另一点 E (点 E 不与 A 、 B 重合) .

(1) 求此二次函数关系式;

(2) 若直线 l_1 经过抛物线的顶点 D , 交 x 轴于点 F , 且 $l_1 \perp l_2$, 则以 C 、 D 、 E 、 F 为顶点的四边形能否为平行四边形? 若能, 求出点 E 的坐标; 若不能, 请说明理由;

(3) 若过点 A 作 $AG \perp x$ 轴, 交直线 l 于点 G , 连结 OG 、 BE , 试证明 $OG \parallel BE$.

【解答】

(1) 二次函数 $y=x^2+bx+c$, 其图像抛物线交 x 轴于点 $A(1,0)$, $B(3,0)$,

$$\therefore \begin{cases} 1+b+c=0 \\ 9+3b+c=0 \end{cases},$$

$$\text{解得: } \begin{cases} b=-4 \\ c=3 \end{cases},$$

$\therefore$ 此二次函数关系式为: $y=x^2-4x+3$;

(2) 假设以点 C 、 D 、 E 、 F 为顶点的四边形能成为平行四边形.

①若 CD 为平行四边形的对角线, 如答图 2-1.

过点 D 作 $DM \perp AB$ 于点 M , 过点 E 作 $EN \perp OC$ 于点 N ,

$$\because y=x^2-4x+3=(x-2)^2-1,$$

$$\therefore \text{点 } D(2, -1), \text{ 点 } C(0, 3),$$

$$\therefore DM=1,$$

$$\because l_1 \perp l_2,$$

$\therefore$ 当 $CE=DF$ 时, 四边形 $CEDF$ 是平行四边形,

$$\therefore \angle ECF + \angle CFD = 180^\circ,$$

$$\because \angle OCF + \angle OFC = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle ECN + \angle DFM = 90^\circ,$$

$$\because \angle DFM + \angle FDM = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle ECN = \angle FDM,$$

在 $\triangle ECN$ 和 $\triangle FDM$ 中,

$$\begin{cases} \angle CNE = \angle DMF = 90^\circ \\ \angle ECN = \angle FDM \\ CE = DF \end{cases},$$

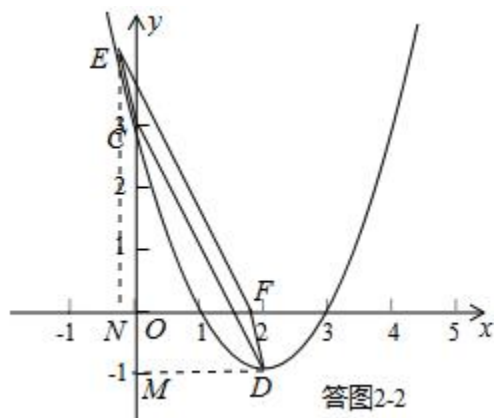
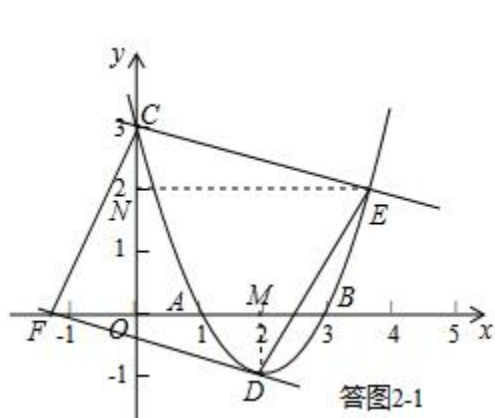
$$\therefore \triangle ECN \cong \triangle FDM \text{ (AAS)},$$

$$\therefore CN = DM = 1,$$

$$\therefore ON = OC - CN = 3 - 1 = 2,$$

$$\text{当 } y=2 \text{ 时, } x^2 - 4x + 3 = 2,$$

$$\text{解得: } x = 2 \pm \sqrt{3};$$



②若 CD 为平行四边形的边,如答图2-2,则 $EF \parallel CD$,且 $EF = CD$.

过点 D 作 $DM \perp y$ 轴于点 M ,则 $DM = 2$, $OM = 1$, $CM = OM + OC = 4$;

过点 E 作 $EN \perp x$ 轴于点 N .

易证 $\triangle CDM \cong \triangle EFN$, $\therefore EN = CM = 4$.

$$\therefore x^2 - 4x + 3 = 4,$$

解得： $x=2\pm\sqrt{5}$.

综上所述，以点 C、D、E、F 为顶点的四边形能成为平行四边形；点 E 的坐标为 $(2+\sqrt{3}, 2)$ 、 $(2-\sqrt{3}, 2)$ 、 $(2+\sqrt{5}, 4)$ 、 $(2-\sqrt{5}, 4)$.

(3) 如图②，过点 E 作 $EH\perp x$ 轴于点 H，

设直线 CE 的解析式为： $y=kx+3$ ，

$\because A(1, 0)$ ， $AG\perp x$ 轴，

$\therefore$ 点 G $(1, k+3)$ ，

即 $OA=1$ ， $AG=k+3$ ，

$\because E$ 是直线与抛物线的交点，

$$\therefore \begin{cases} y=kx+3 \\ y=x^2-4x+3 \end{cases},$$

$$\text{解得：} \begin{cases} x=k+4 \\ y=(k+1)(k+3) \end{cases},$$

$\therefore$ 点 E $(k+4, (k+1)(k+3))$ ，

$\therefore BH=OH-OB=k+3$ ， $EH=(k+1)(k+3)$ ，

$$\therefore \frac{OA}{BH} = \frac{AG}{EH} = \frac{1}{k+1},$$

$\because \angle OAG = \angle BHE = 90^\circ$ ，

$\therefore \triangle OAG \sim \triangle BHE$ ，

$\therefore \angle AOG = \angle HBE$ ，

$\therefore OG \parallel BE$.

例 24 (2014 年日照市中考第 24 题) 已知抛物线

$y = \frac{\sqrt{3}}{2}x^2 + bx + 6\sqrt{3}$ 经过 $A(2, 0)$ ，顶点为点 P ，与 x 轴的另一交点为点 B 。

(1) 求 b 的值，求出点 P 、 B 的坐标。

(2) 如图 1，在直线 $y = \frac{\sqrt{3}}{2}x$ 上是否存在点 D ，使四边形 $OPBD$ 为平行四边形？若存在，求出点 D 的坐标；若不存在，请说明理由。

(3) 在 x 轴下方的抛物线上是否存在点 M ，使 $\triangle AMP \cong \triangle AMB$ ？如果存在，试举例验证你的猜想；如果不存在，试说明理由。

【解答】

(1) 由于抛物线 $y = \frac{\sqrt{3}}{2}x^2 + bx + 6\sqrt{3}$ 经过 $A(2, 0)$ ，

$$\text{所以 } 0 = \frac{\sqrt{3}}{2} \times 4 + 2b + 6\sqrt{3},$$

$$\text{解得 } b = -4\sqrt{3}.$$

$$\text{所以抛物线的解析式为 } y = \frac{\sqrt{3}}{2}x^2 - 4\sqrt{3}x + 6\sqrt{3}.$$

$$\text{将 (*) 配方, 得 } y = \frac{\sqrt{3}}{2}(x-4)^2 - 2\sqrt{3},$$

$$\text{所以顶点 } P \text{ 的坐标为 } (4, -2\sqrt{3})$$

$$\text{令 } y=0, \text{ 得 } \frac{\sqrt{3}}{2}(x-4)^2 - 2\sqrt{3} = 0,$$

$$\text{解得 } x_1 = 2, x_2 = 6. \text{ 所以点 } B \text{ 的坐标是 } (6, 0).$$

(2) 在直线 $y = \frac{\sqrt{3}}{2}x$ 上存在点 D ，使四边形 $OPBD$ 为平行四边形。

理由如下：

设直线 PB 的解析式为 $y = kx + b$ ，把 $B(6, 0)$ 、 $P(4, -2\sqrt{3})$ 分别代入，

例 25 (2015 年成都市中考第 28 题) 如图 1，在平面直角坐标系中，抛物线 $y=ax^2-2ax-3a$ ($a<0$) 与 x 轴交于 A、B 两点 (点 A 在点 B 的左侧)，经过点 A 的直线 $l: y=kx+b$ 与 y 轴负半轴交于点 C，与抛物线的另一交点为 D，且 $CD=4AC$ 。

(1) 直接写出点 A 的坐标，并求直线 l 的函数表达式 (其中 k 、 b 用含有 a 的式子表示)；

(2) 点 E 是直线 l 上方的抛物线上的动点，若 $\triangle ACE$ 的面积的最大值为 $\frac{5}{4}$ ，求 a 的值；

(3) 设 P 是抛物线的对称轴上的一点，点 Q 在抛物线上，以点 A、D、P、Q 为顶点的四边形能否成为矩形？若能，求出点 P 的坐标；若不能，请说明理由。

【分析】

(1) 由抛物线 $y=ax^2-2ax-3a$ ($a<0$) 与 x 轴交于两点 A、B，求得 A 点的坐标，作 $DF \perp x$ 轴于 F，根据平行线分线段成比例定理求得 D 的坐标，然后利用待定系数法即可求得直线 l 的函数表达式。

(2) 设点 E ($m, a(m+1)(m-3)$)， $y_{AE}=k_1x+b_1$ ，利用待定系数法确定 $y_{AE}=a(m-3)x+a(m-3)$ ，从而确定 $S_{\triangle ACE}=\frac{1}{2}(m+1)[a(m-3)-a]=\frac{a}{2}(m-\frac{3}{2})^2-\frac{25}{8}a$ ，根据最值确定 a 的值即可；

(3) 分以 AD 为对角线、以 AC 为边，AP 为对角线、以 AC 为边，AQ 为对角线三种情况利用矩形的性质确定点 P 的坐标即可。

【解答】

(1) 令 $y=0$ ，则 $ax^2-2ax-3a=0$ ，解得 $x_1=-1$ ， $x_2=3$

∵点 A 在点 B 的左侧, ∴A (-1, 0),

如图 1, 作 $DF \perp x$ 轴于 F,

$$\therefore DF \parallel OC, \therefore \frac{OF}{OA} = \frac{CD}{AC},$$

$$\because CD=4AC, \therefore \frac{OF}{OA} = \frac{CD}{AC} = 4,$$

∵OA=1, ∴OF=4, ∴D 点的横坐标为 4,

代入 $y=ax^2-2ax-3a$ 得, $y=5a$,

∴D (4, 5a),

把 A、D 坐标代入 $y=kx+b$ 得 $\begin{cases} -k+b=0 \\ 4k+b=5a \end{cases}$, 解得 $\begin{cases} k=a \\ b=a \end{cases}$,

∴直线 l 的函数表达式为 $y=ax+a$.

(2) 设点 E (m, a (m+1) (m-3)), $y_{AE}=k_1x+b_1$,

$$\text{则} \begin{cases} a(m+1)(m-3) = mk_1 + b_1 \\ 0 = -k_1 + b_1 \end{cases}, \text{解得: } \begin{cases} k_1 = a(m-3) \\ b_1 = a(m-3) \end{cases},$$

$$\therefore y_{AE} = a(m-3)x + a(m-3),$$

$$\therefore S_{\triangle ACE} = \frac{1}{2} (m+1) [a(m-3) - a] = \frac{a}{2} (m - \frac{3}{2})^2 - \frac{25}{8}a,$$

$$\therefore \text{有最大值} -\frac{25}{8}a = \frac{5}{4}, \therefore a = -\frac{2}{5};$$

(3) 设 P (1, p), Q (q, a (q+1) (q-3)), A (-1, 0), D (4, 5a),

①以 AD 为对角线, APDQ 为矩形, 坐标满足.

$$x_P + x_Q = x_A + x_D, \quad y_P + y_Q = y_A + y_D,$$

$$1+q = -a+4, \quad p+a(q+1)(q-3) = 5a,$$

$$\therefore q=2, \quad a(q+1)(q-3) = 5a-p \therefore Q(2, 5a-p),$$

$$\because 5a-p = a(2+1)(2-3), \therefore 5a-p = -3a, \quad p=8a,$$

如图 2, 过 P 作 $PG \parallel x$ 轴, 过 A 作 $AF \perp PG$, $DG \perp PG$,

则 $\triangle APF \sim \triangle PDG$, $\therefore a = -\frac{1}{2}$, $\therefore P(1, -4)$;

②以 AC 为边, AP 为对角线,

$$x_P + x_A = x_Q + x_D, \quad y_P + y_A = y_Q + y_D,$$

$$1 + (-1) = q + 4, \quad p + 0 = a(q+1)(q-3) + 5a,$$

$$\therefore q = -4, \quad a(q+1)(q-3) = p - 5a$$

$$\therefore Q(-4, 21a),$$

$$\because 21a = p - 5a, \therefore p = 26a, \therefore P(1, 26a),$$

$$\because AD \perp AQ, \therefore k_{AD} \cdot k_{AQ} = -1,$$

$$\text{即 } -7a \cdot a = -1 \therefore a^2 = \frac{1}{7}, \therefore a = \frac{\sqrt{7}}{7} \text{ 或 } a = -\frac{\sqrt{7}}{7} \text{ (舍)},$$

$$\therefore P\left(1, -\frac{26\sqrt{7}}{7}\right);$$

③以 AD 为边, AQ 为对角线,

$$x_P + x_D = x_A + x_Q, \quad y_P + y_D = y_A + y_Q,$$

$$1 + 4 = q - 1, \quad p + 5a = a(q+1)(q-3) + 0,$$

$$\therefore q = 6, \quad a(q+1)(q-3) = p + 5a \therefore Q(6, 21a),$$

$$\because 5a - p = 21a \therefore p = 16a,$$

$$\because AD \perp AP, \therefore k_{AD} \cdot k_{AP} = -1,$$

$$\text{即 } 8a \cdot a = -1, \quad a^2 = -\frac{1}{8} \text{ (舍)},$$

$$\text{综上: } P_1(1, -4);, P_2\left(1, -\frac{26\sqrt{7}}{7}\right);$$

例 26 (2015 年黄冈市中考第 24 题) 如图 1, 在矩形 OABC 中, $OA=5$, $AB=4$, 点 D 为 AB 边上一点, 将 $\triangle BCD$ 沿直线 CD 折叠, 使点 B 恰好落在 OA 边上的点 E 处, 分别以 OC、OA 所在直线为 x 轴、y 轴建立平面直角坐标系。

(1) 求 OE 的长;

(2) 求经过 O、D、C 三点的抛物线的解析式;

(3) 一动点 P 从点 C 出发, 沿 CB 以每秒 2 个单位长度的速度向点 B 运动, 同时动点 Q 从点 E 出发, 沿 EC 以每秒 1 个单位长度的速度向点 C 运动。当点 P 到达点 B 时, 两点同时停止运动。设运动时间为 t 秒, 当 t 为何值时, $DP=DQ$;

(4) 若点 N 在 (2) 中的抛物线的对称轴上, 点 M 在抛物线上, 是否存在这样的点 M、N, 使得以 M、N、C、E 为顶点的四边形是平行四边形? 若存在, 请求出点 M 的坐标; 若不存在, 请说出理由。

【分析】

(1) 由折叠的性质可求得 CE、CO, 在 $Rt\triangle COE$ 中, 由勾股定理可求得 OE, 设 $AD=m$, 在 $Rt\triangle ADE$ 中, 由勾股定理可求得 m 的值, 可求得 D 点坐标, 结合 C、O 两点, 利用待定系数法可求得抛物线解析式;

(2) 用 t 表示出 CP、BP 的长, 可证明 $\triangle DBP \cong \triangle DEQ$, 可得到 $BP=EQ$, 可求得 t 的值;

(3) 可设出 N 点坐标, 分三种情况①EN 为对角线, ②EM 为对角线, ③EC 为对角线, 根据平行四边形的性质可求得对角线的交点横坐标, 从而可求得 M 点的横坐标, 再代入抛物线解析式可求得 M 点的坐标。

【解答】

(1) $\because CE=CB=5$, $CO=AB=4$,

$\therefore$ 在 $Rt\triangle COE$ 中, $OE=\sqrt{CE^2-CO^2}=\sqrt{5^2-4^2}=3$,

(2) 设 $AD=m$, 则 $DE=BD=4-m$,

$\because OE=3$, $\therefore AE=5-3=2$,

在 $Rt\triangle ADE$ 中, 由勾股定理可得 $AD^2+AE^2=DE^2$, 即 $m^2+2^2=(4-m)^2$, 解得 $m=\frac{3}{2}$,

$$\therefore D\left(-\frac{3}{2}, -5\right),$$

$$\because C(-4, 0), O(0, 0),$$

$\therefore$ 设过 O、D、C 三点的抛物线为 $y=ax(x+4)$,

$$\therefore -5 = -\frac{3}{2}a\left(-\frac{3}{2}+4\right), \text{ 解得 } a = \frac{4}{3},$$

$$\therefore \text{抛物线解析式为 } y = \frac{4}{3}x(x+4) = \frac{4}{3}x^2 + \frac{16}{3}x;$$

$$(3) \because CP=2t, \therefore BP=5-2t,$$

在 $Rt\triangle DBP$ 和 $Rt\triangle DEQ$ 中, $\begin{cases} DP=DQ \\ BD=ED \end{cases}$,

$$\therefore Rt\triangle DBP \cong Rt\triangle DEQ \text{ (HL)},$$

$$\therefore BP=EQ, \therefore 5-2t=t, \therefore t=\frac{5}{3};$$

$$(4) \because \text{抛物线的对称轴为直线 } x=-2,$$

$$\therefore \text{设 } N(-2, n),$$

又由题意可知 $C(-4, 0), E(0, -3)$, 设 $M(m, y)$,

①当 EN 为对角线, 即四边形 ECMN 是平行四边形时,

$$\text{则线段 EN 的中点横坐标为 } \frac{0+(-2)}{2} = -1, \text{ 线段 CM 中点横坐标为 } \frac{m+(-4)}{2},$$

$$\because EN, CM \text{ 互相平分}, \therefore \frac{m+(-4)}{2} = -1, \text{ 解得 } m=2,$$

$$\text{又 M 点在抛物线上}, \therefore y = \frac{4}{3} \times 2^2 + \frac{16}{3} \times 2 = 16,$$

$$\therefore M(2, 16);$$

②当 EM 为对角线, 即四边形 ECMN 是平行四边形时,

$$\text{则线段 EM 的中点横坐标为 } \frac{m+0}{2}, \text{ 线段 CN 中点横坐标为 } \frac{(-2)+(-4)}{2} = -3,$$

$$\because EN, CM \text{ 互相平分}, \therefore \frac{m}{2} = -3, \text{ 解得 } m=-6,$$

又 $\because M$ 点在抛物线上,

$$\therefore y = \frac{4}{3} \times (-6)^2 + \frac{16}{3} \times (-6) = 16,$$

$$\therefore M(-6, 16);$$

③当 CE 为对角线, 即四边形 EMCN 是平行四边形时,

$$\text{则 M 为抛物线的顶点, 即 } M\left(-2, -\frac{16}{3}\right).$$

例 27 (2015 年重庆市中考第 26 题) 如图 1, 抛物线 $y=-x^2+2x+3$ 与 x 轴交于 A、B 两点 (点 A 在点 B 的左边), 与 y 轴交于点 C。点 D 与点 C 关于抛物线的对称轴对称, 直线 AD 与 y 轴交于点 E。

(1) 求直线 AD 的解析式;

(2) 如图 1, 直线 AD 上方的抛物线上有一点 F, 过点 F 作 $FG \perp AD$ 于点 G, 作 $FH \parallel x$ 轴交直线 AD 于点 H, 求 $\triangle FGH$ 周长的最大值;

(3) 点 M 是抛物线的顶点, 点 P 是 y 轴上一点, 点 Q 是坐标平面内一点, 以 A、M、P、Q 为顶点的四边形是以 AM 为边的矩形, 若点 T 和点 Q 关于 AM 所在直线对称, 求点 T 的坐标。

【解答】

(1) 当 $x=0$ 时, $y=-x^2+2x+3=3$, 则 C (0, 3),
当 $y=0$ 时, $-x^2+2x+3=0$, 解得 $x_1=-1$, $x_2=3$, 则 A (-1, 0), B (3, 0),
 $\because y=-x^2+2x+3=-(x-1)^2+4$, $\therefore$ 抛物线对称轴为直线 $x=1$,
而点 D 和点 C 关于直线 $x=1$ 对称, $\therefore$ D (2, 3),
设直线 AD 的解析式为 $y=kx+b$,

把 A (-1, 0), D (2, 3) 分别代入得 $\begin{cases} -k+b=0 \\ 2k+b=3 \end{cases}$, 解得 $\begin{cases} k=1 \\ b=1 \end{cases}$,

$\therefore$ 直线 AD 的解析式为 $y=x+1$;

(2) 当 $x=0$ 时, $y=x+1=1$, 则 E (0, 1),
 $\because OA=OE$, $\therefore \triangle OAE$ 为等腰直角三角形,
 $\therefore \angle EAO=45^\circ$,

$\because FH \parallel OA$, $\therefore \triangle FGH$ 为等腰直角三角形,
过点 F 作 $FN \perp x$ 轴交 AD 于 N, 如图,
 $\because FN \perp FH$, $\therefore \triangle FNH$ 为等腰直角三角形,
而 $FG \perp HN$, $\therefore GH=NG$,

$\therefore \triangle FGH$ 周长等于 $\triangle FGN$ 的周长,

$\because FG=GN=\frac{\sqrt{2}}{2}FN$, $\therefore \triangle FGN$ 周长 $= (1+\sqrt{2}) FN$,

$\therefore$ 当 FN 最大时, $\triangle FGN$ 周长的最大,

设 F (x , $-x^2+2x+3$), 则 N (x , $x+1$),

$$\therefore FN = -x^2 + 2x + 3 - x - 1 = -\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{9}{4},$$

当 $x = \frac{1}{2}$ 时, FH 有最大值 $\frac{9}{4}$,

$$\therefore \triangle FGN \text{ 周长的最大值为 } (1 + \sqrt{2}) \times \frac{9}{4} = \frac{9 + 9\sqrt{2}}{4},$$

即 $\triangle FGH$ 周长的最大值为 $\frac{9 + 9\sqrt{2}}{4}$;

(3) 直线 AM 交 y 轴于 R, $y = -x^2 + 2x + 3 = -(x - 1)^2 + 4$, 则 M (1, 4)
 设直线 AM 的解析式为 $y = mx + n$,

把 A (-1, 0)、M (1, 4) 分别代入得 $\begin{cases} -m + n = 0 \\ m + n = 4 \end{cases}$, 解得 $\begin{cases} m = 2 \\ n = 2 \end{cases}$,

$\therefore$ 直线 AM 的解析式为 $y = 2x + 2$,

当 $x = 0$ 时, $y = 2x + 2 = 2$, 则 R (0, 2),

当 AQ 为矩形 APQM 的对角线, 如图 1,

$\because \angle RAP = 90^\circ$, 而 $AO \perp PR$,

$\therefore \text{Rt}\triangle AOR \sim \text{Rt}\triangle POA$,

$\therefore AO : OP = OR : OA$, 即 $1 : OP = 2 : 1$, 解得 $OP = \frac{1}{2}$,

$\therefore$ P 点坐标为 $(0, -\frac{1}{2})$,

$\because$ 点 A (-1, 0) 向上平移 4 个单位, 向右平移 2 个单位得到 M (1, 4),

$\therefore$ 点 P $(0, -\frac{1}{2})$ 向上平移 4 个单位, 向右平移 2 个单位得到 Q $(2, \frac{7}{2})$,

$\because$ 点 T 和点 Q 关于 AM 所在直线对称,

$\therefore$ T 点坐标为 $(0, \frac{9}{2})$;

当 AP 为矩形 APQM 的对角线, 反向延长 QA 交 y 轴于 S, 如图 2,

同理可得 S 点坐标为 $(0, -\frac{1}{2})$,

$\because$ R 点为 AM 的中点, $\therefore$ R 点为 PS 的中点, $\therefore PM = SA$, P $(0, \frac{9}{2})$,

$\because PM = AQ$, $\therefore AQ = AS$, $\therefore$ 点 Q 关于 AM 的对称点为 S,

即 T 点坐标为 $(0, -\frac{1}{2})$.

综上所述, 点 T 的坐标为 $(0, \frac{9}{2})$ 或 $(0, -\frac{1}{2})$.

例 28 (2015 年温州市中考第 24 题) 如图 1, 点 A 和动点 P 在直线 l 上, 点 P 关于点 A 的对称点为 Q, 以 AQ 为边作 $\text{Rt}\triangle ABQ$, 使 $\angle BAQ=90^\circ$, $AQ:AB=3:4$, 作 $\triangle ABQ$ 的外接圆 O。点 C 在点 P 右侧, $PC=4$, 过点 C 作直线 $m \perp l$, 过点 O 作 $OD \perp m$ 于点 D, 交 AB 右侧的圆弧于点 E。在射线 CD 上取点 F, 使 $DF=\frac{3}{2}CD$, 以 DE、DF 为邻边作矩形 DEGF, 设 $AQ=3x$ 。

(1) 用关于 x 的代数式表示 BQ、DF;

(2) 当点 P 在点 A 右侧时, 若矩形 DEGF 的面积等于 90, 求 AP 的长;

(3) 在点 P 的整个运动过程中:

①当 AP 为何值时, 矩形 DEGF 是正方形?

②作直线 BG 交圆 O 于另一点 N, 若 BN 的弦心距为 1, 求 AP 的长 (直接写出答案)

【解答】

(1) 在 $\text{Rt}\triangle ABQ$ 中,

$$\because AQ:AB=3:4, AQ=3x, \therefore AB=4x, \therefore BQ=5x,$$

$$\because OD \perp m, m \perp l, \therefore OD \parallel l,$$

$$\because OB=OQ, \therefore AH=BH=\frac{1}{2}AB=2x,$$

$$\therefore CD=2x, \therefore FD=\frac{3}{2}CD=3x;$$

(2) $\because AP=AQ=3x, PC=4,$

$$\therefore CQ=6x+4,$$

作 $OM \perp AQ$ 于点 M (如图 1), $\therefore OM \parallel AB,$

$\because \odot O$ 是 $\triangle ABQ$ 的外接圆, $\angle BAQ=90^\circ,$

$$\therefore \text{点 } O \text{ 是 } BQ \text{ 的中点}, \therefore QM=AM=\frac{3}{2}x$$

$$\therefore OD=MC=\frac{9}{2}x+4, \therefore OE=\frac{1}{2}BQ=\frac{5}{2}x,$$

$$\therefore ED=2x+4,$$

$$S_{\text{矩形 DEGF}}=DF \cdot DE=3x(2x+4)=90,$$

解得: $x_1 = -5$ (舍去), $x_2 = 3$, $\therefore AP = 3x = 9$;

(3) ①若矩形 DEGF 是正方形, 则 $ED = DF$,

I. 点 P 在 A 点的右侧时 (如图 1),

$\therefore 2x + 4 = 3x$, 解得: $x = 4$, $\therefore AP = 3x = 12$;

II. 点 P 在 A 点的左侧时,

当点 C 在 Q 右侧, $0 < x < \frac{4}{7}$ 时 (如图 2),

$\therefore ED = 4 - 7x$, $DF = 3x$, $\therefore 4 - 7x = 3x$, 解得: $x = \frac{2}{5}$,

$\therefore AP = \frac{6}{5}$;

当 $\frac{4}{7} \leq x < \frac{2}{3}$ 时 (如图 3),

$\therefore ED = 7 - 4x$, $DF = 3x$,

$\therefore 7 - 4x = 3x$, 解得: $x = 1$ (舍去),

当点 C 在 Q 的左侧时, 即 $x \geq \frac{2}{3}$ (如图 4), $DE = 7x - 4$, $DF = 3x$,

$\therefore 7x - 4 = 3x$, 解得: $x = 1$, $\therefore AP = 3$,

综上所述: 当 AP 为 12 或 $\frac{6}{5}$ 或 3 时, 矩形 DEGF 是正方形;

②连接 NQ, 由点 O 到 BN 的弦心距为 1, 得 $NQ = 2$,

当点 N 在 AB 的左侧时 (如图 5),

过点 B 作 $BM \perp EG$ 于点 M,

$\therefore GM = x$, $BM = x$, $\therefore \angle GBM = 45^\circ$,

$\therefore BM \parallel AQ$, $\therefore AI = AB = 4x$,

$\therefore IQ = x$, $\therefore NQ = \frac{x}{\sqrt{2}} = 2$,

$\therefore x = 2\sqrt{2}$, $\therefore AP = 6\sqrt{2}$;

当点 N 在 AB 的右侧时 (如图 6),

过点 B 作 $BJ \perp GE$ 于点 J,

$\therefore GJ = x$, $BJ = 4x$, $\therefore \tan \angle GBJ = \frac{1}{4}$,

$\therefore AI = 16x$, $\therefore QI = 19x$,

$\therefore NQ = \frac{19x}{\sqrt{17}} = 2$, $\therefore x = \frac{2\sqrt{17}}{19}$, $\therefore AP = \frac{6\sqrt{17}}{19}$,

综上所述: AP 的长为 $6\sqrt{2}$ 或 $\frac{6\sqrt{17}}{19}$.

例 29 (2016 年泰安市中考第 28 题) 如图，在平面直角坐标系中，抛物线 $y=ax^2+bx+c$ 的顶点坐标为 $(2, 9)$ ，与 y 轴交于点 $A(0, 5)$ ，与 x 轴交于点 E 、 B 。

(1) 求二次函数 $y=ax^2+bx+c$ 的表达式；

(2) 过点 A 作 AC 平行于 x 轴，交抛物线于点 C ，点 P 为抛物线上的一点（点 P 在 AC 上方），作 PD 平行与 y 轴交 AB 于点 D ，问当点 P 在何位置时，四边形 $APCD$ 的面积最大？并求出最大面积；

(3) 若点 M 在抛物线上，点 N 在其对称轴上，使得以 A 、 E 、 N 、 M 为顶点的四边形是平行四边形，且 AE 为其一边，求点 M 、 N 的坐标。

【解答】

(1) 设抛物线解析式为 $y=a(x-2)^2+9$ ， $\because$ 抛物线与 y 轴交于点 $A(0, 5)$ ，
 $\therefore 4a+9=5$ ， $\therefore a=-1$ ， $\therefore y=-(x-2)^2+9=-x^2+4x+5$ 。

(2) 当 $y=0$ 时， $-x^2+4x+5=0$ ， $\therefore x_1=-1$ ， $x_2=5$ ； $\therefore E(-1, 0)$ ， $B(5, 0)$ ，
设直线 AB 的解析式为 $y=m*x+n$ ， $\because A(0, 5)$ ， $B(5, 0)$ ， $\therefore m=-1$ ， $n=5$ ，
 $\therefore$ 直线 AB 的解析式为 $y=-x+5$ ；设 $P(x, -x^2+4x+5)$ ， $\therefore D(x, -x+5)$ ，
 $\therefore PD=-x^2+4x+5+x-5=-x^2+5x$ ，

$\because AC=4$ ， $\therefore S_{\text{四边形APCD}}=1/2*AC*PD=2*(-x^2+5x)=-2x^2+10x$ ， $\therefore$ 当 $x=-5/2$ 时， $S_{\text{四边形APCD}}$ 最大值 $=25/2$ 。

(3) $\because A$ 的坐标为 $(0, 5)$ ， E 的坐标为 $(-1, 0)$ ，则 $OE=1$ ， $OA=5$ 。

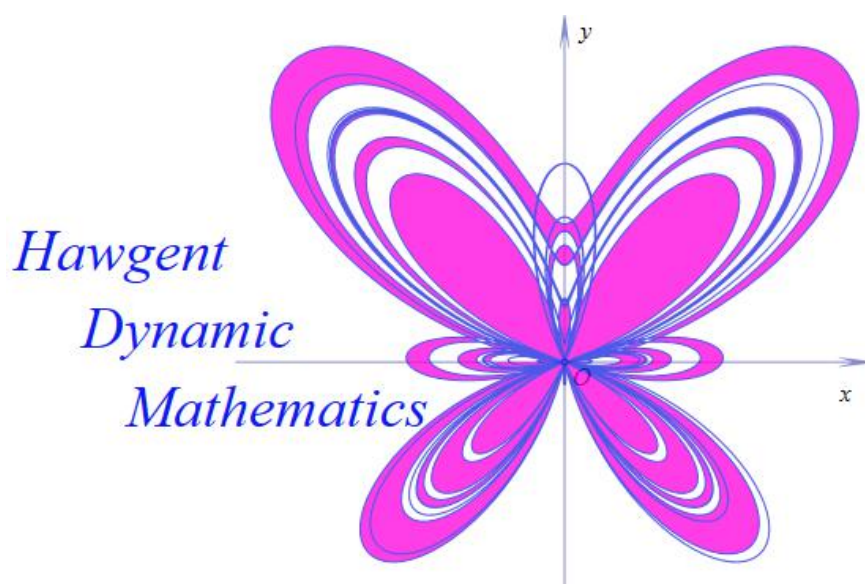
$\because MN$ 与 AE 平行且相等， $\therefore M$ 、 N 两点间的水平距离为 1，竖直距离为 5。

$\because$ 点 N 在对称轴 $x=2$ 上， $\therefore$ 点 M 的横坐标为 3 或 1。

如图，当 $x=3$ 时， $y=-(x-2)^2+9=8$.此时 $M(3,8),N(2,3)$.

如图，当 $x=1$ 时， $y=-(x-2)^2+9=8$.此时 $M(1,8),N(2,13)$.

皓荡的大地，奔腾的骏马
只为向着那，最初的梦想



地址：广州市越秀区桂花岗广州大学北 8 号

广州市越秀区盘福路朱紫后街 1 号

邮件：11033149@qq.com

电话：020-36280771

网站：www.hawgent.com

QQ 群：367878041