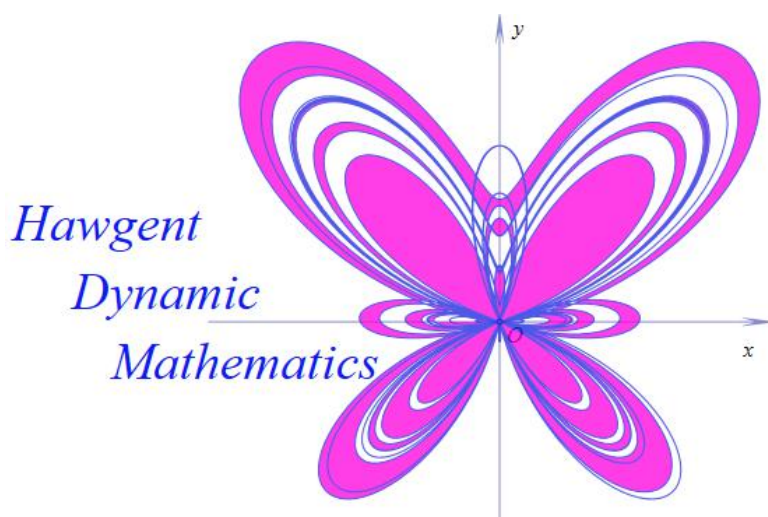




*Hawgent* 皓骏动态数学课程系列

## 专题学习：探索与发现

深入学科，彻底突破数学教学和数学学习中的重点难点问题  
开展数学实验、数学教学、数学学习和数学研究的必备工具



皓骏（广州）数学技术中心

*Hawgent Technology Centre in Mathematics*

## 目录

01	先试试你的眼力.....	1
02	也测测你的直觉.....	4
03	再变个魔术玩玩.....	7
04	数学要动观测算.....	14
05	国王欠了多少债.....	18
06	无独有偶汉诺塔.....	21
07	报纸珠峰试比高.....	24
08	闰年究竟何时来.....	26
09	揪住误差不能放.....	29
10	简单直线再认识.....	32
11	直线运动方向同.....	36
12	处处存在的圆形.....	38
13	稍稍移动方向变.....	41
14	如何最快吃食物.....	44
15	两种运动可互换.....	48
16	车轮为何是圆的.....	53
17	圆形瓶子又为何.....	56
18	下水井盖为哪般.....	58
19	车轮不圆怎么办.....	61
20	车轮旋转得摆线.....	64
21	摆线性质不寻常.....	67
22	亚里士多得诡辩.....	71
23	圆在圆上滚动时.....	73
24	千变万化旋轮线.....	78
25	轮子如何能滚动.....	83
26	圆周率值如何来.....	88
27	可向电脑发指令.....	92
28	刘徽之技高一筹.....	97

29	祖氏疏率与密率.....	100
30	触类旁通算根号.....	103
31	点动形成何种线.....	109
32	如果不是在中点.....	112
33	椭圆又是什么圆.....	114
34	梯子是个荧光棒.....	119
35	距离墙角最近点.....	124
36	墙面倾斜怎么办.....	129
37	抬轿问题与旋转.....	133
38	抬轿与百变曲线.....	138
39	方形与圆可渐变.....	141
40	抬轿问题不等闲.....	144
	附录： .....	148

## 01 先试试你的眼力

首先回顾一下之前提到过的几个例子，考考你的眼力：

在图 1 中，在平行四边形  $ABCD$  中，你认为线段  $AE$  和  $BE$  哪个长一些、哪个短一些？

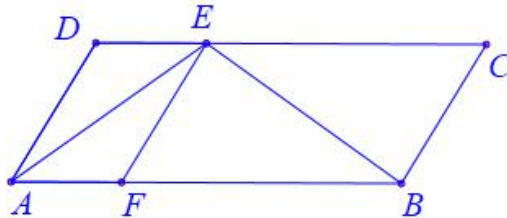


图 1

在图 2 中，你认为  $HI$  和  $JK$  哪个更长哪个更短？



图 2

在图 3 中的两条线段哪个更长哪个更短呢？

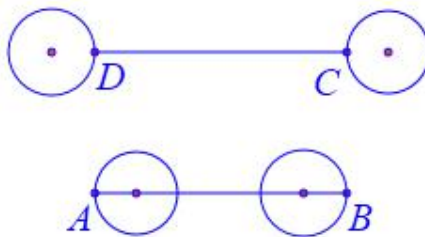


图 3

在图 4 中，有上下两段圆弧，分别是圆弧  $XY$  和圆弧  $ST$ ，你认为哪个长一些、哪个短一些？

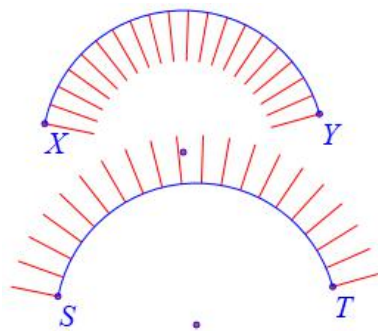


图 4

为了进行实验和验证，你可以把上面的图 1-图 4 各自复印 1 份，然后进行对比和研究。

例如：

在图 1 中，将三角形 EAB 对折，让直线 EA 与直线 EB 重合，观察点 A 与点 B 之间的位置关系。你得到了什么结论？跟你之前所得到的结论是一样的吗？

在图 2 中，首先让点 P 与点 M 重合，再让直线 PQ 与直线 MN 重合，最后观察一下点 N 与点 Q 之间的位置关系。这个操作过程，是验证了你之前结论的正确性还是推翻了你给出的结论？

在图 3 中，按照上面类似的操作，你可以观察线段 P'Q' 与 M'N' 之间的长度大小关系。

在图 4 中，想一想如何比较圆弧 XY 与圆弧 ST 的长度大小关系呢？先将点 S 与点 X 重合，然后让两条圆弧重合，最后观察点 Y 与点 T 的位置，你能得到什么结论？当然这种方法的基础是，这里两条圆弧所在的半径相等。

上面这些图形，都是在数学软件 Hawgent 皓骏动态数学中绘制出来的。在 Hawgent 皓骏动态数学绘制的几何图形能够被拖动，而且图形在被拖动过程中它们的几何性质还能够保持不变。因此，我们还可以在 Hawgent 皓骏动态数学中检验我们之前的结论。

(1) 打开文件“01-1 线段 AE 和线段 BE.dmr”，单击“隐藏”按钮，只剩下图 1 中的线段 AE、BE 和 AB。这时，请通过观察再次判断线段 AE 的长度和线段 BE 的长度之间的关系。

(2) 打开文件“01-2 线段 MN 和线段 PQ.dmr”，单击“隐藏”按钮，将线段两端的箭头去掉，拖动点 P 使之与点 M 的位置重合，观察点 Q 与点 N 之间的位置关系，从而重新判断线段 MN 与线段 PQ 的长度大小关系。

(3) 打开文件“01-3 线段 M'N' 和线段 P'Q'.dmr”，单击“隐藏”按钮，将线段两端的圆环去掉，拖动点 P' 使之与点 M' 的位置重合，观察点 Q' 与点 N' 之间的位置关系，从而重

新判断线段  $M'N'$  与线段  $P'Q'$  的长度大小关系。

(4) 打开文件“01-4 圆弧 XY 和圆弧 ST.dmr”，单击“隐藏”按钮，将圆弧两侧的齿状图形去掉，拖动点 O' 使之与点 X 的位置重合，观察点 T 与点 Y 之间的位置关系，从而重新判断圆弧 XY 与圆弧 ST 的长度大小关系。

**【拓展练习】**

- (1) 在文件中“01-1 线段 AE 和线段 BE.dmr”中，测量线段 AE 和 BE 的长度。
- (2) 在文件中“01-2 线段 MN 和线段 PQ.dmr”中，测量线段 MN 和 PQ 的长度。
- (3) 在文件中“01-3 线段  $M'N'$  和线段  $P'Q'$ .dmr”中，测量线段  $M'N'$  和  $P'Q'$  的长度。
- (4) 在文件中“01-4 圆弧 XY 和圆弧 ST.dmr”中，测量圆弧 XY 和圆弧 ST 的长度。

## 02 也测测你的直觉

下图 1 是德国著名的天体物理学家 Johann Zollner (1834--1882) 有一次突然在一块纺织品上发现的编织图案。

你认为竖直方向的直线之间具有什么关系？

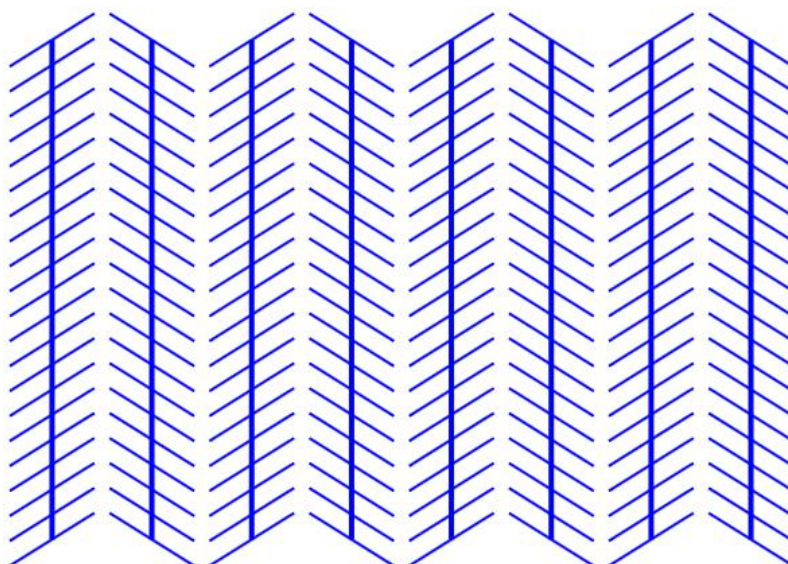


图 1

与图 1 类似的还有图 2 所示图案，图中包括水平方向的直线、竖直方向的直线和倾斜方向的直线。你认为倾斜方向直线之间有什么关系？

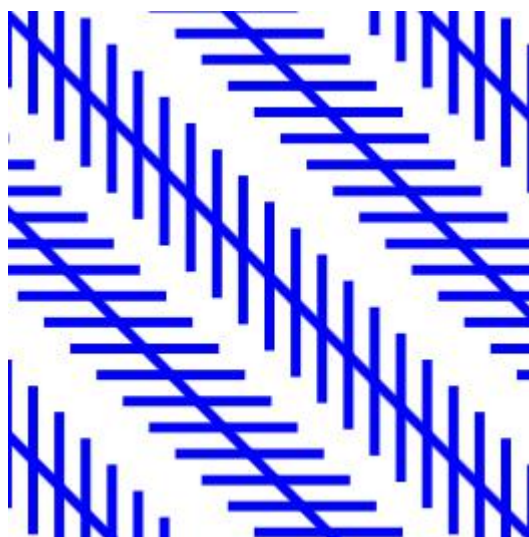


图 2

我们再看看图 3，在同心圆的上方有一个多边形，你认为这个多边形具有什么性质？

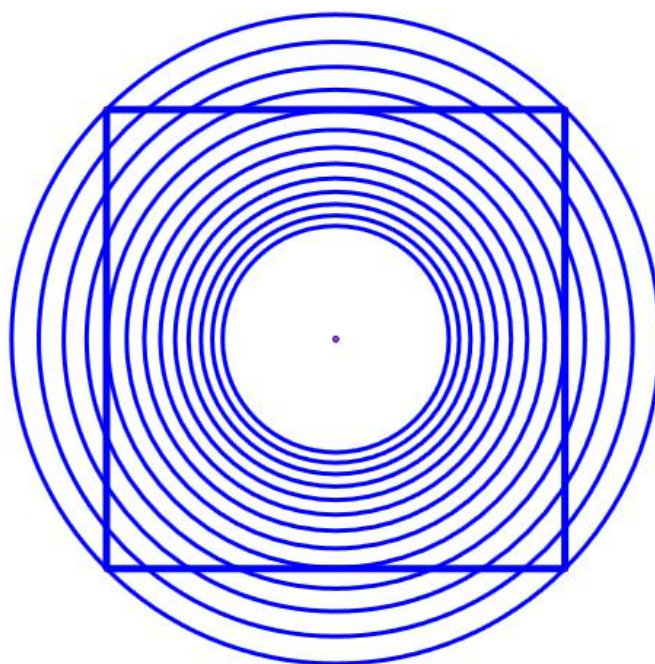


图 3

与图3类似的还有图4,在一组射线上有一个多边形,你认为这个多边形是什么图形? 有哪些性质?

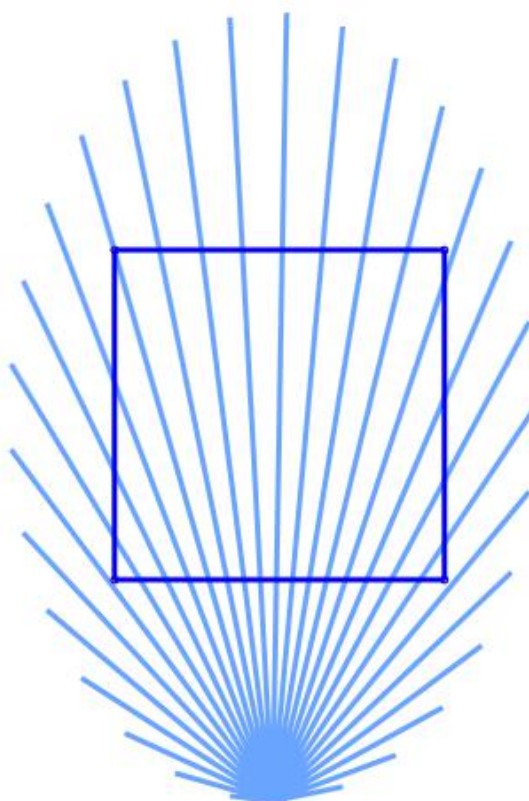


图 4

为了进行实验和验证,你可以把上面的图1-图4各自复印1份,然后进行对比和研究。



例如：

在图 3 和图 4 当中，沿着多边形的边界剪切下来，然后将剪切撕下来的纸片反过来观察，也就是观察它的背面。这样一来，我们只会观察到这个图形本身，而不受其它图形的影响。重新观察和研究这些竖直方向的直线，你有什么结论？

另外，如何判断图 1 当中竖直直线之间的关系，以及图 2 当中倾斜方向直线之间的关系呢？

当然，上面的这些图形，都是在数学软件 Hawgent 皓骏动态数学中绘制出来的，我们可以在。Hawgent 皓骏动态数学中通过简单的操作，就能隐藏那些“无关”的图案，而只留下我们所研究的图形本身。

（1）打开文件“02-1 竖直方向的一组直线.dmr”，单击“隐藏”按钮，斜线全部被隐藏而只剩下竖直方向的一组直线。

（2）打开文件“02-2 倾斜方向的一组直线.dmr”，单击“隐藏”按钮，水平方向的直线和竖直方向的直线全部被隐藏而只剩下倾斜方向的一组直线。

（3）打开文件“02-3 圆环中的多边形.dmr”，单击“隐藏”按钮，将所有圆环都隐藏而只留下多边形本身。

（4）打开文件“02-4 射线中的多边形.dmr”，单击“隐藏”按钮，将所有射线都隐藏而只留下多边形本身。

### 【拓展练习】

（1）在文件“02-3 圆环中的多边形.dmr”当中，测量多边形的四条边的长度和四个角的大小，通过测量数据判断多边形的性质和形状。

（2）在文件“02-4 射线中的多边形.dmr”当中，测量多边形的四条边的长度和四个角的大小，通过测量数据判断多边形的性质和形状。

（3）请你设计一种方法，通过测量或计算，判断图 1 和图 2 当中直线之间的位置关系。

## 03 再变个魔术玩玩

我们知道，直觉，就是没有经过意识推理，而对某些事物直接的认识和理解。

通过前面两节的问题，我们已经知道，直觉得到的认识并不可靠，所以我们不能单靠直觉就做出判断。

而眼睛赋予人的直觉，有时候就是光幻觉。在 19 世纪后半期就有很多物理学家和心理学家发表了大量的关于光幻觉的文章，来描述光幻觉及其形成的原因。

例如，有些直线事实上是平行的，但是看着却是不平行的。对于这种光幻觉，目前可行的解释是：

- 1) 视线与平行线实际形成的夹角与视线的方向有关，方向不同夹角则不同；
- 2) 同一个人的眼睛里，不同位置视网膜的曲度不同；
- 3) 图案的层次感让我们的眼睛忽而聚光、忽而散光，结果平行线看上去也像是弯曲的。

据了解，当视线与平行线所成角度为 45 度倾斜时，这种光幻觉最明显。

由此看来，光幻觉的形成，与我们的眼球结构、思维以及二者的结合有关。所以，我们看到的事物并非真实存在，或者说我们所看到的事物并非真实的。

因此，当我们需要做出判断时，不要单单依靠我们的视觉，还需要动手进行操作。我们数学上最常见的操作方法就是测量，然后通过分析测量得到的数据进一步得到结论。

然而，相对于测量的操作本身，究竟需要测量研究对象的什么？如何分析测量得到的数据？是研究数学、学习数学过程中更加重要的问题。

且看下面一个例子。

如图 1 所示，将一个图形按照这种方式进行分割成为四部分。

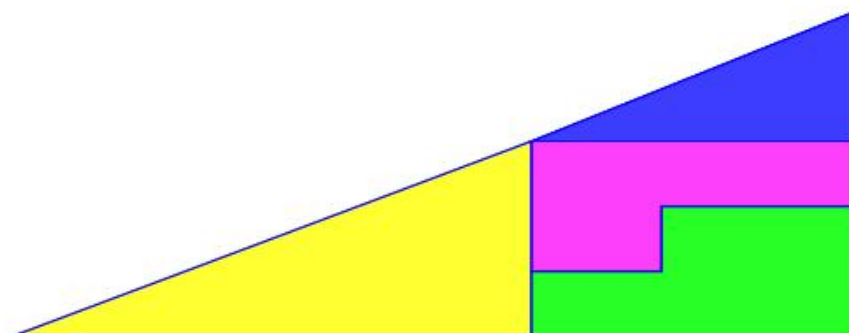


图 1

然后重新拼接后，结果如图 2 所示。图形的下方中间位置怎么就少了一块呢？原因在

哪里呢？这个现象应该如何解释？因为，上下两个图形的高与底边长都相等，分别等于两个小直角三角形的高之和与底边长之和。

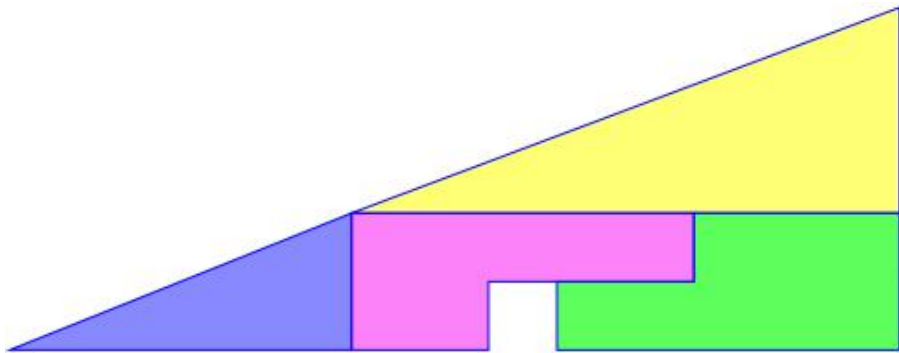


图 2

由图 1 变到图 2，就像变了一个魔术，被魔术师鬼使神差地变跑掉了一块。想一想，这到底是怎么回事？

美国的《科学人美国人》杂志还曾经刊登过一个类似的故事：

有一个魔术师，拿来一张边长为 13 米的正方形地毯，对地毯工匠说“请你把它缝成一张长为 21 米，宽为 8 米的长方形地毯。”这位工匠非常吃惊，想不到魔术师的算术水平这么差，因为这两个图形的面积根本不相等，而是相差 1 平方米，怎么可能将正方形的地毯通过剪拼得到那个长方形的地毯呢？

但是魔术师利用下面的方法竟然让工匠实现了他的目的，真是神奇！

首先将边长为 13 米的地毯按照图 3 所示分割成四部分。

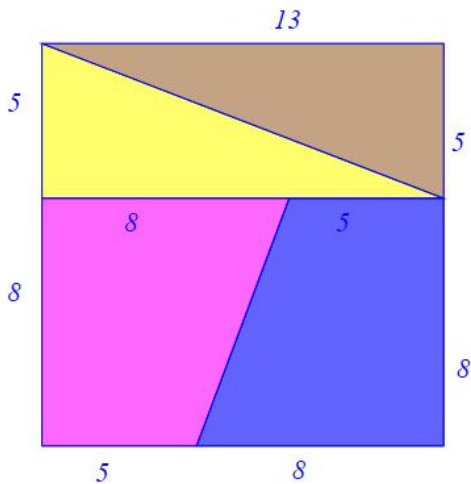


图 3

然后将它们拼在一起，如图 4 所示，研究一下这个重新拼成的长方形，算一算它的长和宽是否分别为 21 和 8 呢？

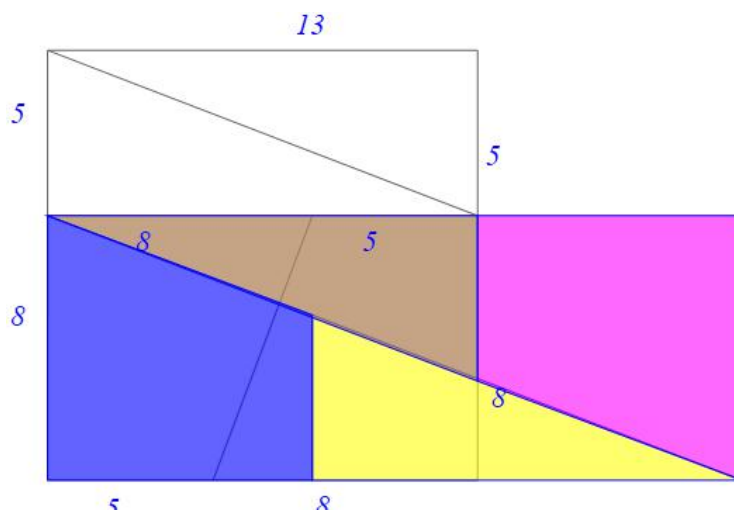


图 4

请你想一想那一平方米的地毯跑哪里去了？

需要告诉你一个更加有趣、更神奇的事实：类似的魔术还可以有设计出很多，只需要将上述长方形宽、正方形边长和长方形的长，换成连续的 3 个斐波那契（Fibonacci）数列就可以了，例如 13、21、34；21、34、55；34、55、89；……等等。

为了进行实验和验证，你可以把上面的图 1 和图 3 各自复印 1 份，然后进行对比和研究。例如：

将图 1 对应的图案剪切后尝试着重新拼成如图 2 所示的图片。

将图 3 对应的图案剪切后尝试着重新拼成如图 4 所示的图片。

在计算机中我们也可以看到动态的展示过程：

（1）打开文件“03-1 怎么少了一块.dmr”，单击“移动”按钮，即可观察到图形由图 1 通过动态平移到图 2 的过程。当然你也可以在计算机上手动操作图形，对于平移得到的图形，鼠标单击其内部并拖动即可平移。

（2）打开文件“03-2 魔术师的神奇.dmr”，单击“剪拼”按钮，即可观察到图形由图 3 通过动态平移到图 4 的过程。当然你也可以在计算机上手动操作图形，对于平移得到的图形，鼠标单击其内部并拖动即可平移，鼠标双击其内部即可旋转。

### 【拓展练习】

请你自己动手，设计和制作一副与上面的魔术类似的游戏。

## 04 数学要动观测算

从前面的例子我们深刻体会到：眼睛有时候会骗人！不能单靠观察和直觉就做出判断，很多时候还需要进行测量和计算。

因此在学习数学的过程中，需要把动手操作、观察分析与测量验证、计算推理的过程相结合。

这本小册子中我们为大家提供了一个动手做数学的机会、环境和方法。这不同于我们早已厌倦的数学学习方式：背概念、背公式、背定理，并且反复地做题、做题、再做题。

这个动手做数学的过程，就是数学实验。

数学实验，可以是探索未知数学规律，还可以是检验已知数学结论。

数学实验，就是进行数学发现的过程，也是进行数学创造的过程。

例如在第 01 节中，你可以分别测量每一组图形中两条线段或圆弧的长度，然后比较它们的大小。也可以利用我们之前介绍的方法：将一组端点对齐，观察另外一组端点的关系，从而直接比较两条线段或者圆弧的长短。这里的测量、观察、比较的过程就是数学实验的过程。

例如在第 02 节中，对于图 1 和图 2 对应的图案来说我们也可以通过动手做实验判断两条直线是平行还是相交：在一条直线上从两个不同位置的点分别向另外一条直线做垂线段，若垂线段相等则两直线平行，否则两条直线不平行。这里的作图、测量、比较大小的过程也是数学实验的过程。

然而对于第 02 节中的图 3 和图 4 来说，你需要根据你所得到的结论和判断，设计对应的实验方法和操作步骤。因为实验的目的不同，所要设计的实验方法以及对应的步骤也不会相同。

例如，如何解释第 03 节当中由图 1 变换到图 2 所产生的少了一块的现象呢？你认为问题出在哪里呢？

有人说测量  $\angle 1$  和  $\angle 2$ （如图 13 所示）的大小看看。 $\angle 1$  与  $\angle 2$  的大小关系，只可能是  $\angle 1 < \angle 2$ 、 $\angle 1 = \angle 2$  和  $\angle 1 > \angle 2$  三种。通过  $\angle 1$  与  $\angle 2$  的不同关系，你又能得到什么结论呢？

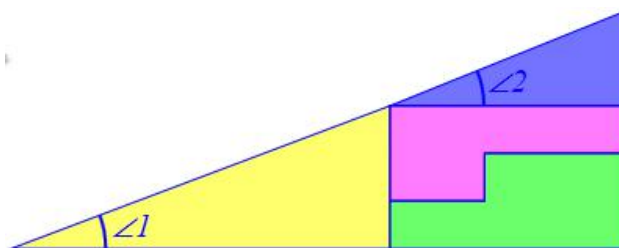


图 1

在第 03 节中，由图 3 变换到图 4 的过程中，变换之后图形的面积也比原来图形的面积少了 1 个单位（如图 2 所示， $13^2 - 21 \times 8 = 1$ ）。在这里，缺少的一块跑哪里去了呢？有人说，需要计算  $5/8$  与  $13/21$  的值，然后比较一下结果看看。 $5/8$  与  $13/21$  相等吗？还是哪个更大些而另外一个更小些？如果两者相等对应的图形有什么性质？如果不相等呢？

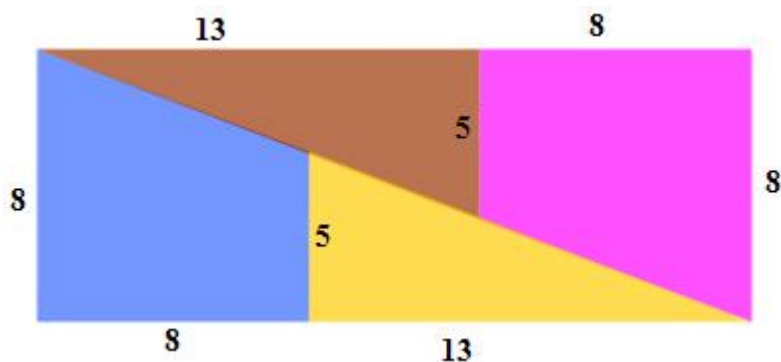


图 2

由图 1 变到图 2，就像变了一个魔术，被魔术师鬼使神差地变跑掉了一块。想一想，这到底是怎么回事？

美国的《科学人美国人》杂志还曾经刊登过一个类似的故事：

有一个魔术师，拿来一张边长为 13 米的正方形地毯，对地毯工匠说“请你把它缝成一张长为 21 米，宽为 8 米的长方形地毯。”这位工匠非常吃惊，想不到魔术师的算术水平这么差，因为这两个图形的面积根本不相等，而是相差 1 平方米，怎么可能将正方形的地毯通过剪拼得到那个长方形的地毯呢？

但是魔术师利用下面的方法竟然让工匠实现了他的目的，真是神奇！

首先将边长为 13 米的地毯按照图 3 所示分割成四部分。

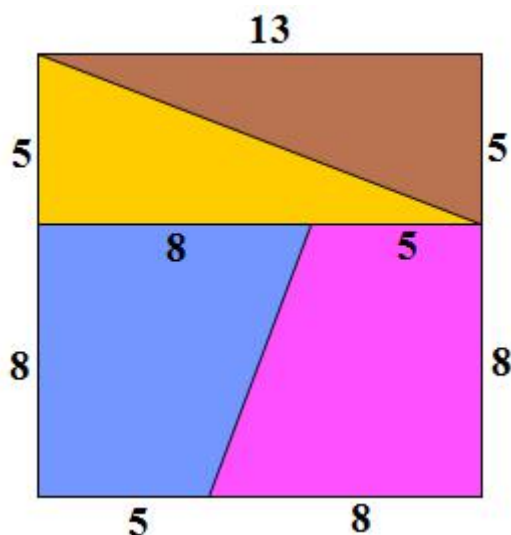


图 3

然后将它们拼在一起，如图 4 所示，研究一下这个重新拼成的长方形，算一算它的长和宽是否分别为 21 和 8 呢？

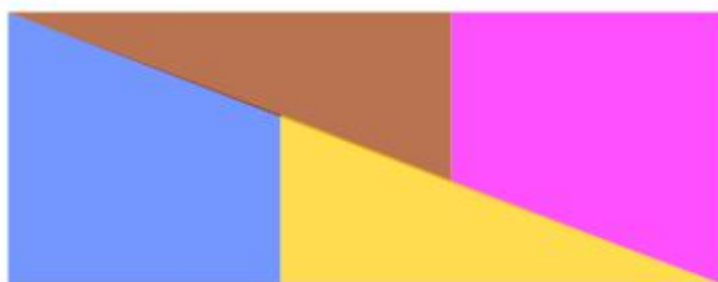


图 4

请你想一想那一平方米的地毯跑哪里去了？

需要告诉你一个更加有趣、更神奇的事实：类似的魔术还可以有设计出很多，只需要将上述长方形宽、正方形边长和长方形的长，换成连续的 3 个斐波那契（Fibonacci）数列就可以了，例如 13、21、34；21、34、55；34、55、89；……等等。

为了进行实验和验证，你可以把上面的图 1 和图 3 各自复印 1 份，然后进行对比和研究。例如：

将图 1 对应的图案剪切后尝试着重新拼成如图 2 所示的图片。

将图 3 对应的图案剪切后尝试着重新拼成如图 4 所示的图片。

在计算机中我们也可以看到动态的展示过程：

(1) 打开文件“03-1 怎么少了一块.dmr”，单击“移动”按钮，即可观察到图形由图 1 通过动态平移到图 2 的过程。当然你也可以在计算机上手动操作图形，对于平移得到的图形，

鼠标单击其内部并拖动即可平移。

(2) 打开文件“03-2 魔术师的神奇.dmr”，单击“剪拼”按钮，即可观察到图形由图 3 通过动态平移到图 4 的过程。当然你也可以在计算机上手动操作图形，对于平移得到的图形，鼠标单击其内部并拖动即可平移，鼠标双击其内部即可旋转。

**【拓展练习】**

请你自己动手，设计和制作一副与上面的魔术类似的游戏。



## 04 数学要动观测算

从前面的例子我们深刻体会到：眼睛有时候会骗人！不能单靠观察和直觉就做出判断，很多时候还需要进行测量和计算。

因此在学习数学的过程中，需要把动手操作、观察分析与测量验证、计算推理的过程相结合。

这本小册子中我们为大家提供了一个动手做数学的机会、环境和方法。这不同于我们早已厌倦的数学学习方式：背概念、背公式、背定理，并且反复地做题、做题、再做题。

这个动手做数学的过程，就是数学实验。

数学实验，可以是探索未知数学规律，还可以是检验已知数学结论。

数学实验，就是进行数学发现的过程，也是进行数学创造的过程。

例如在第 01 节中，你可以分别测量每一组图形中两条线段或圆弧的长度，然后比较它们的大小。也可以利用我们之前介绍的方法：将一组端点对齐，观察另外一组端点的关系，从而直接比较两条线段或者圆弧的长短。这里的测量、观察、比较的过程就是数学实验的过程。

例如在第 02 节中，对于图 1 和图 2 对应的图案来说我们也可以通过动手做实验判断两条直线是平行还是相交：在一条直线上从两个不同位置的点分别向另外一条直线做垂线段，若垂线段相等则两直线平行，否则两条直线不平行。这里的作图、测量、比较大小的过程也是数学实验的过程。

然而对于第 02 节中的图 3 和图 4 来说，你需要根据你所得到的结论和判断，设计对应的实验方法和操作步骤。因为实验的目的不同，所要设计的实验方法以及对应的步骤也不会相同。

例如，如何解释第 03 节当中由图 1 变换到图 2 所产生的少了一块的现象呢？你认为问题出在哪里呢？

有人说测量  $\angle 1$  和  $\angle 2$ （如图 13 所示）的大小看看。 $\angle 1$  与  $\angle 2$  的大小关系，只可能是  $\angle 1 < \angle 2$ 、 $\angle 1 = \angle 2$  和  $\angle 1 > \angle 2$  三种。通过  $\angle 1$  与  $\angle 2$  的不同关系，你又能得到什么结论呢？

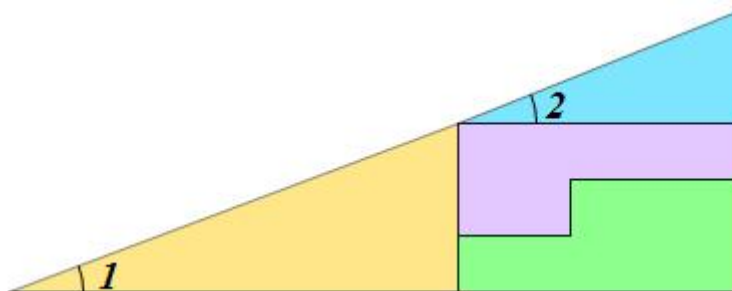


图 1

在第 03 节中，由图 3 变换到图 4 的过程中，变换之后图形的面积也比原来图形的面积少了 1 个单位（如图 2 所示， $13^2 - 21 \times 8 = 1$ ）。在这里，缺少的一块跑哪里去了呢？有人说，需要计算  $5/8$  与  $13/21$  的值，然后比较一下结果看看。 $5/8$  与  $13/21$  相等吗？还是哪个更大些而另外一个更小些？如果两者相等对应的图形有什么性质？如果不相等呢？

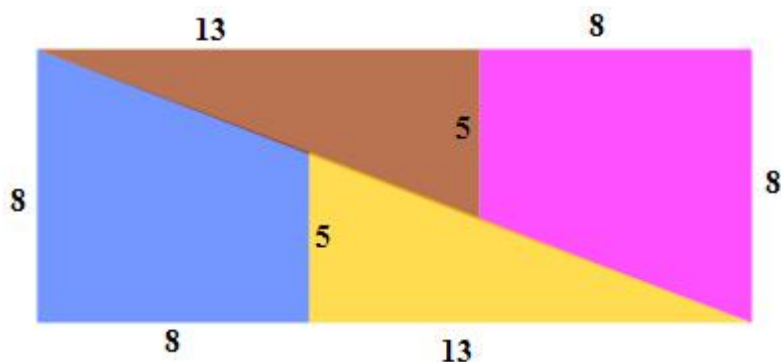


图 2

### 【拓展练习】

(1) 打开文件“04-1 线段比例与图形的性质.dmr”，如图 15 所示，三角形 ABC 为直角三角形，角 B 为直角，点 D 在线段 AB 上，DE//BC。

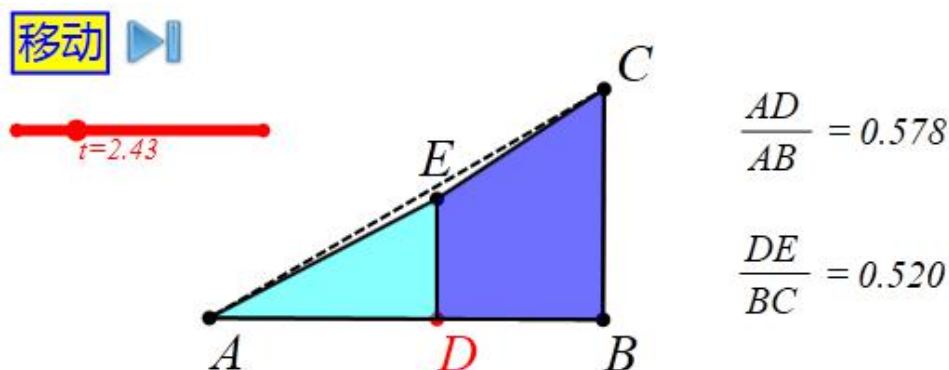


图 3

上下拖动点 E，观察右边数据的变化规律，其中单击“移动”按钮，可以让点 E 移动到

线段 AC 上，如图 4 所示。

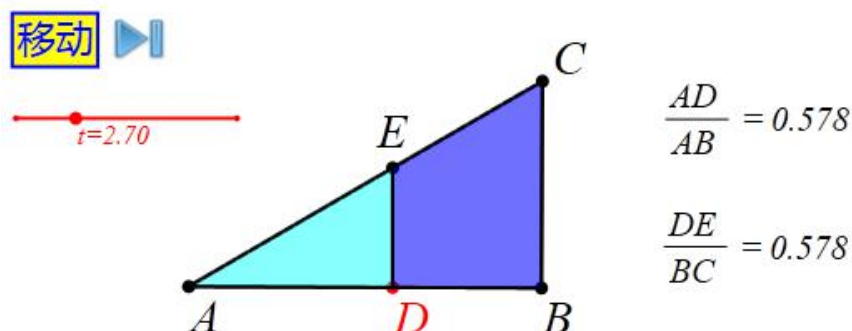


图 4

请你总结点 E 的位置关系对右侧一组数据影响的规律。

(2) 当三角形 ABC 不是直角三角形的时候，你所总结得到的规律和结论仍然成立吗？

打开文件“04-2 任意三角形的情形.dmr”，如图 5 所示，在三角形 ABC 中，点 D 在边 AB 上，DE//BC。

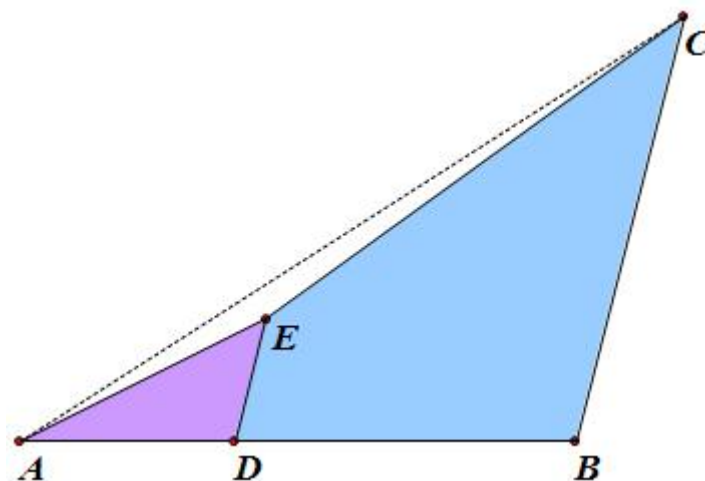


图 5

按住【Ctrl】键，依次选择点 A 和点 D，执行【测量】菜单中的【距离】命令，得到线段 AD 的测量结果，系统自动以变量 v000 记录这个测量结果。

重复类似操作，依次测量线段 AB、线段 DE、线段 BC 的距离，系统分别以变量 v001、v002、v003 记录这些测量结果。

执行【测量】菜单中的【表达式】命令，如图 6 所示，在弹出的输入框中输入：v000/v001，单击【确定】按钮，得到线段 AD 与线段 AB 的长度比值：

这时候会发觉测量结果是以“v000/v001=xxx”的形式表示的，不利于我们阅读，可以

这样修改它：右击该测量值，在弹出的输入框中，把\&前的内容改为： $\text{Abs}(\text{AD})/\text{Abs}(\text{AB})=$ ，  
点击确定按钮得出修改名称后的表达式值。



图 6

重复类似操作，测量线段 DE 与线段 BC 的长度测量值。

然后可以拖动点 E，观察点 E 的位置对两组线段长度比值的影响，并检验你在前面得到的结论是否仍然成立。

## 05 国王欠了多少债

关于国际象棋的起源，曾经有很多饶有兴味的传说。其中较为著名的一个是这样的：

在公元 5 世纪前后，古代印度有一个国王，他拥有至高无上的权力和难以数计的财富。但是权力和财富最终使他对生活感到厌倦，渴望着有新鲜的刺激。有一天，来了一位老人，他带着自己发明的国际象棋朝见国王。国王见了这新奇的玩意非常喜欢，就与老人对弈起来。但是他一旦上手，就舍不得放下了，竟留着老人一连下了三天三夜。到了第四天早上，国王感到非常满足，就对老人说道：“你给了我无穷的乐趣。为了奖赏你，我现在决定，你可以从我这儿得到你所要的任何东西。”

的确，这位国王是如此富有，难道还有什么要求不能满足吗？然而老人却慢条斯理地回答道：“万能的王啊，您虽然是世界上最富有的人，但恐怕也满足不了我的要求。”国王不高兴了，他皱起了眉头，严肃地说道：“说！哪怕你要的是半个王国。”于是，老人说出了自己的要求：“请国王下令在棋盘的第一格上放一粒小麦，第二格上放两粒小麦，第三格上放四粒，第四格上放八粒，就这样依次每格增加一倍小麦数量，一直到第六十四格为止。”

“可怜的人啊，你的要求就这么一点点吗？”国王不禁笑了起来，他立即命人取一袋小麦来，按照老人的要求数给他，但是一袋小麦很快就完了。国王觉得有点奇怪，就命人再去取一袋来……接着是第三袋、第四袋……小麦堆积如山，但是离第六十四格还远得很啊。只见国王的脸色由惊奇逐渐转为阴沉，原来国库里的 wheat 已经搬空了，却还只是数到了棋盘上的第五十格。

这么一个小小的棋盘，竟然需要这么多小麦？！根据老人所提出的要求，我们知道国王需要提供的小麦的数量为：

$$1+2+4+8+16+32+64+128+\dots\dots。$$

这么多小麦究竟是多少呢？难道富有的国王都满足不了象棋发明者这小小的要求？国王还欠了多少债呢？让印度国再生产一年的小麦能满足老人的要求吗？

### 【动手与实验】

1，动手、动笔、甚至动用计算器计算一下这些小麦的数量吧。

这一组数据，实际上就是：

第 1 个格子：1 粒小麦；

第 2 个格子：2 粒小麦；

第 3 个格子：2×2 粒小麦；

第 4 个格子：2×2×2 粒小麦；

第 5 个格子：2×2×2×2 粒小麦；

第 6 个格子：2×2×2×2×2 粒小麦；

第 7 个格子：2×2×2×2×2×2 粒小麦；

第 8 个格子：2×2×2×2×2×2×2 粒小麦；

第 9 个格子：2×2×2×2×2×2×2×2 粒小麦；

第 10 个格子：2×2×2×2×2×2×2×2×2 粒小麦；

第 11 个格子：2×2×2×2×2×2×2×2×2×2 粒小麦；

第 12 个格子：2×2×2×2×2×2×2×2×2×2×2 粒小麦；

.....

通过以上数据，我们可以发现这样一个规律，第  $n$  个格子中需要放置小麦的数量为  $(n-1)$  个 2 相乘的结果，也就是表示为： $2^{n-1}$ 。这样一来我们就可以非常方便地表示第  $n$  个格子中需要放置小麦的数量了，那么棋盘上一共需要放置小麦的个数为：

$$1+2+2^2+2^3+2^4+2^5+2^6+2^7+2^8+2^9+2^{10}+.....+2^{60}+2^{61}+2^{62}+2^{63}。$$

你可以在科学计算器（计算机中本身自己也带有）的帮助下，可以分别计算出每一项的值，然后将它们加起来，即：

$$1+2+4+8+16+32+64+128+.....+1152921504606846976+2305843009213693952+4611686018427387904+9223372036854775808。$$

然后进一步计算出这个式子的值。

2，要计算出这个  $8 \times 8$  方格象棋中所需要放置小麦的数目，我们知道要将这 64 个数相加 63 次才能得到最后的结果。那么我们要问，是否有更加简便的方法呢？因为，若这个象棋是  $20 \times 20$  个方格，难道我们需要重复加法运算 399 次？

我们设  $A=1+2+2^2+2^3+2^4+2^5+2^6+2^7+2^8+2^9+2^{10}+.....+2^{60}+2^{61}+2^{62}+2^{63}$ ，那么：

由  $A=2A-A$  得：

$$A=2(1+2+2^2+2^3+2^4+2^5+2^6+2^7+2^8+2^9+2^{10}+.....+2^{60}+2^{61}+2^{62}+2^{63}) -$$

$$(1+2+2^2+2^3+2^4+2^5+2^6+2^7+2^8+2^9+2^{10}+.....+2^{60}+2^{61}+2^{62}+2^{63})$$

$$\text{即：} A = (2+2^2+2^3+2^4+2^5+2^6+2^7+2^8+2^9+2^{11}+2^{11}+.....+2^{61}+2^{62}+2^{63}+2^{64}) -$$

$$(1+2+2^2+2^3+2^4+2^5+2^6+2^7+2^8+2^9+2^{10}+\dots+2^{60}+2^{61}+2^{62}+2^{63})$$

去掉式子中的括弧得：

$$A=2^{64}-1$$

这就是  $8 \times 8$  方格象棋中所要摆放小麦的数目。

这样我们利用计算器或者计算机就可以快速算出这个结果。利用 Hawgent 皓骏动态数学软件直接计算这个结果的操作是：

打开 Hawgent 皓骏动态数学软件，执行【测量】菜单中的【表达式】命令，如图 1 所示，在弹出的对话框中输入： $2^{64}-1$ ，点击【确定】即可得出计算结果，如图 2 所示。

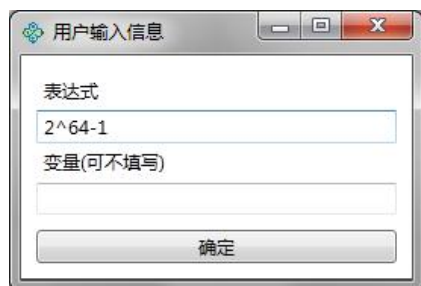


图 1

$$-1 + 2^{64} = 18446744073709600000.00$$

图 2

这个数有多大呢？看你能不能把它读出来！

3, 这些小麦究竟有多少？对于这样一个数，究竟有多大？我们可能还没有具体的认识，那么不妨把它换算成为我们较为熟悉的单位。

通过上网搜索，不难发现近 20 年来，全世界小麦产量最高的年份是 1997 年，当年全世界一共生产小麦 6 亿吨。中国世界上生产小麦最多的国家，也是唯一一个产量超过亿吨的国家，印度紧随其后。其中，近年来印度小麦的年最高产量为 0.76 亿吨。

那么请你计算一下， $8 \times 8$  方格象棋中所要摆放小麦的数目需要印度这个国家生产多长时间？建议将最后计算结果的单位换算为：年。

## 06 无独有偶汉诺塔

有三根杆子 A, B, C。A 杆上有 N ( $N>1$ ) 个穿孔圆盘，盘的尺寸由下到上依次变小。要求按下列规则将所有圆盘移至 C 杆：

- (1) 每次只能移动一个圆盘；
- (2) 大盘不能叠在小盘上面。

提示：可将圆盘临时置于 B 杆，也可将从 A 杆移出的圆盘重新移回 A 杆，但都必须遵循上述两条规则。

问：如何移？最少要移动多少次？

这个问题源自一个叫做汉诺塔（Hanoi Tower）的古老传说：

相传在印度的贝纳雷斯有座大寺庙，寺庙内有一块红木板，上面插着三根钻石棒，在盘古开天地，世界刚创造不久之时，神便在其中的一根钻石棒上从下到上地放了由大到小的 64 枚纯金的圆盘，这就是所谓的汉诺塔。有一个叫婆罗门的门徒，不分日夜地向这座寺庙赶路，抵达后，就尽力将 64 枚纯金的圆盘移到另一根钻石棒上。但是搬运的过程



常见的汉诺塔游戏有 8 个圆盘

中要遵守的规定是：每次只能搬一个，而且大的不能放在小的上面，但可以利用中间的一根钻石棒提供帮助。据说，等到婆罗门完成这项工作时，寺庙和婆罗门本身都崩溃了，世界在一声霹雳中也毁灭了。

你知道辛苦的婆罗门最少要搬运多少次吗？假如每秒钟移动一次，婆罗门要完成这个任务需要多长时间？

### 【动手与实验】

1, 请你利用汉诺塔亲手做一做实验：

假如在 A 柱子上只有 1 个圆盘，那么很简单，只需要移动 1 次即可完成任务。

假如在 A 柱子上只有 2 个圆盘，也是很简单，只需要移动 3 次即可完成任务。

假如在 A 柱子上有 3 个圆盘，请你数一数，需要多少个步骤才能完成任务？



假如在 A 柱子上有 4 个圆盘，请你数一数，需要多少个步骤才能完成任务？

假如在 A 柱子上有 5 个圆盘，请你数一数，需要多少个步骤才能完成任务？

假如在 A 柱子上有 6 个圆盘呢？

2. 看看是否有规律可循？

如果一个柱子上有多个圆盘，我们将这些圆盘从小到大依次简称：第 1 个、第 2 个、第 3 个、……。

通过前面的移动过程，我们不难理解下面的一个事实：

若要求把 A 柱子上的 64 个圆盘移动到 C 柱子上，则需要完成以下过程：（1）首先将前 63 个圆盘从 A 柱子上移动到 B 柱子上；（2）然后将第 64 个圆盘从 A 柱子上移动到 C 柱子上；（3）最后将前 63 个圆盘从 B 柱子上移动到 C 柱子上。如果我们用  $f(N)$  表示将  $N$  个圆盘从 A 柱子上移动到 C 柱子上所需要的步骤，那么在这里有：

$$f(64)=f(63)+1+f(63)=2f(63)+1。$$

而  $f(63)$  是多少呢？依次类推：

若要求把 A 柱子上的 63 个圆盘移动到 C 柱子上，则需要完成以下过程：

（1）首先将前 62 个圆盘从 A 柱子上移动到 B 柱子上；（2）然后将第 63 个圆盘从 A 柱子上移动到 C 柱子上；（3）最后将前 62 个圆盘从 B 柱子上移动到 C 柱子上。那么在这里有：

$$f(63)=f(62)+1+f(62)=2f(62)+1。$$

而  $f(62)$  又是多少呢？仍然可以类推得到：

$$f(62)=2f(61)+1；$$

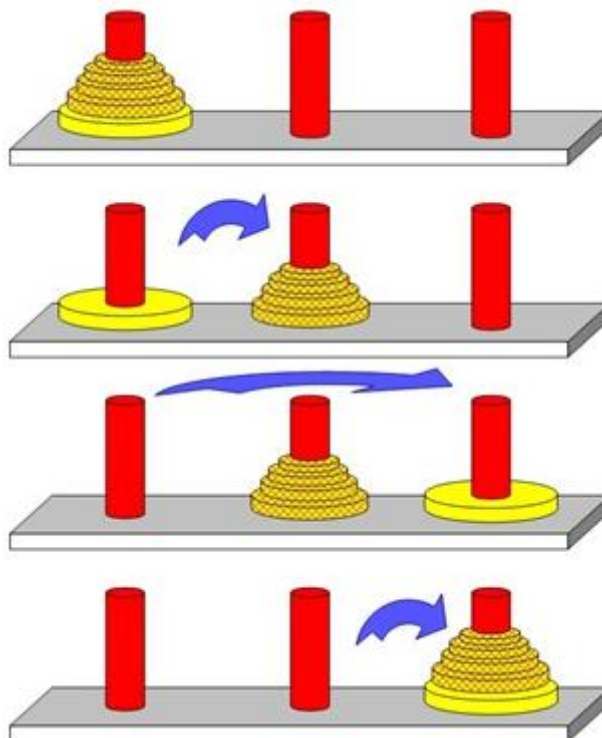
$$f(61)=2f(60)+1；$$

$$f(60)=2f(59)+1；$$

… …

$$f(n)=2f(n-1)+1；$$

… …



$$f(4)=2f(3)+1;$$

$$f(3)=2f(2)+1;$$

$$f(2)=2f(1)+1;$$

$$\text{而 } f(1)=1。$$

通过下面的变换过程，我们不难求得： $f(n)=2^n-1$ 。

$$\text{由 } f(n)=2f(n-1)+1, \text{ 可得： } f(n)+1=2[f(n-1)+1], \text{ 即： } \frac{f(n)+1}{f(n-1)+1}=2。 \text{ 所以：}$$

$$\frac{f(n)+1}{f(1)+1}=2^{n-1}, \text{ 解得： } f(n)=2^n-1。$$

因此，移动这 64 个圆盘所需要的步骤是： $2^{64}-1$ 。

假如一秒钟移动一个圆盘，那么移动这 64 个圆盘所需要的时间是多少？

上网搜索一下你就可以知道，地球现在的年龄为 45 亿年，据说太阳系的寿命也就是大约几百亿年。为什么要告诉你这些？将移动 64 个圆盘所需要的时间计算出来然后与它们比较一番你就明白了！

## 07 报纸珠峰试比高

你知道世界第一高峰----珠穆朗玛峰的高度吗？在珠穆朗玛峰面前，一个人的高度 显得非常渺小。但是很多人梦想能够成功攀登珠穆朗玛峰，因为那是勇者的象征。



你知道我们平时所阅读的报纸的厚度吗？在一个人面前，它的厚度显得微不足道。但是很多人喜欢收集报纸，积少成多，也许上千份或者几百份报纸就能堆成一米高。

那么，你认为需要多少份报纸堆在一起，才能“攀登”到珠穆朗玛峰那么高呢？

事实上，要找这么多的报纸是件非常艰巨的任务。下面我们就拿一张报纸试试看。

### 【动手与实验】

1， 将一张报纸不断地对折。

随便取一张报纸。



将一张报纸沿着它的中线对折 1 次；

将对折后的报纸再按照相同的方式对折 1 次；

将对折后的报纸再继续按照相同的方式对折 1 次；

... ..

这个过程不断地重复下去。

你会发现报纸的厚度变为原来的 2 倍、4 倍、8 倍、16 倍、……。

厚度不断增加的同时，报纸的面积是越来越小，因此越往后将报纸对折的难度越大。

说说看，你能将一张报纸不断地对折后的厚度有多高？它与你起初所拿取报纸的大小、厚度有关系吗？

## 2，要让报纸超珠峰

通过我们亲手折纸的操作过程可以理解，随着对折的过程不断地继续，报纸的面积也不断地减小，直到报纸的面积变得太小难以操作并且报纸厚度的增加而变得太硬，使得折叠的过程无法继续下去。

不过我们可以利用计算器或者计算机模拟这个折纸的过程。

上网搜索一下便可知道：我国最近一次，即 2005 年，对珠穆朗玛峰的测量高度为 8844 米，而一份普通报纸的平均厚度为 0.1 毫米。

请你设计一个实验的方法，并利用计算器或者计算机作为辅助工具，看一看将报纸对多少次之后，报纸的厚度能够第一次超过珠穆朗玛峰的高度？

## 08 闰年究竟何时来

今年是闰年吗？明年呢？

北京在 2008 年举办奥运会，那一年是闰年吗？

如表 1 所示，是历届奥运会召开的时间及地点。有人说，奥运会每次都在闰年召开。这种说法对吗？

届次	举办时间	举办城市
1	1896 年（4.06-4.15）	雅典[希腊]
2	1900 年（5.14-10.28）	巴黎[法国]
3	1904 年（7.01-11.23）	圣路易斯[美国]
4	1908 年（4.27-10.31）	伦敦[英国]
5	1912 年（5.05-7.27）	斯德哥尔摩[瑞典]
7	1920 年（4.20-9.12）	安特卫普[比利时]
8	1924 年（5.04-7.27）	巴黎[法国]
9	1928 年（5.17-8.12）	阿姆斯特丹[荷兰]
10	1932 年（7.30-8.12）	洛杉矶[美国]
11	1936 年（8.01-8.16）	柏林[德国]
14	1948 年（7.29-8.14）	伦敦[英国]
15	1952 年（7.19-8.03）	赫尔辛基[芬兰]
16	1956 年（11.22-12.08）	墨尔本[澳大利亚]
17	1960 年（8.25-9.11）	罗马[意大利]
18	1964 年（10.10-10.24）	东京[日本]
19	1968 年（10.12-10.27）	墨西哥城[墨西哥]
20	1972 年（8.26-9.11）	慕尼黑[德国]
21	1976 年（7.17-8.01）	蒙特利尔[加拿大]

22	1980 年（7.19-8.03）	莫斯科[前苏联]
23	1984 年（7.28-8.12）	洛杉矶[美国]
24	1988 年（9.17-10.02）	汉城[韩国]
25	1992 年（7.25-8.09）	巴塞罗那[西班牙]
26	1996 年（7.19-8.04）	亚特兰大[美国]
27	2000 年（9.15-10.01）	悉尼[澳大利亚]
28	2004 年（8.13-8.29）	雅典[希腊]
29	2008 年（8.08-8.24）	北京[中国]
30	2012 年（7.27-8.12）	伦敦[英国]

表 1

一位老爷爷说：“在北京举办奥运会那一年，我才刚过完我的第 18 个生日。”你知道这位老爷爷今年多少岁？

那么，究竟哪一年是闰年？以及闰年的规定有什么依据呢？

### 【动手与实验】

#### 1，一年究竟有多长？

据观察和实验，地球绕太阳旋转一周所需要的时间为 365 天 5 小时 48 分 46 秒。这个时间被称为一个太阳年。这是事实，是自然规律。

而太阳年的时间是如何计算得到的呢？它是两个春分之间的平均间隔时间。春分是我国农历的二十四节气之一，在春分这一天，太阳位于黄经  $0^{\circ}$ ，全球昼夜几乎等长，全球无极昼极夜现象。春分之后，北极附近开始极昼，北半球各地白天开始变长夜晚开始变短；南极附近开始极夜，南半球各地夜晚开始变长白天开始变短。

请你动手算一算，这个 5 小时 48 分 46 秒，换算成以天为单位，它的值是多少呢？

#### 2，如何规定平闰年？

实际上，历法的制定经历了一个漫长的过程：

在古代，平均每隔 365 天，尼罗河就发生一次洪水泛滥。因为每当天狼星在清晨升起，尼罗河的河水就开始上涨，所以埃及人把天狼星在两次早晨升起的间隔时间当作一年，称作埃及年或埃及历。埃及年定位每年 12 个月，每月都是 30 天，在年终再加上 5 天当作假期，那么一年就一共是 365 天。

罗马人从公元前 45 年起采用修正的埃及历。它是罗马共和国执政者儒略·凯撒（Julius Caesar，公元前 102—公元前 44 年）从埃及带回来的。修正的方法是把埃及年中多余的 5 天分插在全年之中：有 4 个月是 30 天，有 7 个月是 31 天，而二月份被认为是“不祥之月”，仅有 28 天。但是这样一年仍然是 365 天，与太阳年的时间不一致，于是再规定每第四年的二月有 29 天，这一年称为“闰年”，这一年的二月成为“闰月”。这就是儒略历或儒略年。

儒略历是在公元前 46 年制定的。由于儒略出生在 7 月，为了表示他的伟大，决定将 7 月改为“儒略月”，连同所有的单月都规定为 31 天，双月为 30 天。这样一年多出一天，2 月是古罗马处死犯人的月份，为了减少处死的人数，将 2 月减少 1 天，为 29 天。

儒略的继承人奥古斯都生在 8 月，他仿照儒略的做法，把 8 月增加了 1 天，定为“奥古斯都月”，并把 10 月、12 月也改为 31 天，将 9 月、11 月改为 30 天。全年又多出了 1 天，他又从 2 月减少了 1 天，于是 2 月变成了 28 天，到闰年才 29 天。这样沿袭下来，就有 7 月前单月为大月，7 月后双月为大月，二月 28 天。

可见，哪个月有多少天并不是自然规律，而是人为制定的。

$$\text{通过 } \frac{48 + \frac{46}{5 + \frac{60}{60}}}{24} = \frac{10463}{43200} \approx 0.2422, \text{ 可知一个太阳年为 } 365.2422 \text{ 天。}$$

显然，我们不能规定一年之中的天数为小数，而应该是整数。

由  $\frac{10463}{43200} \times 4 = \frac{10463}{10800} \approx 0.9688$  可知，若使用埃及历，则每四年，就会比太阳年差不多少一天。这就是儒略历规定每四年产生一个闰年的道理。

但是，通过计算我们知道， $\frac{10463}{43200} \times 4 = \frac{10463}{10800}$ ，并不等于 1，而是比 1 要小。这个结果比 1 小，说明可能会出现什么问题呢？这个结果究竟比 1 小多少呢？请你动手算一算。

## 09 揪住误差不能放

### 【问题与思考】

前面我们知道，一个太阳年是 365 天 5 小时 48 分 46 秒，即  $365\frac{10463}{43200}$  天。

根据儒略历，规定每 4 年有一个闰年，在那一年的 2 月有 29 天。即每 4 年，就有一年是 366 天。

但是， $4 \times \frac{10463}{43200} = \frac{10463}{10800} \approx 0.9688 < 1$ ，也就是说每 4 年有一个闰年的话，比太阳年

又多了。多出的时间就等于：

$$1 - 4 \times \frac{10463}{43200} = \frac{337}{10800} \approx 0.0312。$$

多出的这个时间又有什么意义呢？算一算就知道。

### 【动手与实验】

1，多久能多出 1 天？

我们说，按照儒略历计算，每 4 年就比太阳年多计算了  $\frac{337}{10800} \approx 0.0312$  天。年复一年，积少成多，时间过得久了，误差就变大了，那么这种历法的缺陷就显露出来了。请你计算一下，大约需要多少年，按照这种历法就比太阳年多出了 1 天？

2，格里历已经够用

为了使得历法更加接近太阳年，1582 年罗马教皇格里高利（Gregory）十三世将儒略年进一步修改，具体规定如下：

平年有 365 天，闰年有 366 天；

7 个大月：一、三、五、七、八、十和十二月，每月 31 天；

4 个小月：四、六、九和十一月，每月 30 天；

平年的二月为 28 天，闰年的二月为 29 天；

年数是 4 的倍数者为闰年，年数为 100 的倍数者为平年，但年数是 400 的倍数者仍为闰年。

这就是格里历，即“四年一闰，百年少一闰，四百年加一闰”，它是目前世界各地通用的历法。

前面我们知道了  $4 \times \frac{10463}{43200} = \frac{10463}{10800} \approx 1$ ，是四年一闰的道理。



现在规定百年少一闰，那么请你计算一下按照格里历，它的每 100 年与太阳年的误差是多少？算出了结果，你就会明白“四百年加一闰”的道理。

### 3，不依不挠的纠缠

格里历的 100 年是  $365 \times 100 + \frac{100}{4} - 1 = 36524$  天。而太阳年的 100 年是  $365 \times 100 + 100 \times \frac{10463}{43200} = 36524 \frac{95}{432} \approx 36524.22$ 。因此，100 个格里年比 100 个太阳年少了 0.22 天。那么 400 个格里年之后，就少了  $4 \times \frac{95}{432} = \frac{380}{432} \approx 0.88$  天。因此，每个“四百年加一闰”。

我们知道，“四百年加一闰”，结果是每 400 格里年比 400 太阳年就又多了  $1 - \frac{380}{432} = \frac{52}{432} \approx 0.12$ ，那么 4000 格里年之后，比 4000 太阳年就多了  $10 \times \frac{52}{432} = \frac{520}{432} \approx 1.20$  天。因此我们可以在格里历法上再增加一条规定：

**“四千年少一闰”！**

不过，这实际上已经很遥远了。

当然，我们还可以继续纠缠不放，因为“四千年少一闰”，结果 40000 格里年就比 40000 太阳年少了  $10 \times (\frac{520}{432} - 1) = \frac{880}{432} \approx 2.04$  天。因此，我们可以继续在格里历法中增加一条规定：

**“两万年加一闰”！**

“两万年加一闰”的结果是什么呢？格里年就比太阳年又多了一些时间！

这样，无尽不断地纠缠下去，就会使得我们所使用的历法越来越趋近于自然规律，越来越精确。但是对于现实世界来说已经变得没有什么必要，因为几千、几万年之后的事情，完全交给让后人来处理吧。

### 4，误差绵绵无绝期？

前面根据我们的计算结果可以规定：

**“四年一闰，百年少一闰，四百年加一闰，四千年少一闰，两万年加一闰”。**

但是我们发现，即使这样的历法也与太阳年没有完全吻合，还是存在一定的误差。

当然，历法还可以继续补充和完善。那么你认为，需要再增加一条或者几条闰年的什么规定就能使得我们规定的历法与太阳年完全吻合，或者说不存在任何误差？还是说，这种

误差绵绵无期，会一直存在而无法消失或避免。

请你通过计算，让数字和事实说话。

#### 5，如果测量再精细

当然，太阳年 365 天 5 小时 48 分 46 秒的这个时间，也是测量得到的结果，相信它本身还是存在一定的误差。随着这个结果的不断精确，例如变为 365 天 5 小时 48 分 46 秒 281.31 毫秒，那么则意味着什么？请大家讨论。

# 10 简单直线再认识

书本的边沿、手电筒发出的光和数轴都是直的，像这种图形都叫做直线。

顾名思义，直线就是直的。

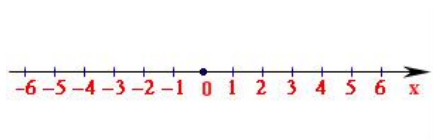


图 1

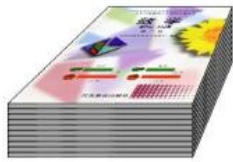


图 2



图 3

启动 Hawgent 皓骏动态数学软件软件，单击工具条中的【画笔】工具，如图 4 所示：这时候光标就变为铅笔的图案。就像在在纸上画图一样，你可以手握鼠标在计算机中画点线和圆。下面我们画出一条直线：

(1) 在工作区中单击鼠标，然后松开，如图 4 所示：即可自动作出一个点，计算机自动将这个点的名字命名为 A。



图 4



图 5



图 6

(2) 单击点 A，并且按住鼠标拖动一段距离后松开，做出另外一个点 B，以及 A、B 之间的直线，叫做直线 AB，如图 5 所示。

单击工具条中的【选择】工具，如图 6 所示，光标又返回到选择状态，可以理解为放下手中的铅笔。当我们需要用画笔画图时，就进入画图状态；当我们画图的工作完成时，就返回到选择状态。

在直线 AB 上单击鼠标右键，这时弹出直线 AB 的属性对话框。在这个对话框中可以设置直线的颜色、画线的宽度和画线类型等各种信息。



图 7



图 8

我们在直线的属性对话框中的【对象-AB】标签卡中看到【端点画箭头 (0-3)】输入框，输入 0-3 的结果依次是：0-线段、1-从终点指向起点的箭头、2-从起点指向终点的箭头、3-双向箭头，例如改输入：1，单击对话框下侧的【确定】按钮，结果如图 9 所示：



图 9

再次打开直线 AB 的属性对话框，在【画笔】标签卡下，在【线型】中点选【虚线】选项，单击对话框下侧的【确定】按钮，结果如图 9 所示：



图 10

按住【Ctrl】键，或者点击左下角的多选选项进入多选状态。（注：下文中为叙述方便将不在具体多选的操作方式，直接以“同时选择”或者“依次选择”来说明。），依次选择点和点 B，执行【画图】菜单下【直线】子菜单中的【直线】命令，得出直线 AB；

选中直线 AB，执行【画图】菜单中的【跟踪】命令，增加了直线 AB 的跟踪对象；

点选【视图】菜单中的【对象框】选项，可以在弹出的对象框中见到跟踪对象。如图 11 所示：



图 11

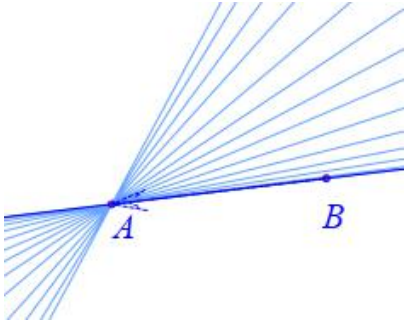


图 12

拖动点 B，如图 12 所示：可以观察到经过点 A 的直线有任意多条。而当 B 的位置确定时，经过点 A 的直线的位置就是确定的。由此我们可以说：经过两点的直线是可以确定的。即：

两点确定一条直线。

### 【思考与练习】

启动一个新的《Hawgent 皓骏动态数学软件》文档。

- (1) 单击工具条中的【画笔】工具，在作图区中作出任意线段  $AB$ 。
- (2) 单击点  $B$  并按住拖动鼠标到另外一个位置，作出线段  $BC$ 。
- (3) 单击点  $C$  并按住拖动到点  $A$  后松开鼠标，作出线段  $CA$ 。

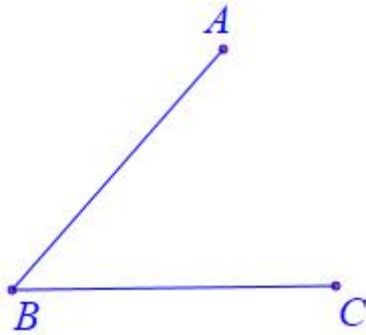


图 13

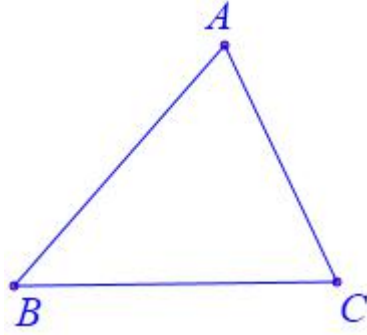


图 14

这样就构成了一个由三条直线段构成的图形，就叫做三角形，也叫三边形。三角形是最简单的直线图形。三角形用它的顶点名字表示，例如这里可以叫作三角形  $ABC$ 。

- (4) 做任意线段  $CD$ ，连接线段  $DA$ ，就出了四边形。

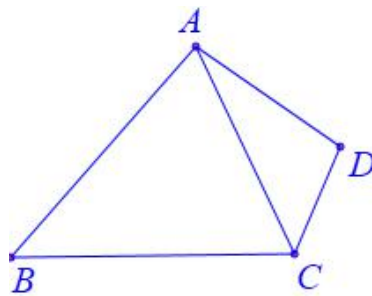


图 15

可以看到，四边形可以由两个三角形所组成。

线段  $CA$  被称作四边形  $ABCD$  的对角线。对角线是多边形中不相邻的两个顶点之间连接线段所构成。

这样，点  $B$  和点  $D$  之间还存在四边形的另外一条对角线。所以四边形有 2 条对角线。

在上面的三角形  $ABC$  中的对角线是什么？

三角形有对角线吗？

下面分别是五边形和六边形，以及它们的对角线：

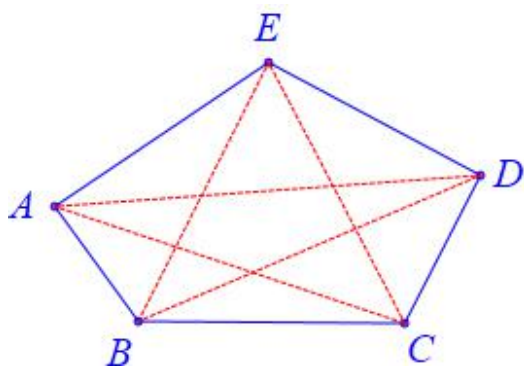


图 16

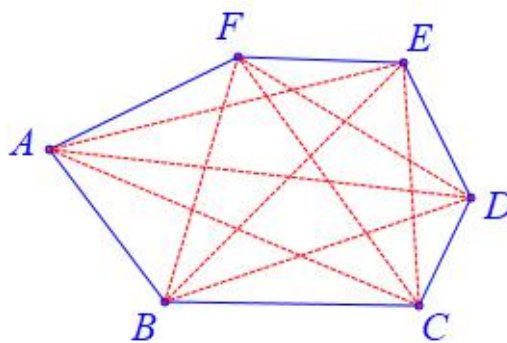


图 17

数一数就知道五边形有 5 条对角线，六边形有 9 条对角线。

在计算机上画出一个七边形，你能画出它的多少条对角线？

在八边形上你能画出多少条对角线？

打开文件“10-01 多边形的对角线.dmr”，可以观察到八边形和它的对角线。

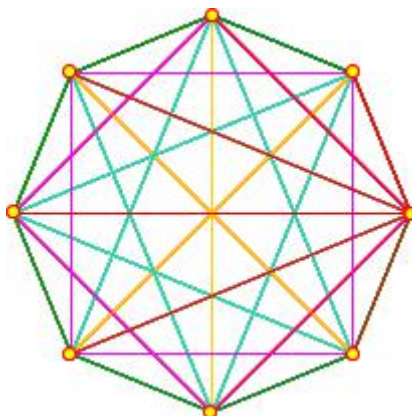


图 18

数一数八边形对角线的条数，与你所画出的是否一致？

单击“边数减小一”按钮，可以将多边形的边数减少一；单击“边数增加一”按钮，可以将多边形的边数增加一。

观察九边形、十边形、十一边形、...，并数一数它们对应对角线的条数。

你猜测一下二十边形的对角线有多少条？二十一边形的对角线有多少条？

若多边形有  $N$  个顶点，你能猜测它有多少条对角线吗？并说明你的理由。

## 11 直线运动方向同

单击【画笔】工具，绘制任意线段 AB。

鼠标在 AB 任意位置单击即可做出线段 AB 上的点 C。

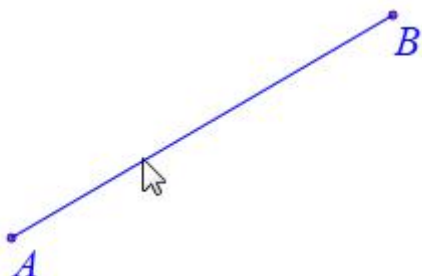


图 1

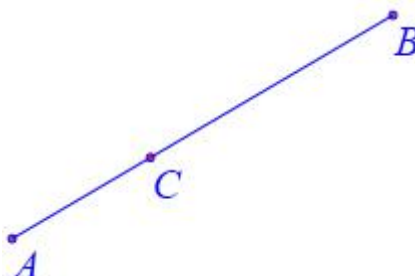


图 2

单击【选择】工具，返回到选择状态。拖动点 C，观察一下点 C 的运动特点。

可以看到点 C 可以被拖动，而被限制在直线 AB 上运动，类似这样的点我们称之为半自由点。

选择点 C，执行【视图】菜单中的【动画框】命令，在弹出的属性的对话框中选择：C。选择运动类型为：一次，保留其他属性不变。

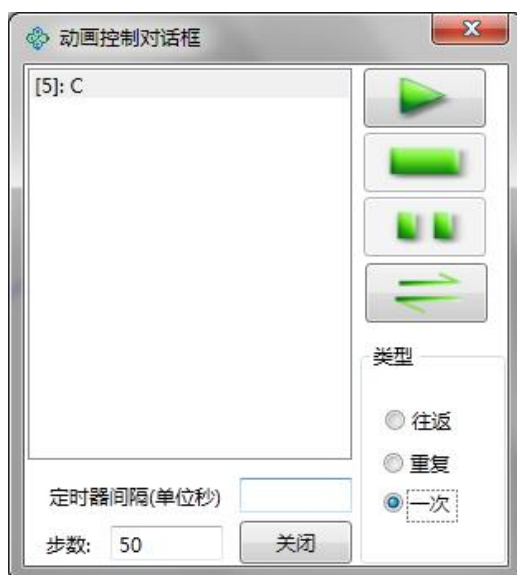


图 3

这时单击动画按钮 , 可以发现点 C 从点 A 的位置沿着直线 AB 的方向匀速地运动

到了点 B。

点 C 的这种运动过程，叫做匀速直线运动，它是自然界中最基本、最简单的运动形式之一。

匀速直线运动的特点就是，运动的方向不变，并且在任何相等的时间内经过的距离都相等。

火车开动后，在平稳地前进过程中就是匀速直线运动。你还能说出生活中作匀速直线运动的其他例子吗？



## 12 处处存在的圆形



图 1



图 2



图 3



图 4

你认识上面的图案吗？

它们有一个共同特点：它们的形状都是圆的。

启动 Hawgent 皓骏动态数学软件，打开文件“12-01 圆的形成.dmr”。可以看到线段  $OA$ ，它的长度是固定的。

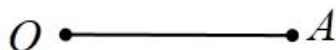


图 5

拖动点  $A$ ，可以观察到  $OA$  的长度保持不变。为验证这一点，你还可以测量线段  $OA$  的长度，具体操作是：选择线段  $OA$ ，单击菜单“测量”菜单中的“线段或者向量的长度”命令，即可得到线段  $OA$  长度的测量文本。

跟踪点  $A$ ，生成它被拖动过程中形成的踪迹。

选择点  $A$ ，执行【画图】菜单中的【跟踪】命令。即可生成了点  $A$  的跟踪对象，由于点  $A$  还没有运动，所以还看不跟踪轨迹，但是我们可以在对象框中观察得到。

再次拖动点  $A$  可以，可以观察到跟踪点  $A$  留下的踪迹。

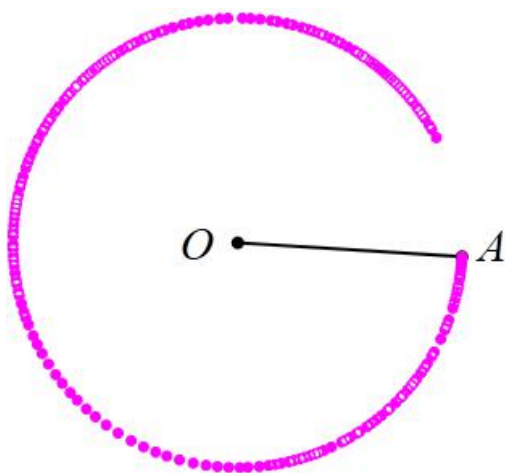


图 6

跟踪点 A 的，形成的图形就是圆。由此可知：

圆是到定点的距离等于定长的点的轨迹。这里的定点就是 O，定长线段就是 OA。

根据圆的定义，已知圆心和半径就可以直接作出对应的圆。这种情况可以分为两种：

(1) 例如已知点 A 和点 B，以点 A 为圆心，以 AB 的长度为半径画圆。操作是：

单击【画笔】工具，在点 A 上右击按住不放开，然后拖动鼠标至点 B 的位置（点 B 变为红色提示）后松开鼠标，即可作出以点 A 为圆心、经过点 B 的圆。

(2) 例如已知点 D 和线段 EF，以点 D 为圆心、EF 的长度为半径画圆。操作是：

依次选择点 D、点 E 和点 F，执行【画图】菜单下【圆和圆弧】子菜单中的【已知圆心和半径的圆】命令，即可得出要作的圆。结果如图 7 所示：

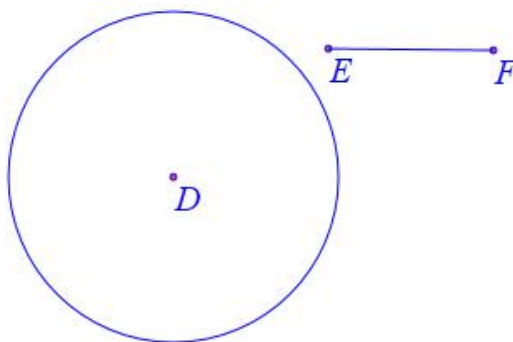


图 7

(3) 例如已知原点 O，作出以 O 为圆心、半径为 1.5 的圆。操作是：

选择有点 O，执行【画图】菜单下【圆和圆弧】子菜单中的【已知圆心和半径的圆】命

令，即可得出要作的圆。

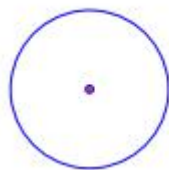


图 8

### 【思考与练习】

在新建文档中，绘制点 A、点 B 和点 C。

- (1) 绘制以点 C 为圆心、经过点 B 的圆，设置为红色。
- (2) 绘制以点 C 为圆心、半径等于线段 AB 长度的圆，设置为蓝色。
- (3) 绘制以点 C 为圆心、半径等于  $r$  的圆，设置为绿色。

拖动点 A、观察三个圆周如何改变。

拖动点 B、观察三个圆周如何改变。

拖动点 C、观察三个圆周如何改变。

## 13 稍稍移动方向变

- (1) 隐藏坐标系中的坐标轴，只保留原点 O；
- (2) 选择点 O，执行【画图】菜单下【圆和圆弧】子菜单中的【半径圆】命令，在弹出窗口中输入半径：3，点击【确定】做一个半径为 3 的圆；
- (3) 单击【画笔】工具，鼠标指向圆 O 上任意一点点击即可做出圆 O 上的任意点 A。

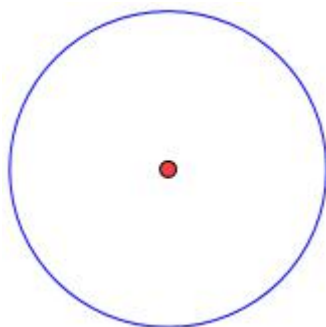


图 1

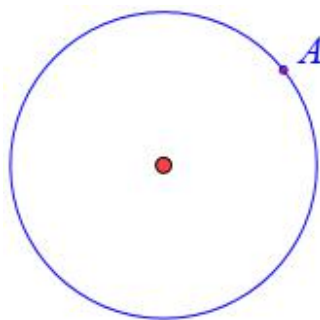


图 2

- (4) 单击【选择】工具，依次选择点 A 和点 O，执行【变换】菜单中的【旋转】命令，如图 3 所示，在弹出的对话框中输入旋转次数：1，旋转角：t，点击确定得到旋转后点点 B。连结 OB。



图 3

- (5) 执行【插入】菜单下【常用按钮】子菜单中的【变量一次运动】命令，如图 4 所示：在弹出的对话框中：选择【动画】项，把它的【程序命令】框的内容改为：

`VarAnimation(t,0,360,50,3);`

点击【修改动作】按钮，再点击【确定】按钮完成。

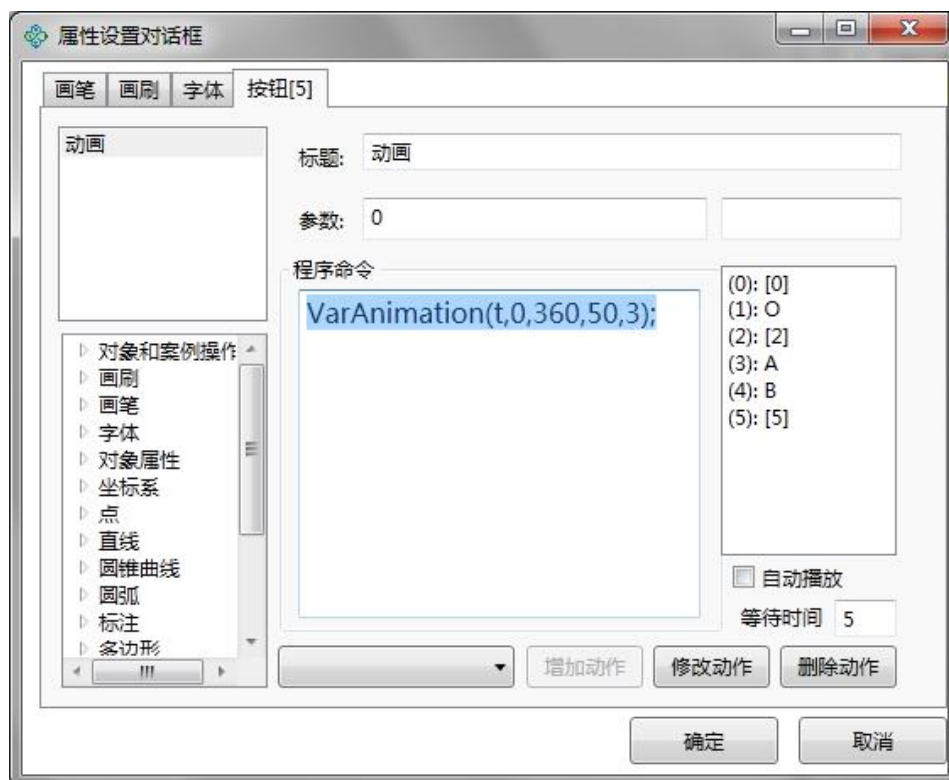


图 4

(6) 单击【动画】按钮，可以观察到点 B 沿着圆周运动。

点 B 的这种运动方式叫做匀速圆周运动。

匀速圆周运动是指：物体沿圆周运动，在相等的时间里在圆周上经过的距离相等。

匀速圆周运动是最简单的圆周运动方式。

### 【思考与练习】

(1) 停放着的自行车，用手拨动一下后轮，轮子就开始转动起来，这是轮子边沿上的点就绕轮轴做匀速圆周运动。你还能说出生活中作匀速圆周运动的其他例子吗？

(2) 为了巩固之前学习过的内容，请完成完成下面的操作：

右击【动画】按钮，在弹出的属性对话框中，把【动画】的【程序命令】修改为：  
VarAnimation(t,0,-180,50,3);

点击【修改动作】按钮，再点击【确定】按钮完成；这是把变量 t 的运动范围变为 0 到-180。

选择线段 OB，执行【画图】菜单中的【跟踪】命令。

单击【动画】按钮，观察点 A 的运动过程，结果如图 5 所示：我们可以把点 A 的运动过程描述为：

从圆 O 上点 A 处出发，按照顺时针顺序运动半周。

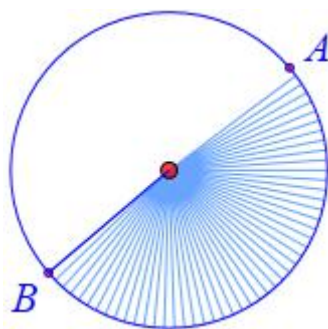


图 5

重新打开动画按钮的属性对话框，把参数范围，最小值和最大值，分别设置为以下几组数值，观察并叙述点 B 的运动过程： $2 \times 180$  到  $3 \times 180$ ； $4 \times 180$  到  $5 \times 180$ ； $2 \times 180$  到  $5 \times 180$ ； $4 \times 180$  到  $7 \times 180$ ； $2 \times 180$  到  $2.5 \times 180$ ； $4 \times 180$  到  $4.5 \times 180$ ； $180/4$  到  $5 \times 180/4$ ； $180/4$  到  $-3 \times 180/4$ ； $-3 \times 180/4$  到  $180/4$ ；

(3) 如何说明匀速圆周运动的过程中，运动的方向在任何一个时刻都不相同呢？请你设计一种方案，然后与同学们进行交流和讨论。

## 14 如何最快吃食物

在一个正在旋转的转盘中央有一只蚂蚁，在转盘的边沿处有一份食物。请你为蚂蚁设计一条路线，如何爬行才能吃到食物时所经过的路程最短？

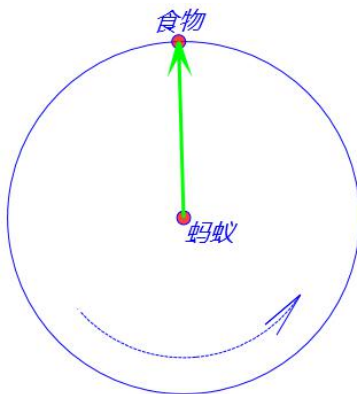


图 1

蚂蚁是很聪明的，它不考虑转盘是否在转动，直接朝转盘的方向爬去，并且最终吃到了食物。你认为这是吃到食物所经过的最短路程吗？很显然，在转盘静止的情况下，这的确是正确的。

实际上，根本无须考虑转盘是否在旋转，在转盘上蚂蚁朝着食物的直线方向爬行，所经过的路程都是最短的，而且蚂蚁所经过的路程都是相同的。

然而，通过我们的眼睛观察到的爬行的蚂蚁所经过的路线是什么形状呢？我们自己动手试试看：

(1) 只显示坐标原点  $O$ ，而隐藏坐标系中的其他对象；

(2) 选择点  $O$ ，执行【画图】菜单下【圆和圆弧】子菜单中的【已知圆心和半径的圆】命令，在弹出的对话框中输入：2，单击【确定】按钮即可做出以点  $O$  为圆心、半径为 4 的圆。

然后在圆上取一点，当作食物所在的位置；并连接圆心与这一点之间的线段，作为蚂蚁爬行的路线，然后在路线上任意取一点当作蚂蚁：

(3) 单击【画图】工具，在圆  $O$  的圆周上任意作一点，右击该点，在弹出的属性对话框中将其名字修改为  $P$ 。

(4) 连结线段  $OP$ ，在线段  $OP$  上任意取一点，将其名字修改为  $Q$ 。

跟踪蚂蚁对应的点  $Q$ ，并增加点  $Q$  和点  $P$  的动画按钮：

(5) 执行【插入】菜单下【常用按钮】菜单中的【对象一次运动】命令，在弹出的对话框中点选“动画”，把“程序命令框”中的内容改为：

```
ClearAllTrace();
```

```
ObjAnimation(3,200,3);
```

```
ObjAnimation(6,200,3);
```

点击【修改动作】按钮，并点击【确定】按钮完成点 P 在圆周上作匀速圆周运动和 Q 在线段 OP 上运动的动画按钮。

(6) 单击【选择】工具，单击点 Q，执行【画图】菜单中的【跟踪】命令。

结果如图 2 所示：

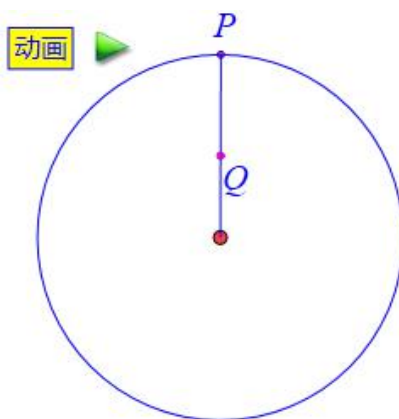


图 2

点 Q 的动画按钮能够让蚂蚁从中心平移到食物对应点 P 所在的位置，点 P 的动画按钮能够使得转盘转动起来。

单击点 Q 的动画按钮，点 Q 作直线运动；单击点 P 的动画按钮，点 Q 随盘子一起做圆周运动。当然，以让点 Q 同时做直线运动和圆周运动：

(7) 单击【动画】按钮，则点 Q 在作匀速圆周运动的同时作匀速直线运动。这时可以观察到点 Q 留下的踪迹：



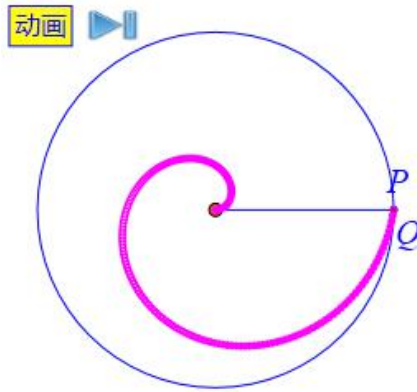


图 3

上面的过程是，当点 Q 沿直线 OP 从点 O 运动到点 P 的同时，转盘旋转了一周。

这种曲线叫作等速螺旋曲线，是由匀速直线运动与匀速圆周运动的组合所产生。

据说第一个研究这种曲线的人是古代希腊的数学家阿基米德，故也叫做阿基米德螺线。。

若点 Q 沿直线 OP 从点 O 运动到点 P 的同时，转盘旋转两周，这时的等速螺线是什么形状的呢？

(7) 执行【插入】菜单下【常用按钮】菜单中的【对象重复运动】命令，在弹出的对话框中点选“动画”，把“标题”内容改为：双周螺旋动画，“程序命令框”中的内容改为：

```
ClearAllTrace();
ObjAnimation(3,200,0);
ObjAnimation(6,400,0);
```

点击【修改动作】按钮；点选“停止”，把“程序命令框”中的内容改为：

```
ClearAllTrace();
ObjAnimation(3,200,0);
ObjAnimation(6,400,0);
```

点击【修改动作】按钮，并点击【确定】按钮完成点

然后点击【双周螺旋动画】按钮，可以观察到当点 Q 从点 O 运动到点 P 的过程中，点 P 运动了 2 周。

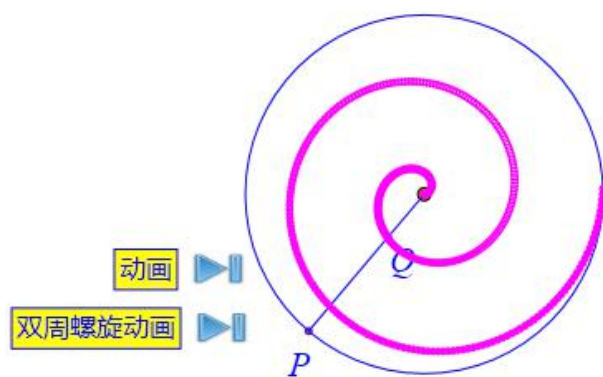


图 4

当点 P 旋转 1 周时，点 Q 正好运动到线段 OP 的中点位置。由此可见，对于等速螺线来说，每转一圈往外增加的距离都相等，“等速”之命也因此而来。

假如点 Q 沿直线 OP 运动的很慢，转盘又不停的旋转，则结果可以是类似下边的情况：

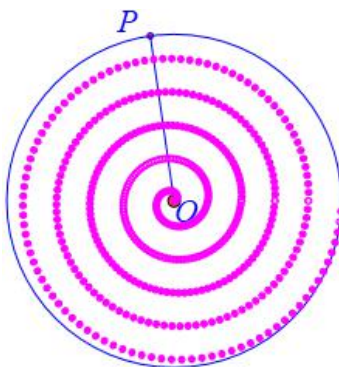


图 5

### 【思考与练习】

这种情形的等速螺线曲线，不必通过动画跟踪实现，而可以通过生成轨迹的形式直接生成。操作步骤是：

通过 Hawgent 皓骏动态数学软件窗口右下侧的【程序】标签，在程序的输入框中输入：  
输入：Locus(3,6,6);

再点按 F8 键，生成等速螺线的轨迹。

## 15 两种运动可互换

熏蚊子的盘香是一条等速螺线。卷筒纸的横截面也是一条等速螺线。你还能说出生活中哪些是等速螺线？



图 1



图 2

在机械上，有些凸轮的外形是等速螺线。凸轮是很多机器非常重要的部件。

打开文件“15-01 圆周运动转变为直线运动.dmr”，可以看到一个简化的凸轮模型。

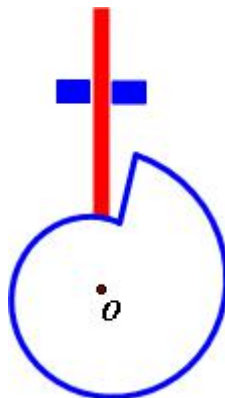


图 3

单击“动画”按钮，凸轮开始工作。

凸轮旋转的时候，拖动红色连杆来回作等速直线运动。

利用等速螺线制造的凸轮竟然可以将等速旋转运动转变为等速直线运动！

法螺的壳上也是一条螺旋曲线。



图 4

不过，它的每一圈之间不是等宽的，而是成倍增加的，这种螺旋线叫做对数螺线。

在向日葵的花盘上，我们可以看到葵花子的排列情况也是一条一条的对数螺线。

对数螺线在生物界普遍存在，它表明了生物生长的一般规律。

为什么这些生物要按照对数螺线生长呢？

主要原因有两方面：

(1) 这些生物在生长过程中，是绕着圈生长的，这样可以使身体占的地方小，也比较结实。

(2) 生物的生长要依靠细胞分裂，而细胞分裂是按照 1、2、4、8、16...不断地加倍进行的。随着不断成长，身体的宽度也会不断增加。

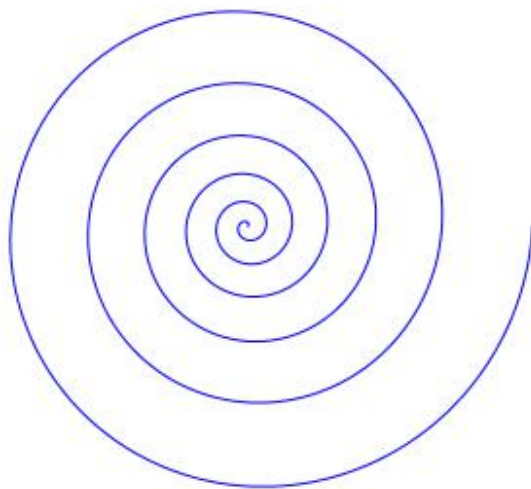


图 5

容易知道，对数螺线的生成过程也可以通过圆周运动和直线运动的组合而实现。

圆周运动仍然可以是匀速圆周运动，而直线运动则对应为速度不断增加的直线运动。

#### 【思考与练习】

研究下面的问题，并思考这些问题与螺旋曲线之间有什么关系？

(1) 有一个底面直径为 6、高为 12 的圆柱，在它的下底面的 A 点有一只蚂蚁，它想吃到上底面上与 A 点相对的 B 点处的食物，蚂蚁沿侧面如何爬行，才能使得爬行的路程最短？

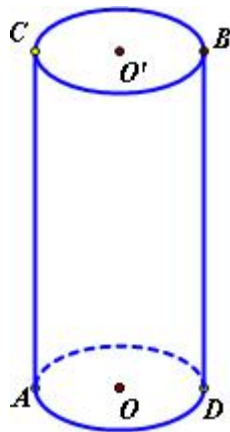


图 6

请你想象一下，蚂蚁经过的路线可能有哪些？

打开文件“15-02 圆柱侧面上爬行的蚂蚁.dmr”，可以观察到蚂蚁可以选择爬行的红色路线。

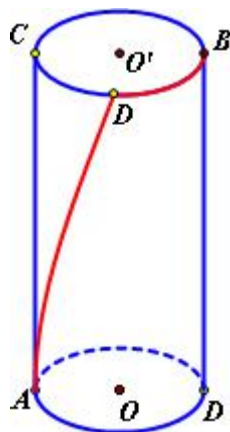


图 7

拖动点 D，可以改变蚂蚁的爬行路线。对于点 D 在不同位置所对应的爬行路线，你了解那条路线是最短的吗？

当点 D 在圆弧 CB 之间时，蚂蚁所经过的路线 AD 对应曲线也是一条螺旋曲线，这种螺旋曲线叫作圆柱螺旋线。

圆柱螺旋线的特点是：一个动点沿着圆柱等速旋转，同时又等速上升。

圆柱螺旋线也是由等速圆周运动与等速直线运动的组合而生成。不过这里直线运动的方向与圆周运动所在的平面垂直，它是一条空间曲线。

单击按钮“侧面展开”，可以观察到圆柱的侧面展开图，以及蚂蚁爬行路线的平面图形。

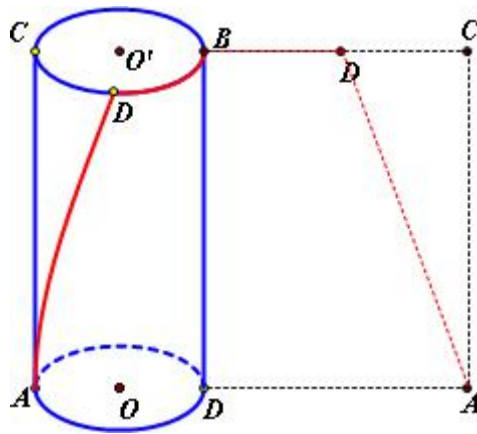


图 8

这时蚂蚁爬行的螺旋曲线 AD 和圆弧 DB 在平面图形中等价为折线段 ADB。

容易知道，当点 D 与点 B 重合时，蚂蚁所经过的路程最短。此时，蚂蚁在圆柱上所经过的路线为一条圆柱螺旋线。

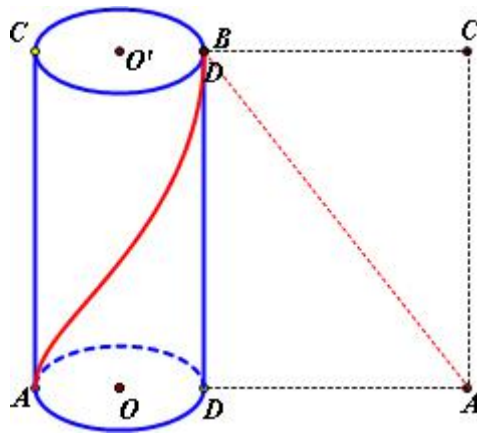


图 9

(2) 还是蚂蚁爬行路线最短的问题，请阅读下面的内容：

有一个圆柱，它的高  $h$  cm，底面半径 3 cm，在圆柱下底面的 A 点有一只蚂蚁，它想到上底面上与 A 点相对的 B 点处的食物，当高为 10 cm、8 cm、6 cm 和 4 cm 时，沿圆柱表面爬行的最短路程是多少？

打开文件“15-03 在圆柱侧面上爬行的蚂蚁.dmr”，研究  $h$  在不同情况下，蚂蚁在圆柱表面爬行最短路程的问题。

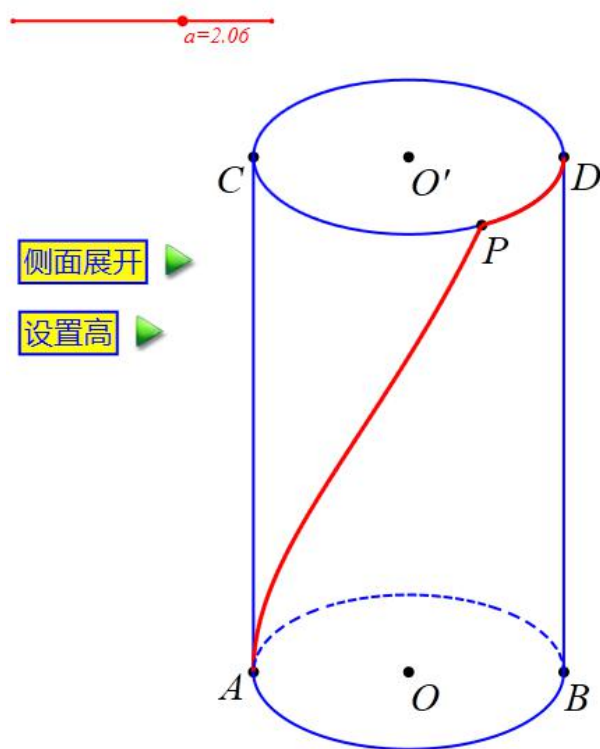


图 10

点击【设置高】按钮，输入高的数值，改变圆柱的高度。可以让圆柱的高度转变为对应的数值。

## 16 车轮为何是圆的

有一天阿龙对小强说：“我发现了一个秘密，车轮子都是圆的。”这下将小强逗乐了。他笑着说：“你见过三角形、正方形的车轮子么？车轮本来就是圆的嘛。”



图 1



图 2

在水平路面上行驶的汽车，他的轮子一定需要是圆形吗？如果是三角形或正方形的可以吗？

### 【动手与实验】

打开文件“16-01 多边形车轮的汽车.dmr”，可以看到由轮子为三角形的汽车。



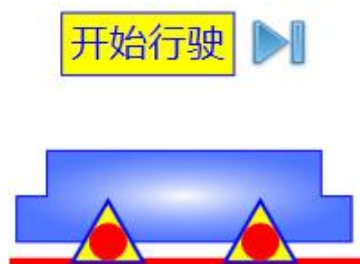


图 3

单击“开始行驶”按钮，汽车开始行驶。你观察到汽车在行驶过程中发生了什么？

这样的汽车，你敢于乘坐吗？

单击“回到起点”按钮，汽车返回到最初的位置。

向右拖动点“轮子形状”，则可以将汽车的轮子形状改变为四边形、五边形或者六边形。

然后再次让汽车行驶。观察汽车行驶过程中的特点，以及前后有什么变化。

继续打开文件“16-02 椭圆的滚动.dmr”，可以观察到椭圆形车轮滚动的过程。

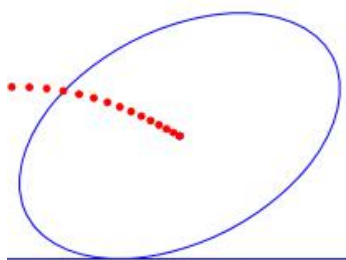


图 4

打开文件“16-03 汽车的圆形车轮.dmr”，这就是平时所经常看到的汽车上轮子的形状。

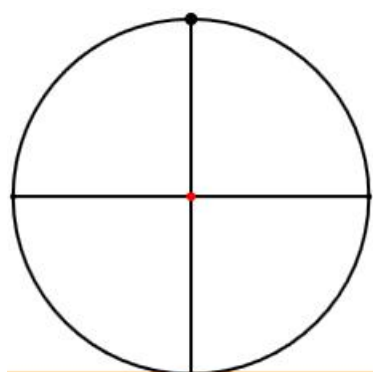


图 5

单击“车轮滚动”按钮，车轮开始滚动。

选择车轮的中心，执行【画图】菜单中的【跟踪】命令，跟踪车轮的中心。再次让车轮

滚动。

现在你明白将车轮做成圆形的道理了吧？把车轮做成圆形，将车轴安装在圆心上，车轴距离地面的高度总是等于车轮的半径那么长。这样当车子在地面上行驶时，就可以平稳地前进。

## 17 圆形瓶子又为何

我们生活中常用的饮料瓶、酒瓶、煤气瓶都是圆形的。



图 1



图 2

为什么这些瓶子都做成圆形的呢？生活中你还能说出那些圆形瓶子的例子？

### 【动手与实验】

打开文件“17-01 瓶子为什么要做成圆的.dmr”，可以看到一个三角形，同时在右侧同时显示出了它的面积和周长的测量值。

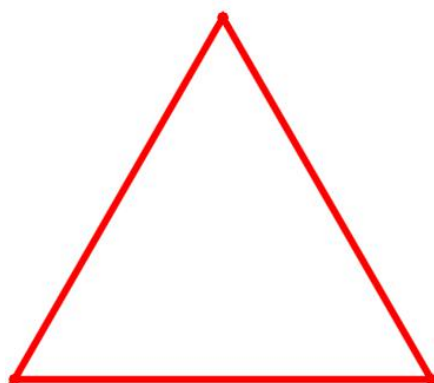


图 3

边数 $n = 3$

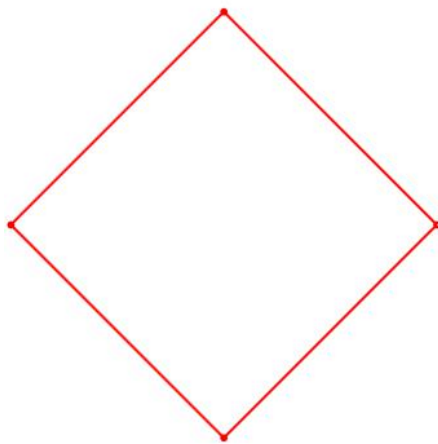
面积 $S = 10.00$

周长 $C = 14.42$

三角形 ▶

边数增加 ▶

单击按钮“边数增加”，则三角形变为四边形，如下图，在面积不变的情况下，周长不同了。



边数 $n = 4$

面积 $S = 10.00$

周长 $C = 12.65$

三角形 

边数增加 

图 4

观察一下，它的周长是变大了还是变小了？

再次单击按钮“边数增加”，则四边形变为五边形，仍然是面积固定不变，而周长不同了。相对于相同面积的四边形，它的周长是变大了还是变小了？

继续增加多边形的变数，观察对应多边形周长的变化规律。

可以看到对于面积相同的正多边形，随着边数的增加对应的周长在减小。随着正多边形的边数的增加，它的形状就越趋近于圆。

由此可知，圆形的容器用材料最省。

也可以理解为，用一样多的材料，做成圆形容器能装的东西最多。

## 18 下水井盖为哪般

通过前面的动手操作与观察实验,可以发现对于周长相等的正多边形,随着边数的增加,对应的面积也在变大。随着正多边形边数的增多,它的形状越来越趋近于圆形,在周长不变的情况下面积也不断地增加。由此可知,圆形的容器用材料最省,也可以说,用同样多的材料,做成圆形容器能装的东西最多。

原来,日常生活、工业生产中无处不在运用着我们所熟悉的数学知识;或者说,我们所学习的数学知识,在日常生活、工业生产中有着非常广泛的应用。

圆是最简单、最容易画的图形,圆形的东西也容易制作。我们的祖先很早以前就会画圆和制作圆形的东西,科学考察过程中从地下挖掘出来的许多文物很多是圆形的,或者上面具有圆形的图案。

我们的生活处处都与圆密切相关,请看下面的问题:

通过前面的内容我们知道了在水平路面上滚动的车轮做成圆形的原因以及瓶子等容器做成圆形的原因。走在人行道上我们还会经常看到下水道井口以及井盖都是圆形的,你知道其中的道理吗,它也是为了节省材料吗或者为了方便滚动?



图 1

我们先看看如果将下水道的井口以及井盖做成正方形,可能会发生什么后果吧。

### 【动手与实验】

#### 1, 如果下水道井口及井盖是正方形

在本书的后面有两片纸片 A 和 B。纸片 A 内有一个井口,我们把纸片 B 当作井盖。

试试看,看纸片 B 能否完全盖住纸片 A 中的井口。

再试试看纸片 B 能否从纸片 A 中的井口中掉进去。

#### 2, 计算机中的正方形井口及井盖

打开文件“18-01 正方形的井口和井盖.dmr”,如下图 2 所示,右边是井口,左边是比井

口大得多的井盖。

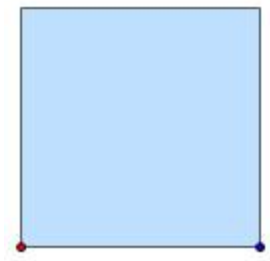


图 2

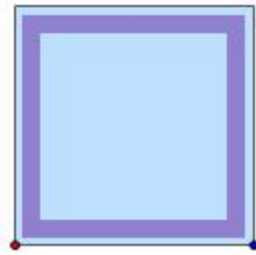


图 3

拖动井盖中的红色点看是否可以将井盖盖在井口上，如图 3 所示，井盖盖在井口上，绰绰有余。

假如有人不小心用脚踢了一下井盖，使它的红色顶点移动到了井口内部，如图 4 所示，你也可以拖动红色顶点到该位置。过了一会儿，又有人不小心踢了一下井盖，使得它的蓝色顶点也移动到了井口内部，如图 5 所示，你也可以拖动蓝色顶点到该位置。

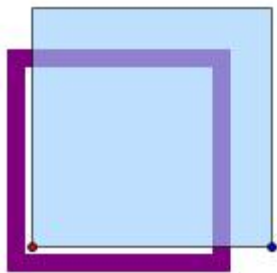


图 4

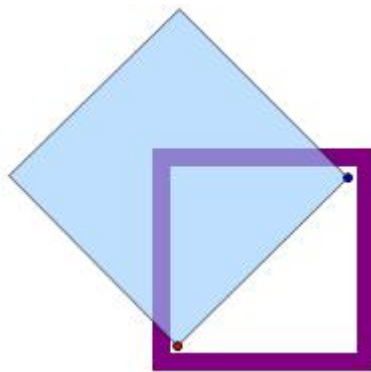


图 5

结果会如何呢？它的俯视图就变为图 6 所示的样子，井盖掉进了井里！



图 6

当然，可以将盖子做得再大些，但那需要更多的材料和费用。

### 3，如果下水道井口及井盖是圆形

在本书的后面有两组纸片 A 和 B、C 和 D。

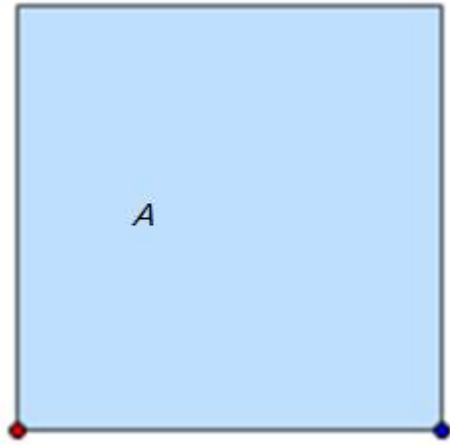


图 7

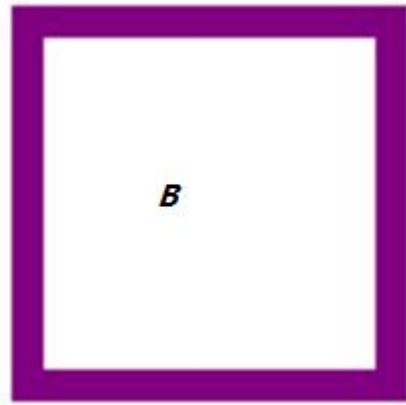


图 8

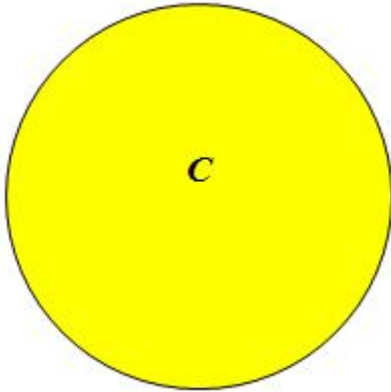


图 9

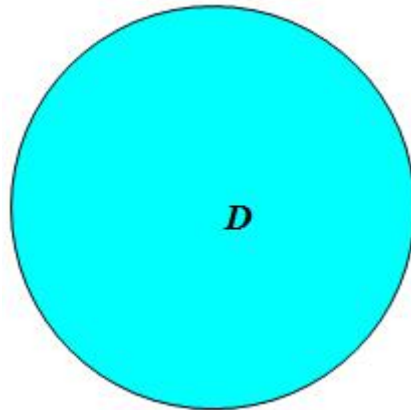


图 10

将 B 当做井口，看纸片 B 能否从纸片 A 中的井口中掉进去。

将 C 当做井口，看纸片 D 能否从纸片 C 中的井口中掉进去。

通过以上操作，你是否能够明白将下水道井口及井盖做成圆形的道理？

## 19 车轮不圆怎么办

在现实世界中，我们是因为先有了水平的路面，才对应造出圆形车轮的汽车。否则，在崎岖不平的山路上，即使车轮是圆形的，汽车在上面行驶也会感到不平稳，而且有时也会颠簸得非常厉害。

看来，铺什么样的路就需要造什么样轮子的车；另外，对于已经造好了的车，也需要在适当的路面进行行驶。

国内有个城市据说为了纪念国际数学大师陈省身教授诞辰一百周年，准备建造一个数学主题公园。在这个数学主题公园内，我们未必完全遵照现实世界中的规则。假如已经制造出了一辆全是正方形车轮的自行车、一辆全是正五边形车轮的汽车、一辆全是正六边形车轮的小火车，而且还要求这些自行车、小火车能够平稳地向前行驶，那么如果你是数学主题公园的设计师，你该为这些小火车分别如何铺设轨道呢？



图 1



图 2



圆形的车轮在不平整的路面上行驶会产生颠簸，你为这些正多边形车轮的小火车铺设的轨道也需要能够让他们在上面平稳地行驶。

### 【动手与实验】

#### 1，正三角形车轮的小火车行驶的轨道

打开文件“19-01 平稳行驶的多边形车轮汽车.dmr”，可以看到如图 3 所示，车轮为正三角形的小火车。单击“开始行驶”按钮，可以观察到正三角形车轮的小火车平稳行驶的过程。单击“回到起点”按钮，可以让小火车回到起点。

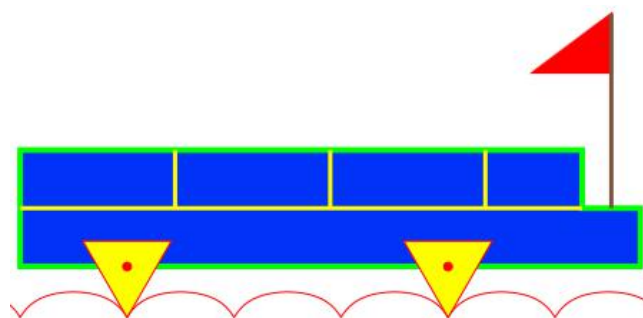


图 3

#### 2，正三角形车轮的小火车行驶的轨道

单击“边数增加”按钮，可以看到如图 4 所示，车轮为正方形车轮的小火车。单击“开始行驶”按钮，可以观察到正方形车轮的小火车平稳行驶的过程。单击“回到起点”按钮，可以让小火车回到起点。

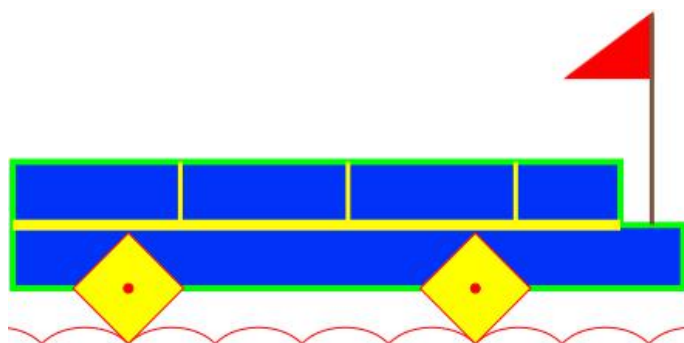


图 4

#### 3，正五边形车轮的小火车行驶的轨道

单击“边数增加”按钮，可以看到如图 5 所示，车轮为正五边形车轮的小火车。单击“开始行驶”按钮，可以观察到正五边形车轮的小火车平稳行驶的过程。单击“回到起点”按钮，可以让小火车回到起点。

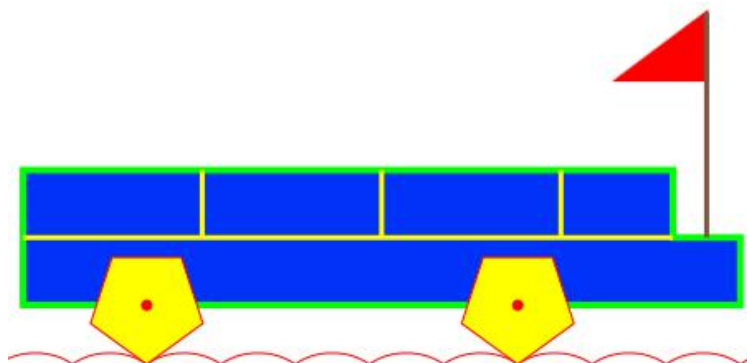


图 5

#### 4. 正六边形车轮的小火车行驶的轨道

单击“边数增加”按钮，可以看到如图 6 所示，车轮为正六边形车轮的小火车。单击“开始行驶”按钮，可以观察到正六边形车轮的小火车平稳行驶的过程。单击“回到起点”按钮，可以让小火车回到起点。

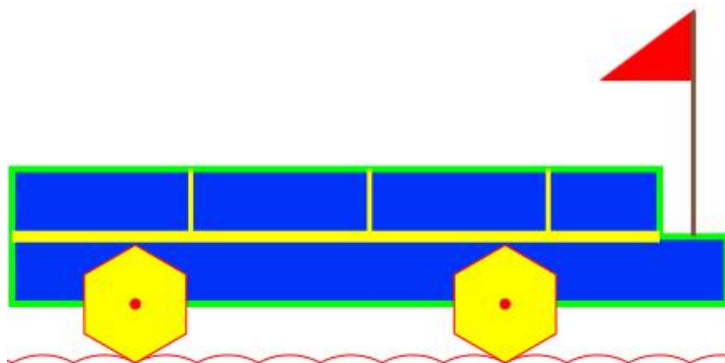


图 6

你能用什么方法或表示这些轨道的形状并把他们铺设出来？

## 20 车轮旋转得摆线

### 【问题与思考】

又有一下午放学后，小强和小龙骑着自行车一起回家。

小龙问小强：“你知道你家距离学校有多远吗？”

小强说：“我以前听我爸爸说过，大约 4.5 千米。”

小龙说：“我今天听修理自行车的王叔叔说，我们的自行车轮子的直径是 60 厘米。那么你知道从学校回到家，你的自行车轮子大约转了多少圈吗？”

小强挠了挠脑袋，皱着眉头说：“轮子转这么快，我怎么数啊？否则，我只能从自行车上下来，步行推着自行车一圈一圈地数，但是这样的话到了天黑我也回不到家啊。”

你能帮小强想想办法，不用一圈一圈地数而直接计算出从学校到家他的自行车转了多少圈吗？

小强话刚落音，他的自行车前轮轧在了一个香口胶上，香口胶粘在轮胎上掉不下来了。这个过程被站在路边的同学的小静看到了。

在小强的自行车继续向前行驶的过程中，小静所看到的香口胶在空中经过了一条什么形状的路线呢？

在图 1 中，分别是香口胶粘在轮子上的那一刻状态，与它绕轮子的中心一圈之后重新回到地面上的那一刻状态。

你能不能在图 1 中将点 P 所经过的路径画出来？



图 1

### 【动手与实验】

1. 模拟跟踪试试看

打开文件“20-01 车轮上的香口胶.dmr”，然后进行以下操作：

(1) 在《Hawgent 皓骏动态数学软件》，单击工具条中的“选择”工具，返回到选择状态。选择点 P，执行【画图】菜单中的【跟踪】命令，得到点 P 的跟踪踪迹。

(2) 拖动轮子的中心 O，就可以观察到轮子的边沿上一点 P 所经过的路径。

## 2， 形状能受何影响

如图 2 所示，就是“香口胶”点 P 所经过的路径。车轮在行驶过程中，香口胶 P 所经过的路径是一条什么样的曲线呢？它具有什么性质呢？曲线与地面的两个相邻交点之间的距离是多少？曲线离开地面最高的位置在哪里？曲线离开地面的最高距离是多少？

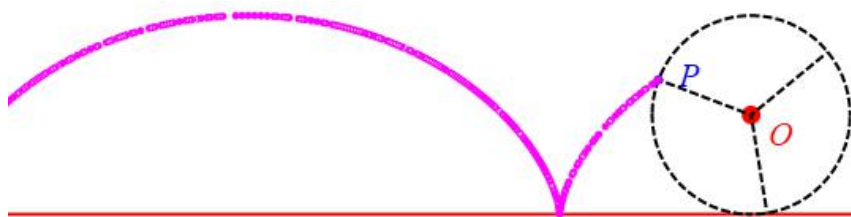


图 2

请你通过在计算机上的操作，继续研究下面的问题：

这条曲线的形状与点 P 在轮子上的位置有什么关系？

这条曲线的形状与车轮行驶的快慢有什么关系？

这条曲线的形状与车轮行驶的方向有什么关系？

拖动点 r，可以改变车轮的半径大小；车轮的大小对这条曲线有哪些影响？

## 3， 似曾相识未必识

有人认为，这条曲线就是一段、一段的圆弧，也有人认为它是一个、一个连在一起的半个椭圆，也有人说它是一段、一段连在一起的抛物线。

你认为呢？

实际上，这种曲线不是圆弧，也不是椭圆和抛物线，而是另一种曲线，叫做旋轮线，旋轮线也叫摆线。

显然，车轮边沿上的点在作匀速直线运动的同时作匀速圆周运动。

所以旋轮线也是匀速直线运动和匀速圆周运动的组合而生成的曲线。

旋轮线的形状是一拱一拱的，只要圆不停地旋转，画出来的旋轮线就会持续下去。在轮子前进的过程中，香口胶与地面连续两次接触所经过的水平距离就等于轮子的周长。那么，旋轮线的每一拱的横向长度都等于圆的周长。

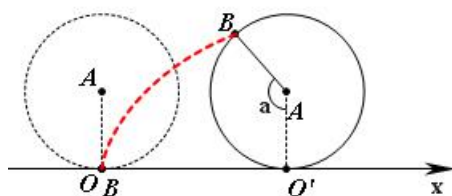
那么你现在能否帮助小强回答小龙所提出的问题呢？

因为：车轮转动的圈数=行驶的距离÷车轮的周长，所以：车轮转动的圈数等于  $4500 \div (0.6 \times \pi)$ ，请你把结果计算出来。

#### 4，解决问题需推理（\*）

如何说明这条曲线不是圆弧、椭圆和抛物线呢？则需要从数学上对它进一步的研究。有能力的同学可以参照下面的推导过程。

半径为 1 的圆 A 沿 x 轴滚动，假设在起始位置时圆上的点 B 与坐标原点 O 重合。当圆滚动一段时间距离后，若圆心 A 在水平位置上经过的距离  $OO'$  为  $a$ ，则点 B 绕点 A 旋转过的角度也为  $a$ （单位：弧度）。



那么点 B 的坐标为：（ $x = a + \cos(-\frac{\pi}{2} - a)$ ， $y = 1 + \sin(-\frac{\pi}{2} - a)$ ）。

则点 B 的轨迹所在旋轮线的方程可表示为：

$$\begin{cases} x = a + \cos(-\frac{\pi}{2} - a) \\ y = 1 + \sin(-\frac{\pi}{2} - a) \end{cases} \quad (a \text{ 为参数}), \text{ 化简后得到: } \begin{cases} x = a + \sin(a) \\ y = 1 - \cos(a) \end{cases} \quad (a \text{ 为参数}).$$

#### 5，可大可小轮不同（\*）

若圆的半径为  $r$ ，圆心 A 在水平位置上经过的距离  $OO'$  为  $a$  时，则点 B 绕点 A 旋转过的角度为多少？这时旋轮线的方程应该如何表示？

## 21 摆线性质不寻常

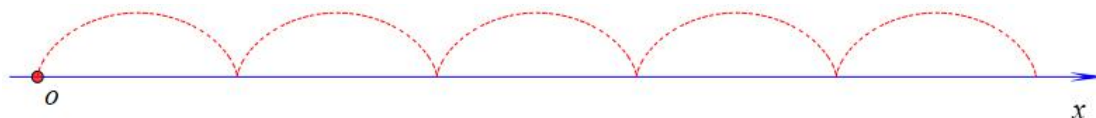


图 1

旋轮线的形状是一拱一拱的，只要圆不停地旋转，画出来的旋轮线就会持续下去。

在轮子前进的过程中，点 A 与地面连续两次接触所经过的水平距离就等于轮子的周长。那么，旋轮线的每一拱的横向长度都等于圆的周长。

旋轮线的高度是跟车轮有什么关系呢？

现在，你知道学校到家的距离，然后测量出车轮的半径，你可以计算出骑自行车从家到学校你的车轮子大约转了多少圈吗？

### 【思考与问题】

在前面，我们提到了一种曲线叫做旋轮线。顾名思义，旋轮线就是由旋转的车轮上一点所生成的曲线。实际上，旋轮线是一种非常重要的曲线，在生活、生产都有很广泛的应用。

小时候，你是否经常乘坐滑梯玩耍？滑梯是儿童乐园中常见的玩具。有直板的滑梯，有的滑梯是弯曲的。

图 2、图 3 和图 4 分别是直板的滑梯、圆弧形的滑梯和摆线形状的滑梯。若有三个完全相同的小球分别自三个滑梯的顶端处同时开始下滑，你认为哪个小球最先到达地面？

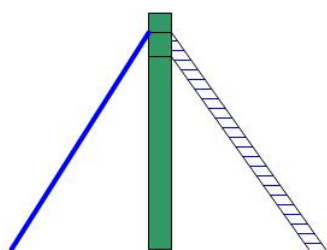


图 2 直板滑梯

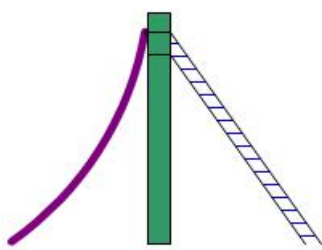


图 3 圆弧滑梯

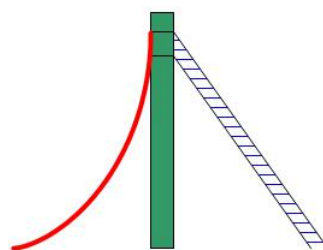


图 4 摆线滑梯

很多人会认为沿距离最短的直板滑梯滚下来的球最先到达地面，可事实上却是沿旋轮线下滑的小球最先到达地面。

在滑梯上之所以能下滑，是因为受到重力的作用。当滑板板面的坡度不同时在下滑方向上所受到的向下的重力分力（以下简称为“冲力”）大小也不同。

滑梯越陡，在滑梯上的小朋友受收到的冲力越大，下滑的速度增加得越快。

沿着直板滑梯下滑，下滑的加速度保持方向不变，速度稳定地增加。

沿着旋轮线滑梯下滑，刚开始的一段受到的冲力非常大，几乎等于小朋友所受到的重力大小。因此在非常短的短时间内取得了非常大的下滑速度。虽然在滑梯的后半段，坡度逐渐变小、速度增加变慢，但此时的下滑速度已经非常大。以至于，在整个下滑阶段的平均速度很大。所以，乘坐旋轮线滑梯的小朋友能够先到达地面。

事实上，相同高度的同等条件下，在所有类型的滑梯中，沿着旋轮线滑梯下滑，下降的速度最快。因此，旋轮线也叫**最速降线**。

最速降线在建筑中也有着美妙的应用。



图 5



图 6



图 7



图 8

我国古建筑中的“大屋顶”，从侧面看上去，“等腰三角形”的两腰不是线段，而是两段最速降线。

按照这样的原理设计，在夏日暴雨时，可以使落在屋顶上的雨水，以最快的速度流走，从而对房屋起到保护的作用。

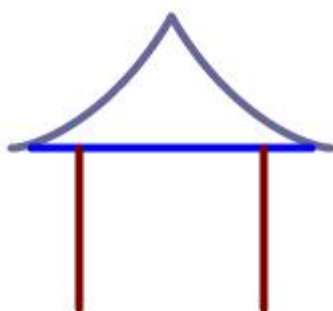


图 9

把大屋顶修成旋轮线，还有一个重要的平衡作用。

大屋顶比较重，支撑房顶重量的主要是下面的大柱子，常听说的“四梁八柱”建筑就是这种。这种建筑的柱子一般都修在墙里，位置靠外，房顶不仅给柱子一个垂直向下的压力，还给柱子一个向外的推力，这个向外的推力对柱子的竖直稳定性是十分不利的。

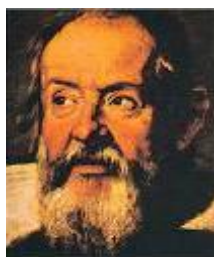
如果把房顶修成旋轮线形，再把房檐修的翘起来，房檐就会给柱子一个向里的推力。只要设计得合适，可以让一个向外的推力和一个向内的推力相互抵消，柱子所受的合力就是竖直向下的了，这对房子的牢固性是大有好处的。

同时，旋轮线还有一个更加美妙的性质，那就是乘坐旋轮线滑梯下滑，无论从滑梯的哪个部位开始下滑，下滑到底部所用的时间都是相同的。因此，旋轮线也叫做**等时线**。

惠更斯利用旋轮线的这一性质，发明了摆钟。当然，他是对有关计时的各种摆(单摆、复摆、旋轮摆)做了大量的试验和详细的研究基础上猜想得出的结论。

意大利物理学家伽利略年轻的时候，看到教堂里的挂灯左右摆动，产生了极大的兴趣。他默默数着自己脉搏跳动的次数，来计算挂灯来回一次的时间，发现每次的时间都是一样的。伽利略受到了启发，他作了一个大吊摆，来计算人的脉搏跳动次数。后来人们利用吊摆摆动的等时性。通过机械传动，来控制时针，做成了摆钟。

从此，人们就用摆钟来计算时间。



伽利略

图 10

摆钟在使用中发生了一个问题，这就是钟摆在摆动过程中，受到空气、温度等的影响，摆动的振幅有时候大一些，钟就走得慢一些；有时候振幅小一点，钟就走得快一点。

对摆钟产生的这种误差，人们束手无策。直到后来，这个问题被荷兰数学家惠更斯圆满地解决了。

惠更斯对有关计时的各种摆(单摆、复摆、旋轮摆)做了大量的试验和详细的研究。





惠更斯

图 11

他指出，单摆在摆动过程中所经过的路线是圆弧，每摆动一次的时间长短与振幅的大小有关系。而若让钟摆所经过的路线为旋轮线，则可以使钟摆摆动一次的时间固定不变。

把一拱倒着放置的旋轮线从中间劈开两半，在中心 O 处挂上钟摆，就可以保证钟摆摆动的路线是一条旋轮线了。

这样一来，不管钟摆摆动的振幅多大多小，来回摆动一次的时间总是相等的。

因此，旋轮线也叫等时线。

打开文件“21-01 旋轮线与摆钟.dmr”，可以看到根据旋轮线制作的摆钟。

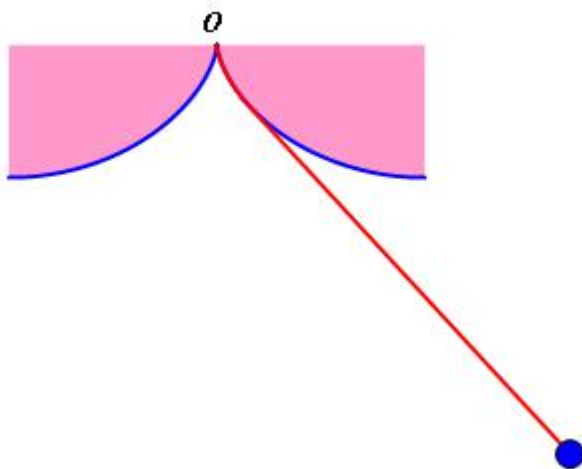


图 12

单击“摆动”按钮，摆钟开始摆动，同时摆线的终端被跟踪生成一条踪迹，可以观察踪迹的形状和性质。

拖动点“振幅”可以改变摆线的振幅，然后再次摆动观察摆线终端经过的路线。

同时你可以利用计时器验证在不同摆幅的情况下钟摆摆动一次的时间是否相同。

## 22 亚里士多得诡辩

诡辩就是用貌似正确的手段，来论证错误的结论。古希腊哲学家亚里士多得曾经提出了一个著名的诡辩。

### 【思考与实验】

亚里士多得提到：

有两个大小不同的同心圆，半径分别为  $R$  和  $r$  ( $R > r$ )。大圆沿着直线滚动一周，直线段  $AA'$  的长度应该等于大圆的周长，即  $AA' = 2\pi R$ 。大圆和小圆同心，是固定在一起的。大圆滚动一周，小圆也滚动一周。这样一来，应该是  $BB' = 2\pi r$ 。因为  $AA' = BB'$ ，所以  $2\pi R = 2\pi r$ ，就得到  $R = r$ ，得出了大圆的半径等于小圆的半径。



图 1

打开文件“22-01 亚里士多得诡辩.dmr”，单击【滚动】按钮，观察大圆在滚动过程中，所生成点 A 和点 B 的轨迹。拖动点 B，还可以改变小圆的半径大小。

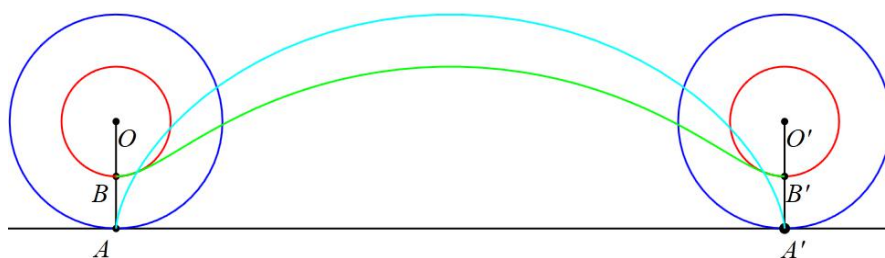


图 2

你认为亚里士多得诡辩的错误发生在什么地方呢？

拖动点 B，可以改变它所生成的轨迹的形状。而无滑动滚动圆周的边沿上的点所描绘出的轨迹是确定的，所以，在大圆滚动过程中，小圆并不是完全在滚动，而是同时在滑动。并且点 B 越靠近点 O，小圆滑动得越厉害。

还有一个有趣的“火车轮向后运动”的趣味问题：

如图 3 所示，说是在飞速前进的火车轮子上可以找到向后运动的点，很多人对此感到奇

怪。打开文件“22-02 滚动的火车轮子.dmr”后，单击【滚动】按钮火车轮子就可以在轨道上开始滚动，拖动点 P 你能找到这样的点吗？

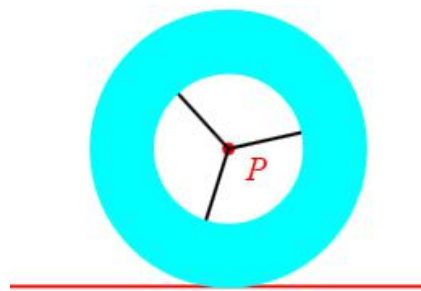


图 3

## 23 圆在圆上滚动时

车轮在水平路面上滚动过程中，车轮边沿上一点所经过的路径是一条旋轮线。车轮除了在水平路面上滚动，还可以沿着圆周滚动，也可以在多边形边界上滚动，跟踪这些滚动圆边界上的点所得到的曲线，都叫做旋轮线。

在前面，我们了解到在水平路面上滚动的圆所生成的旋轮线，其形状不因轮子的大小、车轮的行驶速度、车轮的行进方向之改变而改变。

相对于在水平路面上滚动的圆来说，在圆周上滚动的圆所生成的旋轮线的形状更加丰富多彩、千变万化。

在下面的动手与实验过程中，请你思考以下问题：

旋轮线在这千变万化中是否也存在一定的规律呢？

旋轮线的性质受到了哪些因素的影响？

请你动手进行研究，讲你所发现的规律罗列出来，然后与周围的同学进行对比，看一看有哪些规律你是发现的而同伴没有发现？又有哪些规律你没有发现而被你的同伴发现了？

### 【思考与实验】

打开文件“23-01 圆在圆上滚动.dmr”，可以看到在圆  $O$  的外侧有一个圆  $P$ 。

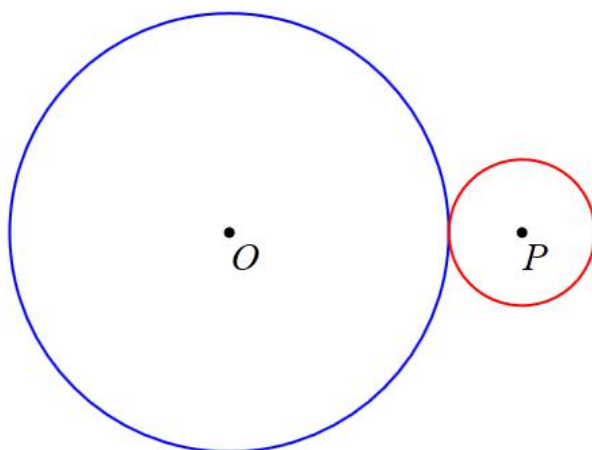


图 1

首先按照以下步骤进行操作：

- (1) 单击“画笔”工具，鼠标指向红色圆周，作出圆周上的任意点，命名为  $A$ 。

(2) 单击“选择”工具，选择点 A，执行【画图】菜单中的【跟踪】命令。得到点 A 的跟踪对象。

(3) 拖动变量  $t$  控制尺上的控制点，观察点 A 留下的踪迹，结果如下。

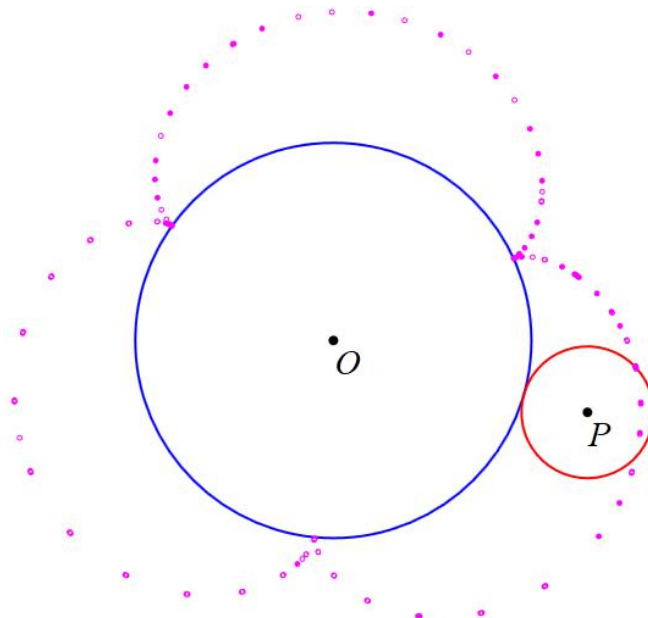


图 2

你可以在红色圆上再取其他的点，然后进行跟踪，观察其踪迹。

固定圆的半径为：6，拖动变量  $r$  控制尺上的控制点可以改变滚动圆的半径。若  $r > 0$  则圆 P 在圆 O 外滚动，否则圆 P 在圆 O 内滚动。

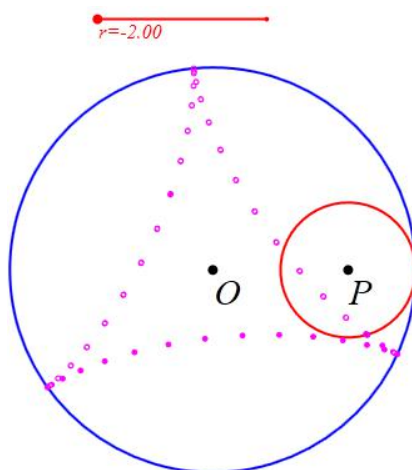


图 3

一圆周沿另一圆周作无滑动的滚动时，滚动圆圆周上的点所形成的曲线也是旋轮线。

当滚动圆在固定圆外部时，叫做外摆线；当滚动圆在固定圆内部时，叫做内摆线。

拖动变量  $r$  控制尺上的控制点，改变圆  $P$  的半径的大小，然后单击“滚动”按钮，观察对应的摆线的形状和性质。相对于圆在直线滚动所形成的摆线，圆在圆上滚动所形成的摆线，更丰富，更有趣！

打开文件“23-02 内摆线和外摆线.dmr”，在圆  $P$  上有一点  $A$ 。

下面作出圆  $P$  在圆  $O$  上滚动的过程中，点  $A$  所生成的摆线。即点  $P$ （由参数  $t$  确定）驱动点  $A$  所生成的轨迹。操作步骤如下：

（1）按住【Ctrl 键】，依次选择变量  $t$  的控制尺和点  $A$ ，执行【画图】菜单中的【轨迹】命令，得到点  $A$  运动的轨迹。

（2）右击生成的轨迹，如图 4 所示：在弹出的属性对话框中把  $t$  的样本点总数修改为：2000，运动类型为：一次向前，运动区间：0 到 2160，点击【确定】按钮完成属性修改。

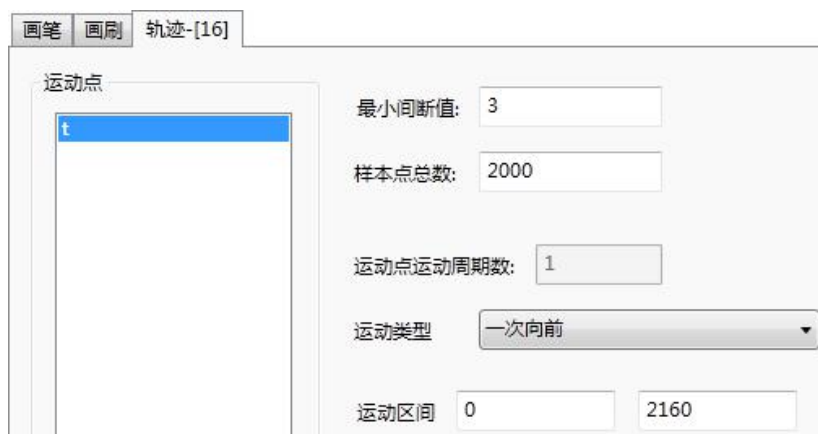


图 4

结果如图 5 所示：

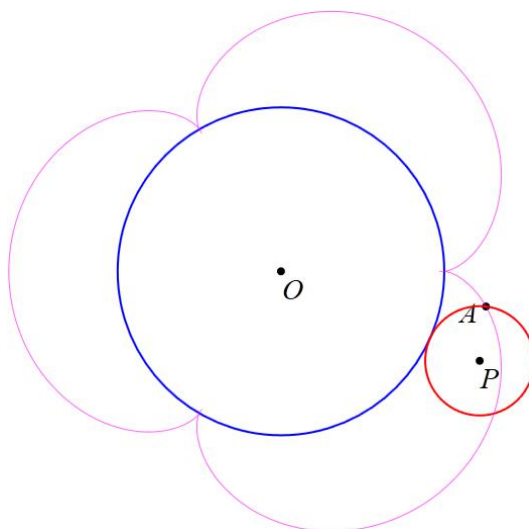


图 5

拖动点  $r$ ，可以改变圆  $P$  的半径。从而观察到两个圆的半径比例不同时摆线的对应形状和性质。

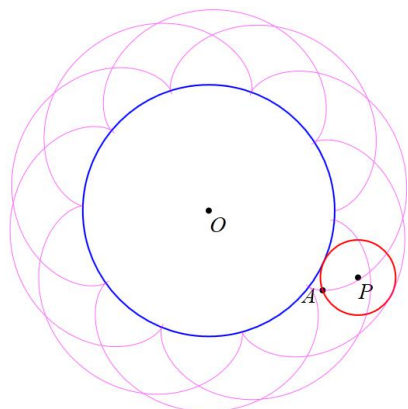


图 6

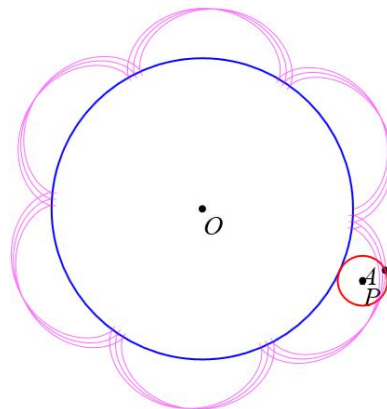


图 7

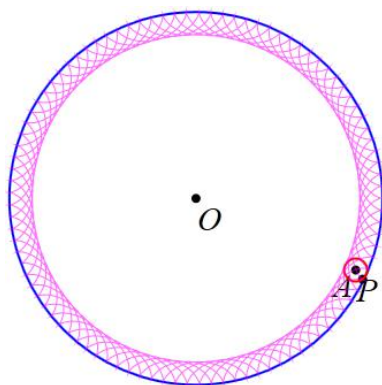


图 8

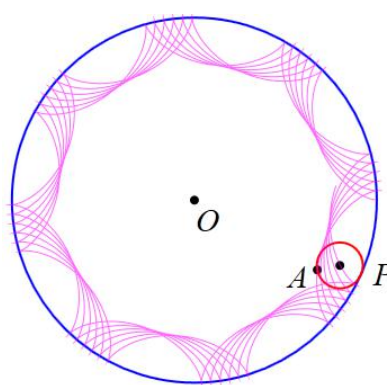


图 9

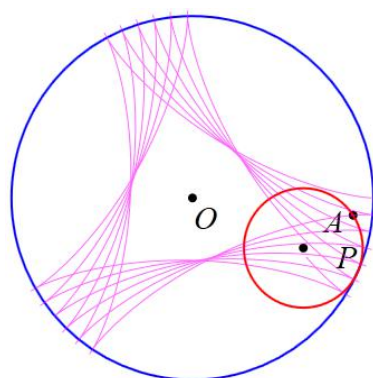


图 10

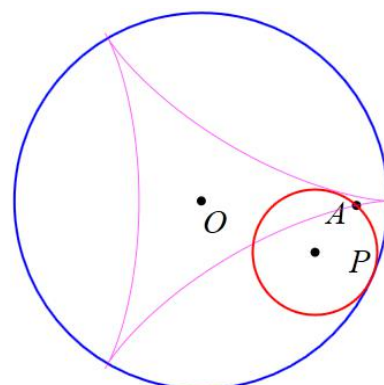


图 11

在上面，我们通过点  $P$  驱动点  $A$  所得到的轨迹，观察到了各式各样的旋轮线。跟踪是实际运动过程中所得到的临时踪迹，而轨迹则是可以保留下来的对象。点  $P$  驱动下点  $A$  的轨迹，意思就是假定由于点  $P$  的运动（车轮滚动）而点  $A$  所经过的路径，点  $P$  如何运动呢？

那就对应于上述轨迹属性对话框中的各个属性值（见图 2），在这里最小值和最大值分别为 0 和 2160，这表示圆 P 从起点出发绕点 O 滚动了 6 周。

打开文件“23-03 旋转了多少周.dmr”，可以观察到圆 O 和圆 P。其中，圆 O 的半径为 5，圆 P 的半径为  $r$ ，点 A 是圆 P 的圆周上一点。

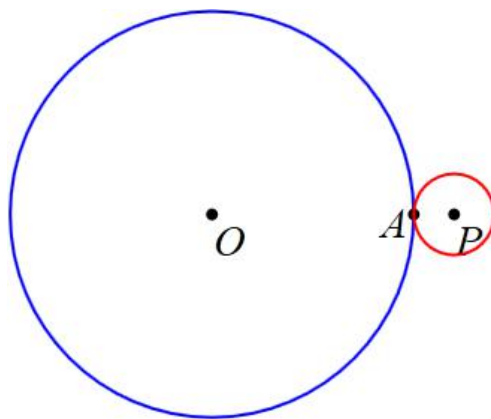


图 13

拖动变量  $t$  控制尺上的控制点，可以让圆 P 在圆 O 上滚动。请自行探索规律 R 和  $r$  不同取值是的规律，比如：

当  $r=1$  时，若圆 P 沿圆 O 滚动了一周，则点 P 绕圆心 P 点旋转了多少周？



## 24 千变万化旋轮线

在圆上滚动的圆，所得到的旋轮线千变万化，然而在这千变万化中是否也存在一定的规律呢？如何进行研究呢？基本思路是：从简单到复杂，从特殊到一般。

### 【动手与实验】

#### 1，动圆在定圆的外部滚动

打开文件“24-01 在圆上滚动的圆.dmr”，蓝色定圆的半径仍然是 6，拖动点  $r$  可以改变动圆的半径，图 1-图 6 是不同半径的动圆在定圆外部滚动时对应的旋轮线：

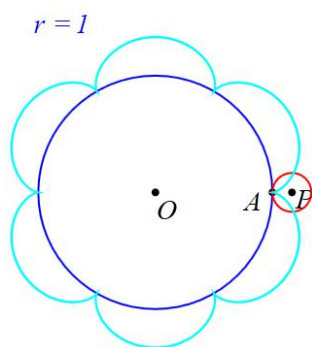


图 1

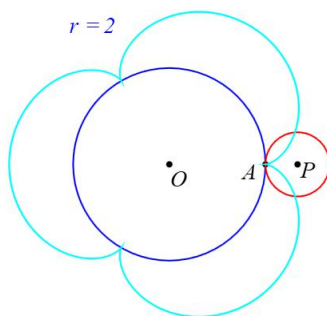


图 2

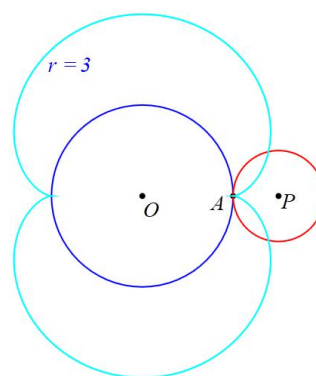


图 3

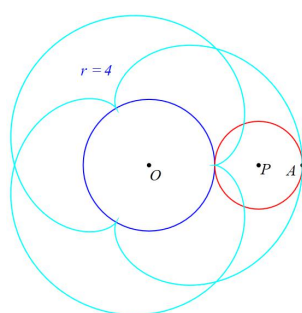


图 4

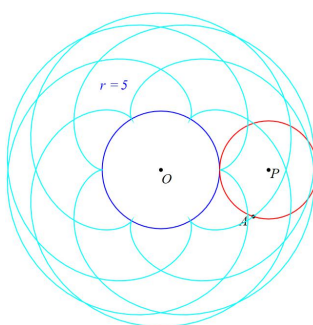


图 5

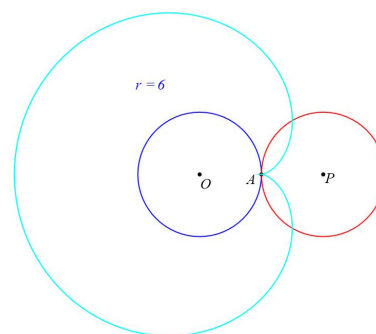


图 6

#### 2，动圆在定圆内部滚动

向左拖动点  $r$ ，可以使得动圆在定圆内部滚动。

图 7-图 11 是不同半径的动圆在定圆内部滚动时对应的旋轮线：

$$r = 1$$

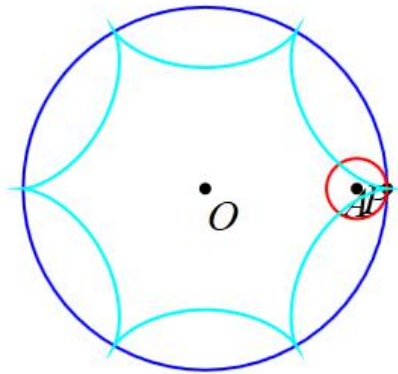


图 7

$$r = 2$$

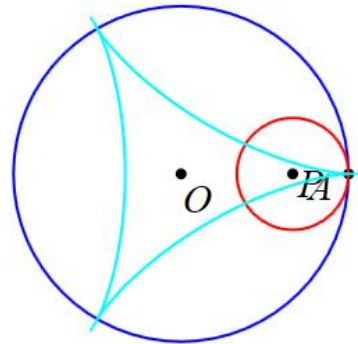


图 8

$$r = 3$$

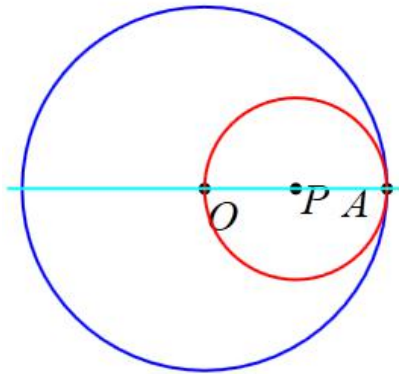


图 9

$$r = 5$$

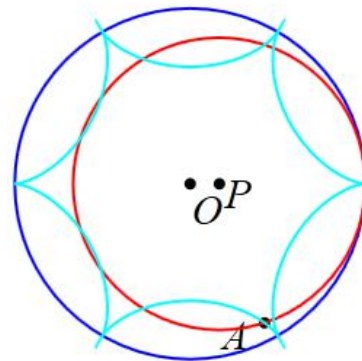


图 10

### 3, 变化多端却有规律可循

从上面的图形中, 你能发现哪些规律?

我们知道圆在圆上滚动过程中, 两圆相互接触过的弧长相等。若圆  $O$ 、圆  $P$  的半径分别为:  $R$  和  $r$ , 所以当圆  $P$  的圆心绕圆  $O$  的圆心旋转  $t$  弧度时, 圆  $P$  上的点绕点  $P$  应旋转  $t \cdot r/R$  弧度, 对应的角度应该是:  $t \cdot r/R \cdot 180/\pi$ 。

设  $k=R/r$ , 则动圆在定圆外部滚动时有:

①当  $k$  为整数时, 旋轮线由  $k$  支组成, 圆  $P$  上的点描完  $k$  支后(即圆  $P$  绕圆  $O$  一周), 返回到起始位置。

②当  $k$  为分数 ( $k=g/h$ ,  $g, h$  为互素的整数) 时, 旋轮线由  $g$  支组成, 圆  $P$  上的动点描完  $g$  支后 (即圆  $P$  绕圆  $O$  旋转  $h$  周), 返回到起始位置。

③当  $k$  不是有理数 (即无理数) 时, 则会得到更一般的旋轮线。旋轮线有无穷多个分支,

圆周上的动点从出发点不能回到原来的位置。

如何检验这些规律呢？

#### 4, 进一步检验规律①和②

图 1-图 6 中的六种情形与结论①和②是相符合的。在文件“24-02 在圆上滚动的圆.dmr”中, 定圆的半径与动圆的半径都是整数, 且大小都可以任意改变, 请你进一步检验上面结论中的①和②吧。

#### 5, 还要检验规律③

至于规律③, 我们通过以下操作进行检验: 打开文件“24-03 在圆上滚动的圆.dmr”; 然后右键单击点  $r$ , 在快捷菜单中单击“动画”选项, 弹出点  $r$  的动画属性对话框, 设置参数  $r$  的运动范围为:  $2^{1/2}$  到  $5^{1/2}$ , 选择运动类型为: 一次运动, 然后单击“确定”按钮结束。

单击动画按钮 (左边部分), 则  $r$  的值由  $2^{1/2}$  变化为  $5^{1/2}$ , 可以观察这时的旋轮线的性质。

双击旋轮线打开其属性对话框, 将“运动”的最大值由  $2\pi$  修改为  $4\pi$ , 对应的将“运动”的步数 (这里的名称为频率) 也由 200 修改为 400。然后观察曲线的变化情况。

还可以在轨迹的属性对话框中继续修改“运动”的最大值, 对应地修改“运动”的步数。请你将“运动”的最大值分别为  $2\pi$ 、 $4\pi$ 、 $8\pi$ 、 $16\pi$ 、 $32\pi$ 、 $64\pi$ 、 $128\pi$ 、 $256\pi$ , 观察对应选轮线的形状和变化规律。

可以发现无论你怎么增加, 曲线的始点和终点都不会重合, 只能使得曲线不断的变得更加密集。

#### 6, 具体多少支看比值

但是对于  $R/r$  为有理数的情况下, 旋轮线只有  $k$  支 ( $k=R/r$  为整数) 或  $g$  支 ( $R/r=g/h$ , 其中  $g, h$  为互素的整数), 而在旋轮线对应的轨迹曲线中成倍地增加“运动”的最大值并不能使旋轮线的形状发生改变。你可以自己在文件“24-02 在圆上滚动的圆.dmr”中验证这一点。

#### 7, 尚有问题待思考

(1) 当动圆在定圆内部滚动时，所生成的旋轮线会有怎样的性质呢？旋轮线的性质又受哪些因素的影响？请你利用文件“24-04 圆上滚动的圆.dmr”所设计的实验进行研究和探索。

(2) 当  $k=R/r$  为整数时，在点 P 绕点 A 旋转了一周的过程中，动圆上的点 A 绕点 P 旋转了多少周？

### 【思考与练习】

2013 年 09 月亚洲数学技术大会（ATCM）主席、美国瑞德福（Radford）大学数学系教授杨玮琦（Wei-Chi Yang）博士到访广州，在谈到其攻读硕士及博士学位的母校加州大学戴维斯分校时讲道：“加州大学戴维斯（Davis）分校是全美最顶尖的 10 所研究型大学之一，享有全国高知名度的科学研究成就。虽然它是以科技成就闻名于世，但它最普遍的代步工具却是自行车，甚至还赢得了‘自行车之城’的别称。学校每年都由学生自发组织一些自行车拍卖活动和自行车表演活动，很多学校表演的自行车都是他们自制的。当时我就看到有些学生骑的自行车前后两个轮子大小是不同的，非常新奇。”



图 11

在网上搜索一下，也可以看到许多前后轮大小不一的自行车，如图 13、图 14 所示。



图 12



图 13

我们一般的自行车，前后轮都是一样大的。那么当自行车行驶过一段距离之后，前轮

与后轮所转过的圈数是一样多吗？

但是对于前轮与后轮大小不同的自行车来说，当自行车行驶过一段距离之后，前轮与后轮所转过的圈数还一样多吗？

无论前后轮的大小是否相同，有一点是肯定的，那就是，前后两个轮子经过的路程总是相等。那么轮子经过的路程与轮子本身的大小以及它滚动过的圈数有什么直接的关系吗？

### （1）数一数轮子滚动的圈数

找两个大小不同的圆环，记作圆环 A、圆环 B。

从某一个位置出发，然后记录圆环 A 沿着直线滚动 10 圈之后的终点位置。

让圆环 B 从相同的位置出发，沿着相同的方向滚动到终点位置，数一数圆环 B 滚动了多少圈。

### （2）量一量轮子的周长

找一把软尺，让软尺绕圆环 A 一周，量一量它的周长；然后再让软尺绕圆环 B 一周，也量一量它的周长。

### （3）探索轮子周长与滚动圈数之间的关系

测量一下圆环 A 在地面上滚动 10 圈所经过的距离。然后探索一下圆环 A 的周长、圆环 A 滚动的圈数和圆环 B 的周长、圆环 B 滚动的圈数之间的关系。

## 25 轮子如何能滚动

### 【问题与思考】

车轮如何才能滚动？这好像不是一个问题，因为在现实世界中，只要将一个车轮竖立在路面上，用力一推，车轮即可向前滚动。自行车、汽车的车轮也是通过连接轮子中心的车轴对车轮所施加的力让车轮转动，而实现的车轮滚动。

当然，我们这里所谈的滚动，指的是车轮在水平路面上的无滑动滚动。无滑动滚动的特点就是车轮的中心在水平方向上经过的距离，即车轮行驶过的路面长度，等于车轮在路面上滚动所经过的弧长。

通过前面的内容，我们应该认识到：利用计算机学习数学知识、研究数学问题，能够将抽象的内容变得直观，能够将静态的问题变为动态的过程，以前只能想象的问题现在可以在计算机上操作、演示了，这样一来能够帮助我们更加轻松地理解数学概念、解决处理问题；更重要的是，在数学学习和数学研究的过程中将计算机作为我们的辅助工具，能够激发我们更多的思考，帮助我们提出更多的问题，继而去操作、验证、研究它们，甚至创造性地解决它们。

然而，数学软件作为一个程序包，它所提供的功能和命令并不是任何时候都能直接满足我们所有的需求，很多时候我们需要通过这些功能和命令的组合来实现我们的目的。将这些功能和命令组合在一起实现我们的目的过程中，一方面需要了解数学软件的基本操作；另一方面，更重要的是需要运用我们所学习的数学知识。知识运用必将有助于对知识的理解和巩固，因此，利用数学软件进行数学上的设计和创作，是对我们所学习的数学知识的一种检验，同时也是一个深刻理解和熟练掌握数学知识的机会。

自己动手试试看。

### 【动手与实验】

1、打开文件“25-01 任意圆上的点.dmr”，拖动点 A，观察点 C 所经过的路径具有什么特点。

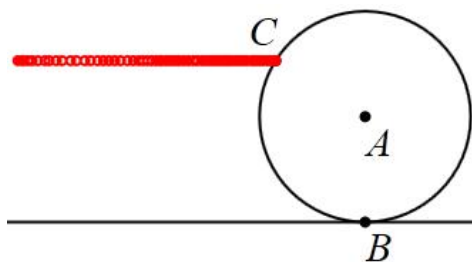


图 1

可以发现，当圆心水平移动过程中，圆上的这个点并不是在“滚动”，它并没有因为圆心的移动而绕圆心旋转，就像在泥泞的到处上行驶的汽车，滑行了一段距离，因此圆心也经过了一条水平的路径。

## 2、圆在滚动过程中的数学道理

这是因为，通过计算机的命令直接作出的圆，不是一个可以滚动的圆。不是数学软件的程序设计者不懂得如何作出一个可以在水平路面滚动的圆，而是无法顾及到圆滚动的各种情况，因为圆在水平路面上滚动、圆在圆上滚动、圆在多边形的边界上滚动等滚动的方式各不相同。

那么当我们需要研究圆的某种滚动情况时，就需要单独设计出满足这种需求的圆。因此这就出现了题目表明的问题：车轮如何才能滚动？

下面我们就以前面所研究的自行车问题为例，首先设计出可以在水平路面上滚动的车轮。

假定半径为 1 的圆 A 沿 x 轴无滑动的滚动，在起始位置点 B 与坐标原点 O 重合。当圆滚动一段时间距离后，点 B 绕点旋转过的角度为  $\alpha$  弧度，则圆心 A 在水平位置上平移过的距离  $OO'$  也为  $\alpha$ 。

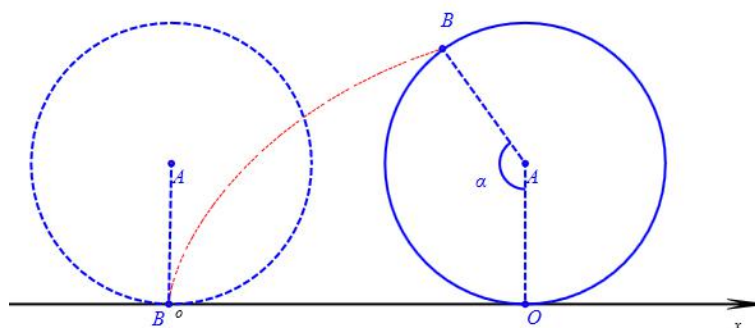


图 2

跟踪点 B 得到的轨迹图形就是旋轮线。

因为点 A 的坐标为  $(a, 1)$ ，点 B 是圆 A 上的点，容易推导点 B 的坐标可以表示为  $(a + \cos(-\pi/2 - a), 1 + \sin(-\pi/2 - a))$ ，以及点 B 的轨迹所在旋轮线的方程可表示为：

$$\begin{cases} x = a + \cos(-\frac{\pi}{2} - a) \\ y = 1 + \sin(-\frac{\pi}{2} - a) \end{cases} \quad (a \text{ 为参数})$$

化简后得到：

$$\begin{cases} x=a-\sin(a) \\ y=1-\cos(a) \end{cases} \quad (a \text{ 为参数})$$

因此我们可以作一条以点 A 为圆心、以点 B 为起点按照逆时针方向旋转一周的圆形曲线，这个曲线用参数方程可以表示为：

$$\begin{cases} x=a-\sin(a+u) \\ y=1-\cos(a+u) \end{cases} \quad (u \text{ 为参数})$$

请你通过这个方程认真研究一下这个曲线的特点。

作出这样的曲线后，当点 A 水平移动的过程中，点 B 会运动到相应的位置，而圆形曲线的起始点也同时改变，这样就得到了一个真正滚动的圆形。

若在这个圆形曲线上，任意取一个点，那么这个点也会具有一个与参数  $u$  等价的参数，当点 A 水平移动时，这个点也是在以点 A 为中心的圆上真正滚动。

实际上，我们只需要作出点 A 和圆形曲线即可，而不需要作出点 B，上面出现点 B 是为了更好地说明问题而已。

### 3、做出一个真正滚动的圆

下面是 Hawgent 皓骏动态数学软件中的具体操作步骤：

(1) 在新建文档中，执行【画图】菜单下【直线】子菜单中的【一次方程直线】命令，3 所示：在弹出的对话框中输入： $y=0$ ，单击【确定】即作出在  $y$  轴上的直线；类似地作出直线  $y=1$ ，在直线  $y=1$  上作一点 A，然后隐藏直线  $y=1$ 。



图 3

(2) 选择点 A，执行【测量】菜单中的【x-坐标】得出点 A 的横坐标值，系统用  $v000$  记录了该值。

(3) 执行【画图】菜单下【一般曲线】子菜单中的【参数方程】命令，如图 4 所示，在“ $x(t)=$ ”对应的编辑框中输入： $v000+\sin(v000+t)$ ，在“ $y(t)=$ ”对应的编辑框中输入： $\cos(v000+t)+1$ ，单击【确定】，即可生成一个圆。结果如图 5 所示：





图 4

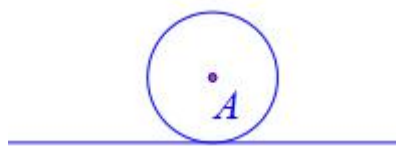


图 5

#### 4, 车轮滚动试试看

下面我们利用我们所构造的滚动车轮生成旋轮线吧。

单击工具条中【画图】工具，在圆形曲线上任意取一点 B；然后单击“选择”工具返回到选择状态；选择点 B，执行【画图】菜单中的【跟踪】命令。

拖动点 A 的过程中可以观察到点 B 的轨迹图形，如图 6 所示，



图 6

你所得到的结果，是否也是这样呢？

#### 5, 圆在圆上滚动又如何

(1) 请你作出一个半径为 R 的滚动圆。

(2) 如图 7 所示，如何构造出一个半径为 1 的圆 O'，使得它能够在半径为 2 的大圆 O 外部无滑动地滚动？

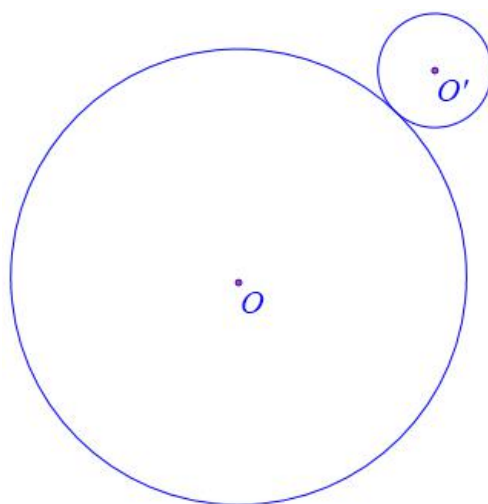


图 7

## 26 圆周率值如何来

### 【问题与思考】

前面我们研究了很多与圆相关的问题。对于圆来说，相信大家首先想到的就是圆周率  $\pi$ 。它是一个非常重要的数学常数，它的知名度非常高，以至于很少人不知道它。我们知道一个半径为  $r$  的圆来说：

其周长为： $C = 2\pi r$ ；

其面积为： $A = \pi r^2$ 。

这是人们所熟悉的常识。可能你还知道  $\pi$  等于 3.1415926...，它是一个无穷无尽的无理数。但是你知道  $\pi$  的这个值是怎么得到的吗？恐怕不少人并不了解。

人类认识  $\pi$  这个常数，经历了一个漫长而艰难的过程。

早在公元前 2000 年左右，巴比伦人（今伊拉克地区）就给出  $\pi = 3\frac{1}{8} = 3.125$ 。

而埃及人在公元前 2000 年使用的是  $\pi = 4 \times (\frac{8}{9})^2 = 3.1605$ 。

至于我们国家的情况，由于相关的资料严重缺乏，只知道公元前 1200 年还使用  $\pi \approx 3$ ，并且一直使用了几百年，这就是所谓的“径一周三”。但是到了公元 130 年，在后汉书上在采用  $\pi \approx 3.1622$ 。

而在印度，在公元 400 年就已经使用了  $\pi \approx 3.1416$ 。

.....

这些早期的结果只是一些猜测和估计，并没有提出一个明确的方法将  $\pi$  计算到任意的精确度。

直到公元前 3 世纪古希腊文明史上最伟大数学家阿基米德（Archimedes, 287-212B.C）的出现，他首次提出了一个可以将  $\pi$  的数值计算到任意精确的一般性方法。

他的方法依据是：圆内接正多边形的周长比圆周长小，而圆外切正多边形的周长比圆周长大。通过将圆内接正多边形和圆外切正多边形的边数不断加倍，使得他们越来越趋近于圆周，当它们的边数很大时，它们的周长就与圆周长相接近。当边数越来越大时，精确率就越来越高了。

我们首先研究圆内接正  $N$  边形的边长与正  $2N$  边形的边长之间的关系。

如图 1 所示，AQ 为正  $N$  边形的边，设其长度为  $S_N$ ；AP、PQ 为正  $2N$  边形的边，设其

另外，圆周率  $\pi$  与圆的半径无关，因此我们尽量不自找麻烦，而将圆的半径取为 1。


$$1 = OM^2 + AM^2 = (1 - PM)^2 + AM^2 \quad (1)$$
$$AP^2 = PM^2 + AM^2 \quad (2)$$
$$1-AP^2=1-2PM, \text{ 即: } PM=\frac{AP^2}{2} \quad (3)$$
$$AP^4 - 4AP^2 + AQ^2 = 0 \quad (5)$$
$$AP = \sqrt{2 \pm \sqrt{4 - AQ^2}}, \text{ 即 } S_{2N} = \sqrt{2 \pm \sqrt{4 - S_N^2}} \quad (6)$$

因此，我们得到了： $S_{2N} = \sqrt{2 - \sqrt{4 - S_N^2}}$ 。

89

圆的周长  $C = 2\pi$ ，所以圆周率的近似值可表示为： $\pi \approx N\sqrt{2 - \sqrt{4 - S_N^2}}$ 。

当然，圆周率的近似之也可以用正  $N$  边形的边长表示： $\pi \approx \frac{C}{2} = \frac{NS_N}{2}$ 。

这样，只要我们知道了圆内接正  $N$  边形的边长，我们就可以求得圆周率的一系列近似值。

### 【动手与实验】

1，先从圆内接正 6 边形开始

我们熟悉的圆内接正六边形的边长等于圆的半径 1，因此可以由  $S_6 = 1$  开始计算圆周率的近似值。

剩下的工作请你自己动手由计算器或者计算机完成，求出当圆内接正  $N$  边形的边数为 6144 时圆周率的近似值。

2，也可以从圆内接正方形开始

我们还知道，我们熟悉的圆内接正方形的边长为  $\sqrt{2}$ ，因此业可以由  $S_4 = \sqrt{2}$  开始计算圆周率的近似值。

剩下的工作请你自己动手由计算器或者计算机完成，求出当圆内接正  $N$  边形的边数为 131072 时圆周率的近似值。

3，在 Hawgent 皓骏动态数学软件中快速地运算

我们可以在 Hawgent 皓骏动态数学软件中设计一种方法，让计算机自动地帮我们计算，而不需要一步一步地操作。

打开文件“阿基米德算法-1.dmr”，如图 2 所示，初始状态下，为正六边形，其边长为 1，由此得到的圆周率的近似值为 3。

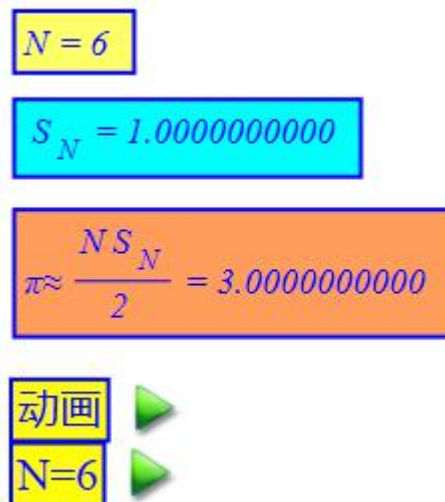


图 2

单击“动画”按钮一次，就会发现正多边形的边数成倍地增长。同时其边长也会相应发生改变，这时也会自动计算出圆周率的近似值。

4，也让计算机从圆内接正方形算起

打开文件“阿基米德算法-2.dmr”，初始状态下，为正六形，其边长为  $\sqrt{2} = 1.41421356\dots$ ，由此得到的圆周率的近似值为  $2.8284271\dots$ 。

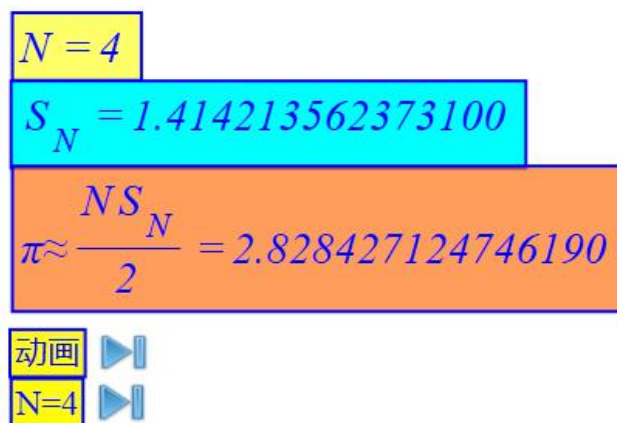


图 2

单击“动画”按钮一次，会发现正多边形的边数成倍地增长。同时其边长也会相应发生改变，这时也会自动计算出圆周率的近似值。

从正六边形开始与从正方形开始，有什么相同之处和不同之处？

## 27 可向电脑发指令

### 【问题与思考】

前面我们看到了，在计算机中，能够自动地计算圆周率的一系列近似值。计算内部是如何工作的呢？我们应该如何向计算机发号施令，才能让它出色地完成我们交待的任务呢？下面我们细致地介绍利用 Hawgent 皓骏动态数学软件实现阿基米德算法的详细过程。

下面以圆内接正六边形作为起初的图形考虑问题。

当  $N=6$  时，我们规定  $S_6 = 1$ ；

当  $N=6 \times 2$  时，我们规定  $S_{6 \times 2} = \sqrt{2 - \sqrt{4 - S_6^2}}$ ；

...

当  $N=6 \times 2^m$  时，我们规定  $S_{6 \times 2^m} = \sqrt{2 - \sqrt{4 - S_{6 \times 2^{m-1}}^2}}$ 。

上面自然语言形式的数学，如何用计算机表示呢？下面我们一边操作一边理解。

首先，我们介绍一个命令：

`a=a+1;`

它的意思是将字母  $a$  的值增加 1，再赋值给  $a$ 。因此，每执行一次这个命令，字母  $a$  的值就自动增加 1。

请问：刚开始  $a$  的值为 0，执行这个命令 8 次之后， $a$  的值变为多少？

然后，我们介绍一个函数：

`greater(m,n);`

当  $m > n$  时，它的结果为 1；否则，它的结果为 0。

请问，`greater (3,2)`、`greater (-3,-2)`、`greater (0,0)` 的结果分别是什么？

接着，我们需要了解 Hawgent 皓骏动态数学软件测量功能的特点：

在 Hawgent 皓骏动态数学软件中，对于第一个测量结果，系统会自动用 `v000` 表示；对于第二个测量结果，系统会自动用 `v001` 表示；对于第三个测量结果，系统会自动用 `v002` 表示；.....，依此类推。其中  $v$  是变量（variable）的英文单词的第一个字母，而计算机科

学中一般用 0 表示第一个，后面的依此类推。

首先我们增加一个初始化字母 N 和 S 的按钮，操作如下：

单击【插入】菜单中的【按钮...】命令；

如下图所示，在弹出的按钮设置对话框中输入动作的名称：初始化；

在程序编辑框中输入：VarAnimation(N,N,6,1,3);

回车换行，继续输入：VarAnimation(S,S,1,1,3);



图 1

单击【增加动作】按钮，即可增加初始化字母 N 和字母 S 的动作，单击【确定】按钮完成。

在这里函数命令 VarAnimation(N,N,6,1,3); 有 5 个参数。其中第 1 个参数表示要改变的字母变量；第 2 个、第 3 个参数分别表示改变的始值和终值；第 4 个参数表示改变的频率，第 5 个参数表示改变的方式，3 表示运动一次。

再例如 VarAnimation(a,0,10,50,3)，表示将字母 a 从 0 改变到 10，中间经过了 50 个位置。

然后我们增加一个让字母 N 和 S 递增的按钮，操作如下：

单击【插入】菜单中的【按钮...】命令；

如下图所示，在弹出的按钮设置对话框中输入动作的名称：边数增加；

在程序编辑框中输入：VarAnimation(N,N,2\*N,1,3);

回车换行，继续输入：VarAnimation(S,S,(2-(4-S^2)^(1/2))^(1/2),1,3);



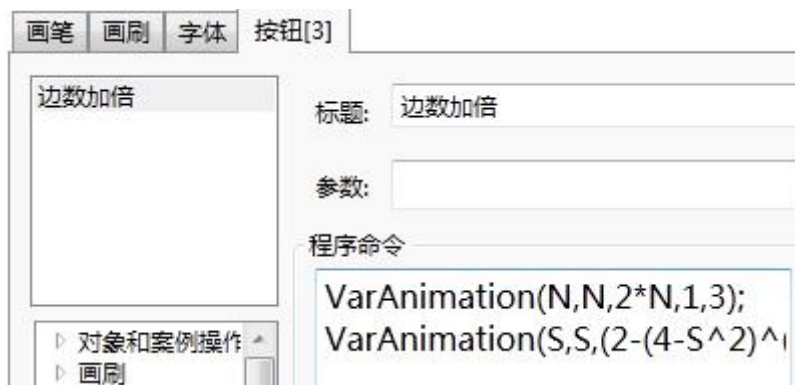


图 2

单击【增加动作】按钮，即可增加按钮的一个动作：边数加倍，单击【确定】按钮完成。

接下来通过测量的方式显示边数  $N$  和圆周率的估计值：

执行【测量】菜单中的【测量表达式...】命令，如图在弹出对话框中输入要测量的式子： $N$ ，单击“确定”即可得到测量结果。



图 3

继续，测量： $N \cdot S/2$  的值结果如下图所示：



图 4

单击【初始化】按钮，结果如下图所示，即可得到  $N=6$  时的情形：

初始化  $N = 6.00$

边数加倍  $\frac{1}{2} N S = 3.00$

图 5

下面我们整数的形式表示  $N$ ，而对于圆周率的估计值要用更多的位数表示：

鼠标右键单击  $N \cdot S / 2$  的测量文本，如下图所示。



图 6

如下图所示，将等号前面的内容修改为： $\pi$  的估计值，在命令 `MeasureValue` 中输入第 2 个参数的值：15，

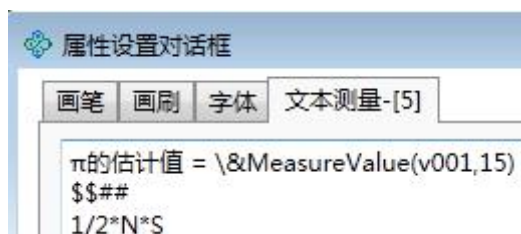


图 7

单击【确定】按钮完成：

类似地，将字母  $N$  的测量结果以整数的形式显示，那么久在字母  $N$  的测量文本当中将命令 `MeasureValue` 中输入第 2 个参数的值：0。

将结果如下：

初始化  $N = 6$

边数加倍  $\pi \text{ 的估计值} = 3.0000000000000000$

图 8

单击【边数加倍】按钮一次，边数  $N$  就会加倍一次，对应的  $\pi$  的估计值也会发生改变。

以下是其中的几种情形：

$N = 12$	$N = 24$
$\pi$ 的估计值 = 3.105828541230250	$\pi$ 的估计值 = 3.132628613281240
$N = 48$	$N = 96$
$\pi$ 的估计值 = 3.139350203046870	$\pi$ 的估计值 = 3.141031950890530
$N = 192$	$N = 384$
$\pi$ 的估计值 = 3.141452472285340	$\pi$ 的估计值 = 3.141557607911620

图 9

### 【动手与实验】

1, 多边形的边数可以从 6 变为 18, 然后再变为 54, ..., 每次变为原来的 3 倍, 这样效率会更高一些, 请你重新设计实验的过程。

2, 请你自己动手设计一个实验, 从圆内接正方形开始, 通过成倍地增加多边形的边数逐步得到圆周率更加准确的近似值。

3, 亦可利用圆外切正多边形

前面我们提到阿基米德方法依据的另外一点是: 圆外切正多边形的周长比圆周长, 而当边数越大越多, 圆外切正多边形也越来越趋近于圆, 那么它的周长也就越来越趋近于圆周长。因此也可以得到圆周率任意精度的近似值。

请你推导出圆外切正  $2N$  边形的边长与圆外切正  $N$  边形的边长之间的关系, 然后利用你所得到的公式, 推导得出圆周率的一系列近似值, 并在 Hawgent 皓骏动态数学软件上设计相应的实验, 得到最终的结果。

## 28 刘徽之技高一筹

### 【问题与思考】

在我国三国时期的大数学家刘徽在公元 264 年也提出了类似阿基米德的算法，刘徽还将这种方法命名为割圆术。他在《九章算术》“圆田术”注重写道：

割之弥细，所失弥少。

割之又割，以至于不可割，

则与圆周合体，而无所失矣。

这些朴素的语言概括了他先进的割圆术思想。

利用这种方法，刘徽利用 3072 边形（等于  $6 \times 2^9$ ）求得：

$$\pi \approx 3.14159$$

这在当时是非常精确的结果。

与阿基米德一样，刘徽不但得到了相当精确的  $\pi$  的近似值，而且还提出了一个可以计算  $\pi$  值任意精度的一般性方法。

当然，刘徽比阿基米德晚出生了五个多世纪。但是按照当时的交通情况和通讯条件，刘徽是不可能知道阿基米德的工作，因为我们完全可以相信刘徽的工作是原创的。

而且，与阿基米德利用圆内接及圆外切正多边形周长不同的是，刘徽利用的是圆内接及圆外切正多边形的面积。

记  $A_n$  为圆内接正  $n$  边形的面积，而  $A'_n$  为圆外切正  $n$  边形的面积，则有：

$$A_n < \pi < A'_n$$

当正多边形的边数不断增加时， $A_n$  和  $A'_n$  越来越趋近于  $\pi$ 。

如图 1 所示，AB 是圆内接正  $N$  边形的一边，CD 为圆外切正  $N$  边形的一边，则有：

$$n \cdot \triangle OAB \text{ 的面积} < \pi < n \cdot \triangle OEF \text{ 的面积}$$

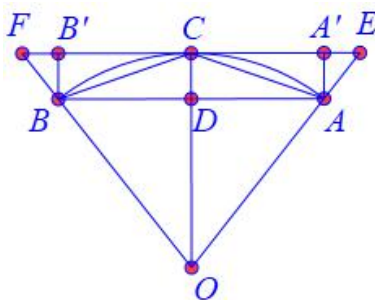


图 1

$n \cdot \triangle OEF$  的面积

$> n(\triangle OAB \text{ 的面积} + \text{矩形 } A'ABB' \text{ 的面积})$

$= n \cdot [2\triangle OAC \text{ 的面积} + 2(\triangle OAC \text{ 的面积} - \triangle OAB \text{ 的面积})]$

$= A(2n) + [A(2n) - A(n)] = 2A(2n) - A(n) > \pi$ ,

这就是刘徽实际用来计算圆周率近似值的公式。只需要计算圆内接正多边形的面积，比较简单，而避免了计算圆外切正多边形面积的麻烦。

更加重要的是，用一个小于圆外切正多边形的面积来代替圆外切正多边形的面积作为圆周率的过剩近似值，还提高了计算的精度。这也是刘徽超过阿基米德之处。

顺便指出，在我国古代几何中，面积是个重要的工具，在这里可以看到运用它的优势。

### 【动手与实验】

1，自己动手试试看

你知道如何求圆内接正多边形的面积吗？那么请你自己动手得到一系列圆周率的近似值。

2，利用三角求面积

如图 2 所示，若 AB 为圆内接正  $n$  边形的一条边，则  $\angle AOB = \frac{360^\circ}{n}$ 。那么三角形 AOM

的面积可表示为：

$$\frac{1}{2} \times AM \times OM = \frac{1}{2} \times OA \times \sin\left(\frac{360^\circ}{2n}\right) \times OA \times \cos\left(\frac{360^\circ}{2n}\right) = \frac{1}{2} \times \sin\left(\frac{360^\circ}{2n}\right) \times \cos\left(\frac{360^\circ}{2n}\right)$$

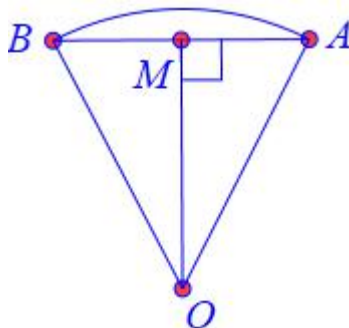


图 2

则这个圆内接正  $n$  边形的面积可表示为：

$$A(n) = n \times 2 \times \frac{1}{2} \times \sin\left(\frac{360^\circ}{2n}\right) \times \cos\left(\frac{360^\circ}{2n}\right) = n \times \sin\left(\frac{360^\circ}{2n}\right) \times \cos\left(\frac{360^\circ}{2n}\right)。$$

将来到了高中阶段我们还会学习到关于三角函数的一个重要公式：

$$2 \times \sin(\alpha) \times \cos(\alpha) = \sin(2\alpha)$$

因此，圆内接正  $n$  边形的面积可表示为：

$$A(n) = \frac{n}{2} \times \sin\left(\frac{360^\circ}{n}\right)。$$

根据这个公式，请你利用计算器计算出圆周率的一系列近似值。

3，计算机也能够算的更快

打开文件“计算圆周率的刘徽之技.dmr”，如图 3 所示，这时为圆内接正三角形。单击“ $n$ ”加倍，这时就会出现圆内接正六边形，通过数据观察圆周率近似值的变化规律。

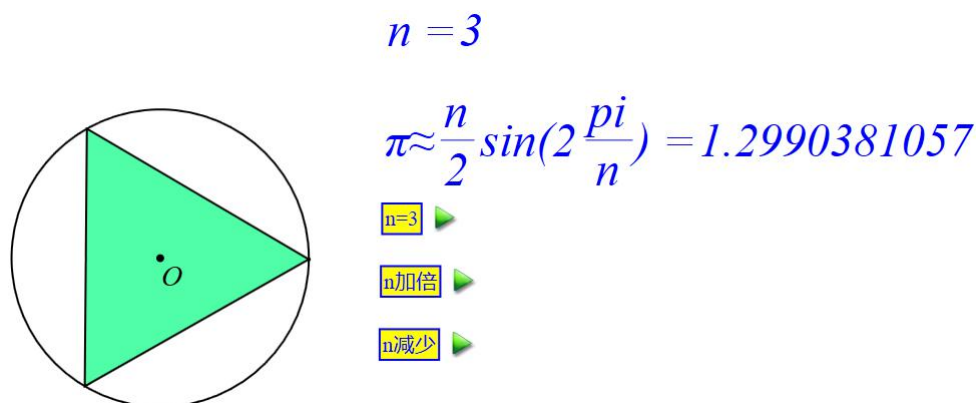


图 3

## 29 祖氏疏率与密率

### 【问题与思考】

需要说明的是，将圆周率记为  $\pi$ ，是在大数学家欧拉于 1737 年采用后才被大家所普遍接受，并成为通用的记号，而并不是一开始就是这样的。

说到中国数学家对圆周率  $\pi$  的贡献，不能不提到祖冲之。他是南北朝时期的人，在公元 5 世纪时可能是运用了刘徽的方法，将  $\pi$  的近似值计算到

$$3.1415926 < \pi < 3.1415927$$

精确到了小数点后第 7 位。这种精确值在欧洲一直到 16 世纪才出现，祖冲之的结果比欧洲足足领先了 11 个世纪。

祖冲之是我国古代一位伟大的科学家，除了在数学方面有伟大的成就之外，在天文、历法方面都做出了杰出的贡献。

祖冲之对圆周率的贡献，尤其让人吃惊和感兴趣的是他的密率

$$\pi \approx \frac{355}{113} \quad (\text{其值为 } 3.1415929\dots)$$

这比他的疏率

$$\pi \approx \frac{22}{7} \quad (\text{其值为 } 3.1428571\dots)$$

要精确得多，而且形式也很简单。

这个结果在欧洲被德国人奥托 (V. Otho) 所发现时是 1573 年，已经是 1000 多年以后的事情了。

究竟祖冲之是如何得到他的密率的？由于没有文献考证，至今仍是一个谜。当然，不少人也作出过种种猜测，但是均无法得到证实。其中，我国著名数学家华罗庚教授还用连分数的理论解释过。

### 【动手与实验】

1, 把一个小数写成连分数的形式

任何一个实数都可以写成连分数的形式，这里以 2.72 为例进行说明。可以看到

$$\begin{aligned}
2.72 &= 2 + \frac{72}{100} = 2 + \frac{1}{\frac{100}{72}} = 2 + \frac{1}{1 + \frac{28}{72}} = 2 + \frac{1}{1 + \frac{1}{\frac{72}{28}}} = 2 + \frac{1}{1 + \frac{1}{2 + \frac{16}{28}}} \\
&= 2 + \frac{1}{1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{\frac{28}{16}}}} = 2 + \frac{1}{1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{1 + \frac{12}{16}}}} = 2 + \frac{1}{1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{1 + \frac{1}{\frac{16}{12}}}}} \\
&= 2 + \frac{1}{1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{4}{12}}}}} = 2 + \frac{1}{1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{3}}}}}
\end{aligned}$$

这就将 2.72 写成了连分数的形式，这种方法就称为辗转相除法。把一个分数写成连分数之后就可以求它的渐近分数。

在上式中，略去右侧的  $\frac{72}{100}$ ，就得到 2；

在上式中，略去右下侧的  $\frac{28}{72}$ ，就得到 3；

在上式中，略去右下侧的  $\frac{16}{28}$ ，就得到  $\frac{8}{3}$ ；

在上式中，略去右下侧的  $\frac{12}{16}$ ，就得到  $\frac{11}{4}$ ；

在上式中，略去右下侧的  $\frac{1}{3}$ ，就得到  $\frac{19}{7}$ 。

这样就得到了 2.72 的一系列渐近分数。通过计算，可以发现它们总是按照一个比 2.72 小、一个比 2.72 大的顺序排列。比 2.72 小的渐近分数叫做它的不足值，比 2.72 大的渐近分数叫做它的过剩值。我们可以分别用这些渐近分数作为 2.72 的近似值。

2，得到  $\pi$  的连分数形式

取 3.1415926 与 3.1415927 的平均值 3.14159265 作为圆周率的近似值，根据上面介绍的辗转相除法将它化为连分数。

3，得到  $\pi$  的一系列渐近分数



根据上面得到的  $\pi$  的连分数形式，得到它的一系列渐近分数。

认真观察，我们上面介绍的祖冲之的疏率和密率是否为列其中？

## 30 触类旁通算根号

### 【问题与思考】

对于 $\sqrt{2}$ ，我们大家都不陌生。可能很多人还能随口说出它小数点之后很多位的数字。

前面我们知道了将圆周率 $\pi$ 计算到任意精度的方法，那么我们不禁要问，对于根号2是否也有类似地计算到其任意精确度的方法？也就是说，你知道根号2的结果是如何来的吗？

我们教科书上的叙述大概如下：

$$\because 1^2 = 1, 2^2 = 4,$$

$$\therefore 1 < \sqrt{2} < 2;$$

$$\because 1.4^2 = 1.96, 1.5^2 = 2.25,$$

$$\therefore 1.4 < \sqrt{2} < 1.5;$$

$$\because 1.41^2 = 1.9881, 1.42^2 = 2.0164,$$

$$\therefore 1.41 < \sqrt{2} < 1.42;$$

$$\because 1.414^2 = 1.999396, 1.415^2 = 2.002225,$$

$$\therefore 1.414 < \sqrt{2} < 1.415;$$

... ..

如此进行下去，可以得到根号2的更精确的近似值。

认真思考一下，怎么进行下去才能得到 $\sqrt{2}$ 的更精确的近似值呢？

实际上，事实比“如此”要麻烦得多！

通过 $1^2 = 1, 2^2 = 4$ 我们马上知道 $1 < \sqrt{2} < 2$ 。

但是紧接着，为什么要直接计算 $1.4^2$ 与 $1.5^2$ 从而比较得到结果 $1.4 < \sqrt{2} < 1.5$ 呢？难道

我们一开始就不需要计算 $1.1^2$ 、 $1.2^2$ 、 $1.3^2$ 就知道 $\sqrt{2}$ 肯定不在 $1.1^2$ 与 $1.4^2$ 之间？

后面的也是一样，我们需要完成的任务比我们在教科书上所见到的运算多得多。

看来教科书的编写者，是在知道了 $\sqrt{2}$ 的近似值之后，在教科书上列出的一组不等式给

大家看看罢了，因为实际上的比较过程和运算过程并非如此。否则，如果问题是求 $\sqrt{41}$ 的近似值，不知在 $\therefore$ 和 $\therefore$ 之后，你应该怎么写。

那么我们的问题就变成，任意给你一个整数，是否有一个更加高效、更加简便的方法或算法求它的平方根任意精确度的近似值？

### 【动手与实验】

1，将 $\sqrt{2}$ 表示为连分数的形式

设 $x = \sqrt{2}$ ，则有：

$$x^2 = 2;$$

$$x^2 - 1 = 1;$$

$$(x-1)(x+1) = 1;$$

$$x-1 = \frac{1}{x+1};$$

$$x = 1 + \frac{1}{x+1}。 \quad (1)$$

将 $x = 1 + \frac{1}{x+1}$ 继续代入式子 $x = 1 + \frac{1}{x+1}$ 的下方可得：

$$x = 1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{x+1}}; \quad (2)$$

再将 $x = 1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{x+1}}$ 继续代入式子 $x = 1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{x+1}}$ 的下方可得：

$$x = 1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2 + \frac{1}{x+1}}}}; \quad (3)$$

这样继续下去，就得到了 $\sqrt{2}$ 的一系列连分数。

对于（1）、（2）、（3）式来说，我们将最下方的 $x$ 取1，然后计算这个连分数的值即可

得到 $\sqrt{2}$ 的一系列近似值。

2，也可以不用事先列出连分数

在式子 $x = 1 + \frac{1}{x+1}$ 中，我们将右边的部分截去，直接取 $x = 1$ ，这样就得到了 $\sqrt{2}$ 的第一个渐近分数。

将 $x = 1$ 代入式子 $x = 1 + \frac{1}{x+1}$ ，可以得到 $\sqrt{2}$ 的第二个渐近分数 $\frac{3}{2}$ 。

将 $x = \frac{3}{2}$ 代入式子 $x = 1 + \frac{1}{x+1}$ ，可以得到 $\sqrt{2}$ 的第三个渐近分数 $\frac{7}{5}$ 。

将 $x = \frac{7}{5}$ 代入式子 $x = 1 + \frac{1}{x+1}$ ，可以得到 $\sqrt{2}$ 的第四个渐近分数 $\frac{17}{12}$ 。

....

请你继续操作，得到 $\sqrt{2}$ 更多的渐近分数。

3，在计算机上可以更快地得到结果

启动 Hawgent 皓骏，单击【作图】菜单中的【变量迭代】命令，如下图所示，输入初值：1，输入迭代变量：x，并设置迭代表达式为：1+1/(x+1)，单击【增加】按钮，即可增加一个迭代，其初值为 1，迭代公式为：x=1+1/(x+1)。

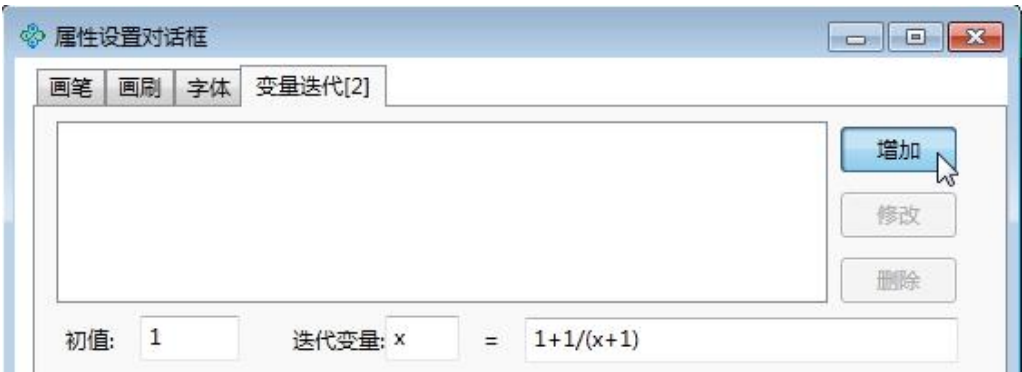


图 1

在对话框下方设置迭代层数为:n，设置显示精度为：15，单击【确定】按钮完成。



图 2

结果如下图所示：

	$x := 1 + \frac{1}{x+1}$
0	1.0000000000000000
1	1.5000000000000000
2	1.4000000000000000
3	1.4166666666666670
4	1.413793103448280

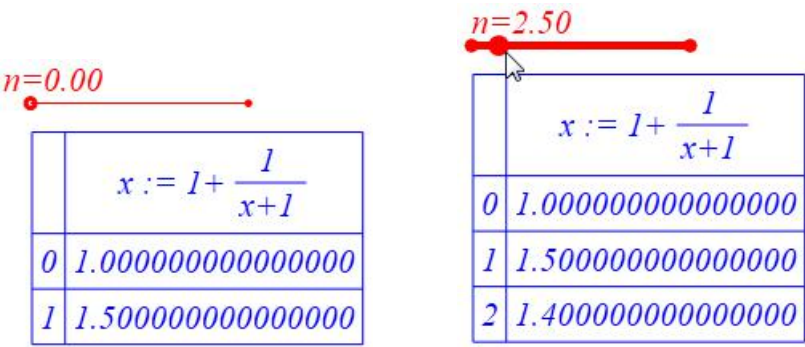
图 3

单击【插入】菜单中的【变量...】命令，在弹出的对话框中输入变量：n，设置最小值为：0，最大值为：20，单击【确定】按钮完成。



图 4

结果如下图所示，通过变量尺改变字母 n 的值，可以逐步得到根号 2 的更加精确的近似值。



$n=3.55$

	$x := 1 + \frac{1}{x+1}$
0	1.0000000000000000
1	1.5000000000000000
2	1.4000000000000000
3	1.4166666666666670

$n=4.72$

	$x := 1 + \frac{1}{x+1}$
0	1.0000000000000000
1	1.5000000000000000
2	1.4000000000000000
3	1.4166666666666670
4	1.413793103448280

$n=5.31$

	$x := 1 + \frac{1}{x+1}$
0	1.0000000000000000
1	1.5000000000000000
2	1.4000000000000000
3	1.4166666666666670
4	1.413793103448280
5	1.414285714285710

$n=6.34$

	$x := 1 + \frac{1}{x+1}$
0	1.0000000000000000
1	1.5000000000000000
2	1.4000000000000000
3	1.4166666666666670
4	1.413793103448280
5	1.414285714285710
6	1.414201183431950

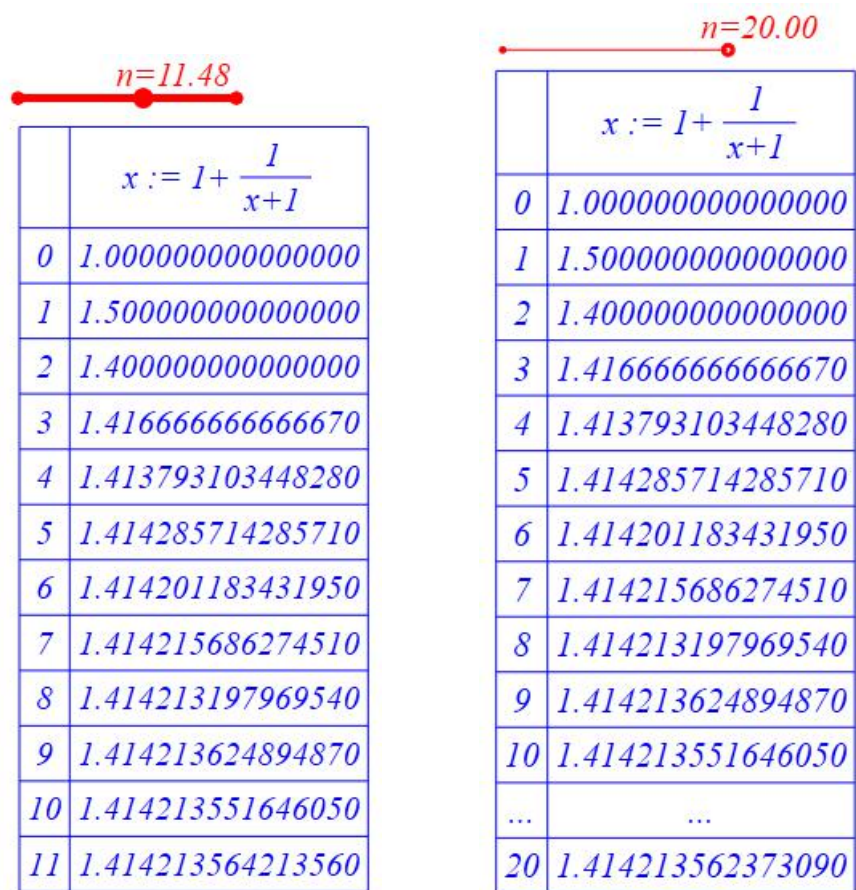


图 6

4, 任意给出的一个正整数, 求算术平方根

随意给出一些整数: 37、53、91、119, 请你给出一个方法, 可以分别求出它们的算术平方数的任意精确度的近似值。

## 31 点动形成何种线

在一个伸手不见五指的夜里，一个小偷鬼鬼祟祟地爬上了一架斜靠在墙上的梯子，准备通过从屋子的窗户钻进房间盗窃，他的手里还拿着一个灯光非常暗淡的手电筒，手电筒的灯泡是黑夜里唯一能被看到的東西。

当小偷爬到梯子的正好中间位置时，梯子开始缓缓下滑，这时小偷担心被摔下来于是紧紧抓住梯子不放手。



图 1

小偷虽然未能成功行窃，但是仍然被起诉。在法庭上，目击证人比尔说：“……，当时我看到了梯子沿着地面在缓缓下滑。”

法官问比尔：“在那么漆黑的晚上，连梯子都看不见怎么能看到梯子在缓缓下滑？请你认真考虑后，再回答你所发现的现象。”

实际上，比尔所看到的是什么？

因为手电筒的灯泡是黑夜里唯一可以被看到的東西，因此在梯子缓缓下滑过程中，比尔看到的是灯泡在空中所经过一条路径。

我们经常说：点动成线！那么，在梯子下滑过程中，灯泡在空中所经过路径是一条什么形状的曲线呢？比尔准确描述出这条曲线的形状，才能被法官认定为有效的证词。

请你帮助目击证人比尔描述他所观察到的过程。

### 【操作与实验】

#### 1，画出梯子经过的位置

假定下面是上图的一个简化图，小偷手中的灯泡就在梯子的中点位置（黄色点）。假如梯子的长度为 5 个单位，你能否在图上画出梯子下滑过程中它的几个位置，然后标注出这些梯子的中点。



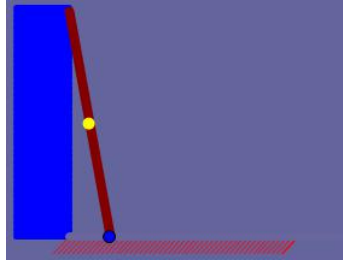


图 2

下滑过程中所描绘出来的梯子位置越多，那么就越好清晰、准确地画出它的中点经过的路径。

## 2，果真运动试试看

在计算机上我们是可以真实地模拟梯子下滑的过程。打开文件“31-01 下滑的梯子-1.dmr”，如上图 2 所示，拖动梯子与地面的接触点（红色点），可以使得梯子沿着墙面向下滑动。在梯子下滑过程中，观察梯子中间的发光的灯泡（黄色点）所经过的路径。

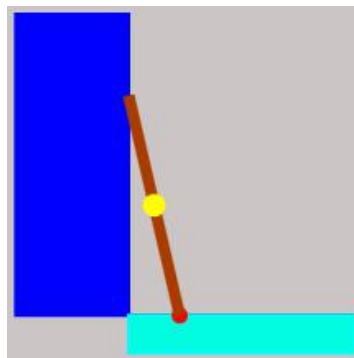


图 3

结果如图 3 所示，请检验你上面所得到的结论。

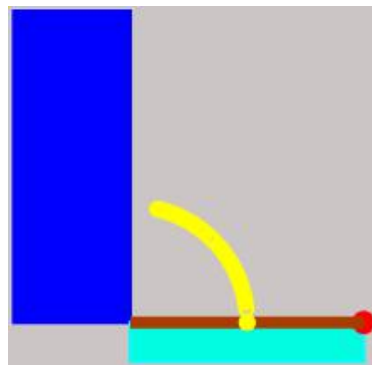


图 4

## 3，点动形成何种线？

这是一条什么形状的曲线呢？

数学实验与物理实验、化学实验不同的是，在数学实验中获得了结果、看到了现象，而工作还远远没有结束。我们获得的的结果、看到的现象到底是什么，或者是不是我们认为的某种数学对象，则需要从数学上进行推理和证明。

请你证明你所得到的结论。

## 32 如果不是在中点

### 【问题与思考】

在下图 1，将梯子的中点与墙角对应的一点连接起来，在梯子、墙面和地面所组成的直角三角形中，这条连线（斜边上的中线）始终等于梯子（斜边）的长度的一半。因此，无论梯子滑动到哪里，灯泡（梯子的中点）距离墙角（直角三角形的直角顶点）的距离都相等。所以说，灯泡所经过的路径是一段圆弧。

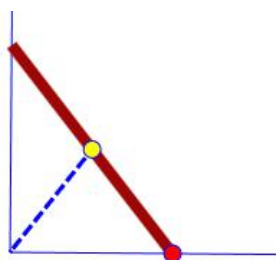


图 1

到这里，我们不但通过实验得到结论，还进行了数学上的推理说明。可以看到，计算机为我们探索问题、解决问题提供了一个可以动手操作、观察实验、猜想验证的平台。

思考一个问题：

如果小偷手里的手电筒不是正好在梯子的中点位置呢？在这种情况下，当梯子下滑过程中灯泡所经过的路径还是一段圆弧吗？



图 2

有了计算机为我们所提供的数学实验平台，我们不能仅满足于解决原有的问题，应该大胆地提出各种各样的问题，并尝试探索和解决它们。

### 【动手与实验】

打开文件“32-01 小偷不是在梯子的中点.dmr”，可以看到我们在《究竟比尔看到了什么》一文最后所构造的梯子模型。

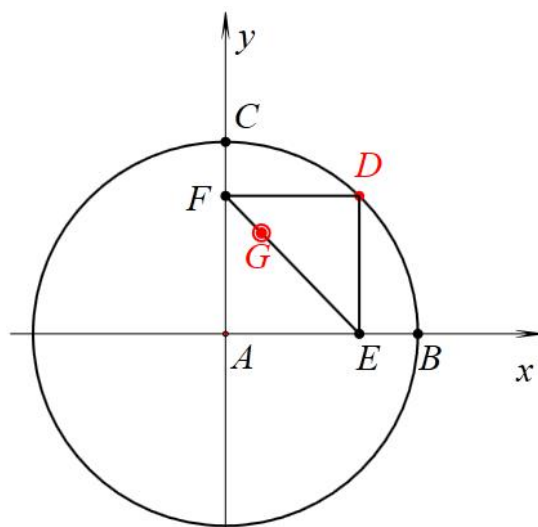


图 3

在 EF 上任意取一点 G，跟踪点 G。

拖动点 D，可以发现如下图 2 所示，点 G 所经过的路径是一个椭圆，这就为我们提供了一种画椭圆的方法。

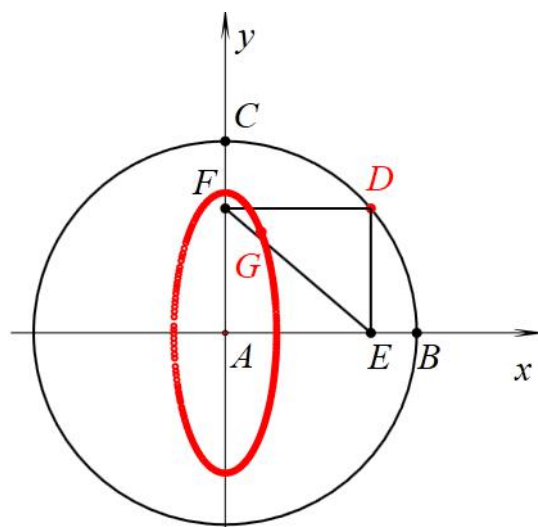


图 4

## 33 椭圆又是什么圆

### 【问题与思考】

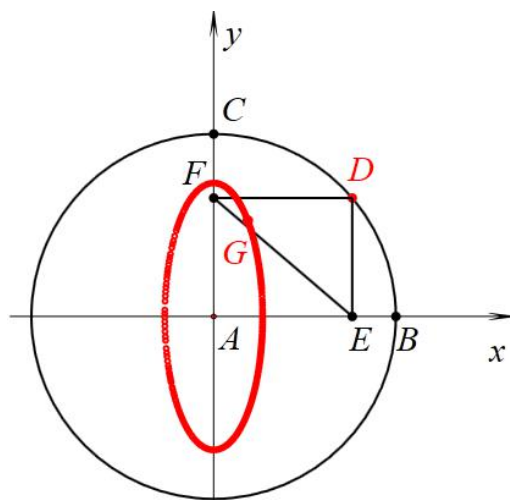


图 1

如图 1 所示，在前面的问题中，我们应该如何判断点  $G$  所经过的路径确实是一个椭圆而不是其他类型的曲线呢？这就要从椭圆的定义出发，检验一下点  $G$  所经过的路径是否符合椭圆的定义。趁此机会也让我们提前认识一下椭圆。

### 【实验与思考】

#### 1. 椭圆与圆可互变

前面我们研究过，椭圆可以看作是圆在某个一个方向上被压扁或拉伸后的图形。

打开文件“33-01 圆与椭圆.dmr”，如下图 2-图 5 所示，可以将椭圆看作是圆在水平方向被压扁或拉伸了，拖动点  $A$  可以改变被压扁或拉伸的程度。

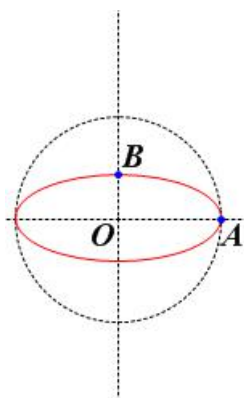


图 2

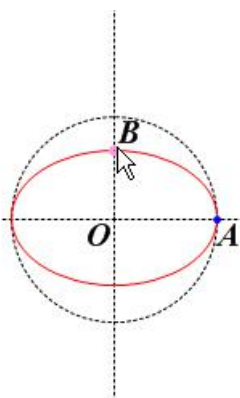


图 3

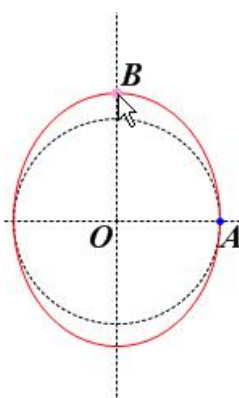


图 4

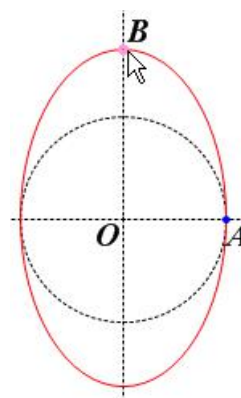


图 5

## 2, 椭圆之间形不同

下面两个椭圆, 你能看出来哪个更扁些, 哪个更圆些? 也就是说, 如何描述椭圆的特征性质?

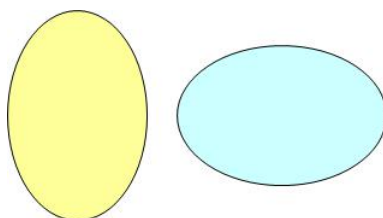


图 6

就像一个圆有无数条半径一样, 椭圆也有无数条半轴, 椭圆的半轴就是椭圆上一点到椭圆中心之间的连线。圆的所有半径都相等, 而椭圆的半轴的长度却不尽相同, 最长一条半轴叫做椭圆的长半轴, 最短的一条半轴叫做椭圆的短半轴。

请在图 2-图 5 中的四个图形中分别找出椭圆的长半轴和短半轴。

而且从图 2-图 5 中还可以看出, 椭圆的长半轴所在直线与短半轴所在直线相互垂直, 并且它们都是椭圆的对称轴。

## 3, 利用数量表特征

通常将椭圆的长半轴记作  $a$ 、短半轴记作  $b$ 。 $b$  与  $a$  的比值越小椭圆就越扁, 否则它就越圆。打开文件“33-02 椭圆的长半轴与短半轴.dmr”, 如下图所示, 拖动点  $B$ , 观察椭圆的形状变化以及  $b/a$  测量值的变化规律。

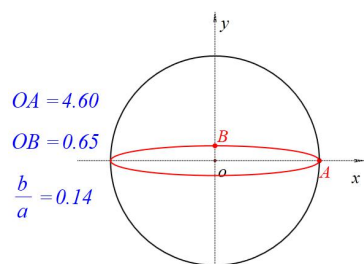


图 7

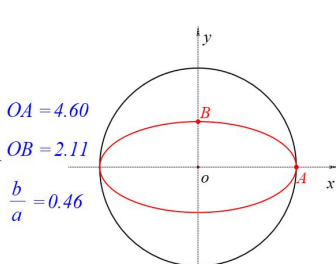


图 8

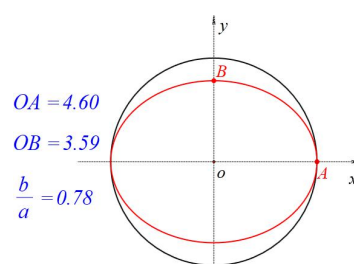


图 9

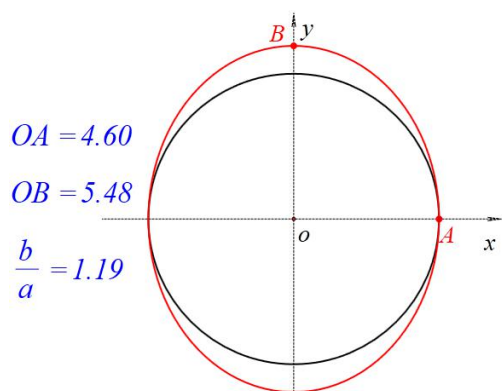


图 10

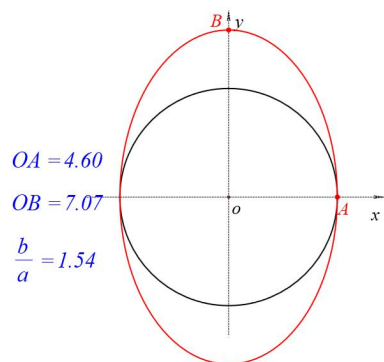


图 11

#### 4. 椭圆也有其定义

圆的定义是到一定点的距离等于定值的点轨迹。而椭圆与此对应的定义是：到两定点的距离之和定于定值的点的轨迹。这两个定点就是椭圆的两个焦点，两个焦点之间的距离叫作焦距。

打开文件“33-03 椭圆的定义.dmr”，如下图所示，可以拖动椭圆上的点 P，观察测量数据的变化规律。

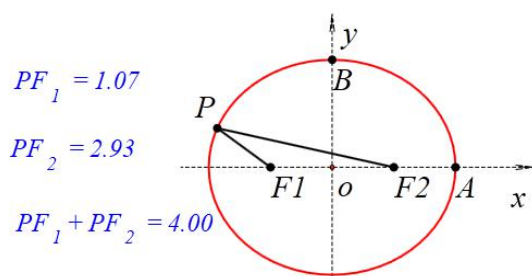


图 12

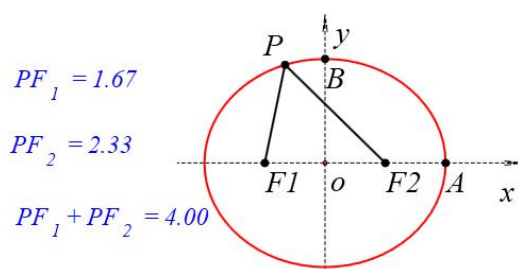


图 13

焦点到中心的距离叫做半焦距，通常半焦距记作  $c$ 。因为点 A 是椭圆上的点，因此有：

$$AF_1 + AF_2 = AF_2 + 2c + AF_2 = 2a$$

所以，椭圆上的点到两焦点的距离之和等于两个长半轴的长度，长半轴的两倍也叫作长轴。

同时，点 B 也是椭圆上的点，因此有：

$$BF_1 + BF_2 = 2a$$

又因为短半轴所在直线是椭圆的对称轴，所以： $BF_1 = BF_2$

所以在直角三角形  $BOF_2$  中： $BF_2^2 = OB^2 + OF_2^2$ ，即  $a^2 = b^2 + c^2$

所以， $c = (a^2 - b^2)^{1/2}$

## 5, 回到开头的问题

现在让我们重新回到开头所提出的问题：点 G 所经过的路径是否为一个椭圆？

在图 2 中，当点 D 分别运动到点 C、点 B 所在位置时，AG 的长度分别可以看作是椭圆的长半轴、短半轴，如图 6、图 7 所示，对应于线段 EF 上的 GE、GF。因此，GE、GF 就是椭圆的长半轴、短半轴。

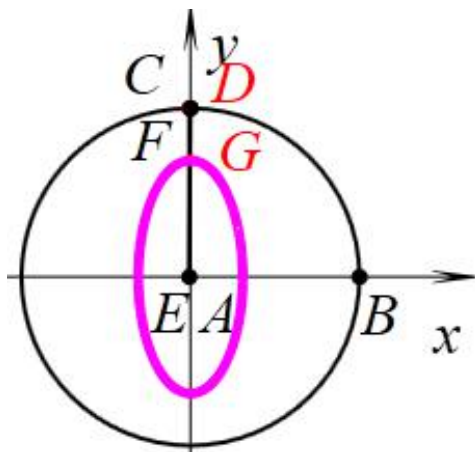


图 6

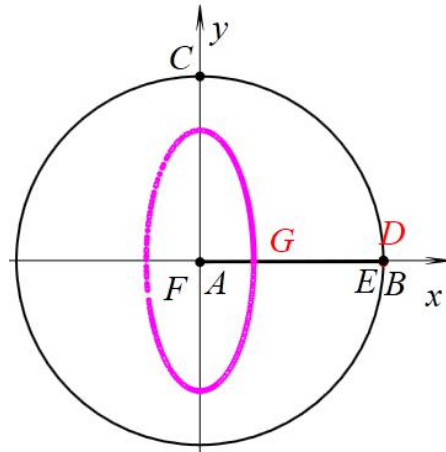


图 7

下面我们通过实验检验点 G 的路径是否为一个椭圆：

(1) 打开文件“33-04 检验点 P 的路径.dmr”。

(2) 按住 Ctrl 键，依次选择点 G 和点 E，执行【测量】菜单中的【距离】命令，得到线段 GE 的长度测量值；重复类似操作测量线段 GF 的长度。

(3) 计算半焦距 c 的值：执行【测量】菜单中的【表达式】命令，如图 8 所示，在测量表达式对话框中输入： $(v000^2 - v001^2)^{(1/2)}$ ，然后单击“确定”按钮得到测量结果。右击测量结果，在弹出的属性对话框中，把\&前的内容改为： $(GE^2 - GF^2)^{(1/2)} =$ ，点击【确定】完成。其中，m000、m001 分别记录了线段 GE、GF 的长度测量结果，类似地，计算机自动用 v002 记录了  $(v000^2 - v001^2)^{(1/2)}$  的计算结果。



图 8

(4) 选择点 A，执行【画图】菜单下【圆和圆弧】子菜单中的【已知圆心和半径的圆】



命令，在弹出的用户输入对话框中输入：v002，单击“确定”按钮作出一个圆；按住 Ctrl 键，依次选择点 A 和点 C，执行【画图】菜单下【直线】子菜单中的【直线】，命令，作出直线 AC，作出这个圆与直线 AC 的两个交点 P、Q；然后隐藏直线 AC 和这个圆。

(5) 连接 GP、GQ，测量 GP、GQ 的长度，并计算它们的和。结果如下：

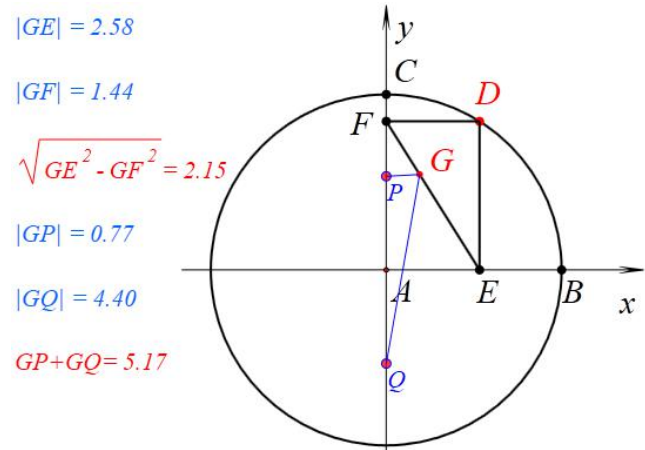


图 9

拖动点 D，观察测量数据的变化规律，然后给出你的结论。

# 6. 还有问题待思考

(1) 当线段 GE 的长度小于线段 GF 的长度时， $(v000^2 - v001^2)^{(1/2)}$  的结果就不存在，这是应该如何设计实验？

(2) 当点 G 在线段 EF 的中点位置时，点 G 所经过的路径就是一个圆。因此，反过来，是否可以将圆看作是椭圆的一个特殊情形呢？这时椭圆的长半轴、短半轴、半焦距之间有什么关系？

(3) 为了研究方便的需要，通常习惯使用字母 e 表示半焦距 c 与长半轴 a 的比值，即  $e = c/a$ 。当 a 固定时，e 的大小与半焦距 c 有关。e 越小，说明焦点距离椭圆的中心越近；e 越大，说明焦点距离椭圆的中心越远。所以人们将 c 与 a 的比值 e 形象地称之为椭圆的离心率。若将圆看作是椭圆的一种特殊情形，那么圆的离心率是多少？

## 34 梯子是个荧光棒

### 【问题与思考】

在节日的夜晚，许多小朋友手中都手持荧光棒，在黑夜中挥舞的荧光棒像是一道道彩带。

在滂沱大雨的马路上，汽车镜前的雨水刷不停地工作，我们看到它所经过的区域是一个扇形。

这就是我们所说的：线动成面。

请你想象一下，若梯子也是用荧光材料制作的，那么梯子在下滑过程中所扫描过的区域是一个什么形状图案呢？

### 【动手与实验】

#### 1，梯子运动得星形

打开文件“34-01 梯子是个荧光棒.dmr”，如图 1 所示，看到我们前面所研究的梯子模型。

拖动点 D，可以观察梯子所扫描过的区域，单击点 D 的动画按钮，可以让梯子更均匀地滑动，如下图 2 所示。

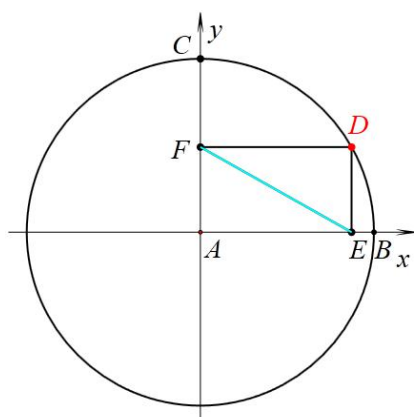


图 1

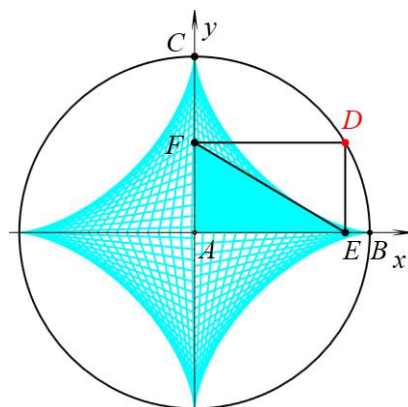


图 2

直线段的运动形成了具有四个角的曲边多边形区域，我们就给它取个名字叫做四角星形线吧。

#### 2，星形竟然是摆线

这个四角星形线实际上就是我们前面研究过的摆线。打开文件“34-02 星形线与旋轮

线.dmr”，单击动画按钮，结果如下图 3 所示，当动圆在定圆内部滚动且定圆的半径是动圆半径的 4 倍时，动圆上一点所形成的旋轮线就是上面星形线的边界。

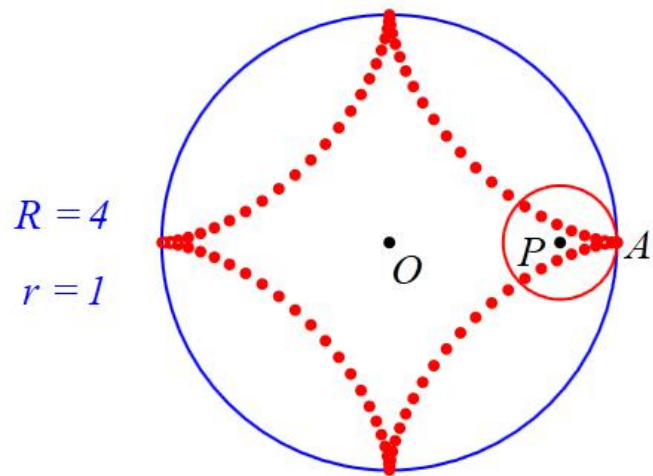


图 3

为什么下滑的梯子所扫描过的区域边界也是一条旋轮线呢？说明这两者有内在的联系。它们两者具体有什么联系呢？若是能够将其中一种运动转化为另一种运动，就可以说明这两者之间具有相同的本质。

### 3. 需要说明两者同

现在要研究直线段 EF 所扫描过的区域的边界，那么当 EF 在某一个位置时，它所对应的当前位置的区域边界在线段 EF 的什么位置呢？

那就是距离圆上的点 D 最近的点，也就是说点 D 到 EF 的垂足决定了 EF 所扫描过的区域的边界。

在文件“34-01 梯子是个荧光棒.dmr”中，作出点 D 到 EF 的垂足 G，并且跟踪点 G，按【下一页】键进入文件“34-01 梯子是个荧光棒.dmr”的第二页，如下图 4 所示，单击动画按钮可以发现点 G 所经过的路径正是星形线区域的边界。

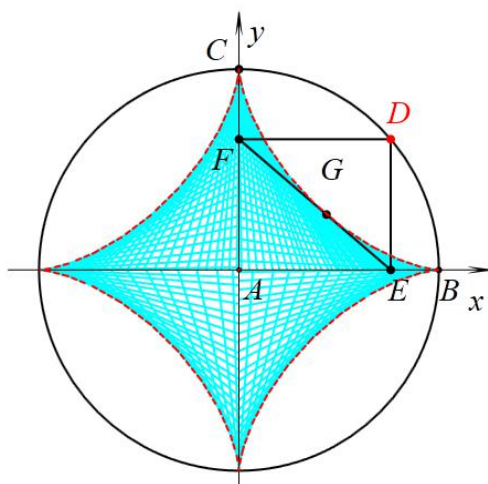


图 4

#### 4, 动圆圆心又在哪

通过前面的研究, 我们可以明白, 点 D 到 EF 的垂足 G 是某个滚动圆的圆周上的点。

那么这个动圆的圆心在哪里呢?

因为图 3 中的旋轮线是在动圆的圆心绕定圆的圆心旋转一周的过程中所形成的, 同样在图 4 中, 当点 D 在圆上运动一周的过程中, 也生成了点 G 对应路径的旋轮线。因此动圆的圆心必在半径 AD 上<sup>②</sup>, 且动圆的半径为 AD 的四分之一。进入文件“34-01 梯子是个荧光棒.dmr”的第三页, 完成下面的操作:

连接 AD, 可以发现 H 点正好在线段 AD 上, 分别度量 HD、AD 的距离, 再测量  $v000/v001$  得出 AD/HD 的比值, 由此可知 DH 与 AD 的长度比正好是 1:4

$$\begin{aligned} |HD| &= 1.09 \\ |OD| &= 4.35 \\ \frac{HD}{OD} &= 4.00 \end{aligned}$$

图 5

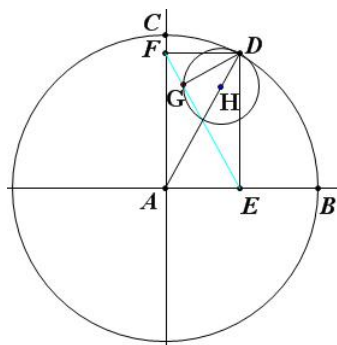


图 6

如图 6 所示：点 G 也正好在圆 D 上。

之后可以隐藏线段 AD 和 DG。如何验证点 H 就是图 2 中所示滚动圆的圆心呢？你可以连接 GH，然后跟踪 GH，结果如下图 7 所示，而在文件“星形线 with 旋轮线.dmr”同样连接 PA 并跟踪它，观察是否得到相同的结果。

5，还有问题请研究

(1) 跟踪滚动圆的半径得到了一个新的区域，如图 7 所示，这个区域的边界是一个具有什么性质的曲线呢？这又引出一个新的问题，请你接着继续研究吧。

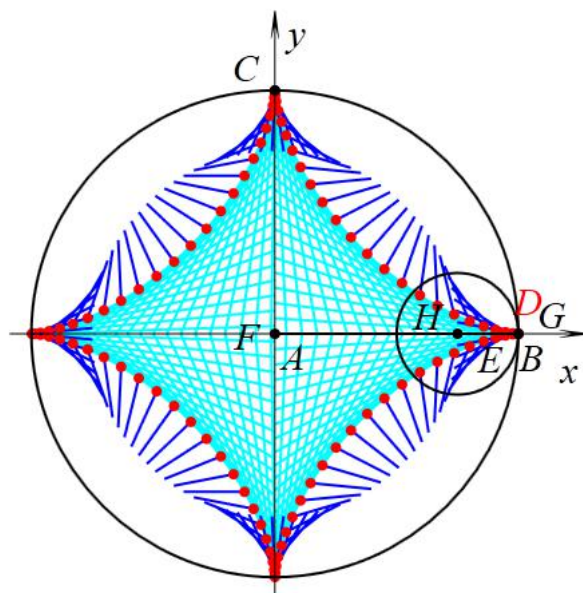


图 7

(3) 打开文件“34-03 星形线 with 椭圆.dmr”，如下图 8 所示，有一个以点 A 为中心的椭圆，它的长半轴与短半轴之和等于线段 AB 的长度

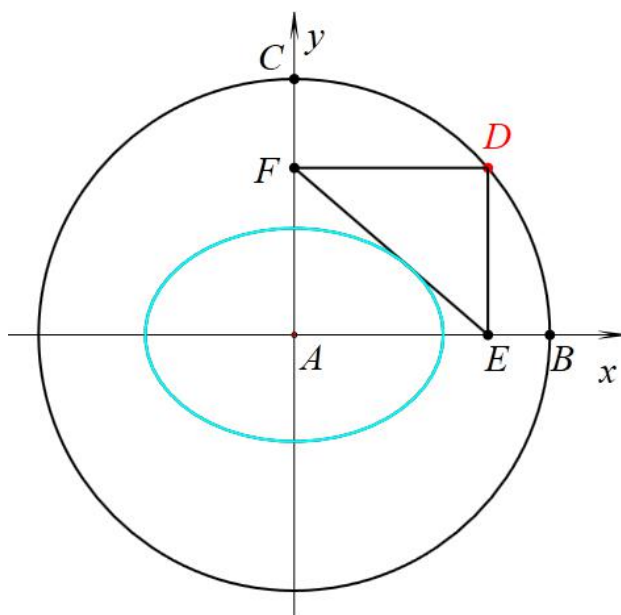


图 8

单击“椭圆系列”按钮，椭圆的长半轴与短半轴的长度在改变，而它们的和保持不变，等于线段  $AB$  的长度。结果如下图 9 所示，椭圆所扫描过的区域，也形成了与  $EF$  扫描过的区域相同的星形线，这说明椭圆所扫描过的区域的边界也是一条旋轮线。

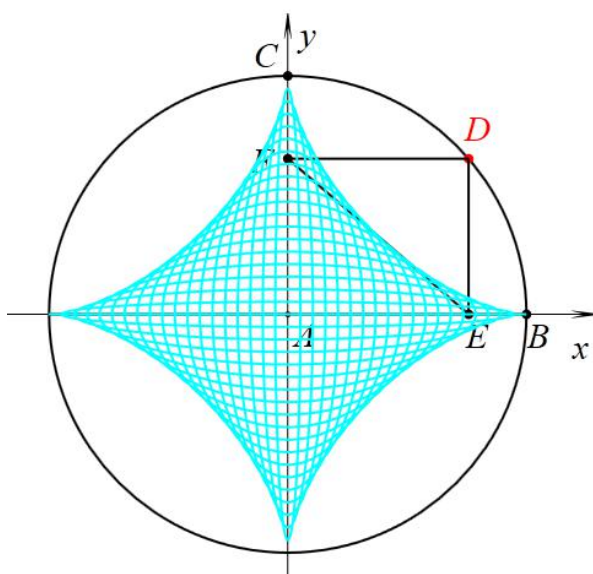


图 9

你是否能够从旋轮线的角度对椭圆所扫描过的区域进行解释呢？也就是说如何将椭圆的运动转化为动圆的滚动？

## 35 距离墙角最近点

### 【问题与思考】

在前面的研究过程中，我们发现梯子所扫描过的区域是一个边界为旋轮线的星形线。由直线的运动得到曲边的区域，这一结果的发现让我们既兴奋又惊奇。同时，更加重要的是它激发了我们更多的思考和探索的欲望，因此我们研究了梯子所形成的区域与旋轮线的本质关系，从而发现星形线的边界是由圆上的点  $D$  到梯子距离最近的点  $G$  所形成的旋轮线，如下图所示。

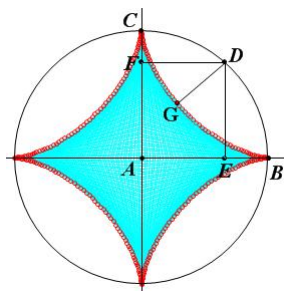


图 1

我们知道，从直线外一点到直线的垂线段距离最短。因此我们可以认为，点  $G$  是圆周上的动点  $D$  到梯子上距离最近的点。

那么圆心  $A$  到梯子上距离最近的点在哪里？当梯子滑动过程中，它的位置是固定的还是变化的？如果是不固定的，那么当梯子滑动过程中，墙角  $A$  到梯子距离最近的点所形成的路径是一条什么曲线？墙角到梯子距离最短的线段所扫描过的区域又是一个什么形状的图形呢？

### 【动手与实验】

#### 1. 距离墙角最近点

- (1) 打开文件“35-01 距离墙角最近点.dmr”，可以看到我们之前所研究的梯子模型。
- (2) 按住【Ctrl】键，依次旋转点  $A$  和线段  $EF$ ，执行【画图】菜单下【约束点】子菜单中的【垂足】命令，得到点  $A$  向  $EF$  作垂足  $P$  及对应的垂线段。
- (3) 按住【Ctrl 键】，依次选择点  $A$  和点  $P$ ，执行【画图】菜单中的【跟踪】命令，跟踪点  $P$  和线段  $AP$ ，并设置不同的跟踪颜色。
- (4) 单击点  $D$ ，执行【视图】菜单中的【动画框】命令，在动画框中，选中点  $D$ ，点击动画按钮，结果如下图 2 所示，得到了一个像是花朵一样的曲线，花朵具有四个花瓣。

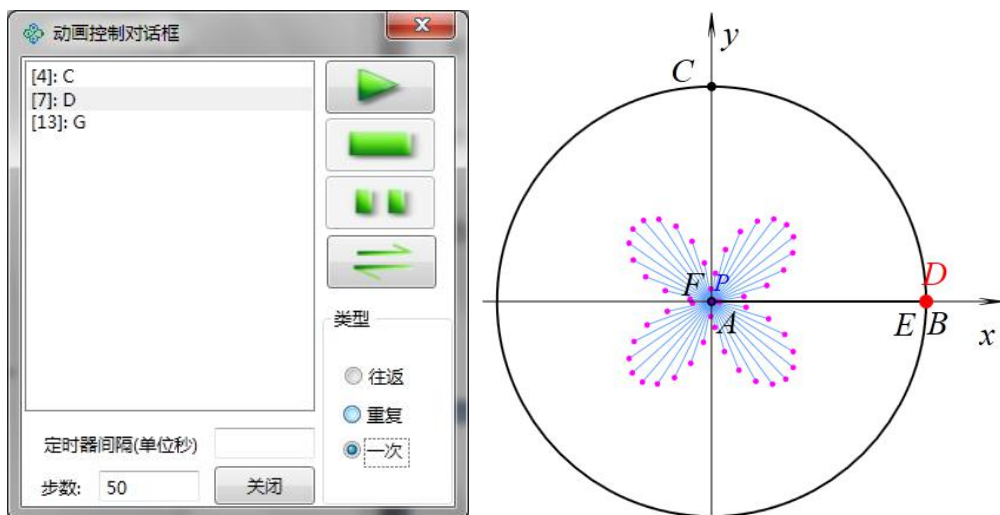


图 2

事实上，点 P 所经过的路径就是数学上的四叶玫瑰线。

## 2. 极坐标系做工具

为了更好地研究四叶玫瑰线，我在这里介绍一下数学中常用的另一种坐标系，叫作极坐标系。如下图 3 所示，在平面上取一个定点 O，自点 O 引一条射线 OX，同时确定一个单位长度和角度的正方向，这样就建立了极坐标系，其中 O 称为极点，射线 OX 称为极轴。极坐标系由瑞士数学家贝努利在 1691 年创建，它是一种用距离和角来确定点的位置的坐标系，在航空、航海中具有广泛的应用。

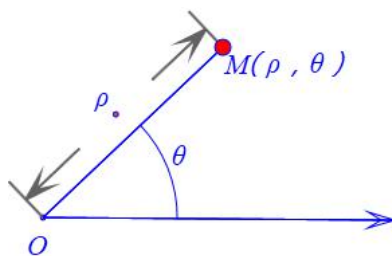


图 3

设 M 是平面上任一点， $\rho$  表示 OM 的长度， $\theta$  表示以射线 OX 为始边、射线 OM 为终边所成的角。那么有序数对  $(\rho, \theta)$  称为点 M 的极坐标。显然，极坐标系中每一个有序数对  $(\rho, \theta)$  决定一个点的位置。其中  $\rho$  称为点 M 的极经， $\theta$  称为点 M 的极角。

以下是几种常见几何图形以及它们的极坐标方程：



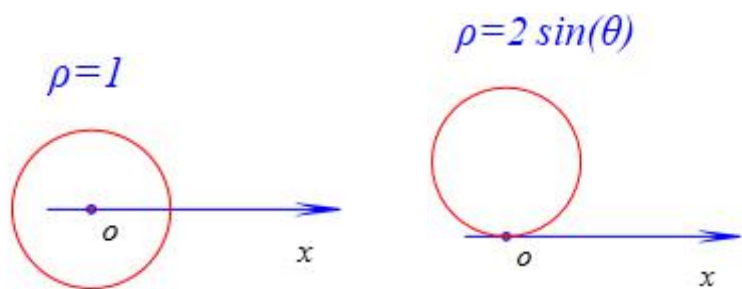


图 4

极坐标系和极坐标方程在处理很多问题的过程中，会给我们带来许多方便。例如作为圆锥曲线的椭圆、双曲线和抛物线，虽然各有特点，但是他们又有统一的一面。实际上，在极坐标系中，我们可以将圆锥曲线统一定义为：

**平面内，到一定点（焦点 F）和一条定直线（准线 m）的距离之比等于常数（离心率 e）的点的轨迹。**

可以说，在极坐标系中，椭圆、抛物线、双曲线的方程得到了完美的统一。

### 3, 玫瑰曲线花样多

在本文的开始我们所得到的四叶玫瑰线的极坐标方程是  $\rho = \sin(2\theta)$ ，事实上，极坐标方程为  $\rho = \sin(n\theta)$  的曲线都叫作玫瑰曲线。打开文件“35-02 玫瑰曲线.dmr”，可以看到极坐标方程为  $\rho = \sin(n\theta)$  的曲线，鼠标选择变量 n 的标示，如下图 5 所示，当光标变为横向的箭头时，单击鼠标并左右拖动可以变量 n 的值。

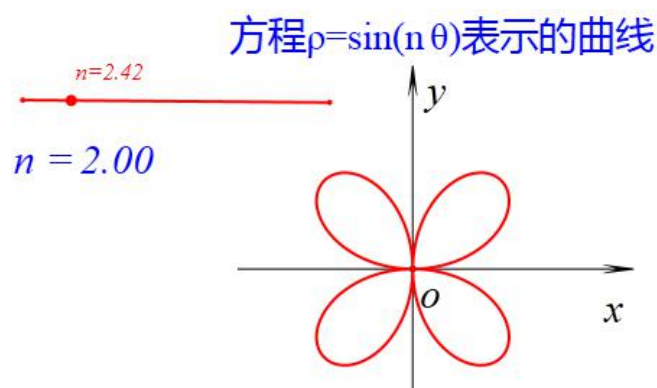


图 5

以下是当 n 为不同整数时对应玫瑰线的形状：

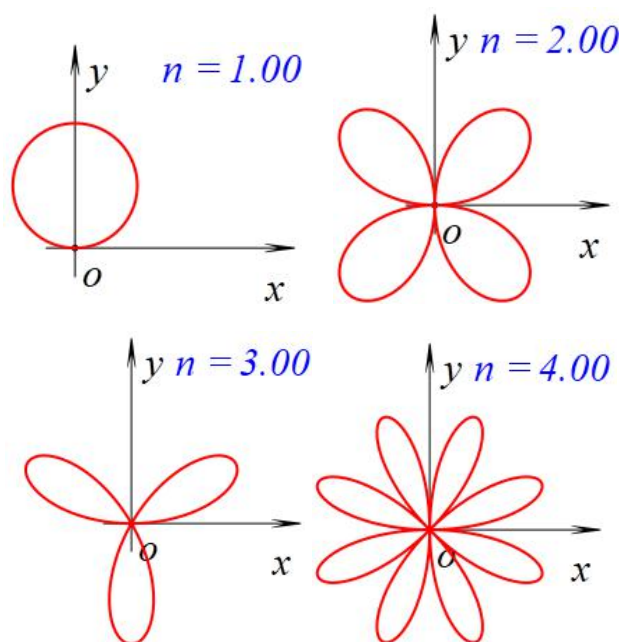


图 6

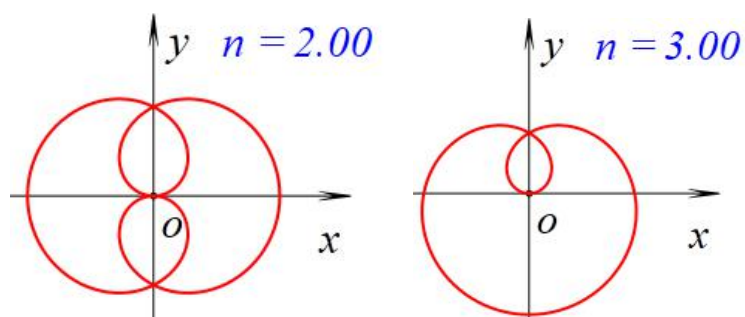
4, 相同不同有几何?

通过上面的图案, 你能发现玫瑰曲线的花瓣数目与它对应方程中的参数  $n$  有什么关系?

6, 诸多问题待求索

(1) 极坐标方程为  $\rho = \cos(n\theta)$  的曲线, 也是玫瑰曲线, 请你在计算机上画出它的图像。  $\rho = \cos(n\theta)$  的图像与  $\rho = \sin(n\theta)$  的图像之间有什么区别和联系?

(2) 打开文件 “35-03 极坐标方程与曲线-1.dmr”, 如下图 7 所示, 可以看到极坐标方程  $\rho = \sin(\theta/n)$  ( $n$  为自然数) 对应的曲线, 你能描述一下这条曲线的形状吗? 它有什么特征? 这条曲线它对应方程中的参数  $n$  有什么关系?



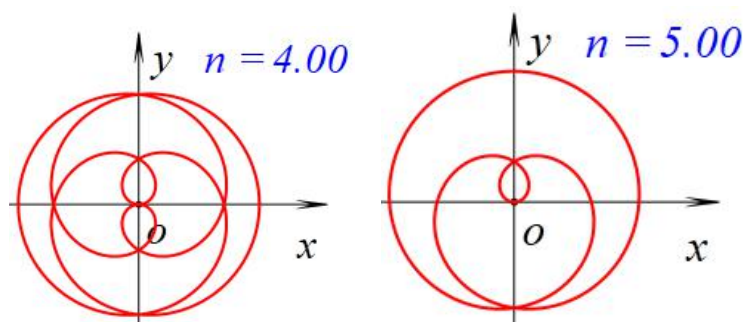


图 7

(3) 打开文件“35-04 极坐标方程与曲线-2.dmr”，可以观察到极坐标方程  $\rho = \sin(k \theta)$  ( $n$  为实数) 对应的曲线，单击动画按钮“动画:  $k[2^{1/2}, 5^{1/2}]$ ”， $k$  的值由  $2^{1/2}$  变为  $5^{1/2}$ ，下图 13 是对应的曲线形状。

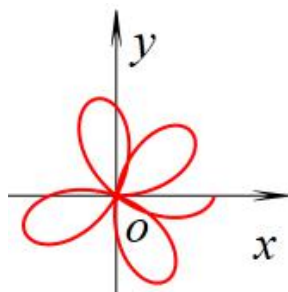


图 8

右击曲线打开曲线的属性对话框，然后将变量  $\theta$  的范围由  $[0, 2\pi]$  修改为  $[0, 4\pi]$ ，观察对应的曲线；然后将变量  $\theta$  的范围修改为  $[0, 8\pi]$ 、 $[0, 16\pi]$ 、 $[0, 32\pi]$ ，依次对应的曲线如图 9 所示。

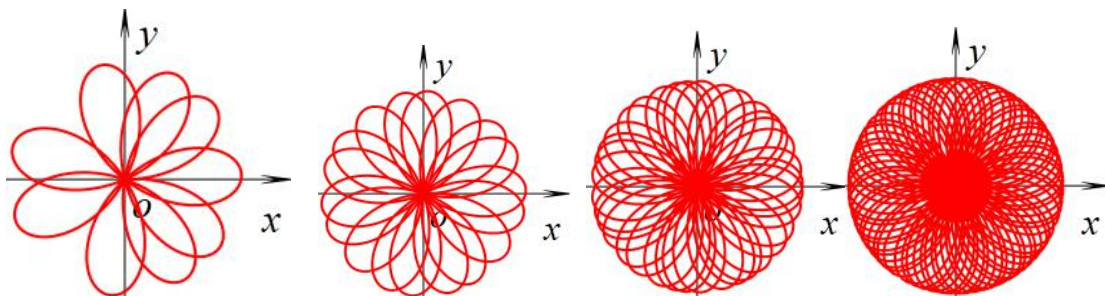


图 9

若将变量  $\theta$  的范围修改为  $[0, 64\pi]$ ，那么曲线会有什么变化趋势？从中你能发现什么规律？当  $k$  为无理数时，极坐标方程  $\rho = \sin(k \theta)$  的图像有什么特点？对照前面我们所研究、总结得到的有关旋轮线的规律，请你总结极坐标方程  $\rho = \sin(k \theta)$  ( $k$  为实数) 对应的玫瑰曲线与参数  $k$  之间什么关系？

## 36 墙面倾斜怎么办

### 【问题与思考】

之前我们谈到，在计算机中进行数学实验，首先要构造出满足要求的图形，或构造满足要求的图形关系，然后才能在此基础上进一步进行探索、观察和验证等。我们知道，在现实问题中，梯子虽然沿着墙面和地面下滑，但是梯子本身的长度保持不变，这是我们研究这个问题的背景和关键。在此基础上我们构造了研究梯子下滑的实验模型。

我们经常提到，有了计算机作为数学实验的平台，不但可以帮助我们探索、研究、解决问题，更重要的是能够开拓我们的视野，带给我们更多的启发和思考，帮助我们提出更多的问题。例如，一般情况下墙面与地面都是垂直的，而不垂直的情况会出现吗？若小偷沿着梯子所希望爬进去的是著名的意大利比萨斜塔，或者是在我国南京地区斜度超过比萨斜塔的定林寺塔。

那么，我们前面所构造的梯子模型还是梯子模型吗？如下图 1 所示，也就是说若  $AC$  与  $AB$  不垂直，那么当点  $D$  在圆周上运动过程中，线段  $EF$  还能表示一个滑动的梯子吗？

### 【动手与实验】

#### 1. 测量线段动眼看

打开文件“36-01 梯子下滑模型.dmr”，如图 1 所示为前面我们所构造的梯子下滑模型。

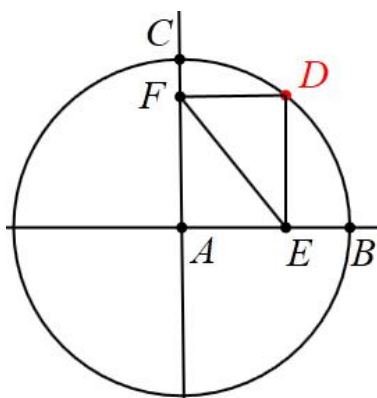


图 1

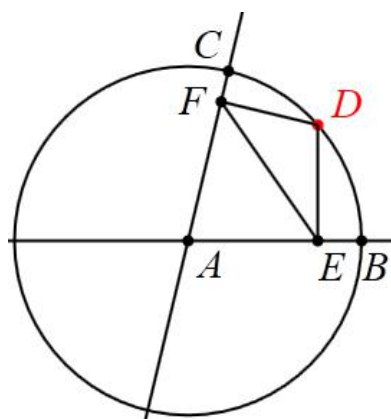


图 2

拖动点  $C$  使得  $CA$  不在垂直于  $AB$ ，结果如图 2 所示。如何检验  $EF$  是否还能表示一个滑动的梯子呢？

选择线段点  $E$  和点  $F$ ，执行【测量】菜单中的【距离】命令，得到线段  $EF$  的长度测量

值。

拖动点 D，线段 EF 的长度如何变化？

如下图 3-图 6 所示，可以发现在点 D 在圆周上运动的过程中，线段 EF 的长度保持不变。

这说明我们构造的这梯子模型当墙面是倾斜的情况下仍然是有效的。

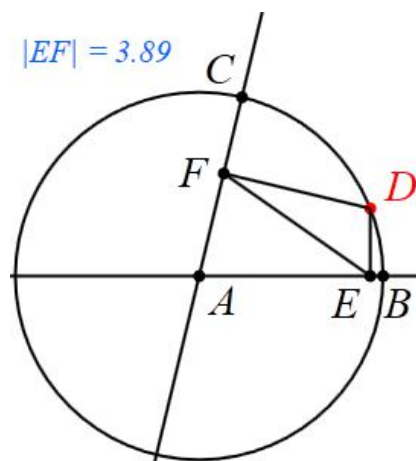


图 3

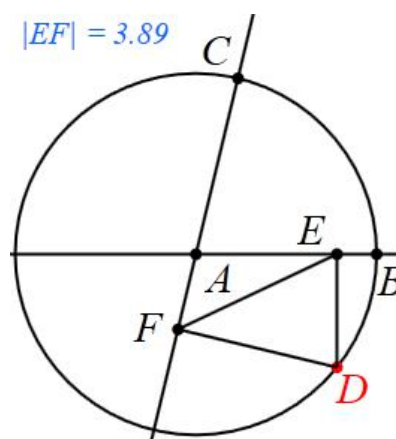


图 4

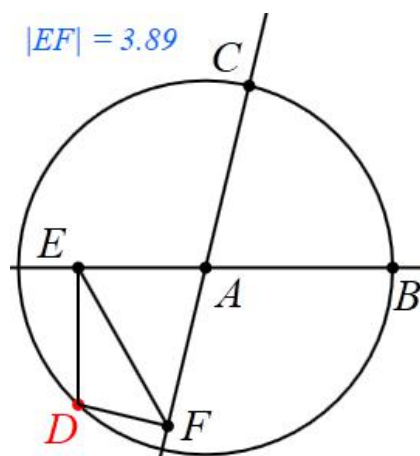


图 5

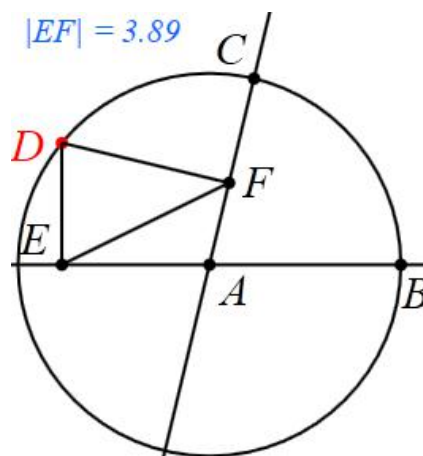


图 6

这个结果让我们感到惊喜的同时，自然要问个为什么。为什么点 D 在圆周上运动的过程中，线段 EF 的长度保持不变呢？

显然这时线段 EF 的长度不再等于 AB，那么跟 AB 有什么关系呢？拖动点 C，容易发现点 C 在圆周上的位置不同那么线段 EF 的长度也对应不同，如下图 7-图 9 所示。因此，线段 EF 的长度与角 BAC 有关。

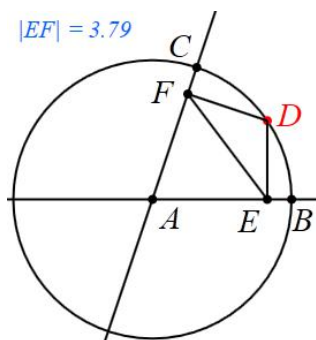


图 7

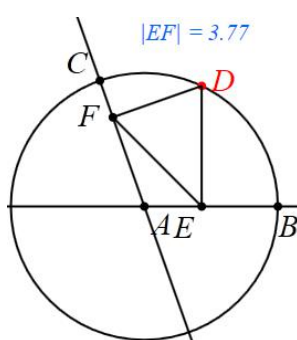


图 8

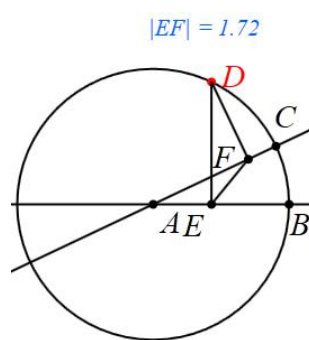


图 9

当点 D 与点 C 或者点 B 重合时，如下图 10、图 11 所示，易知  $EF = AB \cdot \cos(\angle BAC)$ 。

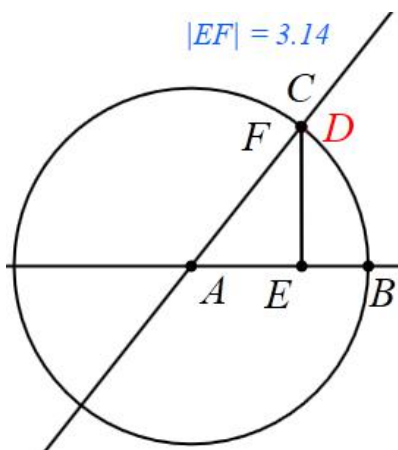


图 10

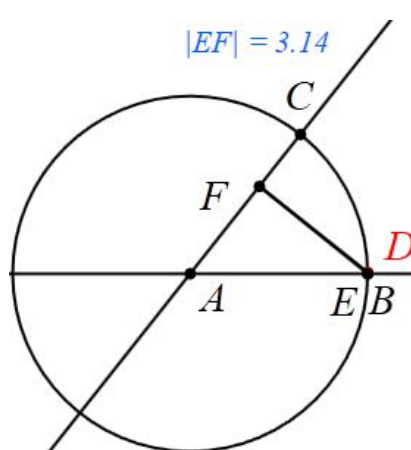


图 11

如何证明无论点 D 在圆上任何位置时，线段 EF 的长度都保持定长呢？请你自己试试看。

## 2. 前述问题再研究

前面我们研究了梯子下滑过程中，梯子的中点、梯子上的任意一点、墙脚到梯子上最近的一点所经过的路径分别是圆、椭圆、四叶玫瑰线，梯子所扫描过的区域的边界是一条旋轮线。然而在当墙面不再是竖直状态的情况下，会得到相同的结果吗？或者说得到的结果会有什么不同？

打开文件“36-02 墙面是斜的.dmr”，在第一页中，单击动画按钮，如图 12 示，可以看到梯子的中点 G 所经过的路径是一个椭圆。



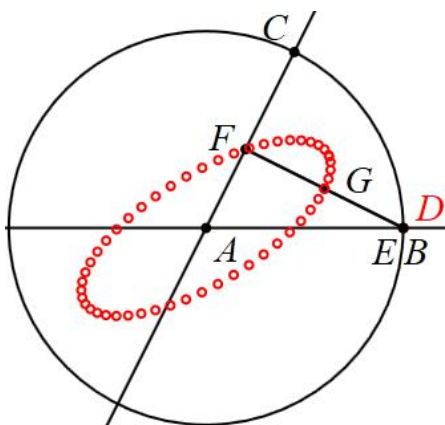


图 12

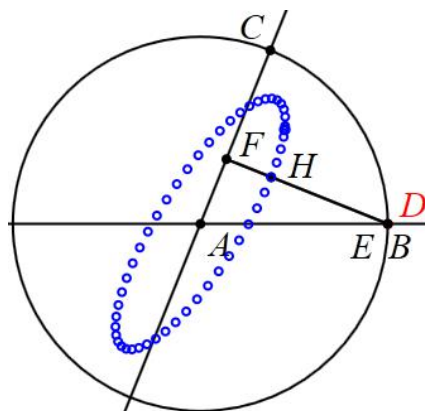


图 13

进入第二页，单击动画按钮，如图 13 所示，可以看到梯子上的任意点 H 所经过的路径仍然是一个椭圆。

进入第三页，单击动画按钮，如图 14 所示，可以看到梯子所扫描过的区域。

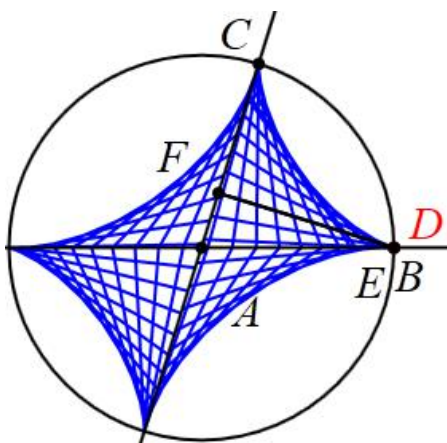


图 14

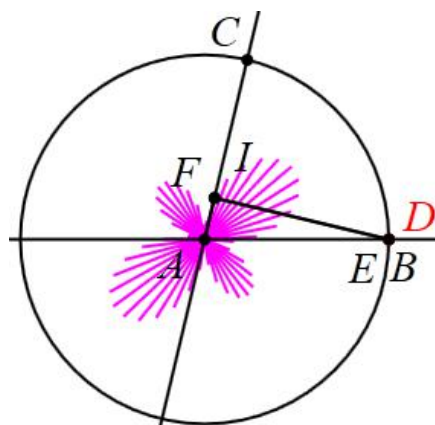


图 15

进入第四页，单击动画按钮，如图 15 所示，可以看到墙脚到梯子上距离最短的一条线段所扫描过的区域。

### 3, 留些问题请思考

- (1) 根据椭圆的定义，你能说明图 12 中，点 G 所经过的路径为什么是一个椭圆吗？
- (2) 根据椭圆的定义，你能说明图 13 中，点 G 所经过的路径为什么是一个椭圆吗？
- (3) 图 14 中，线段 EF 所扫描过的区域是什么形状的？
- (4) 你能给图 15 中线段 AI 所扫描过的区域对应的图案取一个恰当的名字吗？并对这个图案的特点进行说明。

## 37 抬轿问题与旋转

你见过抬花轿吗？如图 1 就是一个轿子，一个人坐在里面，前后各有一人抬着就可以行走。

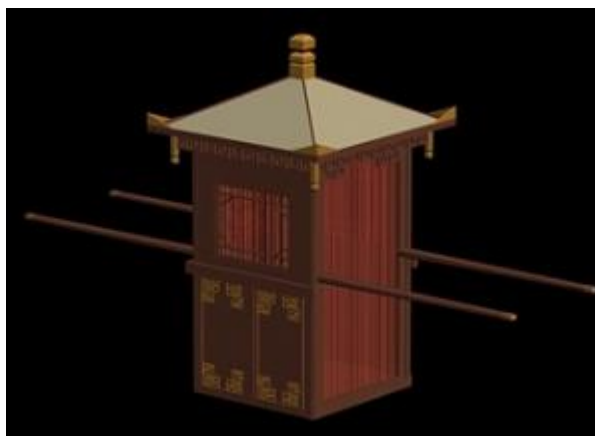


图 1

如图 2 所示，假如点  $C$  和点  $D$  分别为抬轿子的两个人， $CD$  的中点  $E$  为坐轿子的人。并且假设这里的轿杆  $CD$  是利用可以伸缩的材料制作的。当抬轿子的一个人（点  $D$ ）原地不动，而另外一个抬轿子的人（点  $C$ ）沿着圆周行走时，你能叙述坐轿子的人（点  $E$ ）所经过的路径吗？

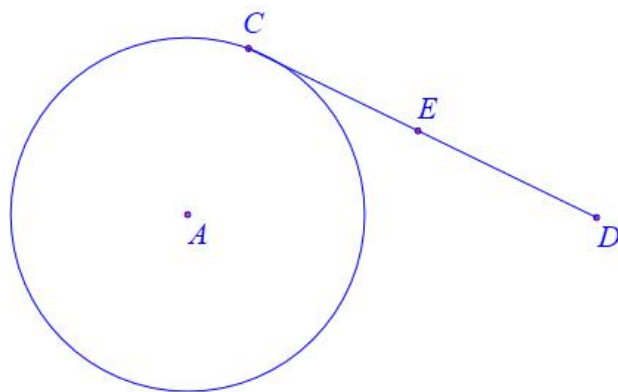


图 2

因为点  $C$  和点  $E$  是以点  $D$  为中心的位似图形，根据位似图形的性质以及点  $C$  的运动路径可知：点  $E$  所经过的路径是一个圆，并且该圆的半径为圆  $A$  的二分之一，圆心在  $AD$  的中点位置，如图 3 所示。



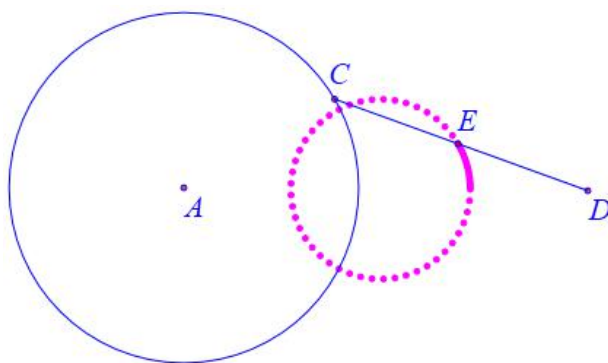


图 3

试想象一下，如果点  $D$  也在另外一个圆周上，那么点  $E$  所经过的路径可能是什么图形呢？是否仍然是一个圆形？点  $C$  和点  $D$  分别在各自的圆周上运动过程中，它们各自运动的速度可能有快有慢、运动方向和起始位置也不尽相同，这些因素对点  $E$  路径形状是否有影响呢？

下面我们动手在计算机上进行实验和探索：

- (1) 启动《Hawgent 皓骏动态数学软件》，分别作两个点  $A$ 、 $B$ 。执行【插入】菜单中的【变量】命令，在弹出的窗口中填入变量名称： $a$ 。范围为：0 到 360，点击【确定】得到变量  $a$  的控制尺；同理添加变量  $b$  的控制尺，范围也为 0 到 360。
- (2) 分别以点  $A$ 、点  $B$  为圆心作半径为 2 的圆，在圆  $A$  上任意取一点  $C$ ，在圆  $B$  上任意取一点  $D$ 。
- (3) 按住【Ctrl 键】，依次选择点  $C$  和点  $A$ ，执行【变换】菜单中的【旋转】命令，输入选择次数：1，旋转角度： $a$ ，点击【确定】后得到旋转后的点  $E$ ，适当调整变量  $a$  的控制尺，使得点  $E$  和点  $C$  拉开距离方便下面的操作；同理，按住【Ctrl 键】，依次选择点  $D$  和点  $B$ ，执行【变换】菜单中的【旋转】命令，输入选择次数：1，旋转角度： $b$ ，得到旋转点  $F$ ，隐藏点  $C$  和点  $D$ 。
- (4) 连接线段  $EF$ ，按住【Ctrl 键】，依次选择点  $E$  和点  $F$ ，执行【画图】菜单下【约束点】子菜单中的【中点】命令，作出  $EF$  的中点  $G$ ，选择点  $G$ ，执行【画图】菜单中的【跟踪】命令，跟踪点  $G$ 。

下面增加点  $E$  与  $F$  的运动按钮：

- (5) 执行【插入】菜单下【常用按钮】子菜单中的【变量一次运动】命令，在弹出对话框中，点击【动画】项，把其【程序命令】的内容修改为：

```
VarAnimation(a,0,360,50,3);
```

```
VarAnimation(b,0,360,50,3);
```

点击【修改动作】再按【确定】完成操作。得到变量 a 与 b 的对话按钮。



图 4

这里“VarAnimation ()”是控制变量变化的函数，使用方法如下：

**格式：**void VarAnimation (var[, min=-10,max=10,frequency=100,type=0,interval])

**参数：**var-变量；min-变量的起始值；max-变量的终止值；frequency-整数，运动频度；

type-0/1/2/3/4，运动类型，interval-浮点数，定时器时间间隔，单位为秒。

**功能：**执行变量 var 的动画。运动类型 type 的值为 0(向前)、1(向后)、2(双向)、3(一次向前)和 4(一次向后)。

点击【动画】按钮，点 E 和点 F 同时绕各自的圆周运动一周后停止，结果如图 5 所示，可以看到点 E 的轨迹是一个圆形。

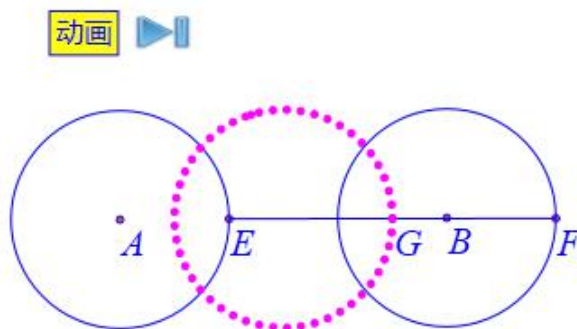


图 5

若希望点 E 从圆心右侧且与圆心同一水平高度的位置按照顺时针方向运动一周，那就将 a 参数范围修改为： 0 到-360。具体做法是：

右击【动画】按钮，点击【动画】项，把其【程序命令】修改为：

```
VarAnimation(a,0,-360,50,3);
```

```
VarAnimation(b,0,360,50,3);
```

点击【修改命令】按钮，在单击【确定】即可。

若希望点 E 从圆心左侧且与圆心同一水平高度的位置按照逆时针方向运动一周，那就将参数范围修改为：-180 到 180；若希望点 E 从圆心右侧且与圆心同一水平高度的位置按照顺时针方向运动两周，那就将参数范围修改为：0 到 720。请你参考前述方别修改并实验。

如图 6 所示，为几种情况下点 G 的轨迹，你能得到这些图形吗？你还能得到哪些图案？

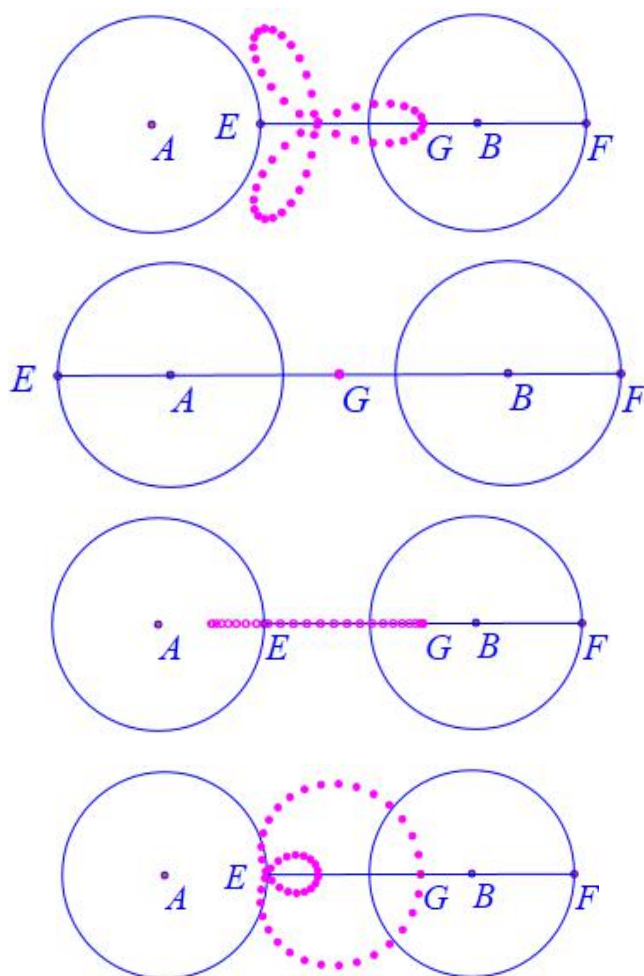


图 6

### 【思考与练习】

- (1) 将点 E 的动画范围设置为 0 到 360，将点 D 的动画范围设置为 0 到  $2 \times 360$ 。启动【动画】按钮，点 E 和点 F 是如何运动的？点 G 所经过的路径是什么图形？
- (2) 若点 E 的动画按钮参数范围为 0 到 360，而点 F 的动画按钮参数范围为 0 到 -360 呢？
- (3) 若点 E 的动画按钮参数范围为 0 到 360，而点 F 的动画按钮参数范围为 -180

到 180 呢？

- (4) 若点 E 的动画按钮参数范围为 0 到 360，而点 F 的动画按钮参数范围为 0 到  $-2*360$  呢？

## 38 抬轿与百变曲线

在前面一文中，我们研究了两个抬轿子的人在按照不同的方式在圆周上运动时，跟踪所得到的坐轿子的人形成的各种曲线。事实上，如果通过轨迹的方式直接得到坐轿子的人行走过的路径，然后改变抬轿子的人的运动方式，就可以连续地观察抬轿子的人在不同的运动情况下，坐轿子的人对应的轨迹曲线的变化规律。

(1) 启动《Hawgent 皓骏动态数学软件》，作出两个点  $A$ 、 $B$ 。

(2) 分别以点  $A$ 、点  $B$  为圆心作半径为 2 的圆，在圆  $A$  上任意取一点  $C$ ，在圆  $B$  上任意取一点  $D$ 。连接线段  $CD$ ，并作出  $CD$  的中点  $E$ 。

(3) 依次选择点  $C$ 、点  $D$  和点  $E$ ，执行【画图】菜单中的【轨迹】命令，生成运动轨迹，右击生成的轨迹，如图 1 所示，在弹出的轨迹属性对话框中，设置点  $C$  的运动类型为：向前，运动区间为：0 到 floor( $a$ )，设置点  $D$  的运动类型为：向前，运动区间为：floor( $b$ )，设置样本点总数为：2000；设置轨迹的画线颜色为：红色；单击“确定”按钮，结果就可以得到点  $E$  对应的轨迹曲线，如图 2 所示。



图 1

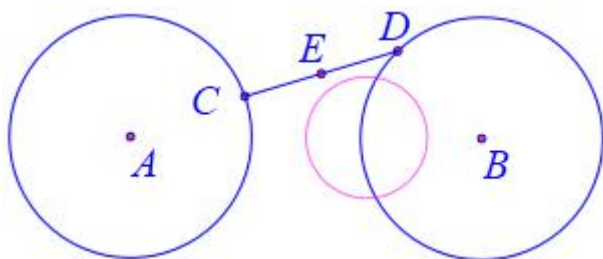


图 2

(4) 通过【插入】菜单中的【变量】命令，增加参数  $a$  的变量控制尺，设置其可改变范围为：0 到 10；同理，增加参数  $b$  的变量控制尺，设置其可改变范围为：0 到 10。隐藏除

了变量控制尺和轨迹以外的其他对象。

$\text{floor}(a)$ 是关于  $a$  的一个函数，它表示比  $a$  大的最小整数。例如比 2.3 大的最小整数就是 2，因此  $\text{floor}(2.3)=2$ ；比 -2.3 大的最小整数就是 -2，因此  $\text{floor}(-2.3) = -2$ 。

在这里不直接输入  $a$  或者  $b$ ，而表示为  $\text{floor}(a)$ 和  $\text{floor}(b)$ ，是为了从简单的情形入手，即首先研究点  $C$  和点  $D$  的运动速度之比为有理数的情形。

通过变量控制尺改变参数  $a$  或者参数  $b$  的值，观察点  $E$  的轨迹曲线的变化规律，如图 3 所示为其中的几种情形。

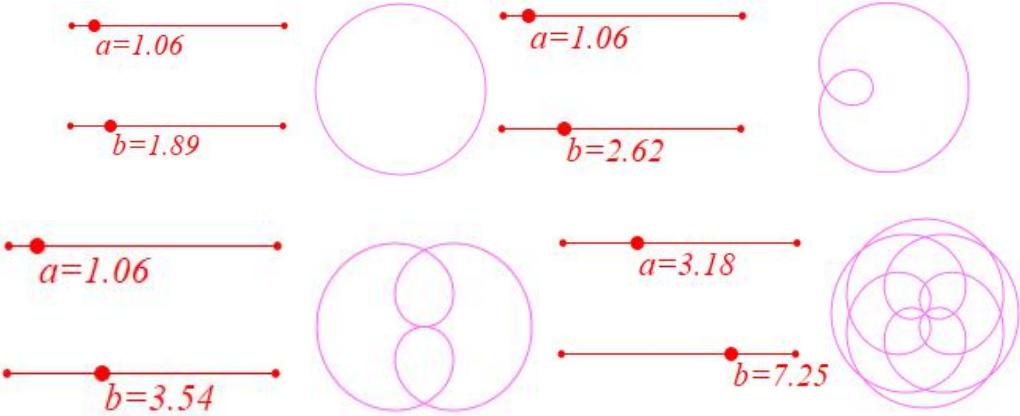


图 3

右击轨迹，在对话框中把点  $C$  的运动类型改为：向后，单击【确定】后再来通过变量控制尺改变参数  $a$  或者参数  $b$  的值，观察点  $E$  的轨迹曲线的变化规律，如图 4 所示为其中的几种情形。

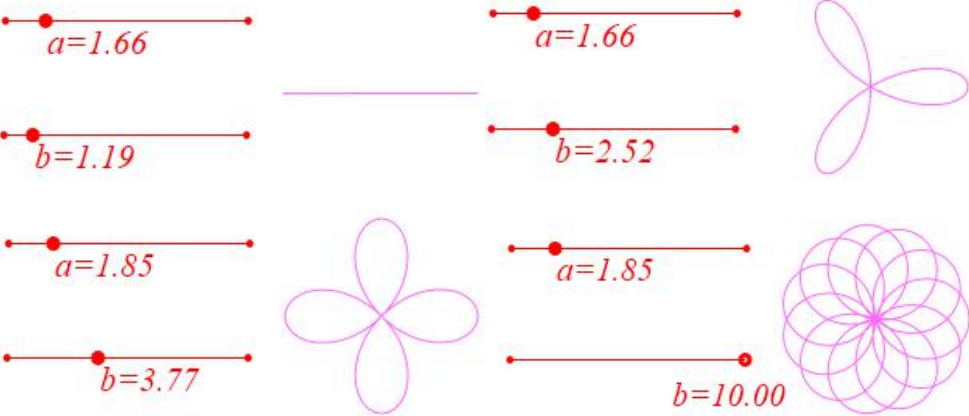


图 4

当然，我们还可以扩大  $a$  和  $b$  的取值范围，使得结果更加丰富多彩。

### 【思考与练习】

- (1) 在图 2 中，点  $E$  并不在其对应的轨迹曲线上，你能解释其中的原因吗？你认为

如何才能让点经过其轨迹曲线呢？

- (2) 当  $a=1$ 、 $b=2$  与  $a=2$ 、 $b=4$  时对应的轨迹曲线是相同的，你能解释其中的道理吗？
- (3) 将你所发现的其他规律表述出来，并利用计算机检验它们。

## 39 方形与圆可渐变

如图点  $E$  不是线段  $CD$  的中点, 而是线段  $CD$  所在直线上的任意点, 那么当点  $C$  和点  $D$  分别在圆  $A$  和圆  $B$  上以各自的方式运动时, 点  $E$  的轨迹可能是什么图形呢? 点  $E$  在直线  $CD$  上的位置对它的轨迹形状又有什么影响呢? 请你自己动手研究其中的规律。如图 1 所示, 如图 1 至图 4 所示: 是在点  $C$  和点  $D$  的运动方式相同的情况下, 不同位置的点  $E$  对应轨迹曲线。

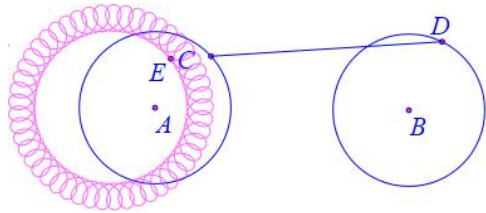


图 1

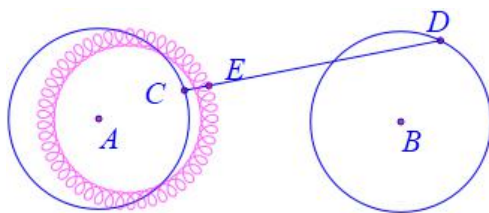


图 2

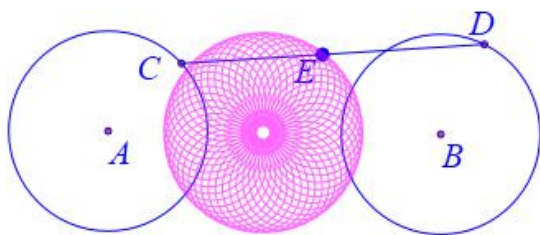


图 3

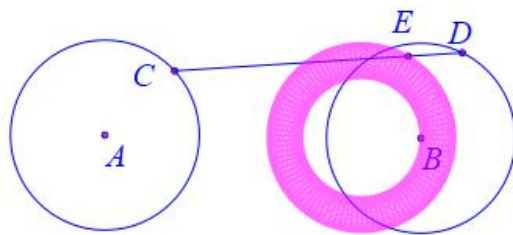


图 4

可以发现, 点  $E$  在直线  $CD$  上的位置对它的轨迹的性质有重要的影响。

在这里以及前面我们研究的问题中, 点  $C$  和点  $D$  分别在两个圆周上运动。可以想象一下, 若将圆形换成椭圆、多边形, 就会得到更加丰富多彩的曲线, 还可以实现很多有趣的变换。例如下面我们就让一个正方形渐变为圆形, 反过来也可以将一个圆形渐变为正方形。

(1) 启动《Hawgent 皓骏动态数学软件》, 画任意两点  $A$ 、 $B$ , 选择点  $A$  和点  $B$ , 执行【作图】菜单下【多边形】子菜单中的【正方形】命令, 作出正方形  $ABCD$ ; 在正方形外任意画一点  $E$ , 以点  $E$  为圆心作半径为 2 的圆。

(2) 依次选择点  $A$ 、点  $B$ 、点  $C$  和点  $D$ , 执行, 【画图】菜单下【多边形】子菜单中的【多边形】命令, 作出多边形  $ABCD$ 。选择这个多边形, 执行【画图】菜单下【自由点】子菜单中的【多边形上的点】命令, 作出正方形  $ABCD$  边界上的点  $F$ ; 在圆  $E$  上任意选取一点  $G$ ; 连接  $FG$ , 在  $FG$  上任意取一点  $H$ , 结果如图 5 所示。



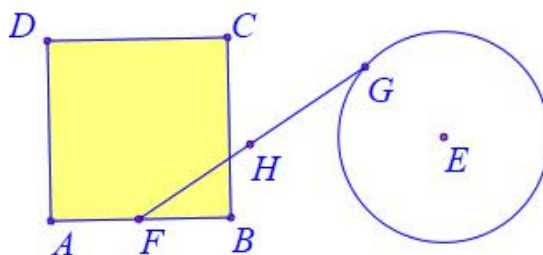


图 5

(7) 隐藏刚作的四边形  $ABCD$ ，依次选择点  $F$ 、点  $G$  和点  $H$ ，单击工具条中的“轨迹”命令，结果如图 6 所示。

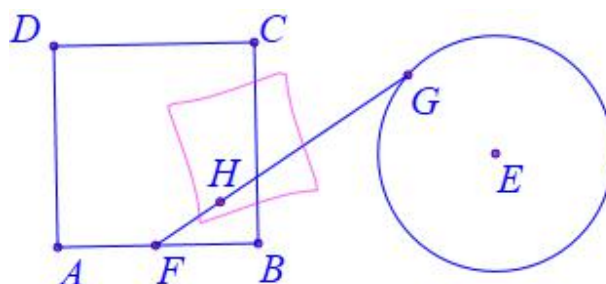


图 6

对于以下两点我们是容易理解的：

- ①当点  $H$  与点  $F$  重合时，点  $H$  的轨迹曲线就是正方形  $ABCD$  本身；
- ②当点  $H$  与点  $G$  重合时，点  $H$  的轨迹曲线就是圆  $E$  的圆周本身。

那么，我们可以通过操作就可以观察到以下两个现象：

当点  $H$  从点  $F$  运动到点  $G$  的过程中，就实现了点  $H$  的轨迹曲线从正方形到圆形的渐变；

当点  $H$  从点  $G$  运动到点  $F$  的过程中，就实现了点  $H$  的轨迹曲线从圆形到正方形的渐变。

而当点  $H$  在线段  $FG$  的外侧时，点  $H$  的轨迹图形都在正方形和圆形之间，如图 7 所示，我们可以将这种图形叫做曲边正方形。

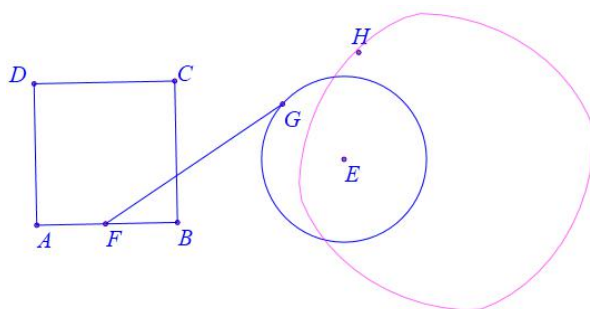


图 10

【思考与练习】

(1) 假如正方形  $ABCD$  的边长为 2, 若要求圆  $E$  的周长与正方形  $ABCD$  的周长相等, 那么圆  $E$  的半径需要为多少?

(2) 在 (1) 的情况下, 当点  $H$  在线段  $FG$  内部时, 点  $H$  对应的轨迹曲线的周长是否可能保持为定长? 如何证明你的判断?

## 40 抬轿问题不等闲

《数学家的眼光》是我国著名数学家、计算机科学家张景中院士的一部科普著作，这本书在发行量、受欢迎程度以及获得的奖项等级等方面都创造了非凡的成就。《数学家的眼光》中有一句堪称经典的论述：

数学家的眼光和普通人的眼光不同：在常人看来十分繁难的问题，数学家可能觉得很简单；常人觉得相当简单的问题，数学家可能认为非常复杂。

在前面我们研究的“滚动的车轮”、“滑动的梯子”等专题的过程中，更加验证了这一点。许多问题在平常人看来司空见怪、稀松平常，但如果认真思考一番，里面或许还有不少深刻的道理，或许还有许多我们未必能够马上想得通的问题；但是反过来，有些在平常人稀奇古怪、百思不得其解的问题，如果从数学的角度去研究，可能得到的是简洁的、易于理解的结论。

从研究抬轿子的问题出发，我们得到了千变万化的美妙曲线。可见，从一些简单的问题出发，我们得到许多不同凡响的结果和结论。

张景中院士自己对抬轿子的问题也非常感兴趣，他还将这个问题拓展到了三人抬轿子的问题上：如图1所示，点 $D$ 、点 $E$ 、点 $F$ 分别在圆 $A$ 、圆 $B$ 、圆 $C$ 上，点 $G$ 在线段 $DE$ 上，点 $H$ 在线段 $GF$ 上。当点 $D$ 、点 $E$ 、点 $F$ 分别在各自的圆上按照不同的方式运动时，点 $H$ 的轨迹是什么图形？

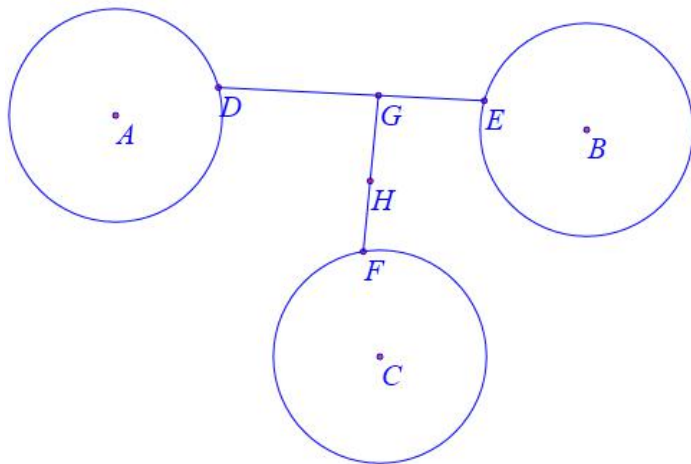


图 1

得到轨迹的方式是前文是类似的：

- (1) 仿照前文的方法，作出图1，依次选择点 $D$ 、点 $E$ 、点 $F$ 和点 $H$ ，执行【画

图】菜单中的【轨迹】命令，得出运动轨迹，右击生成的轨迹，依次设置三个DEF点的运动类型为：向前，运动区间分别为：0到 $\text{floor}(a)$ ，0到 $\text{floor}(b)$ 、0到 $\text{floor}(c)$ 。样本点总数：2000。

(2) 设置轨迹的画线颜色和填充颜色。

(3) 增加参数  $a$ 、 $b$ 、 $c$  的变量控制尺，并设置可控制范围为：到 100。

他说有一天晚上，他在研究这个问题的过程中得到了几百幅非常有趣却形状均不相同的图案。由于过度着迷，忘记了休息，不知不觉中就到了凌晨 1 点。图 2 所示的几副图案就是从张院士所获取的几百幅图案中随机挑选的一部分。

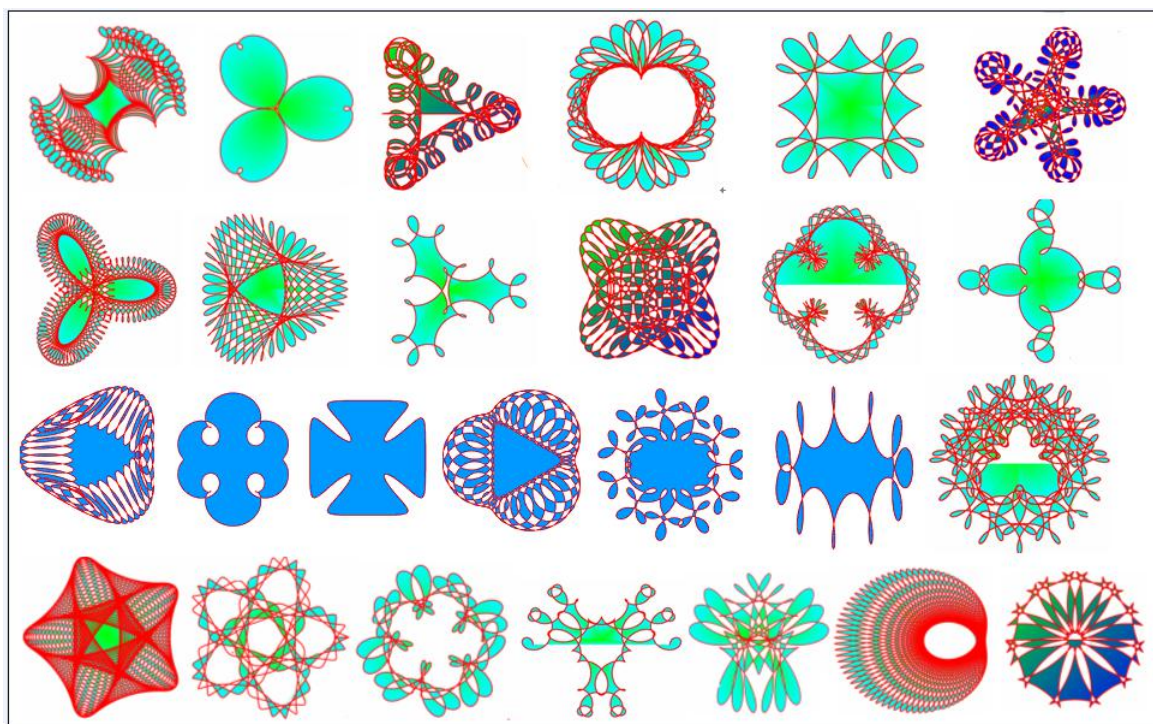


图 2

张院士在很多场合介绍了这个抬轿子的问题，引起了许多数学教师、学生和数学爱好者的广泛兴趣。他在一次学术会上谈到这个问题时说道：“通过这么几个简单的对象竟能得到这么多漂亮的图案，这个问题非常有趣也超乎想象。究竟一共有多少种图案呢？我认为，如果谁将这个问题研究彻底，写成文章，就是一篇不错的博士论文。”

可见，从简单的问题和情景出发，通过绘制我们熟悉的对象并利用我们能够理解的关系，竟然能够得到许许多多漂亮的、让我们感到惊奇的结果，同时也能启发我们更多、更深入的思考，然我们感到原来看似简单的问题事实上并不简单。

对照“数学家的眼光”，我们对技术在数学学习中的作用可以作以下论述：

技术手段与传统方法不同：在传统学习过程中很多看似繁难的问题，有了技术之后它们

就变得非常容易理解；在传统学习过程中很多看其简单问题，有了技术之后它们也非常具有挑战性。

### 【思考与练习】

前面我们研究了抬轿子的问题，并构造出了许多叹为观止的美丽图案。事实上，我们研究抬轿子的问题始于 2006 年，当时为能得到如此优美的图案一直赞叹不已。而且还认为这些规则的、具有对称性质的图形只有在数学构造的理想状态下才可能出现。

就在不久前，我们在随意翻阅两年前购买的《More Joy of Mathematics》一书时，无意间看到了一些熟悉的面孔，这些图案跟我们研究的抬轿子问题所得到的结果是那么的神似！如图 3、图 4、图 5、图 6、图 7。

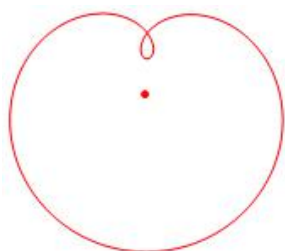


图 3

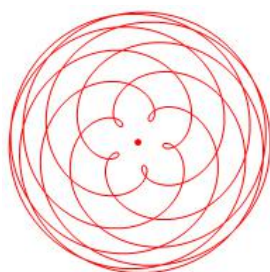


图 4

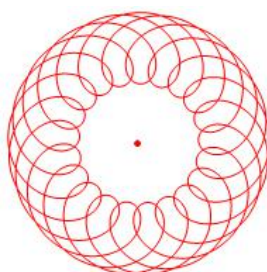


图 5

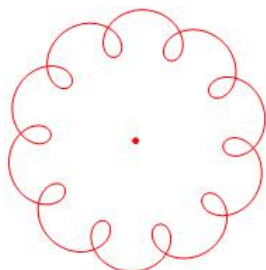


图 6

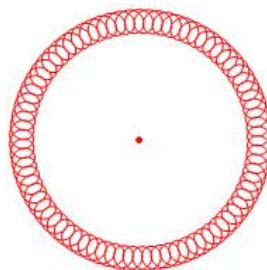


图 7

该书作者对这些图案的说明如下：

“这些图案是人们观察星体运行后描述的运动轨迹。通常在人们的脑海中总以为行星的轨迹只是简单的椭圆形，然而下面这些复杂的对称曲线正是从地球上观察到的水星、金星、火星、木星和土星的运行轨迹图。”

然后笔者随即在计算机上构造了一个最简单的抬轿子问题的模型，步骤如下：

- (1) 作任意圆 A。
- (2) 在圆上任意取两点 B、C。
- (3) 连接线段 BC，并在线段 BCD 上任取一点 D。

- (4) 依次选择点 B、点 C 和点 D，执行【画图】菜单中的【轨迹】命令，右击生成轨迹，在轨迹属性对话框中设置样本点总数为：2000，设置点 B 的运动类型为：向前，运动区间为：0 到  $\text{floor}(a)$ ，设置点 C 的运动类型为：向前，运动区间为：0 到  $\text{floor}(b)$ 。
- (5) 增加参数  $a$  和参数  $b$  的变量控制尺，设置其可控制范围为：0 到 10。如图 6 所示。

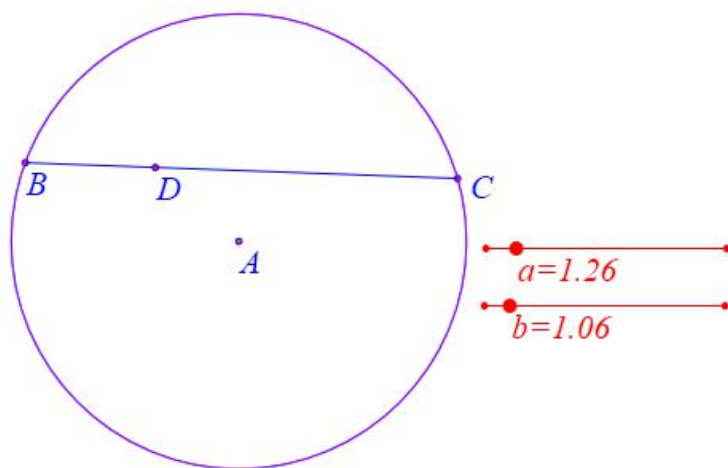


图 6

通过改变参数  $a$  和参数  $b$  的值，或者改变点  $C$  在线段  $AB$  上的位置，通过尝试竟然在短短的 10 分钟之内就全部得到了这五种图案。

我们所研究的抬轿子问题竟然与行星的运行轨迹竟然可以如此匹配！

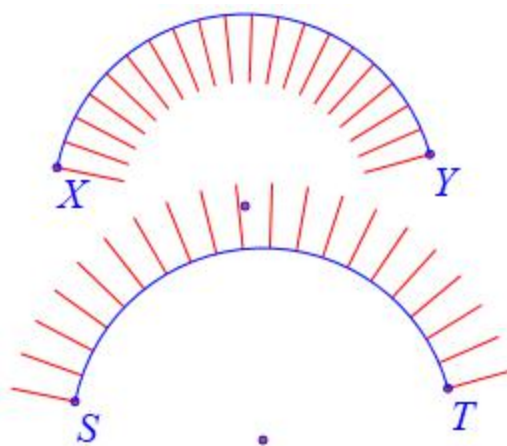
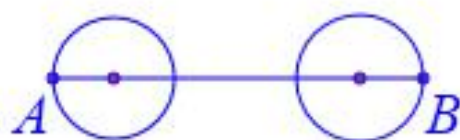
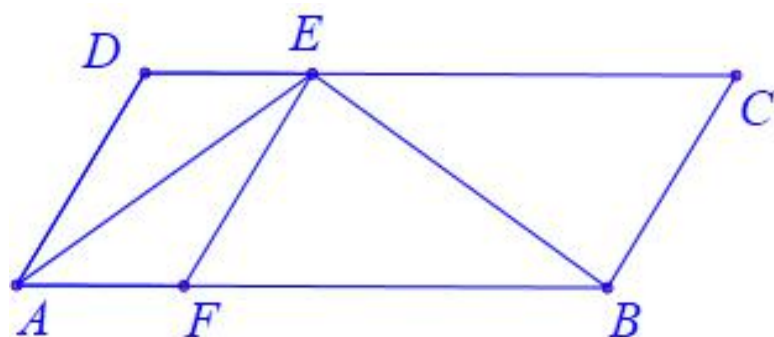
可见，有一些数学问题的原型来自实际的生产生活过程，或者来自对自然界各种想象的探索；而同时又有一些数学问题来自数学家对数学问题本身的兴趣和爱好，不断地进行探索和研究，而它的应用在将来某一段时间之后才能够被发现或利用。

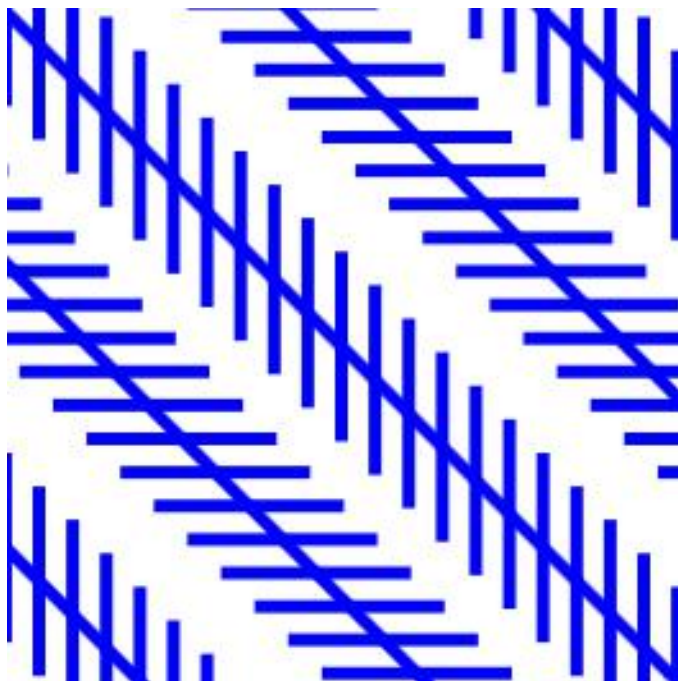
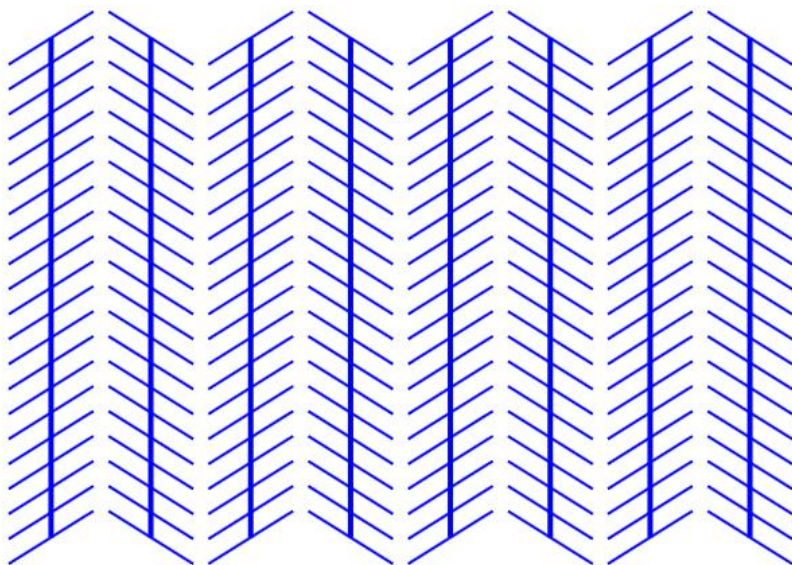
当然，上述图 3 至图 7 对应的图案均是本文作者利用 Hawgent 皓骏动态数学软件在计算机上绘制得到。有兴趣的读者可以将上述图案与原书中出现的图案进行比较和研究。

《More Joy of Mathematics》一书已经被翻译成为中文，名为《发现数学还是这么有趣》，2008 年由电子工业出版社出发发行。上面的这个问题均出现在英文原著和中文译本的第 140 页。

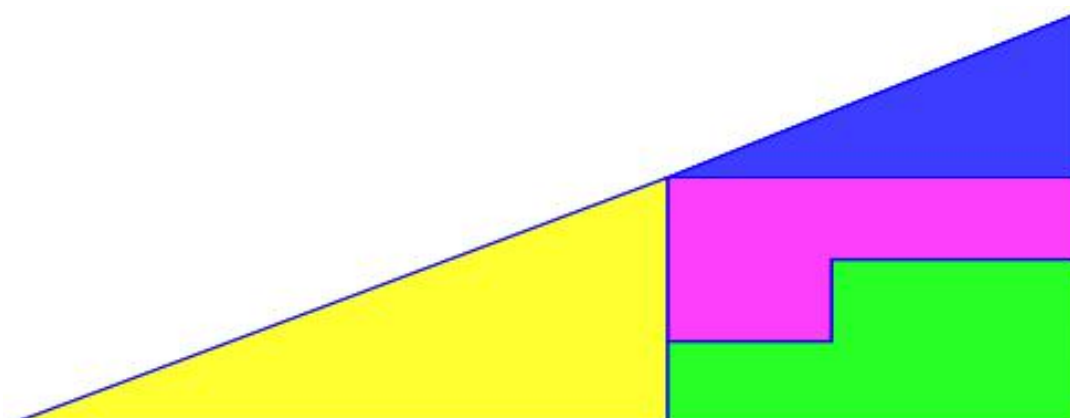
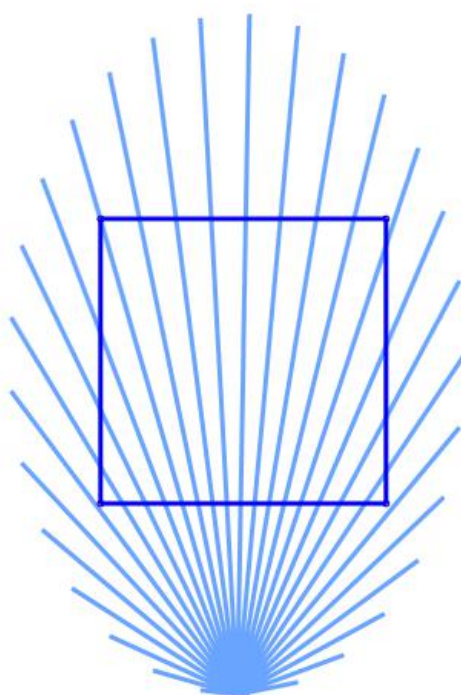
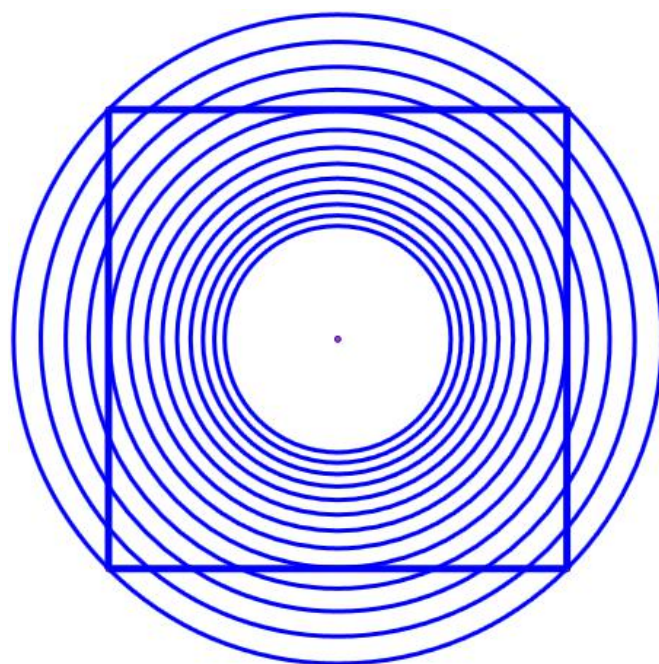


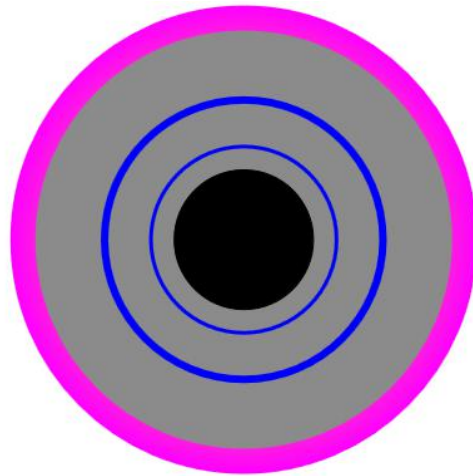
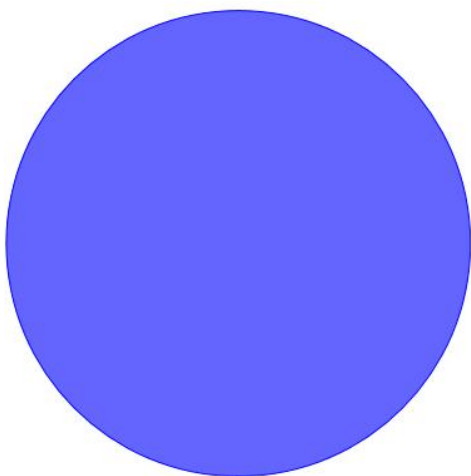
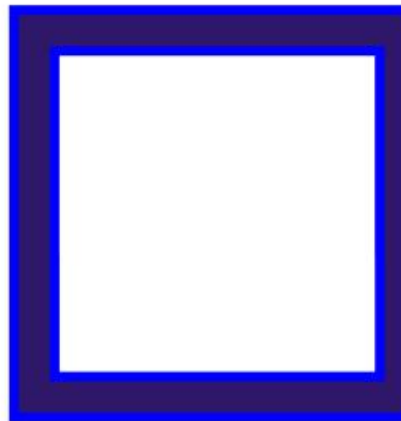
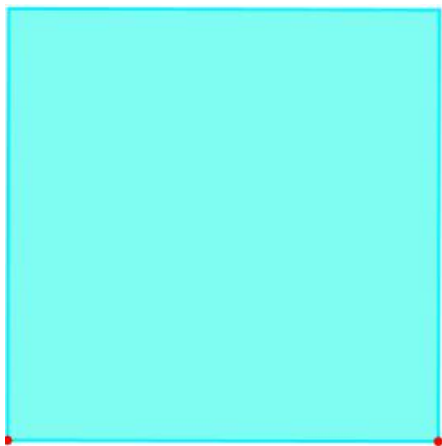
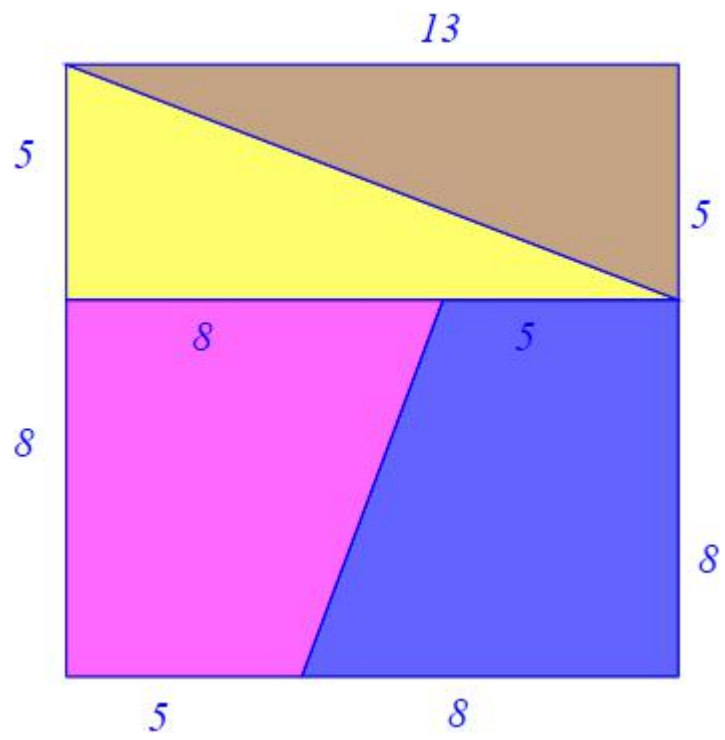
附录：



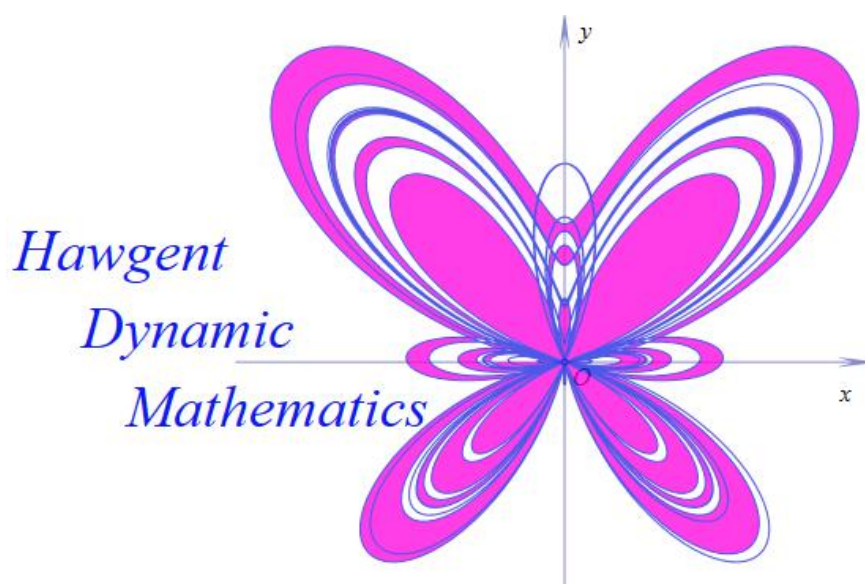








皓荡的大地，奔腾的骏马  
只为向着那，最初的梦想



地址：广州市越秀区桂花岗广州大学北 8 号

广州市越秀区盘福路朱紫后街 1 号

邮件： [11033149@qq.com](mailto:11033149@qq.com)

电话： 020-36280771

网站： [www.Hawgent.com](http://www.Hawgent.com)

QQ 群： 367878041