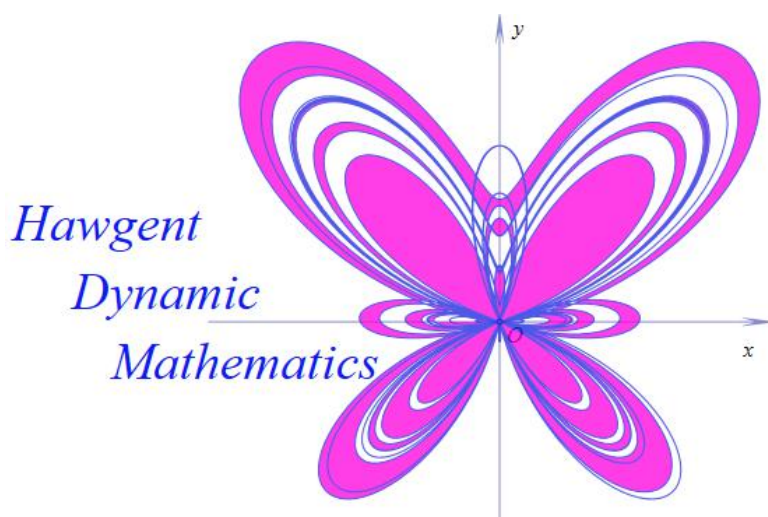


数学专题学习：图形与变换

深入学科，彻底突破数学教学和数学学习中的重点难点问题
开展数学实验、数学教学、数学学习和数学研究的必备工具



皓骏（广州）数学技术中心

Hawgent Technology Centre in Mathematics

目录

第 00 部分 数学实验为何物.....	1
1, 什么是数学实验?	1
2, 实验工具有哪些?	1
3, 动态数学能做什么?	2
4, 数学实验的任务有哪些?	6
5, 想一想, 做一做.....	6
第 01 部分 快速入门学技术.....	9
1, 认识软件的界面.....	9
2, 一个点一个位置.....	11
3, 过两点一条直线.....	12
4, 三点确定一个角.....	15
5, 想一想, 做一做.....	16
第 02 部分 温故也能得新知.....	19
1, 先提出一个问题.....	19
2, 回到熟悉的内容.....	20
3, 有内角就有外角.....	21
4, 触类旁通得新知.....	22
5, 举一反三是智慧.....	23
6, 多种方案判平行.....	26
7, 想一想, 做一做.....	27
第 03 部分 常见图形再认识.....	30
1, 直线平行再思考.....	30
2, 三角形整体性质.....	31
3, 想一想, 做一做.....	33
第 04 部分 三角形局部研究.....	34
1, 等腰三角形的局部性质.....	34
2, 等边三角形的局部性质.....	35
3, 想一想, 做一做.....	37
第 05 部分 几个特殊四边形.....	39
1, 多边形局部性质.....	39
2, 平行四边形局部性质.....	40
3, 想一想, 做一做.....	42
第 06 部分 多边形整体研究.....	45
1, 多边形的内角和.....	45
2, 多边形的外角和.....	47
3, 想一想, 做一做.....	48
第 07 部分 角度有正也有负.....	50
1, 旋转射线得角度.....	50
2, 角度的表达.....	51
3, 想一想, 做一做.....	53
第 08 部分 利用旋转做秒针.....	55
1, 利用旋转做秒针.....	55

2, 想一想, 做一做.....	58
第 09 部分 表示角度有妙方.....	61
1, 转了一圈又一圈.....	61
2, 平角即为 180°	64
3, 想一想, 做一做.....	65
第 10 部分 动手旋转试试看.....	67
1, 利用 π 表示角度.....	67
2, 制作一个旋转的五角星.....	68
第 11 部分 计算弧长用弧度.....	71
1, 动手计算圆周长.....	71
2, 以圆计算弧长值.....	72
3, 想一想, 做一做.....	74
第 12 部分 圆周运动得美图.....	76
1, 恒星行星与卫星.....	76
2, 想一想, 做一做.....	79
第 13 部分 珠江南岸小蛮腰.....	81
1, 形色多变小蛮腰.....	81
2, 想一想, 做一做.....	83
第 14 部分 跟踪即得苹果线.....	84
1, 动圆下的苹果线.....	84
第 15 部分 速度不同结果变.....	87
1, 改变速度图案变.....	87
2, 想一想, 做一做.....	90
第 16 部分 两人抬轿百花现.....	91
1, 多点控制下的轨迹.....	91
2, 参数不同轨迹变.....	94
3, 想一想, 做一做.....	97
第 17 部分 小试身手来旋转.....	98
1, 旋转训练做一做.....	98
2, 想一想, 做一做.....	99
第 18 部分 旋转半周谓对称.....	100
1, 旋转可得对称图.....	100
2, 旋转下的中心对称图.....	101
3, 想一想, 做一做.....	103
第 19 部分 检验中心对称图形.....	104
1, 中心对称的检验.....	104
2, 如何判断中心对称图形.....	106
3, 想一想, 做一做.....	107
第 20 部分 中心对称数量析.....	109
1, 中心对称画数轴.....	109
2, 想一想, 做一做.....	112
第 21 部分 可用字母当角度.....	113
1, 参数角度推面积.....	113
2, 想一想, 做一做.....	115

第 22 部分 说明面积用矩形.....	116
1, 三角形面积的推导.....	116
2, 想一想, 做一做.....	117
第 23 部分 平行移动谓平移.....	120
1, 平移的探究.....	120
2, 平移的结论.....	122
第 24 部分 平移变换得平行.....	124
1, 平移与平行.....	124
2, 平移下的平行.....	125
3, 想一想, 做一做.....	128
第 25 部分 平移图案得镶嵌.....	130
1, 平移下的镶嵌图案.....	130
第 26 部分 利用平移说道理.....	132
1, 解说平行四边形的面积.....	132
2, 验证平行四边形的面积.....	133
3, 想一想, 做一做.....	136
第 27 部分 平移变换代数析.....	138
1, 几何、代数是一家。.....	138
2, 平移下的坐标点.....	139
3, 平移下的坐标关系.....	140
4, 想一想, 做一做.....	142
第 28 部分 平移旋转螺旋线.....	144
1, 平移旋转螺旋线.....	144
2, 想一想, 做一做.....	149
第 29 部分 旋转之后再平移.....	153
1, 先旋转后平移的密铺.....	153
2, 想一想, 做一做.....	155
第 30 部分 漂亮小鸡爱美丽.....	156
1, 小鸡照镜子.....	156
2, 想一想, 做一做.....	159
第 31 部分 镜子内外行动齐.....	160
1, 镜子内外现对称.....	160
第 32 部分 千姿百态万花筒.....	164
1, 千姿百态万花筒.....	164
2, 想一想, 做一做.....	168
第 33 部分 请找对称在哪里.....	170
1, 对称下的坐标点.....	170
2, 想一想, 做一做.....	172
第 34 部分 大小各异形状同.....	173
1, 形状一样大小异.....	173
2, 想一想, 做一做.....	175
第 35 部分 究竟何谓相似形.....	176
1, 探究相似图形的性质.....	176
2, 想一想, 做一做.....	180

第 36 部分 搭建美丽圣诞树.....	181
1, 用相似勾画圣诞树.....	181
2, 想一想, 做一做.....	183
第 37 部分 放缩变换得位似.....	185
1, 放缩变换得位似.....	185
2, 想一想, 做一做.....	188
第 38 部分 位置无关构造异.....	191
1, 相似与位似.....	191
2, 想一想, 做一做.....	193
第 39 部分 多少才能填满.....	196
1, 计算面积的相似之比.....	196
2, 想一想, 做一做.....	198
第 40 部分 圆形压缩得椭圆.....	200
1, 圆与椭圆.....	200
2, 想一想, 做一做.....	203

第 00 部分 数学实验为何物

1, 什么是数学实验?

也许你是第一次听说数学实验, 但我们从学习数学的开始就已经进行数学实验活动了。

比如:

用铅笔算一算;

拿尺子量一量;

用木棍摆一摆;

在纸上画一画;

.....

在学习数学和研究数学的过程中, 数学实验都起到了重要的作用, 是不可或缺的重要手段。例如下面有一排算式:

$$1 \times 8 + 1;$$

$$12 \times 8 + 2;$$

$$123 \times 8 + 3;$$

$$1234 \times 8 + 4;$$

$$12345 \times 8 + 5;$$

$$123456 \times 8 + 6;$$

$$1234567 \times 8 + 7;$$

$$12345678 \times 8 + 8;$$

$$123456789 \times 8 + 9;$$

对于这些算式来说, 需要首先计算出结果, 才能发现和研究他们的结果所存在的规律;

再例如: 给你三根木棍, 你要先试一试、摆一摆才能知道它们是否能够组成一个三角形。当然学习了更多的知识之后就只需要量一量、算一算就能进行准确地判断。

2, 实验工具有哪些?

前面我们提到了铅笔、尺子、木棍、纸张, 还包括三角板和圆规等等, 都是数学实验的

常用工具。

然而，以计算机为代表的信息技术在近年来的飞跃发展，为我们提高数学实验的效率提供了更好的工具。

Hawgent 皓骏数学技术团队所开发的 Hawgent 皓骏动态数学软件就是专门为我们开展数学实验而服务的工具。

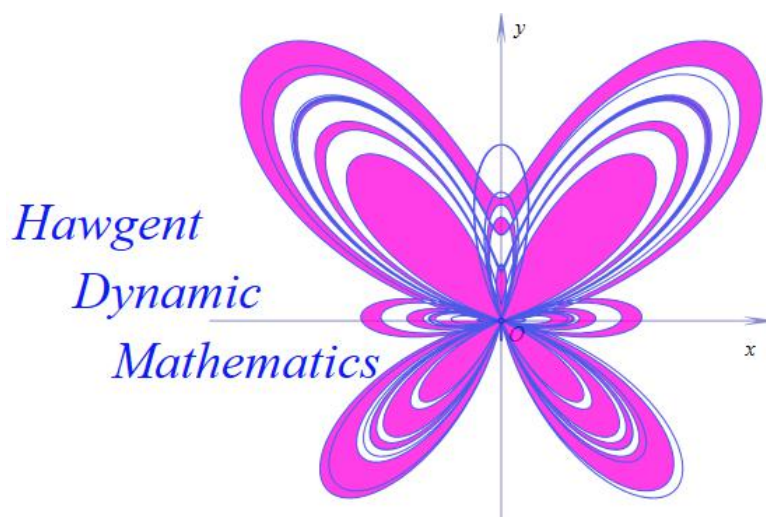


图 1

软件的下载网站为：<http://www.hawgent.com>

3，动态数学能做什么？

运算。例如计算 $1 \times 8 + 1$ ； $12 \times 8 + 2$ ； $123 \times 8 + 3$ ； $1234 \times 8 + 4$ ； $12345 \times 8 + 5$ ； $123456 \times 8 + 6$ ； $1234567 \times 8 + 7$ ； $12345678 \times 8 + 8$ ； $123456789 \times 8 + 9$ ；操作过程是：

激活右侧的程序工作区；输入：“ $1*8+1;$ ”，其中这里的分号表示一个算式或命令的结束，是不可缺少的，需要是英文状态下的符号；将光标放在命令的结尾位置，按 F8 键，即可执行该命令从而得到运算结果，运算结果显示在下一行、以#结束；将光标放在#之后按 Enter 键即可转到下一行，继续输入，然后继续执行运算结果。如图 2 所示是在 Hawgent 皓骏动态数学软件中的运算结果：

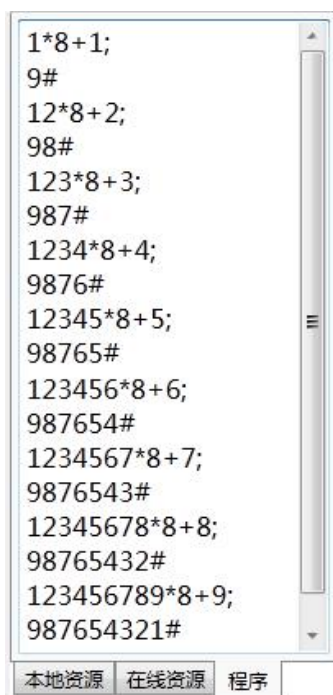


图 2

程序工作区也叫做运算工作区，可以进行输入和运算。认真观察一下，这些式子的运算结果有什么规律？

作图。例如，单击【画图】工具，进入画图状态，在空白处任意位置单击鼠标即可做出一个点 A；单击【选择】工具，退出画图状态；选择点 A，单击“已知圆心和半径的圆”工具，在弹出的对话框中输入：2，单击【确定】按钮，即可作出以点 A 为圆心、半径为 2 的圆；然后再单击【画图】工具，在圆上取一点 B 并连接半径 AB，在圆外取一点 C 并连接 BC，如图 3 所示；请问当点 C 在圆上什么位置时折线段 ABC 最短，什么时候折线段 ABC 最长呢？

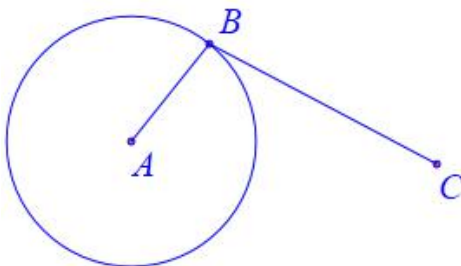


图 3

测量。例如可以测量 AB 的长度，再测量 BC 的长度，然后把它们加起来，操作是：选择点 A 和点 B，单击“距离”工具，即可得到线段 AB 的长度测量值，类似地可以测量线段 BC 的长度；单击“表达式”工具，在弹出的对话框中输入： $v000+v001$ ，即可显示为 $AB+BC$ ，单击【确定】按钮，即可得到 $AB+BC$ 的值。可以观察到当 $AB+BC$ 最小时，A、B、C 三个

点在同一条直线上，即折线段 ABC 最短；当 AB+BC 最大时，A、B、C 三个点也在同一条直线上，即折线段 ABC 最长。想一想，为什么？

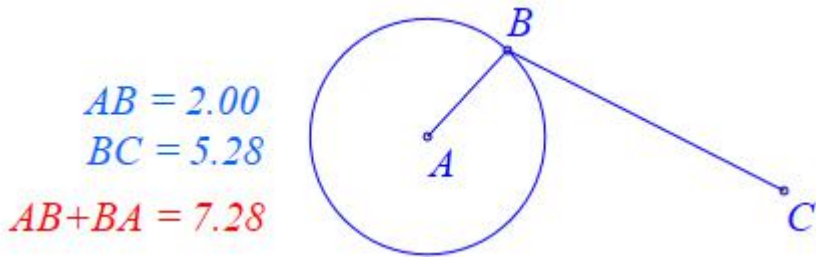


图 4

动画。点 B 是圆周上的点，所以它可以在圆周上运动，通过鼠标拖动可以实现。当然，我们也可以让点 B 在圆周上均匀地、自动地运动，操作是：单击“视图”菜单下的“动画框”命令，如图 5 所示，选择运动类型为：一次运动，然后在左侧选择点 B，再单击右上角的“运动”按钮，即可让点 B 绕圆 A 运动一周。

顺便想一想，当点 B 在圆周上运动的过程中半径 AB 扫描过的区域是什么图形？

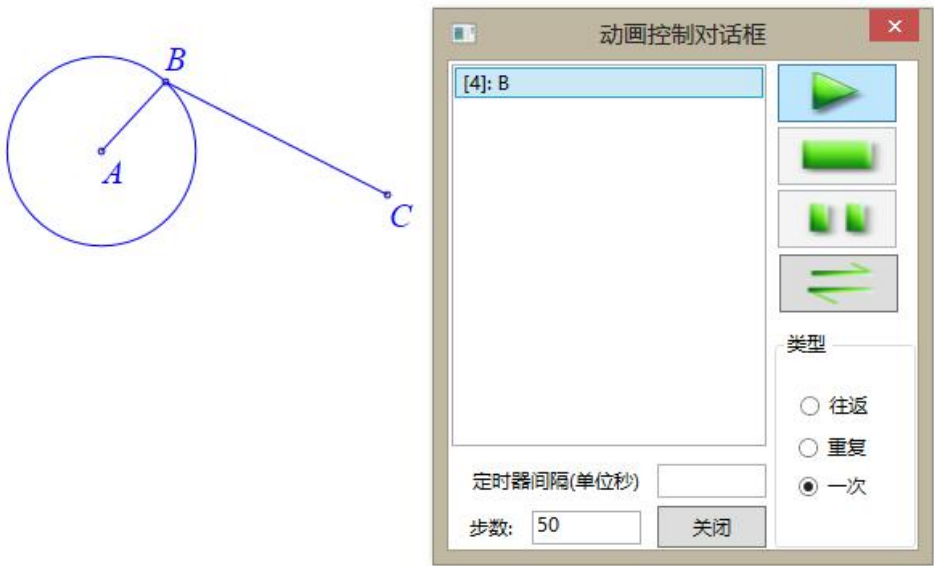


图 5

跟踪。选择点 B、点 C，单击“中点”工具，作出线段 BC 的中点 D；按住【Ctrl】键，同时选择点 D 和线段 BC，单击“作图”菜单下“直线”子菜单中的“垂线”命令，即可做出过点 D 与 BC 垂直的直线。当点 B 在圆周上运动的过程中，垂线所扫描过的区域又是什么图形呢？对于这些通过想象无法判断的问题，可以通过跟踪的方式来呈现：选择 BC 的垂线，单击“跟踪”工具，即可得到它的跟踪对象；鼠标右键单击跟踪对象，打开它的属性对话框，通过“画线颜色”工具设置一种你所喜欢的颜色。最后，让点 B 运动，即可看到跟踪垂线的结果，如图 6 所示。但是问题还没有结束，不妨再多想一想：这个区域有什么特点？

你能否给它取一个形象而恰当的名字？

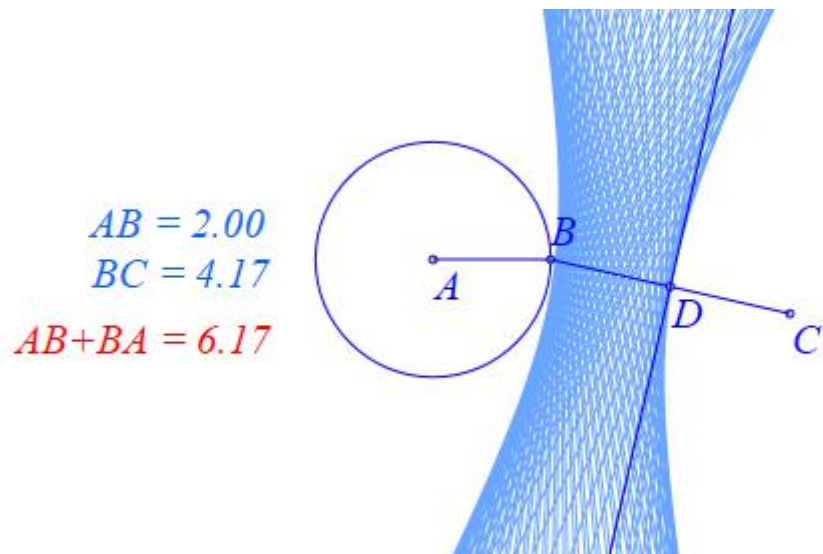


图 6

变换。我们学习过的平移、旋转、轴对称等图形变换都可以在 Hawgent 皓骏动态数学软件中轻松实现。但是，Hawgent 皓骏动态数学软件中的变换的意义更加一般也更加普遍。而且更加重要的是，在图形变换过程中，图形之间的关系保持不变，圆上的点还是圆上的点、中点还是中点、垂直还是垂直等等，这就是 Hawgent 皓骏动态数学软件的核心价值，我们把这种性质称之为动态几何，也叫做逻辑动漫。实验一下：当点 C 变换到圆 A 的内部时，如图 7 所示，单击“清除跟踪”命令，再次让点 B 运动，BC 的垂线所扫描过的区域是什么图形？为什么会是这个图形？

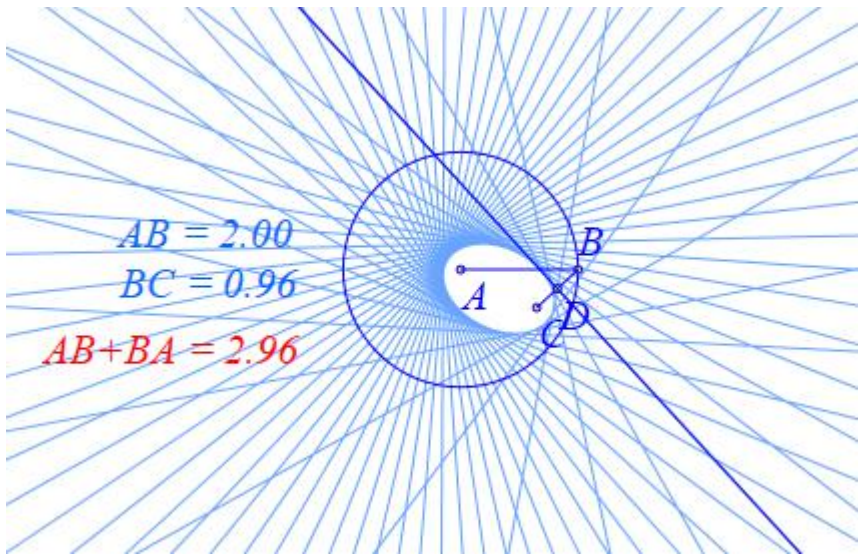


图 7

.....

随着数学实验课程的开展，对 Hawgent 皓骏动态数学软件的学习和研究不断深入，会了解和掌握它更多的功能。

4，数学实验的任务有哪些？

玩。与传统的数学课堂不同，数学实验课主要的任务就是玩。当然，玩的是 Hawgent 皓骏动态数学软件，玩的更加是数学。因为数学水平的高低决定了玩 Hawgent 皓骏动态数学软件的层次。

探。与传统的纸、笔、直尺、圆规等相比，Hawgent 皓骏动态数学软件是更加高效的数学实验工具，利用它在简短的时间内我们就可以就探索、发现和研究许多有趣的数学问题。

创。检验学习效果最好的方式，就是看能否灵活运用所学习的知识。Hawgent 皓骏动态数学软件就为我们提供了一个数学应用、数学实践和数学创作的环境。当然作品做出来了、做得漂亮了，数学的水平也自然而然地得到了提高。

学。相对于已经掌握的数学知识，我们不了解、不懂得数学知识更广、更多，这就是所谓的“知道的越多，会发现不知道的更多”。因此，总体来说，数学实验课程的核心任务就是帮助我们学习、学会、学好更多的数学知识。

5，如何才能上好数学实验课？

认真听讲。像其他学科都必须遵守的规则一样，认真听讲是出色完成数学实验课程的第一步，也是最为关键的一步。听讲解、听指令、听安排...

主动思考。认真听，更要主动思考。集中精力，紧跟思维，积极思考老师提出的问题，主动考虑解决问题的办法和方式。

积极动手。动手操作和练习，是数学实验课的主要任务。但是一节课的时间非常短暂，所以要珍惜课堂上的每一秒钟。因为，只有亲自动手了、操作了、体验了才会有更加深刻的认识、感受和理解。

按时训练。每周一节课，每周一次作业。可以周末在家的时间操作和完成。优秀的作品将会不断地被呈现在网站上，供他人欣赏和学习。

5，想一想，做一做

【拓展训练】

1, 得到属于你的百变曲线

打开文件“0-百变曲线.dmr”，你就可以看到如图 8 所示的界面：

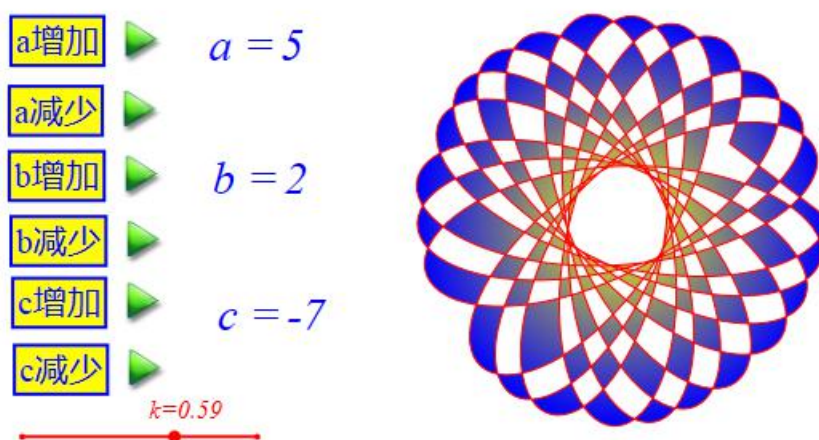


图 8

单击按钮【a 增加】一次，字母 a 的值就增加 1，其他按钮的作用是类似的。

在最下方是一个尺子，单击它一下，然后松开鼠标，然后再移动光标到它的中间位置处，这时单击鼠标同时按住鼠标左右移动即可改变字母 k 的值。

当 a、b、c、k 的值不同时，百变曲线的形状可能是不同的。当然，这时 $a=b=c=k=0$ ，也是百变曲线的一种状态。

改变 a、b、c 或 k 的值，找出 10 幅你最喜欢的百变曲线，并说明理由，同时为它取个形象的名字。

【思考问题】

1, 国王与象棋

你听说国王与象棋的故事吗？讲述的是古印度时期，有个大臣发明了象棋而使国王十分高兴，他决定要重赏这位大臣。发明象棋的大臣说：“我不要你的重赏，陛下，只要我在我的棋盘上赏一些麦子就行了。在棋盘的第 1 个格子里放 1 粒，在第 2 个格子里放 2 粒，在第 3 个格子里放 4 粒，在第 4 个格子里放 8 粒，依此类推，以后每一个格子里放的麦粒数都是前一个格子里放的麦粒数的 2 倍，直到放满第 64 个格子就行了”。“区区小数，几粒麦子，这有何难”，国王暗自高兴。

你能否计算一下，这些小麦有多少粒？

进一步，你能否估计一下这些小麦有多重？

请你上网查询一下，今年我国小麦的产量。并粗略比较一下这两个数字。

2, 折纸与珠峰

你知道“世界屋脊”珠穆朗玛峰的高度吗？

你知道普通一张报纸的厚度吗？

我们把一张报纸对折 1 次它的厚度就变成原来的 2 倍，再对折 1 次它的厚度就变为原来的 4 倍，接着再对折第 1 次它的厚度就变为原来的 8 倍.....

这个对折的过程继续下去，你认为报纸的厚度是否可能超过珠穆朗玛峰的高度？可否粗略估算一下需要对折多少次？在现实当中，可以实现吗？如果你认为可以，请你亲自动手做一做；如果你认为不可以，请说明你的理由。

第 01 部分 快速入门学技术

1，认识软件的界面

启动 Hawgent 皓骏动态数学软件后，就自动打开了一个新的文档。Hawgent 皓骏动态数学软件中的一个文档，就像我们的一个作业本。

最上方是标题栏，显示了文档的标题，即名字。在这里，文档的标题是什么？



图 1

下方的文件、编辑、视图、画图、三维、变换、测量、插入、属性、.....各种工具的菜单，所以这一栏叫做菜单栏。我们今后做任何事都需要对应的工具。通过这些菜单的名字，你能想象一下它们都包含了哪些工具吗？

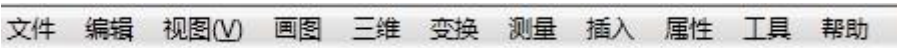


图 2

菜单栏下方的几行是工具栏。在工具栏中存放着菜单中最常用的一些工具。



图 3

中间区域最大的这一块，就是我们工作的地方，我们把它称作为工作区。在工作区，我们能做哪些工作？前面我们介绍了：运算、作图、测量、拖动、动画、变换...

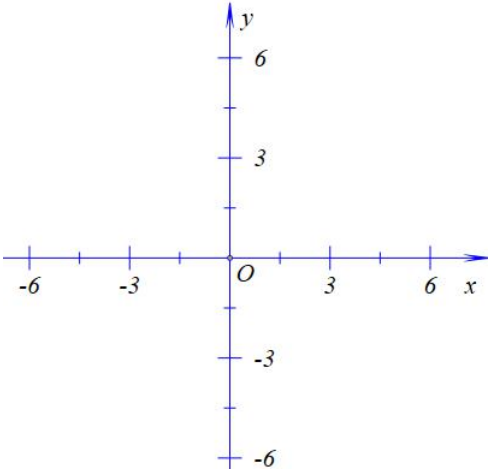


图 4

单击“查看”菜单中的“对象框”命令，就可以显示对象列表框。它的第一个任务就是，列举出工作区中所有的点、线、圆、文字、图片、视频等内容，计算机把这些内容统称为对象，所以它叫做对象工作区。在对象工作区中，每一个对象前面都有一个方框，单击这个方框， \checkmark 就不见了，对应地在工作区中这个对象就被隐藏了；再次单击这个方框， \checkmark 又出现了，对应地在工作区中这个对象就被重新显示出来了。所以，我们可以把这个方框称作控制对象显示或隐藏的开关。

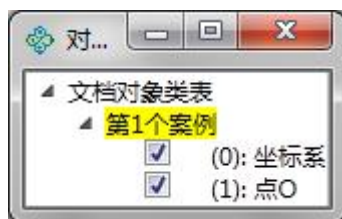


图 5

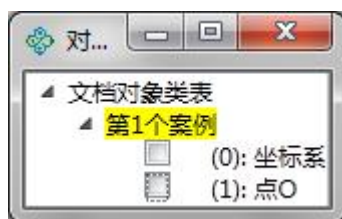


图 6

选择点 O，这时在最下方的状态栏中就可以显示出它的序号 1。怎么知道点 O 的序号是 1 呢？在对象列表中打开“对象组：坐标系”前面的加号+，就可以展开这个对象组列表，就可以看到点 O 前的数字为 1，就表示它的序号。序号从小到大，按照对象出现的顺序依次排列。点有了名字，还要需要做什么？序号有什么好处呢？后面我们将详细的进行介绍。

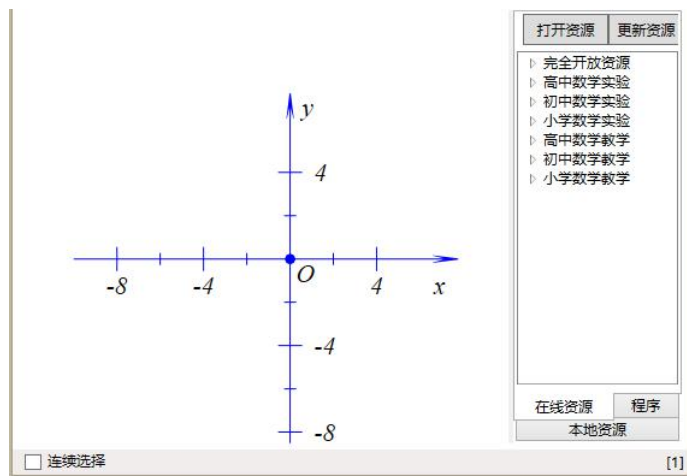


图 7

现在不需要坐标系，可以把它隐藏掉。

2，一个点一个位置

就像在纸上写字需要拿起铅笔一样，在 Hawgent 皓骏动态数学软件中画图也需要进入画图状态。单击工具条中的【画图】工具即可进入画图状态。

(1) 在作图区任意位置单击鼠标，就可以作出一个点 A，如图 8 所示。



图 8

(2) 作图结束了，单击【选择】工具，即可退出画图状态，而返回到选择状态。

(3) 在选择状态下，移动光标，当光标变为小手形状时，如图 9 所示，这时单击鼠标，就可以成功地选择点 A。



图 9

这时可以在状态栏中看到点 A 的序号 2，当然在左侧的对象工作区中，可以确认一下序号为 2 的对象就是点 A，如图 10。



图 10

我们说，一个点就可以确定一个位置。

因为点 A 是作图区中的任意点，因此可以拖动鼠标而任意移动它的位置。

在作图区空白处单击鼠标，可以取消选择的对象。在什么都没有选择的情况下，可以看到状态栏的内容是空的，如图 11 所示。



图 11

3，过两点一条直线

(1) 单击【画图】工具，再次进入画图状态。在作图区任意位置再次单击鼠标，即可作出另外一个点 B，如图 12 所示。



图 12

我们知道，两点确定一条直线。我们还知道：两个点能确定两个位置，从一个位置到另外一个位置，有一段距离，同时还有一个方向。因此我们可以说：从一个点到另外一个点，确定了一条带有方向的直线段。

(2) 移动光标，当光标变为小手形状时表示光标已经移动到了点 A 的位置，这时单击鼠标并按住朝点 B 的位置拖动，当到达点 B 的位置时松开鼠标，就画出了点 A 到点 B 的直线段，我们记作线段 AB。

(3) 单击点 A 并按住鼠标直接拖动到作图区某个空白位置时松开鼠标，即可作出另外一条线段 AC，如图 13 所示。

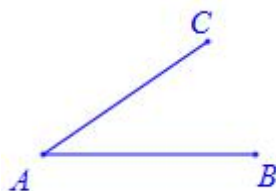


图 13

(4) 单击【选择】工具，再次返回到选择状态。可以拖动点 A、点 B 或点 C 的位置。

我们说从一个点到另外一个点，不但确定了直线的方向，也确定了直线的长度。线段 AB 和线段 AC 的起点位置都是点 A，而终点位置不同，分别是点 B 和点 C。当点 B 和点 C 重合时，直线 AB 与直线 AC 就有相同的方向，线段 AB 和线段 AC 也有相同的长度；但是，当点 B 和点 C 不重合时，直线 AB 与直线 AC 就有不同的方向，线段 AB 和线段 AC 是否也不同的长度呢？通过观察，能够做出判断吗？

在说出结论之前，先考考你的眼力：

(I) 如图 14，在平行四边形 ABCD 中，你认为线段 AE 和 BE 哪个长一些、哪个短一些？

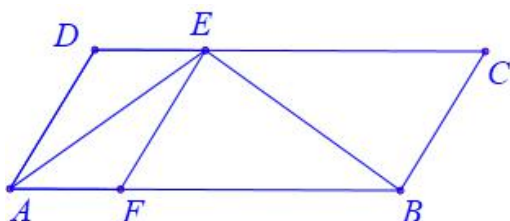


图 14

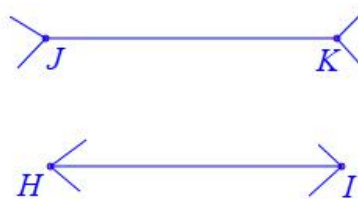


图 15

(II) 如图 15，你认为 MN 和 PQ 哪个更长哪个更短？

(III) 如图 16，两条线段 AB 和 CD，你哪个更长哪个更长呢？

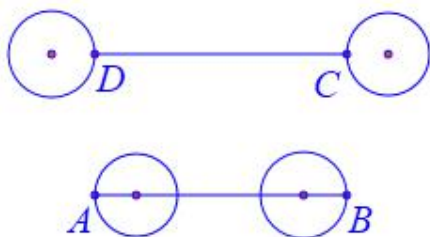


图 16

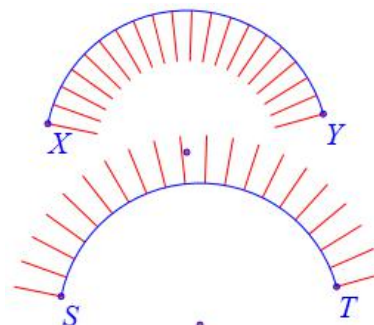


图 17

(IV) 如图 17，有上下两段圆弧，分别是圆弧 XY 和圆弧 ST，你认为哪个长一些、哪个短一些？

英国著名的生物学家、进化论的奠基人达尔文有一句幽默的名言：“大自然是一有机会就要说谎的。”

这时，如何才能让你的结论更加合理，让你的判断更有依据呢？我们可以测量线段的长度，然后通过比较两个数的大小判断两条线线段的长短。操作是：

(5) 选择点 A，然后按住 **【Ctrl】** 键，再选择点 B，这时候可以同时选择点 A 和点 B，执行 **【测量】** 菜单中的 **【距离】** 命令，即可得到线段 AB 的长度测量文本。

(6) 选择点 A，然后按住 **【Ctrl】** 键，执行 **【测量】** 菜单中的 **【距离】** 命令，即可得到线段 AC 的长度测量文本，如图 18 所示。

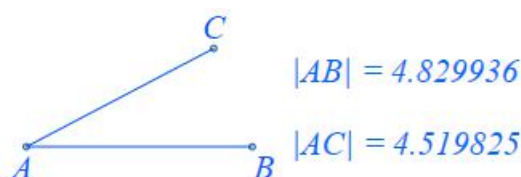


图 18

需要说明的是，在按住【Ctrl】键的情况下，鼠标点击多少个对象，就可以同时选择多少个对象。而在没有按住【Ctrl】键的情况下，点击第一个对象就可以选中的一个对象，再点击第二个对象就可以选中第二个对象，而把第一个对象释放掉；再点击第三个对象就可以选中第三个对象，而把第二个对象释放掉；.....依此类推。所以，当需要选择多个对象的情况下，需要按住【Ctrl】键，可以在选择第一个对象之前就按下【Ctrl】键也可以在选择第一个对象之后再按下【Ctrl】键，而在把所有的对象都选中之后，就可以松开【Ctrl】键，从而进行你所需要的操作。

而在任何时候，单击作图区空白处，即可释放所有选择的对象。当需要重新选择对象前，需要在作图区空白处单击鼠标，释放所有已经选择的对象。

在这里还需要注意一下测量结果：在测量文本中，我们看到了一个绝对值符号。难道像数一样，线段也有绝对值？事实上，我们就可以把 $|AB|$ 当作是线段 AB 的绝对值，只不过线段的绝对值表示的是它的长度。这是因为，就像数有正、负符号一样，我们也可以为线段规定方向，即有方向的线段，简称为有向线段。

那么 AB 就表示以 A 为起点、以 B 为终点的有向线段，而 BA 就表示以 B 为起点、以 A 为终点的有向线段。它们的长度相等，但方向相反。可以表示为：

$$|AB| = |BA| \text{ 但是 } AB = -BA \text{ 或 } BA = -AB。$$

这与数的绝对值与相反数具有相同的内涵。因为对于两个数 a 和 -a 来说，存在：

$$|a| = |-a|, a = -(-a) \text{ 或 } -a = -(a)。$$

如图 19，在对象工作区中可以看出线段的名称为：直线 AB。



图 19

我们把既有大小又有方向的量，称为向量。Hawgent 皓骏动态数学软件中的线段都是有

向线段，即向量。向量有很多用途，今后我们会陆续地进行探讨、研究和应用。

4，三点确定一个角

我们知道，从同一个起点出发的两条线段，具有不同的方向。这样，这两条线段就形成了一个夹角，因为角就是具有公共顶点的两条线段（准确地说是：两条射线）所组成的。在这里由于线段 AB 和 AC 有共同的端点，所以 AB 和 AC 就组成了一个角。

虽然说，角的概念是：从一个顶点出发的两条射线所组成的图形。但是我们无法在有限的空间当中绘制无限长的射线，因此在画角的过程中，两条边有时会画的短一些，有时会画的长一些。但是，角的大小会因为组成角的两条边的长短而不同吗？

线段有长度，角有角度。我们可以测量角的角度，观察和研究一下。

（1）按住【Ctrl】键，按照先后顺序依次选择点 B、点 A 和点 C，执行【测量】菜单中的【角度】命令，得到角 BAC 的角度测量值。

（2）单击【画图】工具，光标指向线段 AB 上，单击鼠标作出线段 AB 上的点 D；类似的操作，作出线段 AC 上的点 E。并连接线段 AD 和 AE。

（3）单击【选择】工具。按住【Ctrl】键，按照先后顺序依次选择点 D、点 A 和点 E，执行【测量】菜单中的【角度】命令，得到角 DAE 的角度测量值。结果如图 22 所示。

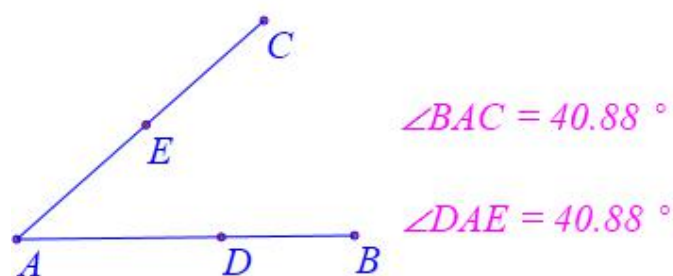


图 22

拖动点 B 或者点 C，可以观察到 $\angle BAC$ 与 $\angle DAE$ 的值都在变化，但它们的值保持相等。这说明：角的大小由它的两条边的方向决定。在这里， $\angle BAC$ 的两条边与 $\angle DAE$ 的两条边的方向分别相同，所以它们相等。

拖动点 D，改变线段 AD 的长度；或者拖动点 E，改变线段 AE 的长度。可以发现， $\angle DAE$ 的大小不变，始终等于 $\angle BAC$ 的值。这说明：角的大小与它的两条边的长短无关。即使，AD 或 AE 无限延长， $\angle DAE$ 的大小却始终不变，如图 23 所示。

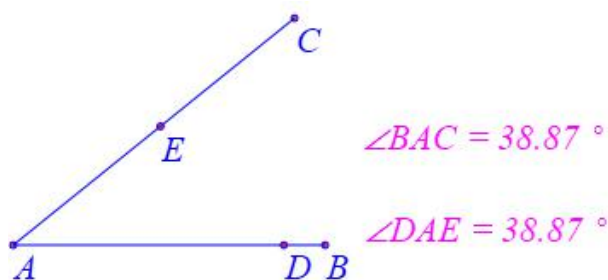


图 23

所以这个测量、操作和实验的过程可以帮助我们更加深刻地理解角的概念：

角由两条具有公共端点的射线组成。而两条射线的公共顶点就是这个角的顶点。

下面，我们把表示角的边以射线的形式显示：

(4) 按住【Ctrl】键，依次选择点 A 和点 B，执行【画图】菜单下【直线】子菜单中的【射线】命令，构造出射线 AB，类似地构造出射线 AC，结果如图 25 所示。

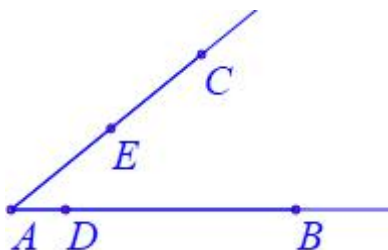


图 25

这样，从点 A 出发的两条射线 AB 和 AC 就形成一个角。

虽然在本质上，组成角的两条边是射线，但是在测量角的时候，我们仍然是按照顺序选择了三个点代表一个角：其中第一个点是一条边上的点、第二个点是角的顶点、第三个点是另一条边上的点。

而且，这只不过在有限的区域内所谓的射线。也就是说，作图区有多大，对应的射线就有多长，仍不是我们数学上真正意义上的射线。

5, 想一想, 做一做

【拓展训练】

1, 测量试试看

在图 14、图 15、图 16、图 17 当中，你的结论是什么？请通过测量检验一下你的判断。

打开文件“试试你的眼力.dmr”文件，即可打开文件的第一页，可以看到图 14 中的图

形。请测量线段 AE 和 BE 的长度。

按一下键盘中的【PageDown】键，进入文档的第二页，可以见到图 15 中的图形，请测量线段 MN 和 PQ 的长度。Hawgent 皓骏动态数学软件的文档像我们的作业本，作业本有很多页，Hawgent 皓骏动态数学软件的文档也可以有很多页。

再按一下键盘中的【PageDown】键，进入文档的第三页，可以见到图 16 中的图形，请测量线段 M'N' 和 P'Q' 的长度。

继续进入文档的第四页，可以见到图 17 中的图形，测量圆弧长度的操作是：选择圆弧，执行【测量】菜单中的【弧长】命令。

请汇报你的测量结果和你所发现的结论。

2，动手、观察和探索

在三角形当中，我们把组成角的那两条边之外的第三条边，称作是这个角的对边，也就是这个角的对面的那条边。例如在三角形 ABC 当中，有三个内角与三条边。内角 $\angle BAC$ 的对边是 BC，内角 $\angle ABC$ 的对边是 AC，内角 $\angle BCA$ 的对边是 AB。

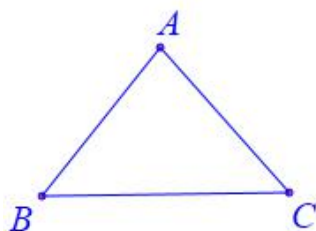


图 26

打开文件“三角形的边与角.dmr”，拖动三角形的顶点可以任意改变三角形 ABC 的边长和角度。

请你分别测量三角形的三个内角的角度与三条边的长度。拖动三角形的顶点，观察和回答下面的问题：

当 $\angle BAC$ 是最大的角时，它的对边 BC 是否也是最长的边？

当 $\angle BAC$ 是最小的角时，它的对边 BC 是否也是最短的边？

继续观察和研究，总结你所发现的规律，并检验你所得到的结论。

3，动手、观察和探索

打开文件“多边形的边与角.dmr”，通过【PageDown】和【PageUp】可以进行向下和向上翻页。在不同的页面中分别有等腰三角形、等边三角形、直角三角形、正方形、长方形、

菱形、平行四边形、梯形、筝形。

请你分别测量这些图形的每一条边和每一个内角。

针对每一个图形，根据你所测量得到的数据，总结你所发现的角与角、边与边之间的规律，并验证你所得到的结论，同时尝试着解释你所发现的结论。

【思考问题】

1，直线有的是水平的，有的是竖直的，有的是倾斜的。水平和竖直就能准确地表达直线的方向，而倾斜只能说明不是水平或竖直的。倾斜的程度不同，直线的方向也不相同。那么你认为应该如何准确地表示直线的倾斜度，从而准确地表示直线的方向呢？

2，力，就是一个向量，因为它既有大小也有方向。力的大小不同结果会不同，力的方向不同结果也会不同。

请你想一想，生活中还有哪些量是向量？并说明你的理由。

第 02 部分 温故也能得新知

1, 先提出一个问题

我们知道，在同一个平面内不相交的两条直线具有平行关系。

如图 1 所示，因为 AB 和 CD 相交于一点，所以它们不平行。

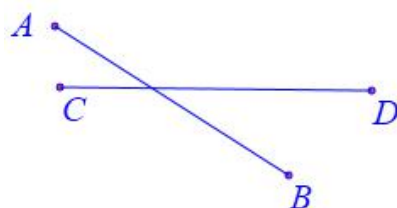


图 1

我们动手绘制如图 1 所示的两条直线：

- (1) 单击【画图】工具，绘制点 A、点 B、点 C 和点 D。
- (2) 单击【选择】工具，按住【Ctrl】键，选择点 A 和点 B，执行【直线】命令即可构造出直线 AB，类似地构造出直线 CD。

拖动点 B 或点 C 或点 D，改变直线 AB 和 CD 之间的关系，如图 2 所示，直线 AB 和直线 CD 是否相交呢？

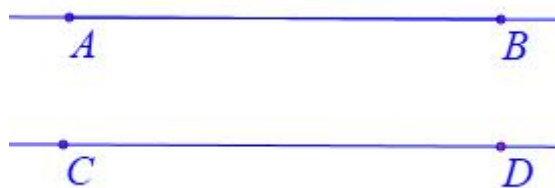


图 2

在图上我们没有看到 AB 和 CD 的交点，那么我们可以由此为理由判断它们就没有交点从而断定它们是平行的呢？

那么，如果是对于图 3 来说，究竟怎样才能确定两条直线是否有交点呢？也就是如何才能判断两条直线是否平行呢？

2，回到熟悉的内容

在小学阶段我们就已经学习过关于角的一些知识，其中最熟悉的莫过于：三角形的内角和等于 180° 。

三角形是由三个顶点、三条边组成的封闭图形。当然也形成了三个角，而由于这三个角在封闭图形的内部，所以被称作是内角。

请你绘制一个三角形 ABC。作为练习，请你分别测量出它的三个内角。

(1) 点击【画图】工具，绘制一个三角形 ABC。

(2) 点击【选择】键，按住【Ctrl】键，依次选择点 C、A、B，执行【测量】菜单中的【角度】命令，即可测量出 $\angle CAB$ 的值，同理依次测量出 $\angle ABC$ 和 $\angle BCA$ 的值。；

我们要把三个角加起来，是直接计算这三个测量值吗？当然不能，因为三角形的形状发生了改变，三个内角的值也随时会发生改变。那么，如何才能无论三角形的形状无论怎么改变时，测量的都是当前的三个内角值的和呢？

(3) 鼠标右键单击 $\angle CAB$ 的测量结果，如图 3 所示，在弹出的属性对话框中，它用字符串变量 v000 表示，缺省情况下每个测量结果都是用 1 个字母和 3 个数字组成的字符串进行表示。执行【测量】菜单中的【表达式】命令，就会弹出测量表达式对话框。如图 3 所示，在表达式的编辑框中输入： $180/\pi*(v000+v001+v002)$ ，点击【确定】得到表达式的值。

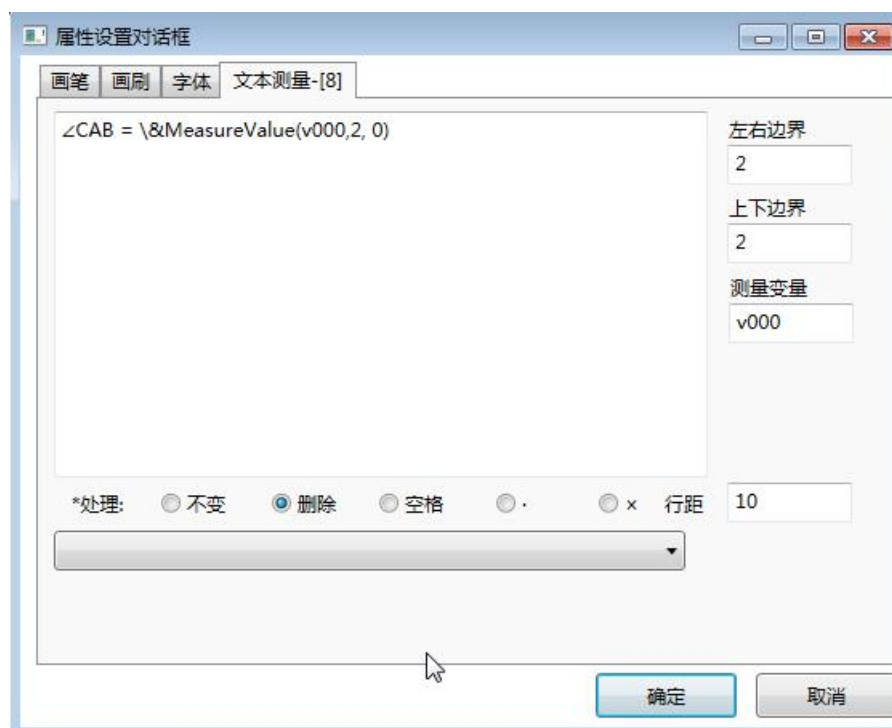


图 3

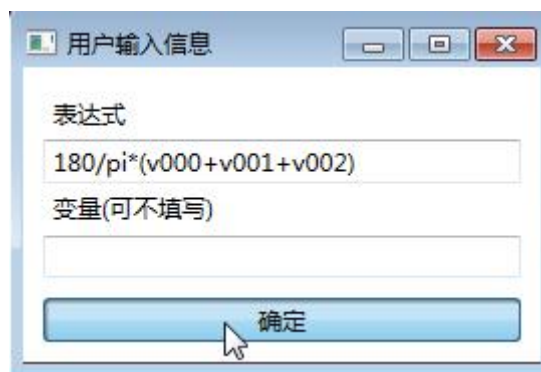


图 4

(4) 右击得出的测量结果，在弹出的对话框中，如图 5 所示，把\&之前的内容改为： $\angle CAB + \angle ABC + \angle BCA =$ ，然后单击【确定】按钮，即可得到测量结果。结果如图 6 所示：

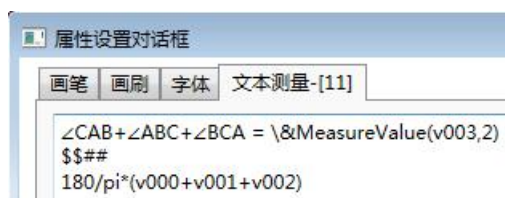


图 5

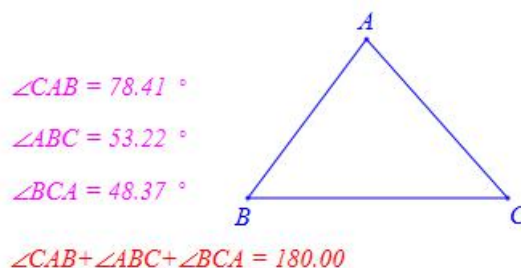


图 6

3, 有内角就有外角

前面我们回忆并加深了三角形内角和定理的知识。提到了内角，就不能不说外角。

为了研究内角和外角，我们需要首先完成下列图形的绘制：

- (1) 单击【画图】工具，任意绘制一个三角形 ABC。
- (2) 在边 BC 上任意取一点 D，并连接线段 CD。
- (3) 单击【选择】工具，拖动点 D 到线段 BC 的延长线上；连接 CD。
- (4) 按住【Ctrl】键，依次选择点 A、点 C 和点 B，执行【画图】菜单中的【标注角】命令，得到 $\angle ACB$ 的标注符号，然后通过【属性】菜单中的【填充颜色】工具设置其填充颜色为：蓝色。

$\angle ACB$ 就是三角形 ABC 的一个内角。

- (5) 按住【Ctrl】键，依次选择点 A、点 C 和点 D，执行【画图】菜单中的【标注角】命令，得到 $\angle ACD$ 的标注符号，然后通过【属性】菜单中的【填充颜色】工具设置其填充颜色为：红色。

在多边形一个角的顶点处，把它一条边反向延长，这条反向延长线与角的另外一条边所组成的角，就是这个角的外角。例如在这里，在三角形 ABC 的顶点 A 的位置，把 $\angle ACB$ 的边 CB 反向延长至 CD，CD 与 $\angle ACB$ 的另外一条边 CA 就组成了 $\angle ACB$ 的外角： $\angle ACD$ 。

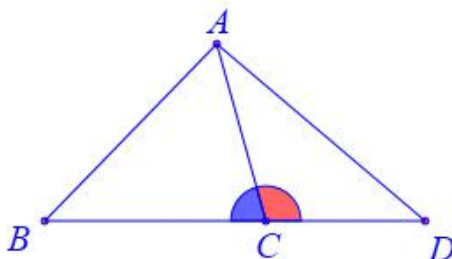


图 7

从图形上，可以了解 $\angle ACB$ 与它的外角 $\angle ACD$ 所存在的关系：

$\angle ACB$ 与 $\angle ACD$ 有一条公共边 CA，同时 $\angle ACD$ 的另一条边 CD 是 $\angle ACB$ 的另一条边 CB 的反向延长线。

同时，我们又知道 $\angle BCD$ 是一个平角，等于 180° 。于是我们立刻就能得到：

$$\angle ACD + \angle ACB = 180^\circ$$

对于这个特定的关系，我们给它们也取一个特别的名字：

若两个角之和等于 180° ，我们就把这两个角称为互补的两个角，同时把一个角称作是另外一个角的补角。例如在这里，我们说 $\angle ACD$ 与 $\angle ACB$ 是互补的两个角，也可以说 $\angle ACD$ 是 $\angle ACB$ 的补角，或者说 $\angle ACB$ 是 $\angle ACD$ 的补角。

由三角形内角和定理我们知道： $\angle CAB + \angle ABC + \angle ACB = 180^\circ$ ，立刻可以知道：

$$\angle ACD = \angle CAB + \angle ABC$$

从图形上观察， $\angle CAB$ 和 $\angle ABC$ 是与 $\angle ACB$ 相邻的两个角。而 $\angle ACD$ 是 $\angle ACB$ 的补角，因此我们可以说在三角形 ABC 当中， $\angle CAB$ 和 $\angle ABC$ 是 $\angle ACD$ 对着的两个内角，简称内对角。所以可以说：

三角形的外角等于它的两个内对角之和。

4，触类旁通得新知

能把 CB 反向延长与 CA 形成一个外角，是否也可以把 CA 反向延长与 CB 组成一个角呢？为什么不能？当然可以！

(1) 单击【画图】工具，在线段 AC 上任取一点 E，单击【选择】工具，把点 E 拖动

到线段 AC 外边，连接 CE，如图 8 所示。

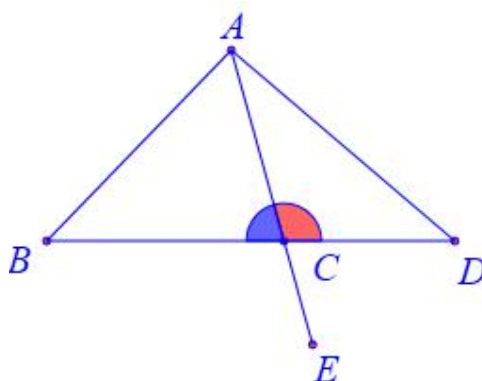


图 8

由于 CA、CB 是 $\angle ACB$ 的两条边，它们具有同等的关系，所以 $\angle BCE$ 当然也是 $\angle ACB$ 的外角，如图 9 所示，它也等于两个内对角 $\angle CAB$ 与 $\angle ABC$ 之和，那么就有： $\angle ACD = \angle BCE$ 。

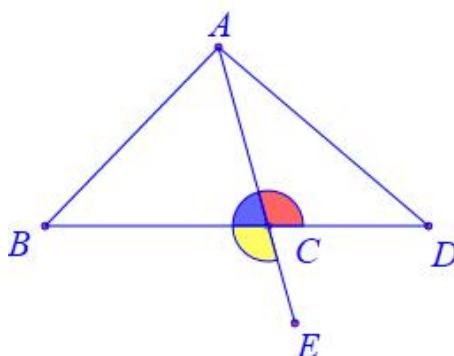


图 9

通过图形观察 $\angle ACD$ 与 $\angle BCE$ 的关系可以看出：它们的顶点相同，并且一个角的两条边分别是另外一个角的两条边的反向延长线。

我们把具有这种位置关系的两个角称为对顶角。那么就轻而易举地得到：

对顶角相等。

5, 举一反三是智慧

虽然，在多边形的每一个顶点处，有两个外角，但是这两个外角，是对顶角，具有相等的关系，所以我们通常只会画出一个外角。

但是通过做出两个外角，我们引出了对顶角的概念和性质。看来有时候多想一想，多做一做，会有额外的收获。

对于一个三角形来说，从一个顶点类推到三个顶点，那么在三个顶点处，就有 12 个角。

(1) 在新的案例或文档中，单击【画图】工具，任意绘制三条两两相交的线段 AB、CD 和 EF，如图 10 所示；

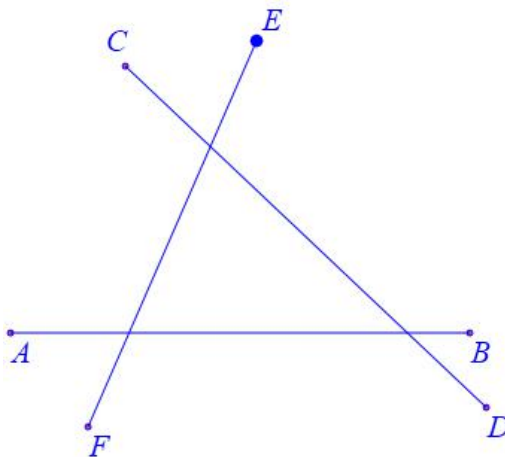


图 10

(2) 作出 AB 与 CD 的交点 G、CD 与 EF 的交点 H、EF 与 AB 的交点 I。

那么由这三条两两相交的线段 AB、CD、EF 就可以组成一个三角形 GHI，如图 12 所示。

那么就可以很清楚地观察到在三角形 GHI 的三个顶点处的 11 个角。

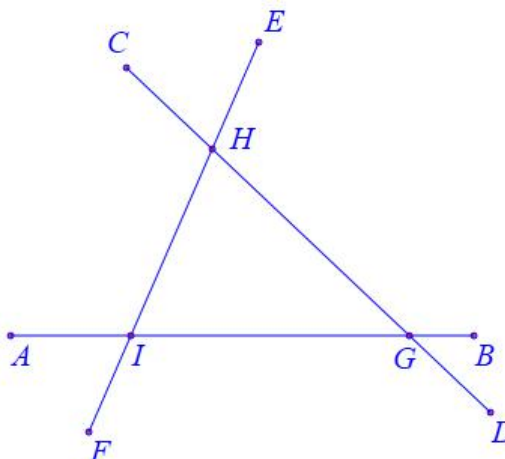


图 11

为了方便说明问题，我们可以标注出三角形 GHI 的两个内角以及与它们对应的外角：

(3) 单击【选择】工具，按住【Ctrl】键，依次选择点 D、点 H 和点 F，执行【画图】菜单中的【标注角】命令，得到 $\angle DHF$ 的标注符号，然后通过【属性】菜单中的【填充颜色】工具设置其填充颜色为任意颜色。

(4)，类似地标记出 $\angle DFG$ 、 $\angle CHF$ 、 $\angle EIB$ 、 $\angle AIE$ ，同时设置不同的填充颜色，结果如图 12 所示。

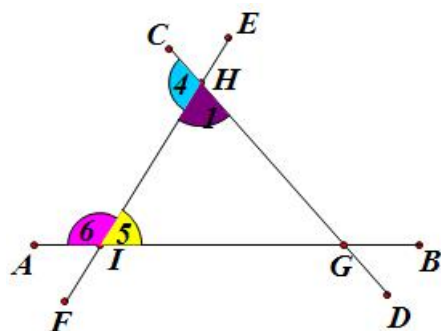


图 12

在这个图形当中，可以简单地训练和巩固一下前面学习的那些知识。

由于 AB、CD、EF 三条直线相交于三个点，组成一个三角形。由于三角形的三个内角之和等于 180° ，所以任何两个内角之和小于 180° ，从图形当中可以看出：

$$\angle DHF + \angle BIE < 180^\circ$$

又由于 $\angle DHF + \angle CHF = 180^\circ$ 、 $\angle BIE + \angle AIE = 180^\circ$ ，所以 $\angle DHF + \angle CHF + \angle BIE + \angle AIE = 360^\circ$ ，因此，

$$\angle CHF + \angle AIE > 180^\circ$$

这时候，CD 与 AB 的交点 G 在 EF 的右侧。而当 CD 与 AB 的交点 G 在 EF 左侧时，如图 13 所示，这时有 $\angle CHF + \angle AIE < 180^\circ$ ，而 $\angle DHF + \angle BIE > 180^\circ$ 。

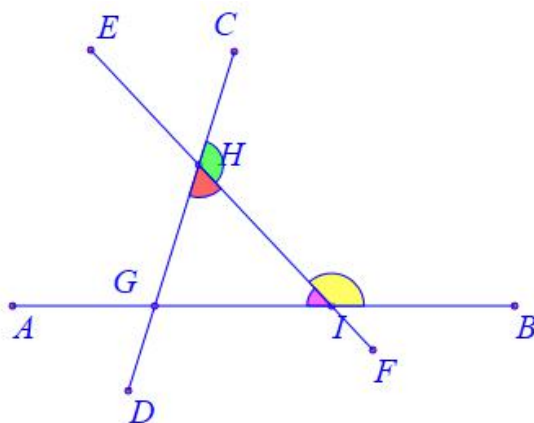


图 13

这说明，CD 和 AB 无论相交于 EF 左侧或 EF 右侧，总有 $\angle DHF + \angle BIE \neq 180^\circ$ ，当然同时有 $\angle CHF + \angle AIE \neq 180^\circ$ 。

因此，当 $\angle DHF + \angle BIE = 180^\circ$ 时，必然有 CD 和 AB 不相交于 EF 的任何一侧。即 CD 和 AB 根本不相交。

我们知道，不相交的两条直线相互平行。

这样，我们就通过角度得到了直线平行的判定方法。

这就像一个跷跷板，有时候左侧落地，有时候右侧落地，而当跷跷板与水平地面平行时，跷跷板也处于水平状态。

6，多种方案判平行

从三角形内角和等于 180° 的事实出发，我们得到了判断直线平行的一种基本方法。例如，如图 16 所示，我们只需要在 XY 、 VW 上各取一个点 S 、 T ，然后测量 $\angle XST$ 与 $\angle VTS$ 即可。

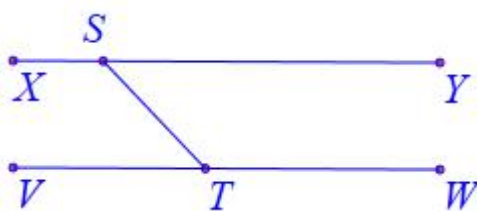


图 14

除了测量 $\angle XST$ 与 $\angle VTS$ ，你还有哪些方法可以判断 XY 与 VW 是否平行？

在图 15 当中，当 $\angle HSY + \angle WTG = 180^\circ$ 或 $\angle HSX + \angle VTG = 180^\circ$ ，直线 XY 与 VW 平行。

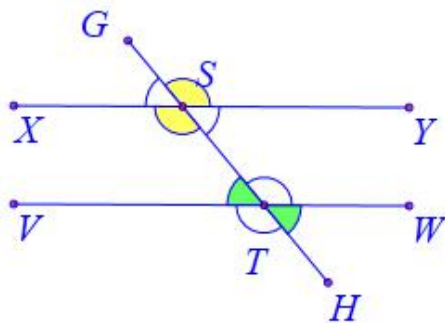


图 15

前面我们学习了互补角的概念和性质，那么在这个图形当中：

$\angle HSY + \angle GSY = 180^\circ$ 、 $\angle HSY + \angle HSX = 180^\circ$ 、 $\angle HTW + \angle WTG = 180^\circ$ 、 $\angle GTV + \angle WTG = 180^\circ$ 。

所以，即刻就可以知道，当 $\angle GSY = \angle WTG$ 或 $\angle HSX = \angle WTG$ 或 $\angle HSY = \angle HTW$ 或 $\angle HSY = \angle GTV$ 时，直线 XY 与 VW 平行。

为了叙述的方便，我们可以按照每一组角之间的关系为它们取个名字。

像 $\angle HSY$ 和 $\angle W TG$ 都在直线 XY 和 VW 之内，并且在直线 ST 的同侧，因此我们可以把 $\angle 1$ 和 $\angle 5$ 称为同旁内角。找一找这里面还有哪些同旁内角？

像 $\angle HSY$ 和 $\angle GTV$ 都在直线 XY 和 VW 之内，并且错开地分布在直线 ST 的两侧，因此我们可以把 $\angle HSY$ 和 $\angle GTV$ 称为内错角。找一找这里面还有哪些内错角？

像 $\angle GXY$ 和 $\angle W TG$ 分别在直线 XY 和 VW 的同一侧，并且在直线 ST 的同侧，因此我们可以把 $\angle GXY$ 和 $\angle W TG$ 称为同位角。找一找这里面还有哪些同位角？

总结前面的研究过程，我们可以得到以下事实：

两条直线被第三条直线所截，若同旁内角互补则两条直线平行，若内错角相等则两条直线平行，若同位角相等则两条直线平行。

也许你会发现，我们所命名的同旁内角、内错角、同位角当中，尚未包含例如 $\angle HYS$ 与 $\angle HTV$ 、 $\angle GXY$ 与 $\angle HTV$ 、 $\angle GXY$ 与 $\angle HTW$ 之间的关系。事实上，你也可以按照自己的方式为它们取一些有意义的名称。

仅仅测量同旁内角是否互补就可以判定两条直线是否平行了，但为什么要引出这么多判定方法？因为，有时候测量同旁内角最简单（如图16），有时候测量内错角最简单（如图17）。你能否找到一个例子说明测量同位角最简单或者非要测量同位角不可？

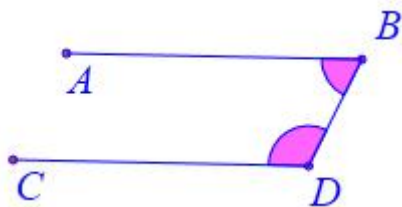


图 16

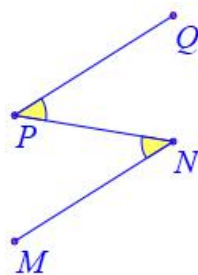


图 17

或者说，在很多现实问题当中：有些时候不能测量同旁内角，有些时候不能测量内错角，有些时候不能测量同位角。那么多了解一些方法在我们解决实际问题时可以有多种方案供选择。

7，想一想，做一做

【拓展训练】

1，观察、推导与计算

(1) 如图 18 所示, 计算 $\angle A + \angle B + \angle C + \angle D + \angle E$ 的值。

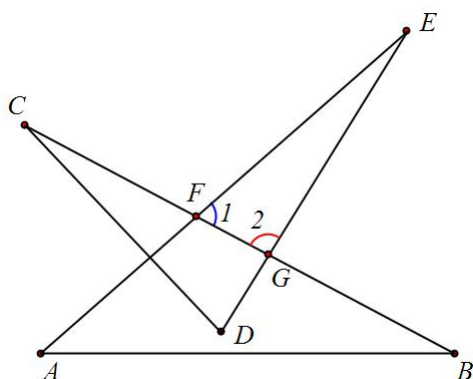


图 18

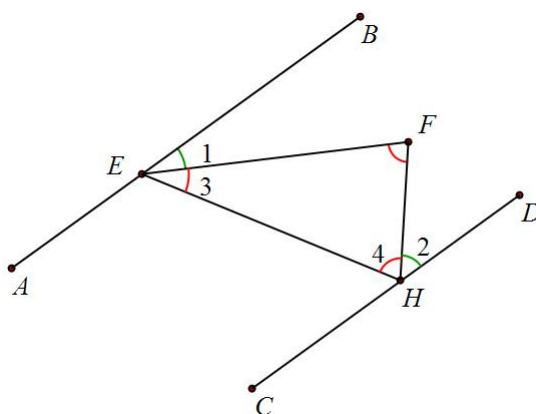


图 19

(2) 如图 19 所示, 已知 $AB \parallel CD$, $\angle 1 = 29^\circ$, $\angle 2 = 51^\circ$, 求 $\angle F$ 的值。

2. 设计、实践与检验

(1) 回忆小学阶段所学习的平行四边形的概念, 打开文件 “2-四边形 ABCD.dmr”, 就可以看到有一个四边形 ABCD, 请你设计一种方法, 判断四边形 ABCD 是否为平行四边形, 并说明理由。

(2) 回忆小学阶段所学习的梯形的概念, 进入文件 “2-四边形 ABCD.dmr” 的第二页, 就可以看到有一个四边形 ABCD, 请你设计一种最简单的方法, 判断四边形 ABCD 是否为梯形, 并说明理由。

3. 动手、观察和探索

打开文件 “多边形的内角和.dmr”, 通过【PageDown】和【PageUp】可以进行向下和向上翻页。

在不同的页面中分别有三角形、四边形、五边形、六边形、七边形和八边形, 请你分别测量这些图形的内角之和。

通过这些数据, 请你总结多边形内角和与它边的条数之间所存在的关系和规律。

4. 动手、观察和探索

任意绘制一个三角形并测量它的外角和, 任意绘制一个四边形并测量它的外角和, 任意绘制一个五边形并测量它的外角和, 任意绘制一个六边形并测量它的外角和, 任意绘制一个七边形并测量它的外角和。

通过这些数据, 请你总结多边形外角和与它边的条数之间所存在的关系和规律。

【思考问题】

1. 前面我们利用三角形的内角和等于 180° 的事实推导出了直线平行的判定方法。那

么，三角形的内角和等于 180° 的结论是怎么来的呢？请你说说三角形的内角和为什么等于 180° ？

2，若两个角的和为 180° ，我们把这两个角称之为互补。大家还约定，若两个角的和为 90° ，就把这两个角称之为互余。

更进一步，你能否和为 360° 的两个角之间的关系取一个名字？

通过前面的讨论我们已经知道，通过两个同旁内角的互补关系，可以判断两条直线平行。

在三角形当中，若两个角互余，那么第三个角就一定是直角，那么这个三角形就是直角三角形。

关于互补的两个角、互余的两个角，你还能找到它们的哪些用途？

第 03 部分 常见图形再认识

1, 直线平行再思考

了解了直线平行的判定方法之后，我们需要学习利用计算机绘制平行直线的方法：

(1) 单击【画图】工具，任意绘制一条线段 AB，然后在直线外任意绘制一个点 C；
然后我们绘制一条经过点 C 与 AB 平行的线段：

(2) 单击【选择】工具，按住【Ctrl】键，依次选择点 C 和线段 AB，执行【作图】菜单下【直线】子菜单中的【平行线】命令；作出过点 C 与 AB 平行的直线。

(3) 单击【画图】工具，在新作的直线上任意绘制一个点 D；单击【选择】工具，选择新作的直线，执行【编辑】菜单中的【隐藏】命令，使得直线被隐藏起来。

(4) 单击【画图】工具，连结 CD，即可做出点 D 和与 AB 平行的线段 CD。

紧接着，我们再绘制一条与 AB 平行的线段：

(5) 单击【画图】工具，在空白处任意绘制一个点 E。

(6) 参考 (2) 到 (4) 的步骤，做出点 F 和与 AB 平行的线段 EF。

(5) 鼠标右键单击线段 AB，打开它的属性对话框，如图 1 所示，在【端点画箭头(0-3)】编辑框中输入：2，单击【确定】按钮完成，即可显示出有向线段 AB 的终点箭头。



图 1

(7) 重复类似操作，显示有向线段 CD 的终点箭头和线段 FE 的终点箭头。

结果如图 3 所示：

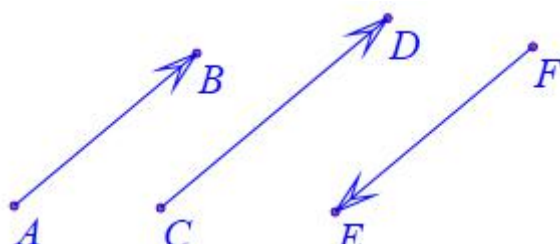


图 3

如果两条直线平行，我们可以说，这两条直线的方向相同。这是因为直线是向两边无限延伸的。但是，如果两个向量平行，那么这两个向量的方向可能相同也可能相反，例如在图 3 当中，向量 AB 的方向与向量 CD 的方向相同，而与向量 FE 的方向相反，但是向量 AB 与向量 CD 是平行的，与向量 FE 也是平行的。

当然向量 CD 与向量 FE 也是平行的。也就是说，有两条直线分别与第三条直线平行，那么这两条直线也是平行的。

这就是直线平行的传递性。

请您尝试着证明一下这个结论。

当然，证明的过程中，需要利用角的关系推导线之间的关系。

看来，我们学习过的角和线之间是相互影响的。我们学习过的平面几何基本图形包括各种各样的三角形和各种各样的四边形，在这些图形当中角和线之间是怎样相互影响的呢？

2，三角形整体性质

我们知道三角形的内角和等于 180° 。这是所有三角形都具有的性质，而无论它是锐角三角形、直角三角形、钝角三角形，还是等腰三角形、等边三角形、直角三角形。

我们不妨把这一性质称作三角形当中关于角的一个整体性质。

那么关于三角形的三条边，是否也存在整体性质呢？随意绘制一个三角形，观察图形：

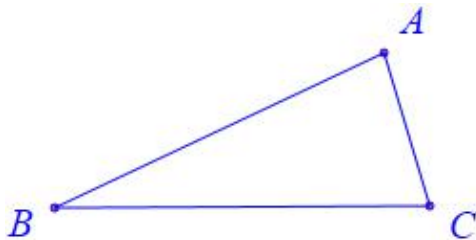


图 2

从“两点之间直线段最短”这一事实出发，即刻就能得到：

三角形任意两边之和，大于第三边。即：

$$AB + BC > CA, BC + CA > AB, CA + AB > BC.$$

学习了不等式的基本性质之后，还可以继续得到：

$$AB > CA - BC, BC > AB - CA, CA > BC - AB, \text{ 或者,}$$

即：任意两边之差，小于第三边。

这就是关于三角形三条边的整体性质。

当然你也可以通过测量和计算的方式进行验证：

(1) 单击【画图】工具，绘制任意三角形 ABC。

(2) 单击【选择】工具，按住【Ctrl】键，同时选择点 A 和点 B，执行【测量】菜单中的【距离】命令，得到线段 AB 的长度，类似地得到 BC 和 CA 的长度测量值，结果如图 3 所示。

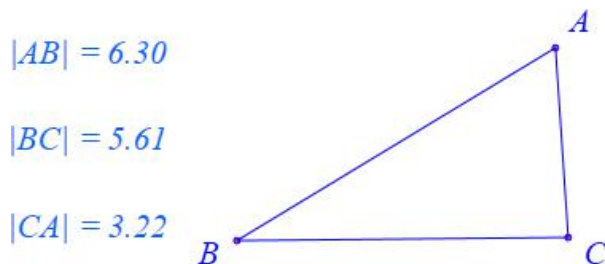


图 3

下面我们计算线段 AB 与线段 BC 的长度之和以及长度之差：

(3) 执行【测量】菜单中的【表达式】命令，如图 4 所示，在弹出的测量表达式编辑框中输入： $v000+v001$ ，然后单击【确定】按钮，右击得出的表达式，在表达式菜单中可以按图 5 所示，把表达式首行的“ $v000+v001$ ”改为： $|AB|+|BC|$ ，点击【确定】修改显示的结果，即可得到 $|AB|+|BC|$ 的值；继续输入： $v000-v001$ ，单击【确定】按钮，右击得出的表达式，在表达式菜单中可以把表达式首行的“ $v000-v001$ ”改为： $|AB|-|BC|$ ，即可得到 $|AB|-|BC|$ 的值；完成后单击关闭按钮即可退出测量表达式对话框。



图 4

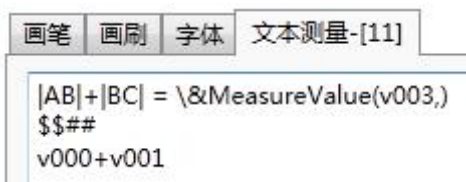


图 5

拖动点 B，改变线段 AB 和线段 BC 的长度，观察和比较 $|AB|+|BC|$ 、 $|AB|-|BC|$ 与 $|AC|$ 之间的大小关系。

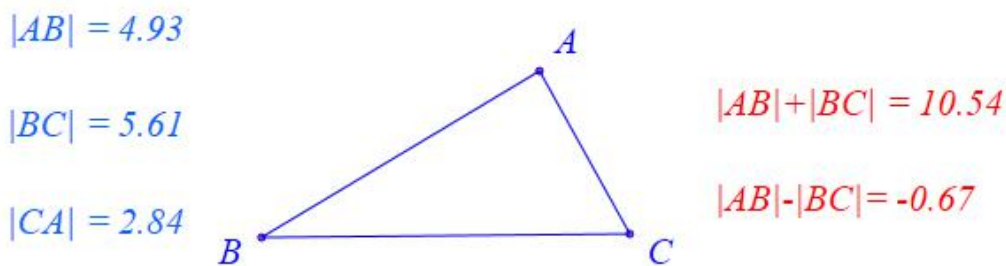


图 5

类似地你可以继续计算线段 AB 与线段 AC 的长度之和以及长度之差，并观察和比较它们与 $|BC|$ 之间的大小关系；继续计算线段 AC 与线段 BC 的长度之和以及长度之差，并比较它们与 $|AB|$ 之间的大小关系。

了解了三角形的这一性质之后，如果知道三条线段的长度就能断定它们是否能够组成一个三角形。这就把数值与图形结合在一起了。

3, 想一想, 做一做

【拓展训练】

- (1) 已知 $AB \parallel CD$ 、 $AB \parallel EF$ ，证明 $CD \parallel EF$ 。
- (2) 通过计算，判断下列每一组中的三条线段是否能够一个三角形：
 - a) 1, 2, 3; b) 1, 2, 2; c) 2, 3, 4; d) 2, 3, 3; e) 4, 4, 9。

【思考问题】

三角形的这一整体性质，是我们从“两点之间直线段最短”这一事实出发，通过观察图形直接得到的。那么，应该如何通过严谨的推导而得出这一结论和性质呢？

第 04 部分 三角形局部研究

1, 等腰三角形的局部性质

与三角形的整体性质对应的是，三角形的局部性质。

事实上，关于三角形的局部性质我们早已经了解了一些，例如：

锐角三角形当中每一个角都小于 90° ；

钝角三角形当中有一个角而且只有一个角大于 90° ，其他的两个角都小于 90° ；

直角三角形当中有一个角而且只有一个角等于 90° ，其他的两个角都小于 90° 。

关于等腰三角形、等边三角形和直角三角形的边有哪些局部性质呢？下面我们进行画图、测量和观察进行实验和研究：

(1) 单击【画图】工具，进入画图状态，任意绘制两点 A 和 B。

(2) 单击【选择】工具，进入选择状态，按住【Ctrl】键，依次选择点 A 和点 B，执行【画图】菜单下【多边形】子菜单中的【等腰三角形】工具，即可做出以 AB 为底边的等腰三角形 ABC。

(3) 按住【Ctrl】键，依次选择点 C 和点 A，执行【测量】菜单中的【距离】命令，得到边 CA 的距离测量值，重复类似操作测量出 CB 的长度测量值。

拖动点 C，可以观察到 CA 和 CB 的长度在发生变化，但是它们之间相等的关系始终保持不变。这正说明了等腰三角形的特征：有两条边相等。我们把相等的这两条边称作是等腰三角形的腰，把另外一条边称作等腰三角形的底。把腰和底之间的夹角称作是底角、把两个腰之间的夹角称作是顶角。如图 1 所示，请你指出等腰三角形 ABC 中的腰、底、底角、顶角。

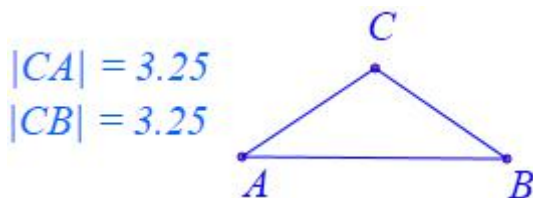


图 1

等腰三角形的名称形象地描述了它的一些特征。但还不是它全部的特征，请你继续进行操作：

(4) 按住【Ctrl】键，依次选择点 C、点 A 和点 B，执行【测量】菜单中的【角度】命令，即可得到底角 CAB 的测量值；重复类似操作测量底角 CBA 的值。

拖动点 C，可以观察到，当等腰三角形 ABC 的形状发生改变时，两底角的值也在同时发生改变，但它们相等的关系始终保持不变。

由此我们得到了等腰三角形的另外一个局部性质：两底角相等。

这说明，三角形当中边与边之间的关系，会影响到角与角之间的关系。类似地，等边三角形也是根据三角形三条边之间的关系而命名的：因为它的三条边都相等。那么在等边三角形当中，关于它的内角有哪些局部性质呢？根据前面我们研究的等腰三角形的性质可以知道，等边三角形的每两个角之间都相等，那么它的三个角相等，根据三角形三个内角之和等于 180° 的性质，可以知道等边三角形的每个内角都等于 60° 。

2，等边三角形的局部性质

当然，你还可以绘制一个等边三角形，然后测量、拖动、观察和验证一下它的性质：

(1) 执行【文件】菜单中的【新建案例】命令，建立一个新的案例；单击【画图】工具，绘制任意两点 A 和 B；单击【选择】工具，按住【Ctrl】键，选择点 A 和点 B，执行【画图】菜单下【多边形】子菜单中的【等边三角形】命令，做出以 AB 为边的等边三角形 ABC；测量三条边的长度，测量三个角的大小。

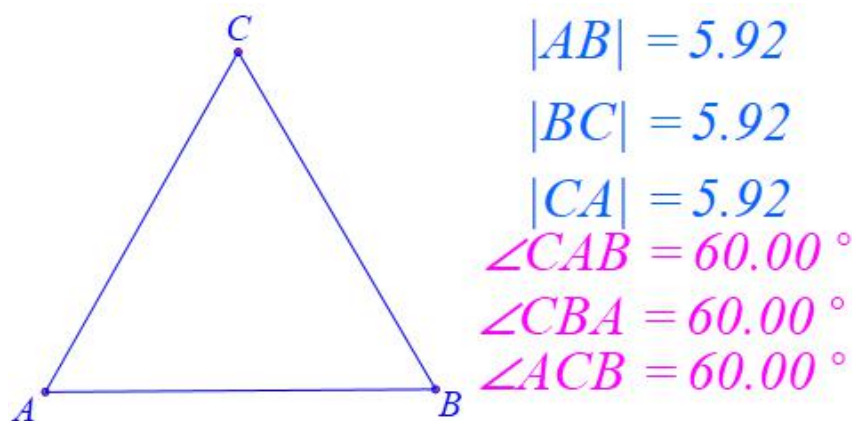


图 2

任意拖动点 A 或点 B，改变等边三角形 ABC 的边长，观察测量数据的变化规律。

在等边三角形 ABC 当中，点 C 可以拖动吗？拖动点 C，会有什么后果发生？请你试试看。

可以发现，拖动点 C 的过程中，整个等边三角形会跟着进行整体移动。这是因为，点 C

受点 A 和点 B 的位置的约束，因为它要与点 A 和点 B 组成一个等边三角形。它既然是受约束的，就是不能自由移动的。但是，在拖动点 C 的过程中，为了使得三角形 ABC 始终为等边三角形，点 A 和点 B 就不得不一起运动，所以拖动点 C 的过程中，整个图形会跟着整体移动。

我们把类似于点 C 的这种点，在动态几何软件 Hawgent 皓骏动态数学软件当中称作是非自由点，或把它叫做约束点。

与非自由点对应的是自由点，例如这里的点 A 和点 B，它们能够被随意拖动。当然与它们相关的其他对象，例如点 C、线段 AB、线段 CB 和线段 CA，也会随之发生对应的改变。

介于非自由点和自由点之间的是半自由点。例如在上面的等腰三角形 ABC 当中，点 C 可以被拖动，但又不能被随意拖动，它在运动过程中只需要保持 $|CA|=|CB|$ 的关系成立。

(2) 执行【文件】菜单中的【新建案例】命令，建立一个新的案例；单击【画图】工具，绘制任意两点 A 和 B；单击【选择】工具，按住【Ctrl】键，选择点 A 和点 B，执行【画图】菜单下【多边形】子菜单中的【直角三角形】工具，做出以 AB 为一条直角边的直角三角形 ABC。

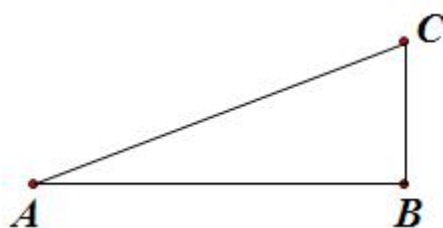


图 3

这里的点 C 就是一个半自由点。它能够被拖动，但不能被随意拖动，因为它要满足 $BC \perp AB$ 的关系成立。

等腰三角形、等边三角形是根据边的局部性质而命名的，而直角三角形是根据角的局部性质命名的。

根据“三角形的内角和等于 180° ”这一事实出发，我们可以知道另外两个内角之和等于 90° 。通过前面的介绍，我们知道它们被称为互余的两个角，或者说一个角是另外一个角的余角。

在直角三角形当中，把组成直角的两条边称作直角边，直角所对的那条边称作斜边。这是因为，把一个直角三角形一条边放在水平直线上，那么它的另外一条边必然是竖直的，那么直角所对的边就是倾斜的。

根据“直线外一点，与直线上各点连接的所有线段当中，垂线段最短”这一性质，我们

可以知道： $CB < CA$ 、 $AB < AC$ 。由此，我们可以得到：

在直角三角形当中，直角边所对的斜边最长。

3，想一想，做一做

【拓展训练】

(1) 请你通过测量和计算，检验直角三角形的这局部性质：直角边所对的斜边最长。

(2) 已知一条线段，经过它的端点并作出与它垂直的线段，即可构造一个以这条边为直角边的直角三角形。那么，如何构造以已知线段为斜边的直角三角形呢？下面我们介绍一种根据直角三角形的定义构造直角的方法：

在新的案例当中，单击【画图】工具，任意绘制一条线段 AB 和直线外任意一点 C ；

选择点 B 和点 C ，执行【画图】菜单下【直线】子菜单中的【直线】命令，作出经过点 B 和点 C 的直线；

按住【Ctrl】键，依次选择点 A 和直线 BC ，执行【画图】菜单下【直线】子菜单中的【垂直直线】命令。

依次选择直线 BC 和与它垂直的直线，执行【画图】菜单下【交点】子菜单中的【直线和直线的交点】命令，作出点 D ，如图 4 所示：

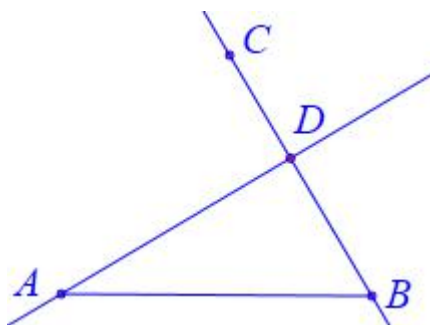


图 4

点 D 就是以 AB 为斜边的直角三角形的直角顶点。拖动点 C ，可以观察到点 D 的位置随会之发生改变。

我们再介绍一种利用圆的性质构造直角的方法：

建立新的案例，单击【画图】工具，任意绘制一条线段 AB ；

按住【Ctrl】键，依次选择点 A 和直线 BC ，执行【画图】菜单中【约束点】子菜单下的【中点】命令，作出线段 AB 的中点 C ；

光标指向点 C，单击鼠标右键并按住拖动到点 B 的位置时松开鼠标，即可作出以点 C 为圆心、经过点 B 的圆，这个圆当然也经过点 A，所以它是以线段 AB 为直径的圆；

光标指向圆周，单击鼠标即可作出圆周上的一点 D，连接线段 DA 和 DB，如图 5 所示。

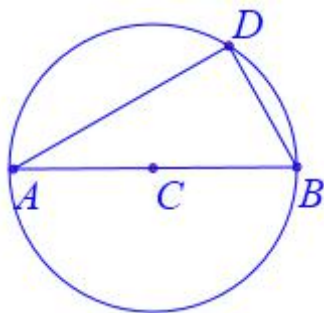


图 5

那么三角形 DAB 就是以 AB 为斜边的直角三角形，其中点 D 是它的直角顶点。是否果真如此呢？你可以测量 $\angle ADB$ 的值，拖动点 D 让它在圆上运动试试看。

(3) 在一般的三角形当中，是否也存在最大的角所对的边最长？反过来，最小的角所对的边也最短呢？请你通过测量和观察，判断这一结论是否成立。

【思考问题】

在同一个一般的三角形当中，如何证明较大的角所对的边也较长，较小的角所对的边也较短？

第 05 部分 几个特殊四边形

1, 多边形局部性质

除了各种各样的三角形之外, 我们还学了各种各样的四边形, 例如正方形、长方形、菱形、平行四边形、梯形和筝形等等。它们有哪些局部性质呢?

(1) 任意绘制两点 A 和 B, 选择点 A 和 B, 执行【画图】菜单下子菜单【多边形】中的【正方形】工具即可构造正方形 ABCD, 测量它的四条边的长度和四个内角的大小。

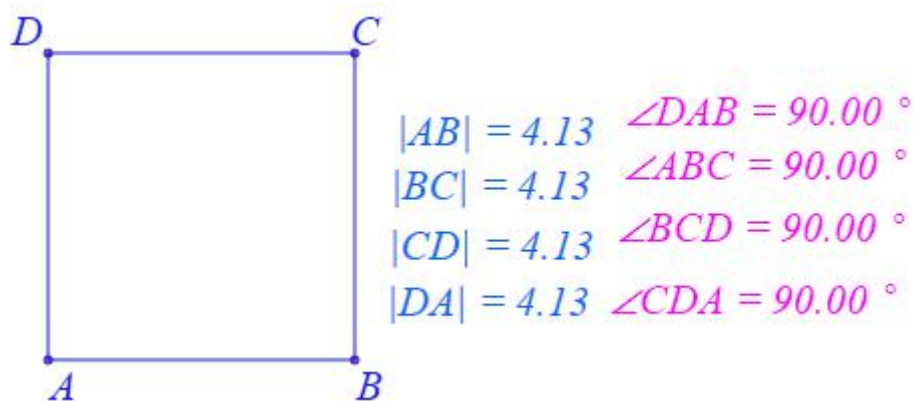


图 1

可以发现四条边的长度相等, 四个角的大小也相等并且都是直角。这正是正方形名称的由来: 正, 表示不偏斜, 在这里表示每条边都相等, 类似还有正三角形、正四边形、正五边形和正六边形等等, 均表示每条边都相等的多边形; 方, 表示端正, 方直, 在这里表示角度为直角, 类似的还有长方形, 它的四个内角也是直角, 而不满足每条边都相等。下面我们继续绘制长方形:

(2) 任意绘制两点 E、F, 选择点 E 和点 F, 执行【画图】菜单下子菜单【多边形】中的【矩形】工具即可构造长方形 ABCD, 测量它的四条边的长度和四个内角的大小, 如图 2 所示, 检验我们前面的论断。

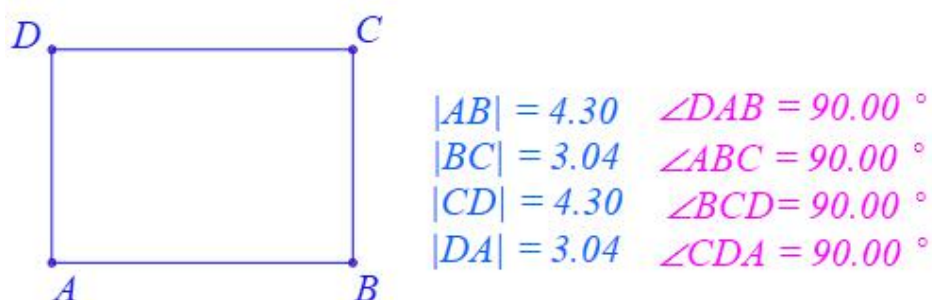


图 2

2, 平行四边形局部性质

我们发现，在长方形当中，邻边不再相等，但两组对边仍然是分别对应相等的。

我们知道平行四边形是两组对边分别平行的四边形，由于长方形的四个内角都是直角，它的两组对边也分别平行，所以长方形当然也是平行四边形。相对于一般的平行四边形，长方形的特殊在于它的内角都是直角。所以，我们可以把长方形定义为：有四个角是直角的平行四边形。

依此类推，当然正方形也是四个内角都是直角的平行四边形，所以它也是一个长方形。相对于一般的长方形，正方形的特殊性在于它的四条边都相等。所以，我们可以把正方形定义为：两组组邻边相等的长方形。

反过来，我们可以说，相对于正方形来说，长方形的邻边不一定相等；相对于长方形里说，平行四边形的内角不一定是直角。那么，除了平行四边形四个内角都不一定是直角之外，它是否还保留了长方形的其他一些性质呢？例如，两组对边是否仍然相等？我们通过测量、观察、实验、检验我们的猜想：

(3) 建立新的页面，任意绘制三个点 A、B、C，依次选择点 A、点 B、和点 C，执行【画图】菜单下子菜单【多边形】中【平行四边形】命令，即可做出以 $\angle ABC$ 为内角的平行四边形 ABCD。然后继续测量四条边的长度以及四个内角的大小，如图 3 所示。

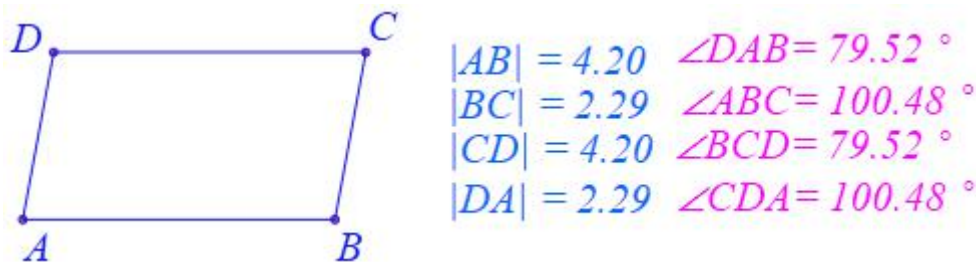


图 3

任意拖动点 A、点 B 或点 C，可以发现，四边形的邻角始终互补，这说明它确实是一个平行四边形。而当平行四边形的性质任意改变时，对边相等的性质保持不变，这就得到了平行四边形当中关于边的局部性质。

在平行四边形当中由邻角互补，很容易推导出平行四边形关于角的局部性质：对角相等。

对角相等的关系容易推导得出，而对边相等的关系如何推出呢？

除了长方形之外，菱形也是一种特殊的平行四边形，因为它的四条边都相等，实际上我们也可以把菱形定义为：邻边相等的平行四边形。问题是，计算机中没有直接绘制菱形的工具，如何绘制这个特殊的平行四边形呢？

(4) 建立新的案例，单击【画图】工具，任意绘制一条线段 AB。

(5) 鼠标右键单击点 B 并按住拖动到点 A 的位置处松开，即可做出以点 B 为圆心经过点 A 的圆，记作圆 B；那么圆 B 的半径大小就等于线段 AB 的长度。

(6) 在圆 B 上任取一点 C，并连接半径 BC。

(7) 单击【选择】工具，按住【Ctrl】键，按照顺序先后选择点 A、点 B 和点 C，执行【画图】菜单下子菜单【多边形】中的【平行四边形】命令，即可以 $\angle ABC$ 为内角的平行四边形 ABCD，如图 4 所示。

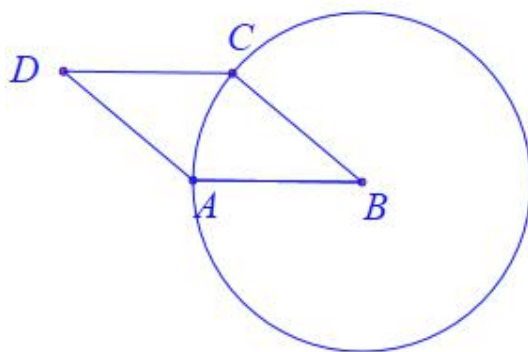


图 4

由于线段 AB 与线段 CB 的长度相等，因此平行四边形 ABCD，是一个菱形。你还可以通过测量进行检验和验证：

(8) 分别测量四边形 ABCD 的四条边的长度。

(9) 选择圆 B 的圆周，执行【编辑】菜单中的【隐藏】命令，即可把圆周隐藏。如图 5 所示：

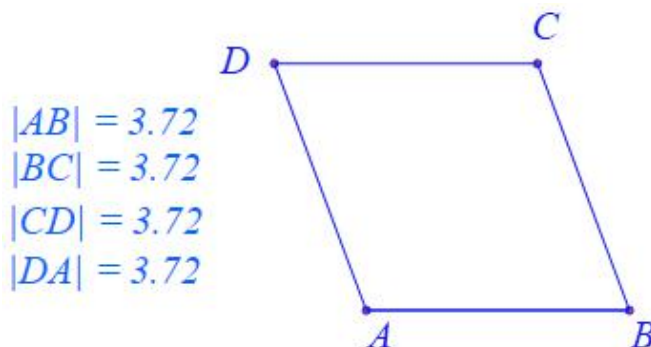


图 5

分别拖动点 B 和点 C，观察图形和数据的变化规律。

我们把有两组对边分别平行的四边形称作是平行四边形，而把只有一组对边平行的四边形称作是梯形。绘制梯形的方法很简单：

(10) 建立新的案例，绘制任意三点 A、B、C，过点 C 做出与 AB 平行的直线，在直线作一点 D，隐藏直线，连接 AB、BC、CD、DA，就构成了一个梯形，如图 6 所示：

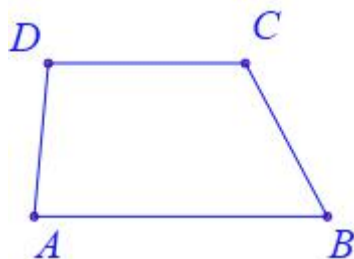


图 6

(11) 分别测量 $\angle DAB$ 、 $\angle ABC$ 和 $\angle BCD$ 的值，如图 7 所示，通过这些数据是否能够说明四边形 ABCD 就是一个梯形呢？

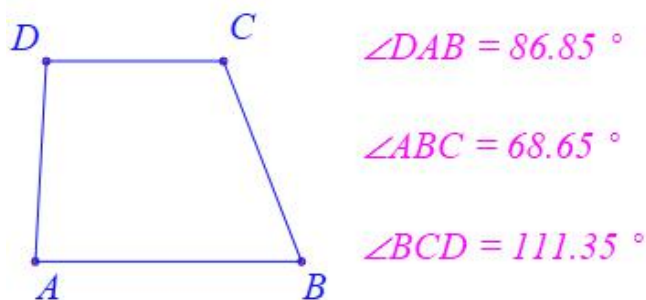


图 7

你认为，梯形的四个内角之间具有哪些局部性质呢？

继续测量 $\angle D$ 的值，验证你的猜想。

3, 想一想, 做一做

【拓展训练】

(1) 根据定义，一步一步构造平行四边形：

单击【画图】工具，任意绘制两条线段 AB、BC，如图 8 所示：

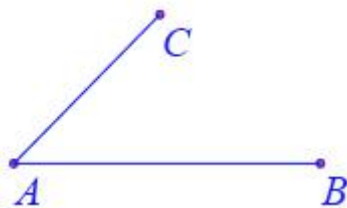


图 8

单击【选择】工具，按住【Ctrl】键，同时选择点 C 和线段 AB，执行【作图】菜单中【直线】子菜单下的【平行线】命令，结果作出经过点 C 与 AB 平行的直线。

按住【Ctrl】键，同时选择点 B 和线段 AC，执行【作图】菜单中【直线】子菜单下的【平行线】命令，结果作出经过点 B 与 AC 平行的直线。

单击【画图】工具，作出这两条直线之间的交点 D，结果如图 9 所示：

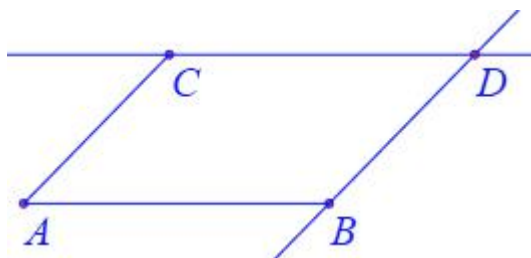


图 9

这样点 D 与点 A、点 B、点 C 就构成了平行四边形的四个顶点。不过你还可以继续作出我们想要的平行四边形：

按住【Ctrl】键，选择直线 CD 和直线 BD，执行【编辑】菜单下的【隐藏】命令，隐藏这两条直线；然后连接线段 CD 和线段 BD。

单击【选择】工具，返回到选择状态，拖动点 A 或点 B 或点 C，可以发现四边形 ABCD 始终是一个平行四边形。

(2) 绘制一个筝形，并研究它的性质：

在新的页面当中，单击【画图】工具，任意一条线段 AB。

选择线段 AB，执行【画图】菜单下子菜单【多边形】中的【等腰三角形】命令，作出以 AB 为底边的等腰三角形 ABC。

再次选择线段 AB，再次执行【等腰三角形】命令，作出以 AB 为底边的另外一个等腰三角星 ABD。

选择线段 AB，将其隐藏，再次选择 AB，将其隐藏（想想为什么要隐藏两次？）。结果如图 10 所示，当然也可以拖动点 C 或点 D，使得它们处于直线 AB 的两侧，如图 11 所示；

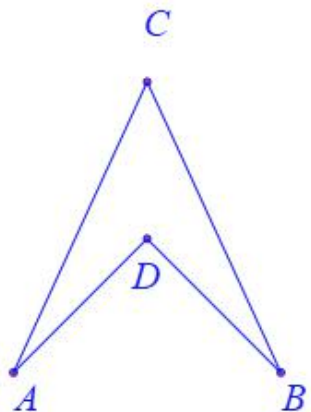


图 10

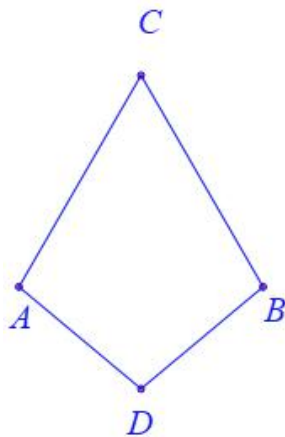


图 11

根据作图的过程我们知道，在这个图形当中有： $AC=BC$ 、 $AD=BD$ 。大家把具有这种相对的两组邻边相等的四边形称作是筝形，这是因为它与我们在天空中放飞的风筝的形状相似。大家想一想，风筝为什么要制作成这种形状的呢？

那么对于筝形 $ABCD$ 来说，它的四个内角之间又有什么关系呢？请你通过测量进行探索和实验。

【思考问题】

通过测量、观察和实验，我们能够发现平行四边形的两组对边分别相等。而平行四边形的定义是：两组对边分别平行的四边形是平行四边形，看来线段之间的位置关系也能影响它们之间的长度关系。那么应该如何证明平行四边形的两组对边分别相等呢？

第 06 部分 多边形整体研究

1, 多边形的内角和

我们研究了各种各样的四边形的局部性质，但是对于一个的四边形来说不存在与正方形、长方形、菱形、平行四边形、梯形或筝形类似的局部性质。但是一般的四边形是否存在某些整体性质呢？

正方形、长方形、菱形、平行四边形、梯形的内角和都是 360° ，实际上，一般的四边形的内角之和也等于 360° ，这是因为，把任意四边形当中，任意一组不相邻的两个点连起来就可以把原来的四边形分成两个三角形。如图 1 所示，因为每一个三角形的内角和都是 180° ，所以四边形的内角和为 360° 。

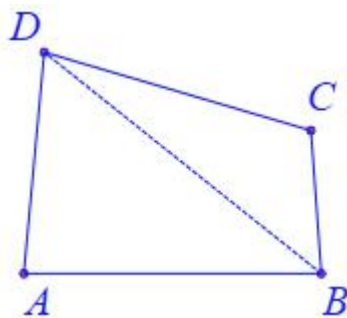


图 1

这就得到了四边形关于内角的一个整体性质。

实际上，我们也可以反过来思考问题或者进行操作：

(1) 在新的页面当中，单击【画图】工具，任意绘制一个三角形 ABC，如图 2 所示，我们知道它的内角之和等于 180° 。

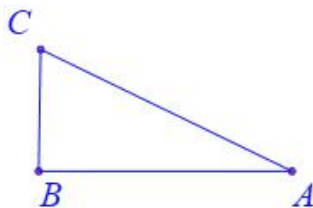


图 2

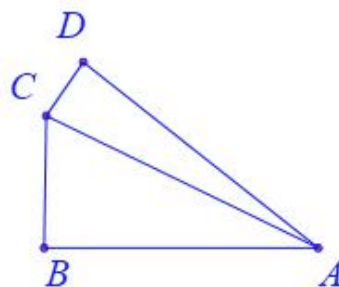


图 3

(2) 在三角形 ABC 的外侧，继续绘制一条线段 CD，并连接线段 DA，如图 3 所示，

这就组成一个四边形 ABCD。

相对于之前的三角形 ABC，四边形 ABCD 多出了一个三角形 ACD，因此四边形 ABCD 的内角和=三角形 ABC 的内角+三角形 ACD 的内角和，即四边形 ABCD 的内角和为： $180^{\circ} + 180^{\circ} = 360^{\circ}$ 。

我们继续进行作图：

(3) 在四边形 ABCD 的外侧，绘制一条线段 DE，并且连接线段 EA，如图 4 所示，这就组成了一个五边形。

类似地，相对于上面的四边形 ABCD，五边形 ABCDE 仍然是多出了一个三角形 ADE，因此五边形 ABCDE 的内角和=四边形 ABCD 的内角+三角形 ADE 的内角和，即五边形 ABCDE 的内角和为： $360^{\circ} + 180^{\circ} = 540^{\circ}$ 。

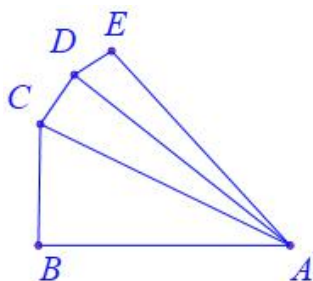


图 4

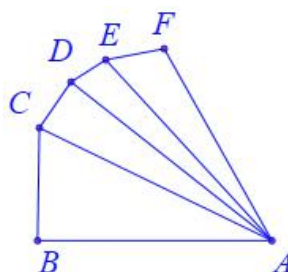


图 5

我们可以把类似的操作继续下去：

(4) 在五边形 ABCDE 的外侧，绘制一条线段 EF，并且连接线段 FA，如图 5 所示，这就组成了一个六边形。

类似地，相对于上面的五边形 ABCDE，六边形 ABCDEF 仍然是多出了一个三角形 AEF，因此六边形 ABCDEF 的内角和=五边形 ABCDE 的内角和+三角形 AEF 的内角和，即六边形 ABCDEF 的内角和为： $540^{\circ} + 180^{\circ} = 720^{\circ}$ 。

当然这个绘图的过程，还可以不断地继续下去。不过我们已经发现了其中的规律：

多边形的顶点每增加一个，它的内角和相应地就会增加 180° 。所以，我们可以说：

三角形的内角和为 1 个 180° ，等于 $1 \times 180^{\circ}$ ；

四边形的内角和为 2 个 180° ，等于 $2 \times 180^{\circ}$ ；

五边形的内角和为 3 个 180° ，等于 $3 \times 180^{\circ}$ ；

六边形的内角和为 4 个 180° ，等于 $4 \times 180^{\circ}$ ；

七边形的内角和为 5 个 180° ，等于 $5 \times 180^{\circ}$ ；

... ..

不难总结得出，一般多边形的内角和为 $(n-2) \times 180^\circ$ ，其中 n 是多边形的顶点个数。

2，多边形的外角和

之前研究三角形的过程当中，我们研究了它的内角也研究了它的外角。现在我们研究了多边形的内角和所存在的规律，那么它的外角和是否也存在某些规律呢？可能存在哪些规律呢？

之前，在课后作业环节我们请大家测量了三角形、四边形、五边形、六边形的外角之和。实际上，通过推导的过程也不难理解，而且更加简便：

对于一个多边形来说，在每一个顶点处的内角与外角之和都等于 180° ，那么在 n 个顶点处的所有内角与外角之和等于 $n \times 180^\circ$ ，其中 n 是多边形的顶点个数。

又由于多边形的内角之和等于 $(n-2) \times 180^\circ$ ，所以多边形的外角之和等于：

$$n \times 180^\circ - (n-2) \times 180^\circ = 2 \times 180^\circ = 360^\circ$$

也就是说，所有多边形的外角之和都等于 360° ，而与多边形的顶点个数无关。

这就是所有多边形关于外角的一个整体性质。

为什么多边形的外角和等于 360° 呢？这是因为圆的一周等于 360° ，而一个物体沿任何一个多边形的外部运动一周的过程中所转过的角度都是 360° 。

打开文件“多边形的外角和.dmr”，如图 6 所示，单击“运动”按钮，即可观察到一个点绕三角形旋转一周的过程：

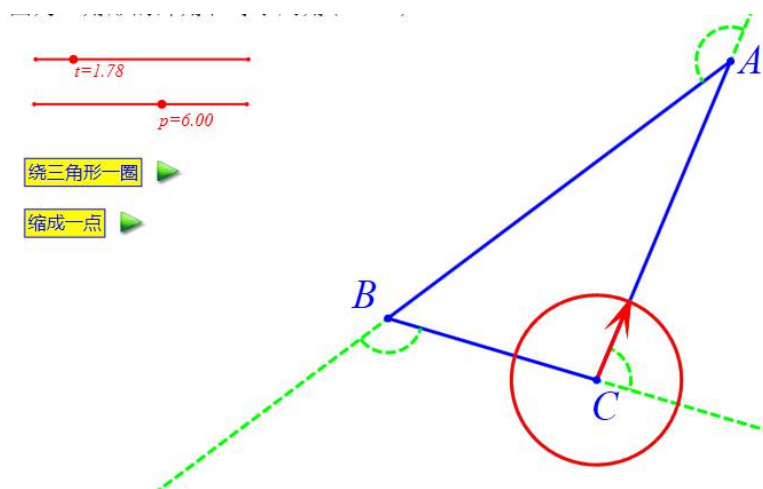


图 6

在红色的箭头绕三角形的边界旋转一周的过程中，每次到顶点处它都需要改变一次方

向，而改变的角度大小正是该顶点处的外角。

当红色点回到原始位置时，它经过了所有的顶点，所转过的方向等于所有顶点处的外角之和。而在这个过程中，运动点的运动方向正好改变了一个圆周，所以多边形的外角之和等于一个圆周角的大小，即 360° 。

这是对于任意多边形都存在和成立的一个事实。

事实上，运动点所运动的边界可以不是多边形，也可以是圆形、椭圆形，甚至是一般的封闭曲线，如图 7 所示，边界上的点在运动过程中，它的方向改变之和都等于 360° 。

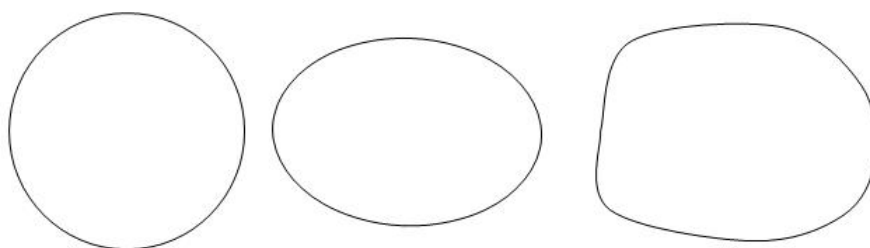


图 7

我们也可以通过一种极端情况进行观察和研究：

单击【缩成一点】按钮，那么整个三角形就缩小成为了一个点，可以看到运动点在绕它自身旋转了一周。

事实上，可以把任何图形缩小成为一个点，而在其边界上运动的点就是绕自己旋转了一周。

3，想一想，做一做

【拓展训练】

(1) 绘制如图 8 所示的一个五角星，测量它的五个内角，并计算它的五个内角之和。

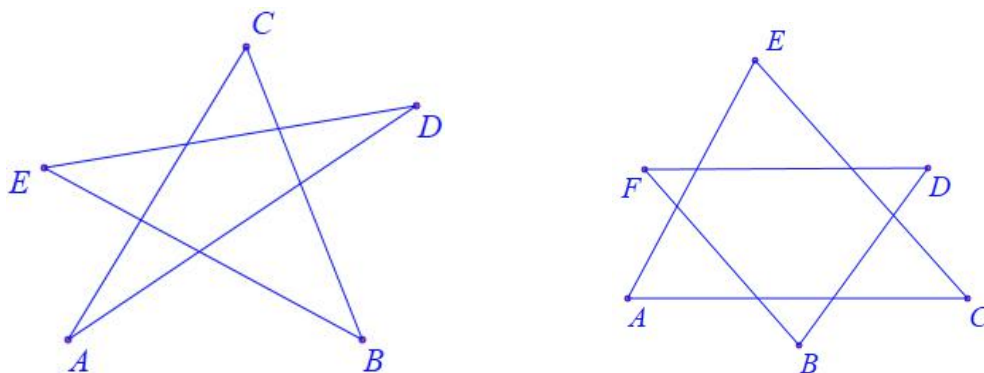


图 8

图 9

(2) 绘制如图 9 所示的一个六角星，测量它的六个内角，并计算它的六个内角之和。

(3) 绘制如图 10 所示的一个七角星，测量它的七个内角，并计算它的七个内角之和。

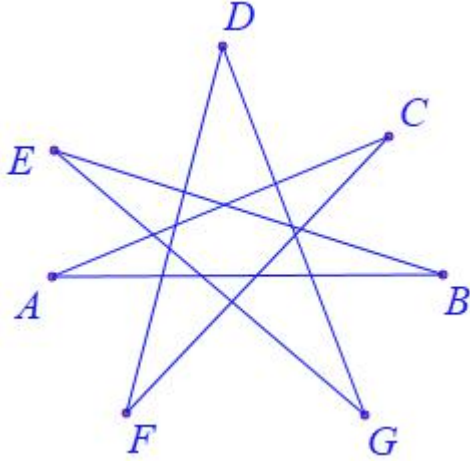


图 10

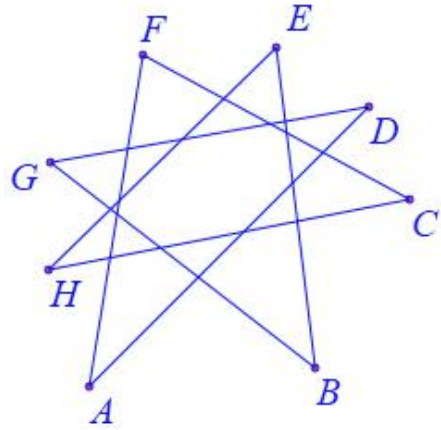


图 11

(4) 绘制如图 11 所示的一个八角星，测量它的八个内角，并计算它的八个内角之和。

(5) 绘制如图 12 所示的一个八角星，测量它的八个内角，并计算它的八个内角之和。

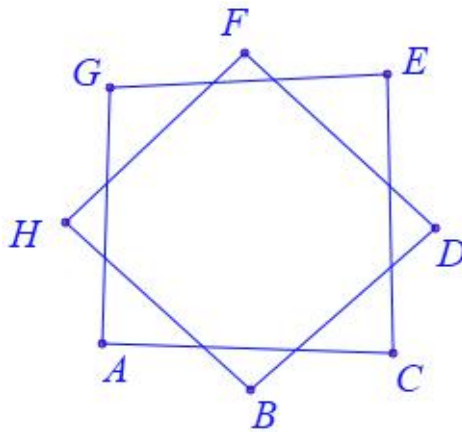


图 12

【思考问题】

我们知道绕任何一个圆的圆心旋转一周，所旋转过的角度都等于 360° ，也就是说一个圆周角等于 360° 。

那么，为什么一个圆周角等于 360° ，而不是 100° 或者其他数值呢？

第 07 部分 角度有正也有负

1, 旋转射线得角度

我们知道，由一个点以及从这一点出发的两条射线，就组成了一个角。同时，我们也可以把角看作是一条射线沿着它的端点旋转而得到的图形。

(1) 执行【画图】菜单下【参数点】菜单中的【坐标点】命令，构造 x 轴上的一点 A (3,0);

(2) 在对象列表框中，隐藏坐标系而显示坐标原点，如图 1 所示；

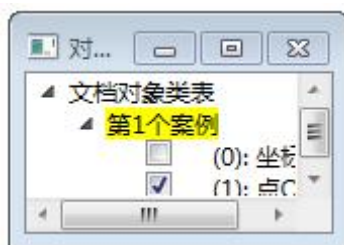


图 1

(3) 作出以点 O 为圆心经过点 A 的圆，在圆上任取一点 B。

(4) 单击【选择】工具，按住【Ctrl】键，先后选择点 O 和点 A，执行【作图】菜单下【直线】子菜单中的【射线】命令，结果作出射线 OA。

(5) 单击【选择】工具，按住【Ctrl】键，先后选择点 O 和点 A，执行【变换】菜单中的【旋转】命令，在弹出的对话框中，旋转次数输入：1，旋转角度输入：t，点击【确定】完成旋转；右击旋转生成的点 B，将其名字修改为 A'；参考 (4)，作出射线 OA'。

(6) 执行【插入】菜单中的【变量】命令，在弹出的对话框中输入变量名称：t，最小值：-360，最大值：360，点击【确定】完成。结果如图 2 所示：

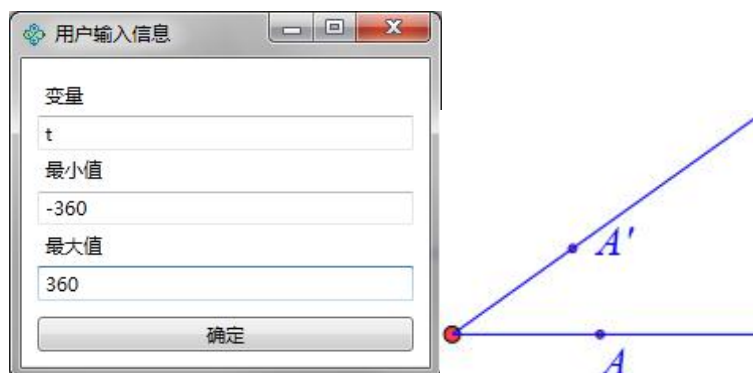


图 2

我们可以拖动 t 的控制条使得点 A' 移动到射线 OA 上, 如图 2 所示, 这时候射线 OA' 与射线 OA 重合, 这时候我们可以说 $\angle AOA'$ 的值为 0。



图 3

当点 A' 不再处于射线 OA 上时, 射线 OA 与射线 OA' 就不再重合, 那么射线 OA' 与射线 OA 就形成了一个不为 0 的角, 如图 2 和如图 4 所示。

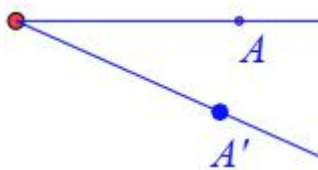


图 4

2, 角度的表达

在表示角的时候, 一般由一个角的符号 \angle 和三个点的名字对应的字母组成。其中第二个字母表示角的顶点, 另外两个字母表示两条边上的点。现在我们角看作是旋转图形, 那么也可以约定表示角的三个字母所表示的意义: 第一个字母表示角的始边上的点, 第二个字母表示角的顶点, 第三个字母表示角的终边上的点。始边, 即原始位置的射线; 顶点, 即射线的端点, 也是旋转中心; 终边, 将始边绕端点旋转而得到射线。因此这里要表示成为 $\angle AOA'$, 而不能表示成为 $\angle A'OA$, 否则就是 OA 由 OA' 旋转而得到的。

例如, 对于这里水平向右无限延长的射线 OA 来说, 向上旋转和向下旋转都能形成一个角。但是向上旋转和向上旋转, 虽然都是形成了角度, 但是旋转的方向却是相反的。

前面我们利用数的正负表示了相反的两个直线方向, 类似地我们也可以利用数的正负表示相反的两个旋转方向。例如, 对于一条水平向右无限延伸的射线来说, 我们不妨规定绕它的端点向上旋转得到的角度为正角, 而向下旋转得到的角度为负角。如下图所示, 下面给出了角的大小, 由于射线 OA' 是由 OA 向上旋转得到的, 所以在图 5 当中 $\angle AOA' = 31.52^\circ$, 而在图 6 当中 $\angle AOA' = -44.89^\circ$ 。

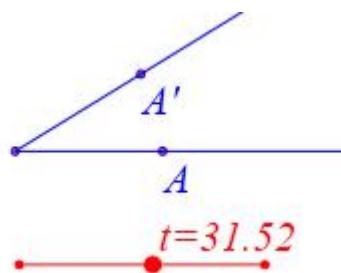


图 5 这里 $\angle AOA'$ 的数值 $=t$

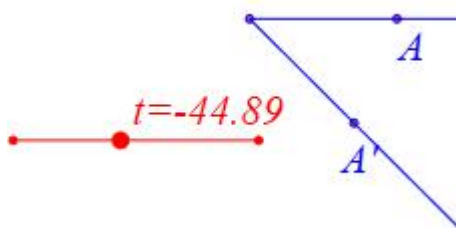


图 6 这里 $\angle AOA'$ 的数值 $=t$

这与数学上的对正负角的规定不谋而合：按照逆时针旋转得到的角为正角，按照顺时针旋转而得到的角为负角。顺时针，就是钟表当中指针相同的转动方向；逆时针，就是与钟表当中指针相反的转动方向。

如图 7 所示，那么， $\angle AOA'$ 是多少呢？

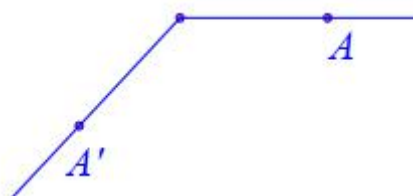


图 7

图 8

它既可以是 OA 绕点 A 向下旋转而得到 -145° 的角，也可以是向上旋转，超过 180° 后继续旋转，而得到 215° 的角。

看来，单从图 7 来看，简单地利用“向上”或“向下”，并不能准确地描述旋转的过程和结果。看来，还是利用钟表当中指针的转动方向为参照，即顺时针和逆时针，来表示旋转的方向更为准确和恰当。

现在我们明白，所谓顺时针方向，指的是与钟表当中指针的转动方向相同；而逆时针方向，指的是与钟表当中指针的转动方向相反。

那么顺时针的名称是如何来的呢？也就是说，为什么把现在我们所看到的时针的旋转方向命名为顺时针方向？而不是把与它相反的方向命名为顺时针方向呢？

顺时针的名称，就像数学中的其他很多概念、名词一样，它的命名过程与人们认识自然的历史过程分不开。

顺时针的名称，源于我国古代一种叫做日晷的计时仪器，如图 9 所示。



图 9

日晷，指的是中国古代利用太阳的影子计算时刻的一种计时仪器，又称“日规”。其原理就是利用太阳的投影方向来测定并划分时刻，通常由晷针和晷面组成。在北半球，早晨的影子在西方，中午的影子在北方，傍晚的影子在东方。从原理上来说，根据影子的长度或方向都可以计时，但根据影子的方向来计时更方便一些。故通常都是以影子的方位计时。随着时间的推移，晷针上的影子慢慢地由西向北再向东移动。移动着的晷针的影子好像是现代钟表的指针，晷面则是钟表的表面，以此来显示时刻。

这就是钟表指针转动计时的起源。

3，想一想，做一做

【拓展训练】

请分别用一个正角和一个负角表示下图中 $\angle AOA'$ 表示的角度：



图 10

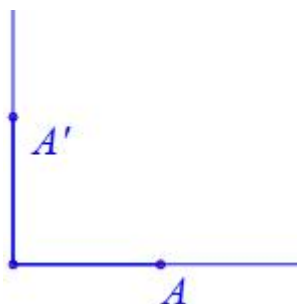


图 11

【思考问题】

如图 12 所示, $\angle AOA'$ 表示的角度可能是 60° 、 420° 、 780° ..., 也可能是 -300° 、 -660° 、 -1020°

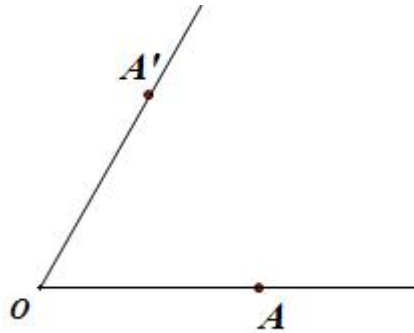


图 12

那么你能否分别用一个统一的式子表示它代表的正角和它代表的负角? 例如我们可以分别用 $2n$ 和 $2n+1$ 表示偶数和奇数一样, 其中 n 是自然数。

第 08 部分 利用旋转做秒针

1, 利用旋转做秒针

钟表中的指针转动是我们非常常见的旋转现象。那么我们可以首先利用前面学习过的旋转知识制作一个转动的秒针：

(1) 在 Hawgent 皓骏动态数学软件中新建一个页面；选择点 O ，执行【画图】菜单下【圆与圆弧】子菜单中的【半径圆】命令，在弹出的对话框中输入：4，单击【确定】按钮即可作出以点 O 为圆心、半径为 4 的圆，记作圆 O 。

(2) 构造坐标点 $A(0,4)$ ，如图 2 所示。

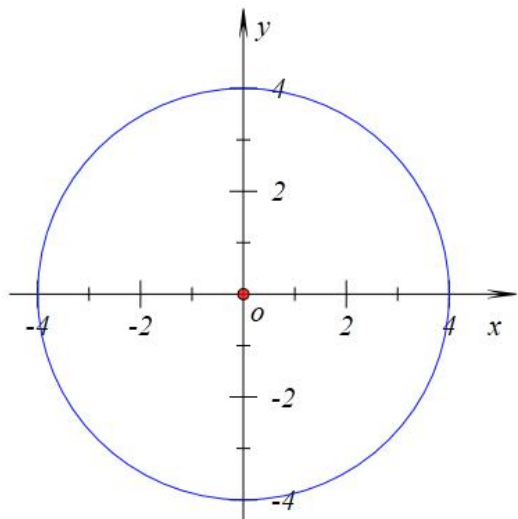


图 3

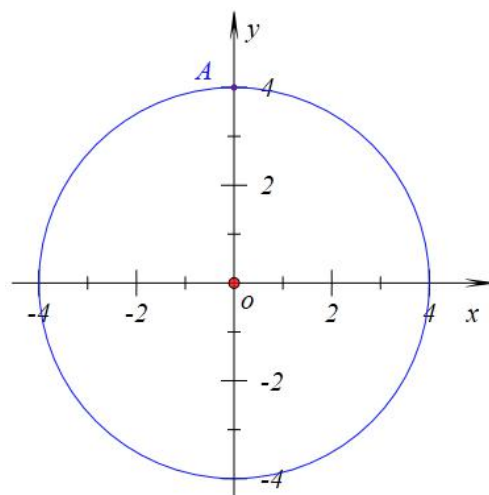


图 4

(4) 按住【Ctrl】键，按照顺序先后选择点 A 和点 O ，执行【画图】菜单【参数点】子菜单中的【旋转缩放点】命令，在弹出的对话框中输入旋转角为： t 、放缩比例为 0.8，单击【确定】按钮，即可做出秒针对应的线段 OB 以及它的端点 B ，如图 7 所示。

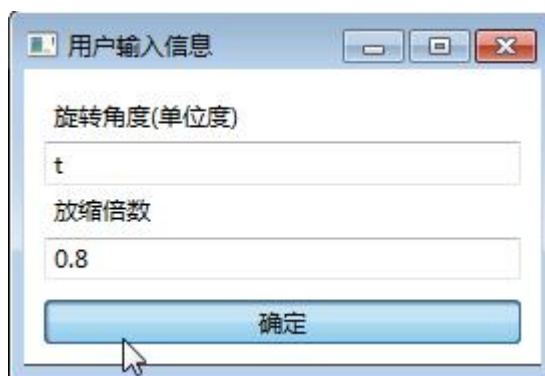


图 6

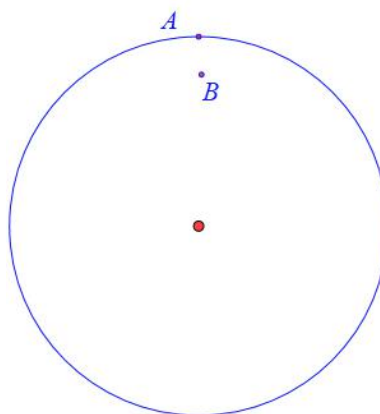


图 7

这表明 $\angle AOB = t$ ，即 OB 是 OA 以点 O 为中心旋转 t 度而得到的。上面对话框中的放缩比例 0.8 表明线段 OB 的长度是线段 OA 的长度的 0.8 倍，这是因为秒表要在表盘内部，需要比半径 OA 短。

这里 t 又是多少呢？我们说字母可以代替数，它表示的是一个数，只不过是一个可以随时改变的数。正是因为它可以随时被改变，所以才可以实现 OB 从 OA 的位置开始旋转一周的动态过程。现在我们就创建一个让 t 从 0 变化到 360 的动画按钮：

(6) 增加字母 t 的动画按钮，执行【插入】菜单下【常用按钮】子菜单中的【变量一次运动】命令，如图 8 所示弹出动画属性设置对话框，修改动画的程序命令为：

`VarAnimation(t,0,360,60,4);`

`AnimationInterval(1);`

意义为：参数范围对应 t 的最小值为：0、最大值为：-360，表示从点 A 出发，按照顺时针顺序转过 360° ；设置动画运动的频率为：60，表示 t 从 0 变化到 -360 的过程中， t 的值改变了 360 次，每次改变 -6° ，对应点 B 的位置也改变了 60 次， $\angle AOB$ 的值也改变 -6° ；设置运动间隔为：1 秒，即 1 秒，表示 t 每改变一次的时间间隔为 1 秒；最后选择运动类型为：4（一次运动顺时针运动）。点击【修改动作】按钮，再点击【确定】按钮，即可生成字母 t 的动画按钮，如图 9 所示。

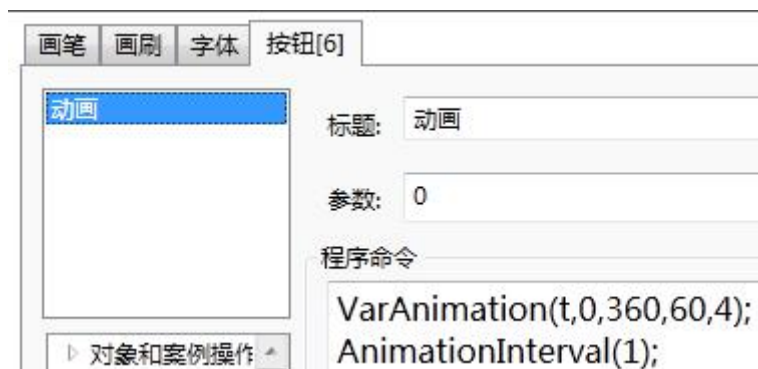


图 8



图 9

(7) 单击动画按钮的左侧部分，即主按钮，即可观察到线段 OB 从线段 OA 的位置开始，绕点 O 按照顺时针顺序旋转一周的动态过程。

上面的过程，已经在本质上做出了一个钟表中的秒针。不过我们还需要进一步对钟表进行完善并进行美观处理。首先要把秒表设置成为带箭头的指针：

(8) 鼠标指向线段 OB，鼠标右键单击即可弹出线段 OB 的属性对话框，输入【端点画箭头】的属性值为：2。单击【确定】按钮，结果就变成了带箭头的指针，如图 11 所示。



图 10

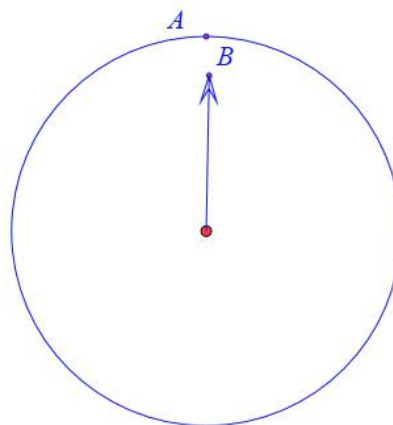


图 11

点 B 对于钟表来说是不需要的，因此可以把它从作图区当中隐藏。

现在我们仍需要做出钟表的刻度：

(9) 按住【Ctrl】键，依次选择点 A 和圆心 O，执行【变换】菜单中的【旋转】命令，如图 12 所示：在弹出的对话框中输入：旋转次数：11，旋转角：360/12；单击确定即可作出以点 A 为其中一个顶点并且所有顶点都在圆周上的正十二边形。



图 12

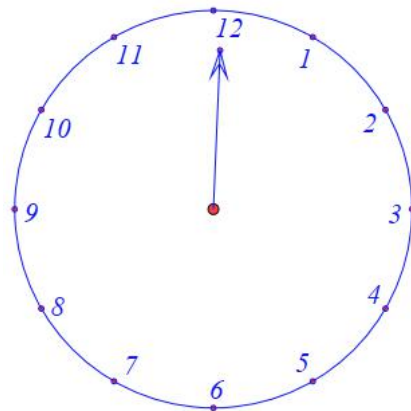


图 13

(10) 双击点 A 将它的名字修改为: 12, 双击点 C 将它的名字修改为: 11, 类似地修改其他点的名字修改为与钟表类似的刻度。多边形的内部对我们制作的钟表是没必要的, 因此可以把它删除: 选择多边形内部, 按键盘中的【Delete】键即可, 结果如图 13 所示。

尚有问题待解决: 钟表当中, 除了秒针之外, 还有分针和时针, 如何得到它们呢?

2, 想一想, 做一做

【拓展训练】

1, 完成下面的操作:

- (1) 绘制一个点 A。
- (2) 以 A 为圆心做一个半径为 3 的圆。
- (3) 在圆上任取一点 B。

(4) 按住【Ctrl】键, 依次选择点 B 和点 A, 执行【画图】菜单中【参数点】子菜单下的【旋转放缩点】命令, 如图 14 所示, 设置放缩比例为: $t/360$ 、旋转角为: t , 结果做出点 C 和线段 AC。



图 14

(5) 跟踪点 C。

(6) 增加字母 t 的动画按钮，设置参数范围为：0 到 360，运动类型为：一次运动。

(7) 单击动画按钮，观察跟踪点 C 得到的图案，请你叙述一下它有什么特征。

2，继续完成下面的操作：

(1) 在上面的基础上，按住【Ctrl】键，依次选择点 B 和点 A，执行【画图】菜单中【参数点】子菜单下的【旋转放缩点】命令，设置放缩比例为： $1-t/360$ 、旋转角为：t，结果做出点 D 和线段 AD。

(2) 选择点 D，执行【画图】菜单中的【跟踪】命令，跟踪点 D。

(3) 鼠标双击字母 t 的动画按钮右侧的绿色部分，设置动画运动的频率为：60。

(4) 单击动画按钮，观察跟踪点 C 和点 D 得到的图案，请你叙述一下跟踪点 D 得到的图案与跟踪点 C 得到的图案，有什么关系？它们之间有什么区别与联系。

3，设计一个圆盘形的日历：有两个指针，分别代表天和月。天指针转动一下为 1 天、绕圆盘转动一圈为 30 天，即一个月；月指针。

【思考问题】

1，查阅资料：数学上为什么规定按照逆时针方向旋转得到的角度为正角，而按照顺时针方向旋转得到的角度为负角。

2，下面我们介绍一个同时制作秒针和分针的方法，思考在制作分针的过程中输入的数据所代表的意义，并请你继续制作出该钟表的时针。

(1) 在上面图 13 当中，按住【Ctrl】键，依次选择刻度 12 对应的点（原 A 点）和原点 O，执行【画图】菜单中【参数点】子菜单下的【旋转放缩点】命令，如图 15 所示，在弹出的对话框中输入放缩比例为：0.6，旋转角为： $t/60$ ，单击【确定】按钮完成，得点 N。



图 15

(2) 作线段 ON，右击选择线段 ON，在弹出对话框中，如图 16 所示，设置画笔的线

宽为：2，并输入【端点画箭头】的属性值为：2，



图 16

(3) 选择点 N，执行【编辑】菜单中的【隐藏】命令，隐藏点 N，结果如图 17 所示。

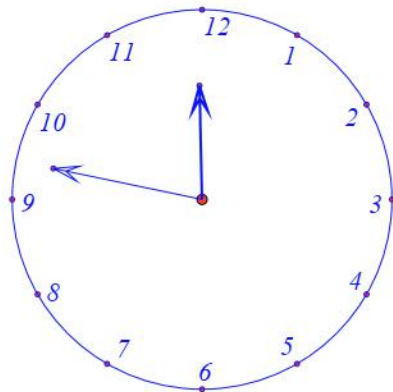


图 17

然后单击在前面正文的步骤（6）中增加的动画按钮，秒针转动一周的同时，分针所转过的角度是多少呢？分针所指向的刻度是多少呢？

当然，我们可以把让时间走得更远一些，因此重新设置一下按钮各选项的参数：

(4) 鼠标右键单击按钮，重新打开按钮的属性对话框，如图 18 所示，设置运动的频率为：300，参数范围为：0 到-360*5，单击【确定】按钮完成。



图 18

再次单击动画按钮，观察一下，运动结束后，秒针转了多少圈？分针所在的刻度是多少？

如果要想分针指向刻度为 12 的位置，应该如何设置动画按钮的参数？请你进行操作和检验。

第 09 部分 表示角度有妙方

1, 转了一圈又一圈

我们知道，在数学上规定一个周角是 360° ，同时我们还把 180° 的角称作为平角、把 90° 的角称作为直角。

把一条水平向右的射线绕它的端点按照逆时针顺序一周，回到原来的位置，就得到了一个 360° 的角，如图 1 所示。

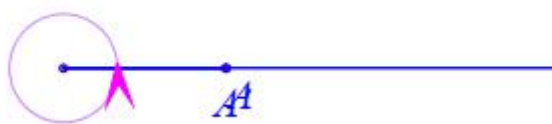


图 1

在现实生活中，风扇的扇叶、钟表的指针等等，都是转了一圈又一圈，这样就形成了一个大于 360° 的角。下面，我们制作并展示一个大于圆周角的角：

(1) 执行【画图】菜单下【参数点】子菜单中的【坐标点】命令，作出坐标为 $(3, 0)$ 点 A。

(2) 打开【视图】菜单中，勾选【对象框】，使得对象框可见；在对象框中把原点 O 之外的对象前的勾点掉，使得它们全部隐藏。

(3) 按住【Ctrl】键，同时选择点 O 和点 A，执行【画图】菜单中【直线】子菜单下的【射线】命令，作出射线 OA。

下面我们再构造一条通过旋转与射线 OA 形成 t 角度的射线：

(4) 按住【Ctrl】键，依次选择点 A 和点 O，执行【画图】菜单下【参数点】子菜单中的【旋转缩放点】命令，输入旋转角度： t ，放缩倍数：1，单击【确定】按钮完成，结果作出点 B。

(5) 右击点 B，将其名称修改为： A' ； 按住【Ctrl】键，同时选择点 O 和点 A' ，参考 (3) 作出射线 OA' 。结果如图 2 所示：

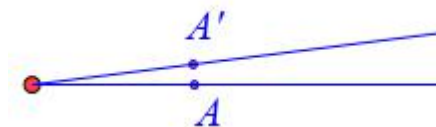


图 2

我们为了记录旋转过的圈数，可以跟踪射线旋转过的路径：

(6) 按住【Ctrl】键，依次选择点 A'和点 O，执行【画图】菜单下【参数点】子菜单中的【旋转缩放点】命令，输入旋转角度：0，放缩倍数： $\text{abs}(t)/3600$ ，单击【确定】按钮完成，结果作出点 C；其中 $\text{abs}(t)$ 表示 t 的绝对值。

(7) 选择点 C，单击“缩小”工具，将点的大小缩小；选择点 C，执行【画图】菜单中的【跟踪】命令，得到点 C 的跟踪对象。

(8) 隐藏点 C；

下面需要增加一个与旋转角度 t 有关的动画按钮：

(9) 执行【插入】菜单下【常用按钮】子菜单中的【变量一次运动】命令，如图 3 所示，修改程序命令，然后单击【修改命令】，仔单击【确定】按钮完成。

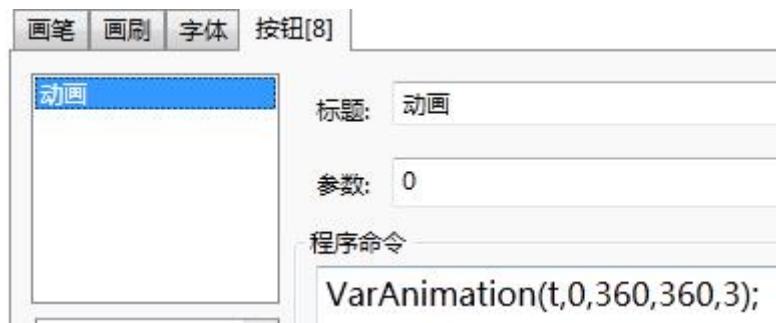


图 3

下面我们需要测量 t 的值，观察角度的大小：

(10) 执行【测量】菜单中的【表达式】命令，在弹出的编辑框中输入： t ，单击【确定】按钮完成，然后关闭对话框即可。

单击“动画： t ”按钮，可以看到射线 OA'从射线 OA 的位置出发，按照逆时针方向转动了一周， t 的值也从 0 变化到了 360，结果如图 4 所示：

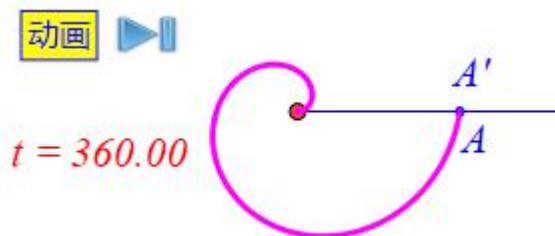


图 4

前面我们提到过，射线 OA'在绕点 O 转动了一周之后还可以绕点 A 继续旋转下去，从而得到一个大于 360° 的角。动画按钮能够控制 t 的大小，因此可以说我们想得到多大的角

就能够通过旋转而得到多大的角，例如，绕点 O 旋转 2 圈就得到了 720° 的角，旋转 3 圈就得到了 1080° 的角。操作是：

右击【动画】按钮，打开其属性对话框，把程序命令改为：`VarAnimation(t,0,720,360,3);`，单击【确定】按钮完成。单击“动画”按钮，结果如图 3 所示，就得到了一个 720° 的角。

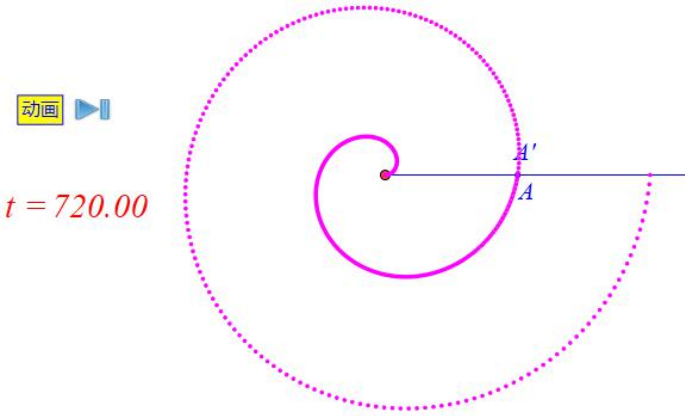


图 3

类似地，把程序命令改为：`VarAnimation(t,0,1080,360,3);`。单击“动画”按钮，就得到了一个 1080° 的角。

当然我们也可以让 OA'按照顺时针的方向旋转而得到一个负角，例如：
打开动画按钮的属性对话框，把程序命令改为：`VarAnimation(t,0,-360,360,3);`。0，单击【确定】按钮完成；单击“动画”按钮后，就得到了一个小于-360 的负角，结果如图 4 所示：

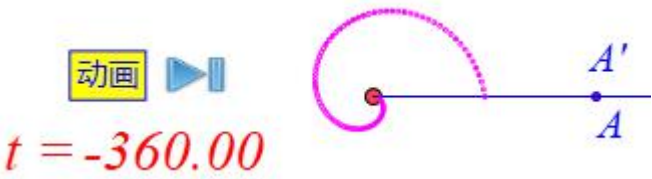


图 4

无论是正角还是负角，在不断的旋转过程中，表示角度大小的数值会越来越大，例如一个 3960° 的角或者一个 -3000° 的角。这样表达、书写和交流起来就变得非常不方便。

而我们最为熟悉的数字是： $\dots, -5, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5, \dots$ ，那么能够利用我们熟悉的这些较小的整数或者有理数表示角度呢？

2, 平角即为 180°

我们把 180° 的角称作为平角。那么我们是否可以把“平角”作为角度的单位呢？未尝不可。这样：

180° 的角是 1 个平角；那么，

360° 的角就是 2 个平角

720° 的角就是 4 个平角；

1080° 的角就是 6 个平角；

... ..

类似地：

180° 的角是 1 个平角；那么，

90° 的角就是 $\frac{1}{2}$ 个平角；

60° 的角就是 $\frac{1}{3}$ 个平角；

45° 的角就是 $\frac{1}{4}$ 个平角；

30° 的角就是 $\frac{1}{6}$ 个平角；

... ..

这就像可以用克表示重量，也可以用千克或吨表示重量一样；就像可以用分秒表示时间，也可以用天、月、年表示时间一样；就像可以用 KB 表示计算机文件的大小，也可以用 MB、GB 或 TB 表示文件的大小一样。

180° 的角是 1 个平角，那么一个 t° 的角就是 $\frac{t}{180}$ 个平角。反过来，如果一个角的大小是 m 个平角，那么这个角的度数为 $m \times 180^\circ$ 。

这样我们就得到了一般度数的角与平角之间的相互换算关系与公式。

在书写和交流过程中，人们通常习惯用简短的字母表示单位符号。在这里，汉字“平”的拼音是 ping，因此我们也可以按照习惯取前面的两个字母 pi 作为角度单位“平角”的符号（注：这是个为了理解弧度制而编造的故事，但你不妨把这个故事当成巧合有趣的谐音来帮助理解 pi（即 π ））。

为了让角度单位 pi 的发音响亮一些，可以把 pi 读做[pai]。

我们熟悉的角度就可以用下列方式表示：

$$180^\circ = \pi, 360^\circ = 2\pi, 720^\circ = 4\pi, 1080^\circ = 6\pi;$$

... ..

$$90^\circ = \pi/2, 60^\circ = \pi/3, 45^\circ = \pi/4, 30^\circ = \pi/6。$$

... ..

3, 想一想, 做一做

【拓展训练】

(1) 请以 π 为单位表示下列角度：

$$36^\circ, 72^\circ, 108^\circ$$

(2) 请读出下列数值所表示的度数：

$$2\pi/3, -3\pi/4, 4\pi/5$$

【思考问题】

我们说，角度是由一条射线绕它的端点旋转而成的。原来的射线称之为角的始边，旋转之后的射线称之为角的终边。

每一个旋转的结果，对应了唯一的角度；当然，每一个角度，对应了唯一的终边位置。

但是，反过来：每一个终边位置，对应的角度却不是唯一的；当然，每一个终边位置可以通过不同的旋转过程而得到的。例如，如图 5 所示， $OA \perp OB$ ，我们可以说 $\angle AOB = 90^\circ$ ，也可以说 $\angle AOB = 450^\circ$ ，还可以说 $\angle AOB = -270^\circ$ 或者 $\angle AOB = -630^\circ$

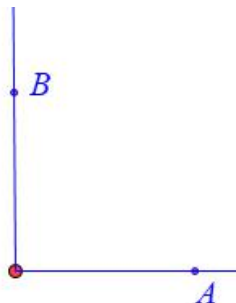


图 5

这个道理就像我们之前学习过的加减匀速，例如，如果要计算 $3+5$ ，那么它的值就是唯一确定的，等于 8；但是，对于 8 来说，如果要得到它，却有很多种方式，可以说有无限多

个算式，例如：4+4、3+5、5+3、2+6、6+2、.....，或者 9-1、10-2、11-3、.....，或者 0+8、-1+9、-2+10、.....，或者 $2*4$ 、 $1*8$ 、 $1/2*16$ 、.....，等等。

请你再继续列举一些现实生活当中，类似的例子：对于这一方的每一个结果来说，在另外一方都对应着唯一确定的结果，而对于另外一方的某一个结果来说在这一方却对应着很多甚至是无数多个结果。

第 10 部分 动手旋转试试看

1, 利用 π 表示角度

前面我们学习了利用 π 作为角度的表示单位, π 实为圆周率 π , 其值约为 3.14。作为熟练掌握这部分知识的最好方式就是在计算机上进行实际操作和动手实验。

(1) 建立一个新的页面, 选择坐标原点 O , 执行【画图】菜单下【圆和圆弧】子菜单中的【已知圆心和半径的圆】命令, 如图 1 所示, 在弹出的对话框中输入圆的半径: 3, 单击【确定】按钮即可做出以点 O 为圆心、半径为 3 的圆, 我们把这个圆记作圆 O 。

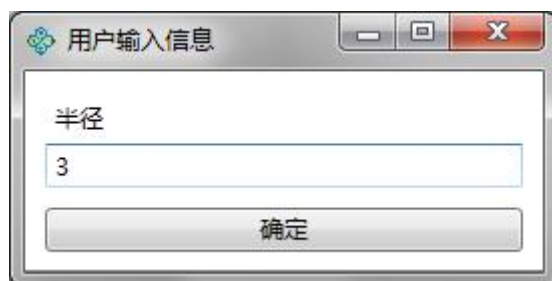


图 1

(2) 单击【画图】工具, 在圆 O 上任取一点 A , 并且链接半径 OA , 执行【画图】菜单下【参数点】子菜单中的【坐标点】命令, 作出坐标点 $B(3, 0)$, 结果如图 2 所示。

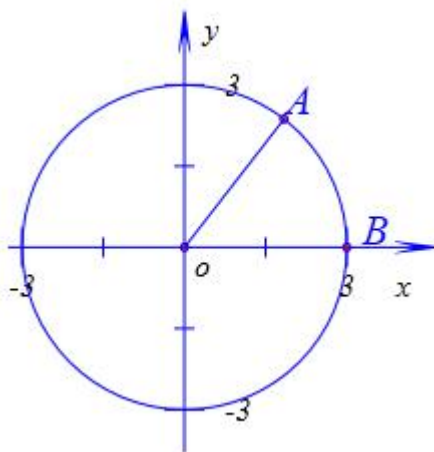


图 2

(3) 单击【选择】工具, 依次选择点 A 、点 O 和点 B , 执行【测量】菜单中的【角度】命令, 右击得出的测量结果, 把属性对话框中的表达式改为: $\angle AOB = \backslash\&\text{MeasureValue}(v000,2,1)$, 单击【确定】保存, 第三个参数改为 1 是为了使得结果表示为

弧度制。

按前面的讨论，点 A 在圆心正上方时， $\angle AOB$ 的值应该为 $\pi/2$ （也可以是 $-3\pi/2$ ）。

点 A 在圆心在 x 轴负半轴上时， $\angle AOB$ 的值应该为 π 。

$$\pi/2 \approx 3.14/2 = 1.57 \quad \pi \approx 3.14$$

让我们验证一下我们的判断是否正确。

（4）我们把点 A 拖动到 y 轴正半轴上，观察 $\angle AOB$ 的值是否为 1.57，如图 3 所示。

（5）我们把点 A 拖动到 x 轴负半轴上，观察 $\angle AOB$ 的值是否为 3.14。如图 4 所示

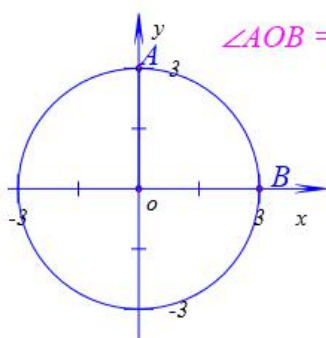


图 3

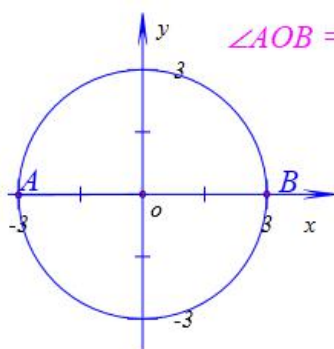


图 4

结果和我们预料的是一样的，当然还可以试试点 A 在其他位置上时 $\angle AOB$ 的值。

下面我们利用旋转来制作一个会旋转的五角星。

2，制作一个旋转的五角星

（1）在新建文档中，隐藏坐标系，显示原点 O，选择 O、A 执行【画图】菜单下【圆和圆弧】子菜单中的【已知圆心和半径的圆】，在弹出窗口中输入：4，作出一个半径为 4 的圆。。

（2）在圆上作一点 A，依次选中 A 和圆心 O，执行【变换】【旋转】在弹出的对话框中输入旋转次数：4，旋转角度： $360/5$ 。如图 5 所示，然后点击确定得出与 A 一起五等分圆周的点 B、C、D、E。

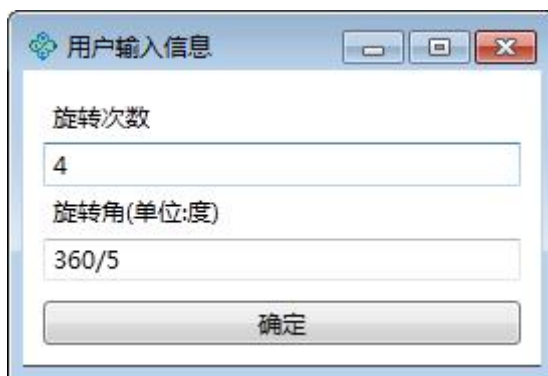


图 5

(3) 连接线段 AD、DB、BE、EC、CA。如图 6 所示：

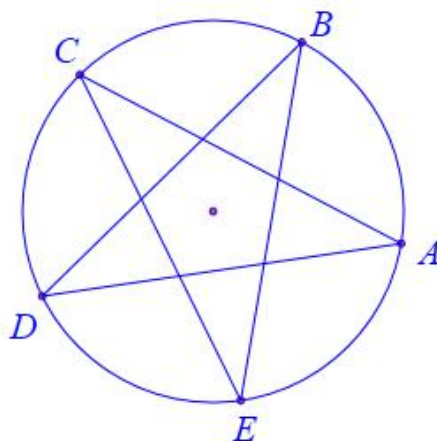


图 6

(4) 如图 7 所示，作出线段之间的交点。然后隐藏线段，结果如图 7 所示：

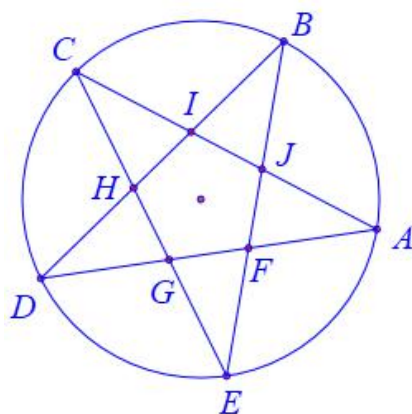


图 7

(5) 依次选择 A、J、F，执行【画图】菜单下【多边形】子菜单中的【多边形】命令，作多边形，同理作出多边形 BIJ、多边形 CHI、多边形 DGH、多边形 EFG 和多边形 FGIJK；利用多边形的右击属性菜单恰当修改边形的颜色。隐藏除点 A 和点 O 之外其他点和所有线段，结果如图 8 所示：

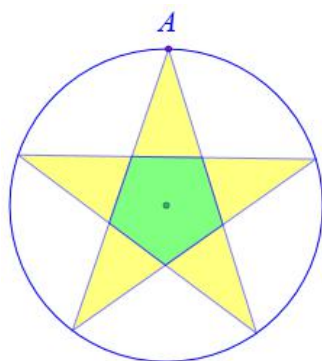


图 8

最后插入运动按钮：

(6) 执行【插入】菜单下【常用按钮】子菜单中的【对象重复运动】命令，如图 9 所

示，在弹出的窗口中选择“动画”，把程序命令修改为：ObjAnimation(3,50,0);，点击【修改动作】，

选择“动画”，把程序命令修改为：StopAnimation(3);，点击【修改动作】，再点击【确定】，完成按钮的制作。

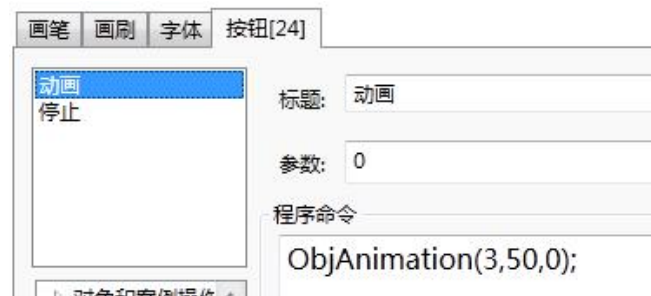


图 9

点击【动画】按钮即可看到旋转的五角星，点击【停止】可让五角星停止运动。

【思考问题】

1，在图 13 当中，如果要通过放缩旋转的方式由点 B 分别得到点 C、点 D、点 E 和点 F，中心、放缩比例、旋转角应该分别是多少？请你自己动手操作试试看，从而对你的判断进行检验。

2，在图 13 当中，如果要通过放缩旋转的方式由点 B 得到点 G，中心、放缩比例、旋转角应该分别是多少？请你自己动手操作试试看，从而对你的判断进行检验。

第 11 部分 计算弧长用弧度

1, 动手计算圆周长

如图 1 所示, 线段的长度等于两个端点之间的距离。而圆弧是弯曲的, 圆弧的长度应该如何测量和计算呢?

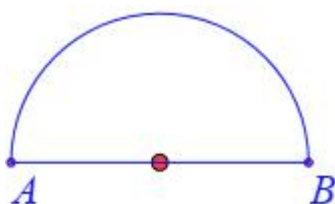


图 1

我们知道 π 在数学上叫做圆周率, 简单地说, 圆周率就是圆的周长与圆的直径之间的比率 (即比例), 它是一个常数, 我们可以通过实验直观地认识一下这个事实:

(1) 勾选【视图】菜单中的【对象框】选项, 使得对象框可见。勾选对象框中的 0 点, 使得坐标原点可见;

(2) 单击【画图】工具, 在空白处任意位置单击鼠标, 作出一个点 A;

(3) 光标指向点 0, 单击鼠标右键并按住拖动到点 A 的位置时松开, 作出以点 0 为圆心、经过点 A 的圆;

(4) 单击【选择】工具, 右击点 A, 将其名称修改为: P;

计算机为我们提供了测量圆的半径以及周长的工具, 我们可以用它们帮助研究圆的性质:

(5) 选择圆周, 执行【测量】菜单中的【圆的半径】命令, 即可得到圆 0 的半径测量值; 由于圆的周长计算公式为: $2\pi r$, 我们可以通过半径算出它来, 具体操作是: 执行【测量】菜单中【表达式】命令, 在表达式中输入: $2*\text{v000}*\pi$, 点击【确定】即可获得测量值, 测量出圆的周长大小;

为了使得测量文本的内容更加容易明白, 我们可以对它们进行修改:

(6) 右击面积测量值, 在弹出的属性对话框中把\&之前的内容改为: 圆 0 周长 $C=$, 点击【确定】保存; 双击圆的半径测量文本, 同理, 在弹出的属性对话框中把\&之前的内容改为: 圆 0 的半径 $r=$, 击【确定】保存;

然后我们测量周长与直径的比值：

(7) 执行【测量】菜单中【表达式】命令，如图 2 所示，在表达式中输入： $v001/(2*v000)$ ，单击【确定】按钮完成，然后关闭对话框即可。



图 2

然后右击直径测量值，在弹出的属性对话框中把\&之前的内容改为： $C/2r=$ ，结果如图 3 所示，然后拖动点 P 可以改变圆的大小，观察动态测量与计算结果的变化规律。这个圆周率 π 是一个无穷不循环小数，即无理数，也就是说它在小数点之后的位数是无穷无尽的，并且不会出现循环的情况。一般情况下，要求不高的话，可以将 3.14 作为 π 的近似值。

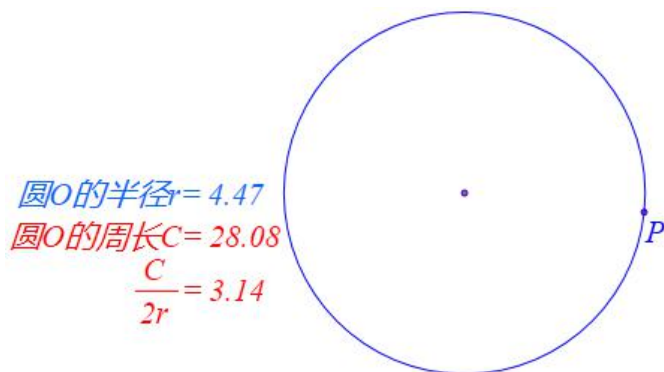


图 3

2，以圆计算弧长值

那么在了解到这个事实之后，我们就可以根据直径或半径直接求出圆的周长，即

圆的周长 $C = \pi \times \text{直径 } d$ ，或者圆的周长 $C = \pi \times 2 \times \text{半径 } r$ ，简写成：

$C = \pi d$ ，或 $C = 2\pi r$ 。

由此，如图 4 所示，若圆弧所在的圆的半径都是 r ，那么很容易知道以下事实：

半圆弧的长度为： $\frac{2\pi}{2}r = \pi r$ ；四分之一圆弧的长度为： $\frac{2\pi}{4}r = \frac{\pi}{2}r$ ；八分之一圆

弧的长度为： $\frac{2\pi}{8}r = \frac{\pi}{4}r$ ；等等，依次类推： k 分之一圆弧的长度为： $\frac{2\pi}{k}r$ 。

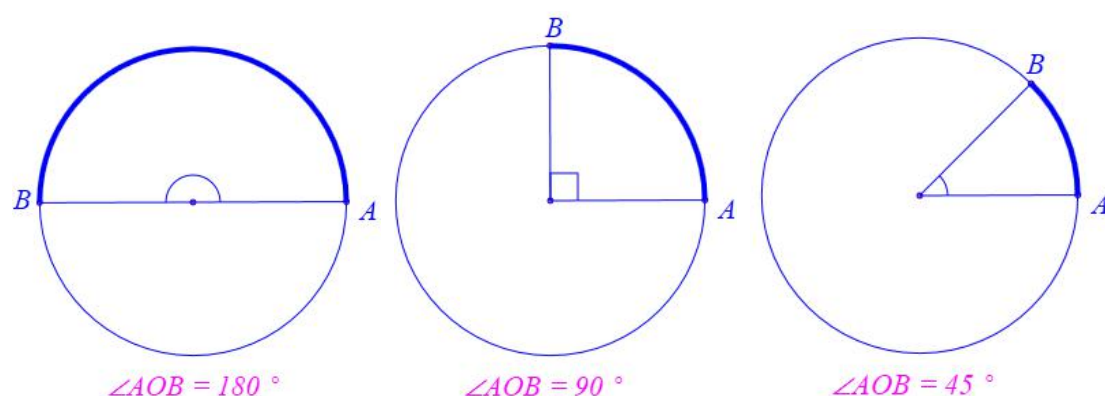


图 4

那么，上述几个弧长的表达式中，圆的半径 r 之前的系数分别是： π 、 $\frac{\pi}{2}$ 、 $\frac{\pi}{4}$ 、 $\frac{2\pi}{k}$ 。在半径已经知道的情况下，一旦知道了这些系数，就能够非常轻松地算出对应的圆弧长度。

我们将这些与圆弧的长度密切相关的系数， π 、 $\frac{\pi}{2}$ 、 $\frac{\pi}{4}$ 和 $\frac{2\pi}{k}$ 等等，称之为圆弧的**弧度**。请你在图 4 中边上相应的弧度。

那么，在半径已知的情况下，由弧度乘以半径就是圆弧的长度。亦即：

弧度 = $\frac{\text{弧长}}{\text{半径}}$ ，所以，弧度与弧长和半径没有绝对的关系，而是与它们的比值有关。

通过前面的分析我们知道：

360° 的角对应的弧度是 2π ； 180° 的角对应的弧度是 π ； 90° 的角对应的弧度是 $\frac{\pi}{2}$ ； 45° 的角对应的弧度是 $\frac{\pi}{4}$ 。

我们前面用 π 表示 180° 的角，看来用 π 作为角度的单位与弧度单位不谋而合。为了与数学和计算机领域大家都惯用的弧度制相一致，我们就把利用 π 表示角度的方式也归类为弧度制。但是在今后使用过程中，为了书写的方便，我们用 π 作为 π 的输入格式。因此我们也可以说：

360° 的角对应的弧度是 2π ； 180° 的角对应的弧度是 π ； 90° 的角对应的弧度是 $\pi/2$ ； 45° 的角对应的弧度是 $\pi/4$ 。

事实上，圆弧的弧度与角的度数有直接的关系。

对于一般度数的角，例如 n° ，所对应的弧度是多少呢？假如 n° 的角对应的弧度为 a ，

由式子 $\frac{360^\circ}{n^\circ} = \frac{2\pi}{a}$ ，可得： $a = \frac{n}{180}\pi$ 。

请你利用这个式子检验上面一些特殊角对应的弧度。

当然，将上面的式子变形为 $n = \frac{a}{\pi} \times 180$ ，就可以利用弧度求对应的角度。

反过来，1 弧度所对应的角是多少度呢？

将 $a=1$ 代入 $n = \frac{a}{\pi} \times 180$ ，可求得约等于 57.30° 。看来这个数值比较一般，也不方便记忆。实际上只要你理解了弧度的意义、作用以及弧度与角度之间的换算公式就已经足够了，而这个数值在需要时随时可以推导出来。

1° 、 2° 、 45° 、 90° 、 180° 、 360° 等这些角的度数，在古代以及现代天文观测、航海技术、远距定位、土地丈量等方面运用较多；而 π 、 $\frac{\pi}{2}$ 、 $\frac{\pi}{4}$ 、 $\frac{2\pi}{k}$ 等这些弧度值，在现代数学、工程计算、计算机科学等领域运用更加广泛。在高中阶段以及以后要学习的数学内容角的大小基本上以弧度的形式出现，因此我们更早地接触弧度的概念，并且理解和掌握它有助于我们更早地学习和理解更多的数学知识。

3，想一想，做一做

【拓展训练】

1，请直接利用带有 π 的式子表示下列圆弧的长度：

- (1) 在半径为 2 的圆中， 120° 的圆心角所对的圆弧；
- (2) 在半径为 3 的圆中， 180° 的圆心角所对的圆弧。

2，请直接利用带有 π 的式子表示下列圆弧的长度：

- (1) 在半径为 1 的圆中， $\frac{\pi}{4}$ 的圆心角所对的圆弧；
- (2) 在半径为 3 的圆中， $\frac{\pi}{3}$ 的圆心角所对的圆弧。

【思考问题】

你可知道“半斤八两”原本所表示的意义？

这来源于我国香港和台湾等地区目前还在沿用一种重量单位，每斤为 16 两，那么半斤就相当于八两。

每斤是 600 克，因此每两也不是 50 克，而是约为 37.8 克。

现在我国内地使用的是国际上通用重量单位：每公斤为 1 千克。

每斤为 500 克，每斤 10 两，因此每两为 50 克。

与这种看起来简洁的重量单位相比，有人认为“半斤八两”的重量单位使用起来较为繁琐。

但是，每一种重量单位的产生和形成都有一定的历史根源，并且“半斤八两”的重量单位在香港、台湾等地区到目前还能够一直沿用，正是说明了它的生命力所在。

你知道“半斤八两”这种重量单位起初是如何制订的吗？它主要用在哪些领域或者行业？请你查阅相关的资料，并与他人分享你的心得体会。

第 12 部分 圆周运动得美图

1, 恒星行星与卫星

世界万物的运转都是有规律的。例如，在我们的太阳系当中，地球绕太阳旋转一圈大约 365 天，而月亮绕地球旋转一圈大约是 29 天。我们可以把这个运动过程在计算机中粗略地模拟和展现出来：

- (1) 单击【画图】工具，任意绘制一个点 A；
- (2) 单击【选择】工具，选择点 A，执行【画图】菜单中【圆和圆弧】下的【已知圆心半径的圆】命令，即可作出以点 A 为圆心、半径为 4 的圆；
- (3) 单击【画图】工具，在圆 A 上任意取一点 B；
- (4) 单击【选择】工具，选择点 B，执行【画图】菜单中【圆和圆弧】下的【已知圆心半径的圆】命令，在弹出的对话框中输入：1，单击【确定】工具，即可作出以点 B 为圆心、半径为 1 的圆；
- (5) 单击【画图】工具，在圆 B 上任取一点 C；
- (6) 单击【选择】工具，返回到选择状态。

我们把点 A 当作太阳，把点 B 当作地球，地球绕着太阳转；把点 C 当作月亮，月亮绕着地球转。由于太阳是红色的，地球是蓝色的，月亮看起来是黄色的，所以我们可以把它们的内部填充为对应的颜色，并设置对应点的大小：

- (7) 右击点 A，在弹出的属性对话框中，单击其他选项卡，如图 1 所示设置点的大小为：20；单击画笔选项卡，如图 2 所示，设置画线颜色为：红色；单击画刷选项卡，如图 3 所示，设置填充颜色为：红色。



图 1



图 2



图 3

(8) 类似地，设置点 B：点的大小为 10、画线颜色为蓝色、填充颜色为蓝色；设置点 C：点的大小为 5、画线颜色为黄色、填充颜色为黄色。结果如图 4 所示：

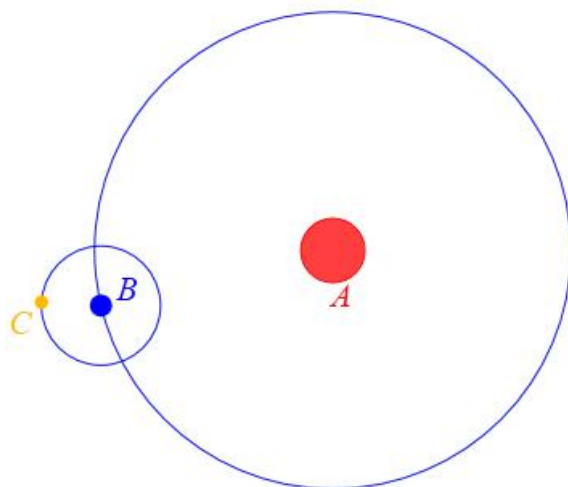


图 4

现在我们让地球绕太阳转动起来，让月亮绕地球也转动起来：

(9) 选择点 B，执行【插入】菜单中【常用按钮】子菜单下【对象一次运动】命令，在弹出的对话框中，如图 5，在程序命令框中输入：ObjAnimation(4,365,0); 点击【修改命令】，再点击【确定】退出对话框。设置运动的频率为：365，选择运动类型为：重复运动，单击【确定】按钮完成。

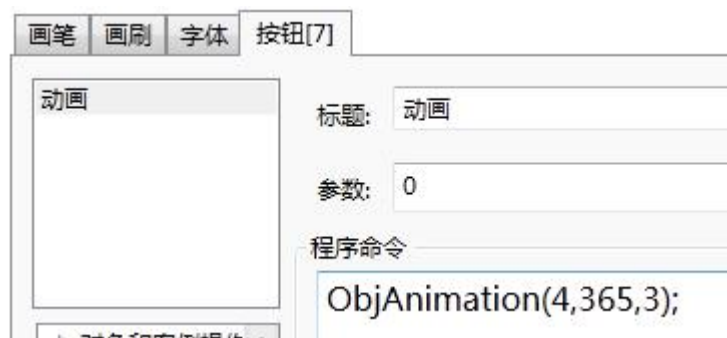


图 5

设置点 B 的运动频率为 365，那么点 B 绕点 A 运动一周就经过 365 步，每一步的间隔都是 1（毫秒）。类似地：

（10）增加点 C 的动画按钮，在程序命令框中修改为：ObjAnimation(6,29,0);，设置运动频率为：29，运动类型：重复运动。

单击点 B 的动画按钮，“地球”就绕“太阳”旋转起来了；再单击点 C 的动画按钮，“月亮”就绕“地球”旋转起来了。

如果在地球和月亮之间有一条绳索，那么站在宇宙空间观察：在地球和月亮都运转过程中，这条绳索所扫描过的区域是什么形状的呢？我们不妨试一试：

（11）单击【画图】工具，连接线段 BC；单击【选择】工具，选择线段 BC，执行【画图】菜单中的【跟踪】命令，得到线段 BC 的跟踪对象。

（12）在左边的对象工作区中右击线段 BC 的跟踪对象，设置跟踪颜色为：粉红色。

事实上，我们可以把点 A、点 B 和点 C 的命名为太阳、地球和月亮：

（13）右击点 A，将其名字修改为：太阳；类似地将点 B 和点 C 的名字分别修改为：地球和太阳。

我们知道，整个太空和宇宙是黑色的，所以我们可以设置为黑色的背景：

（14）单击【视图】菜单下的【背景颜色】工具，如图 6，在调色板中设置背景颜色为黑色。



图 6

事实上，我们也可以同时启动地球和月亮的运动：

（15）右击第一个动画按钮，弹出属性窗口，如图 7 所示，给程序命令增加一行：ObjAnimation(6,29,0); 点击【修改命令】，再点击【确定】退出对话框。删除第二个【动画】按钮，结果如图 8 所示：



图 7



图 8

结果就生成了如图 9 所示的图案：

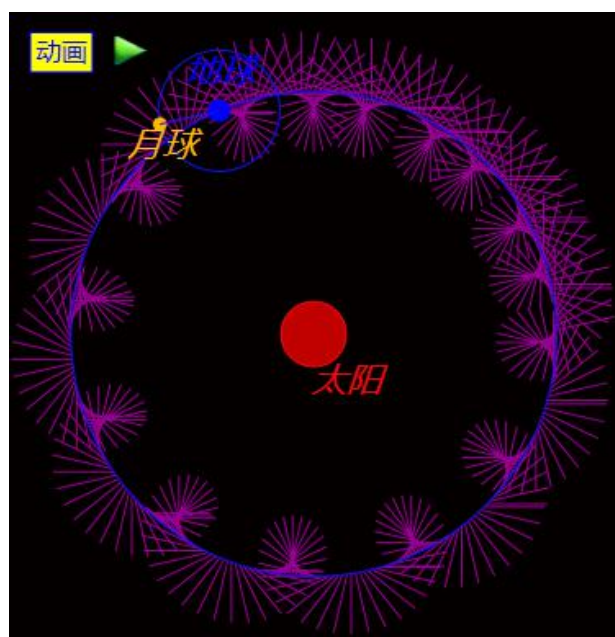


图 9

2，想一想，做一做

【拓展训练】

我们知道，太阳是银河系的恒星，而地球是太阳的九大行星之一，请你继续模拟具有卫星的其他行星的运转过程，并生成上述类似的图案。

【思考问题】

实际上太阳的九大行星的运行轨道不是圆形而是接近于椭圆。你知道椭圆吗？那么椭圆又是哪种圆呢？它与圆之间又有什么关系呢？如何绘制一个椭圆呢？

圆上一点到圆心之间的连线，叫做圆的半径。我们知道同一个圆上任意一条半径的长度

都是相等的。而椭圆也有中心，椭圆上的点到中心之间的连线其长度并不都相等。椭圆上有两个点到椭圆中心的距离最短，我们把这个距离叫做椭圆的短轴；椭圆上还有两个点到椭圆中心的距离最长，我们把这个距离叫做椭圆的长轴。而椭圆上其它点到椭圆中心的距离介于长轴和短轴之间。我们可以制作一个椭圆试试看：

任意选择一个点，例如原点 O，当作椭圆的中心；

执行【画图】菜单中【圆锥曲线】子菜单下的【二次方程曲线】命令，在弹出的对话框中，如图 10 所示，输入： $\frac{1}{3^2}x^2 + \frac{1}{2^2}y^2 = 1$ ，然后输入长半轴为：3，短半轴为：2，单击【确定】按钮即可完成。

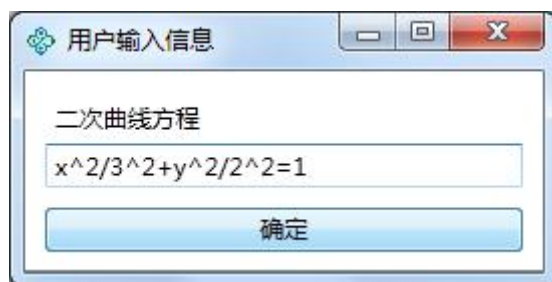


图 10

结果如图 11 所示，制作了一个中心在原点、长半轴为 3 和短半轴为 2 的椭圆。

当椭圆的短半轴和长半轴相等时，结果又会是怎么样的？

双击椭圆就可以打开它的属性对话框，例如将它的长半轴和短半轴都设为为：2，单击【确定】完成。

通过操作实验和观察结果，你认为椭圆和圆之间具有怎样的关系？

第 13 部分 珠江南岸小蛮腰

1, 形色多变小蛮腰

如今,珠江南岸的广州塔已经成为广州城区新的地标建筑 and 旅游热点。不过,你知道广州塔的结构是怎么样的吗?你知道它那婀娜多姿的身材曲线是如何形成的吗?让我们也试一试制作一个属于我们自己的小蛮腰。

我们可以随手绘制一个圆,而不一定是半径固定的圆:

(1) 在新的页面当中,单击【画图】工具,在空白处单击鼠标右键,并按住拖动后松开,即可做出以点 A 为圆心、经过点 B 的圆。

然后在圆上、圆外各任取一点,并连接这两点之间的线段,并作出它们之间的中点:

(2) 在圆 A 上任取一点 C;

(3) 并在圆外任取一点 D,连接 CD;

(4) 作出线段 CD 的中点 E;

作出经过点 E 与 CD 的垂线:

(5) 过点 E 作出与 CD 垂直的线段;

由于点 E 是 CD 的中点,所以这条垂线与 CD 的交点,即点 E,能够将线段 CD 平均分为两部分,所以这条垂线也叫做 CD 的中垂线。

(6) 选择点 C,执行【插入】【常用按钮】【对象一次运动】工具,在弹出的对话框中把动画的程序命令修改为:ObjAnimation5,50,3);,点击【修改动作】和【确定】完成按钮的创建。

(7) 选择直线 EF,执行【画图】【跟踪】命令;然后在对象框中右击直线 EF 的跟踪对象,通过【画线颜色】工具把它设置为:青绿色。结果如图 1 所示:

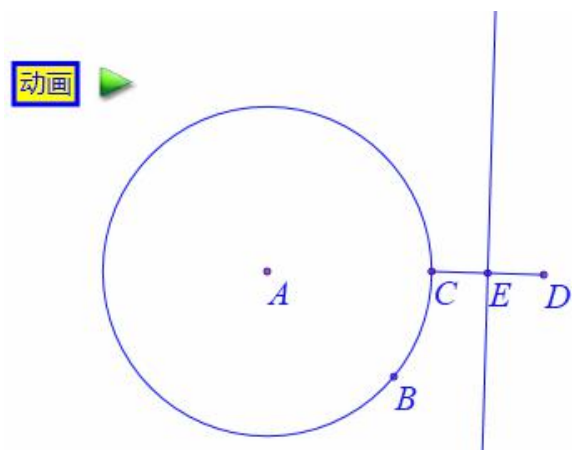


图 1

为了展示夜色下美丽的图案，我们可以设置背景颜色为：黑色。但是又有这些几何图形也是黑色的，在黑色背景下什么都看不到，所以我们可以把它们的画线颜色设置为白色：

（8）选择所有的点、线、圆，单击【属性】【画线颜色】命令，修改画线颜色为白色，

（9）然后单击【编辑】菜单下的【背景画刷】工具，在弹出的调色板中调整背景颜色为黑色。

这时候可以单击【动画】按钮，观察当点 C 在圆轴上运动的过程中，跟踪 EF 所得到的图案了。

单击【动画】按钮，结果如图 2 所示：

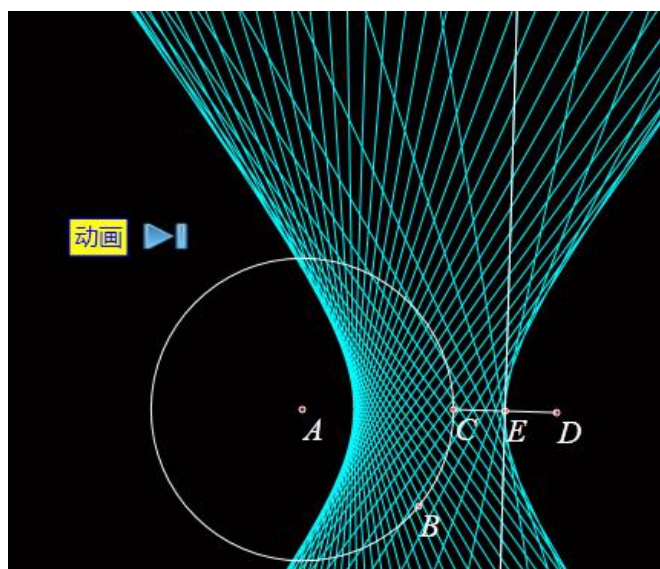


图 2

这仿佛正是我们珠江南岸的小蛮腰。

2, 想一想, 做一做

【拓展训练】

直线段按照不同的方式运动可以得到结构与形状不同的图案, 如图 3 所示, 就是一个由直线段构成的区域, 请你自己动手把它创作出来。

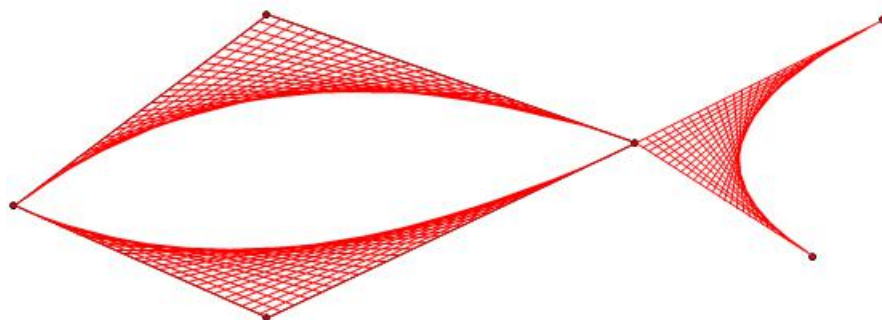


图 3

【思考问题】

在图 2 当中, 拖动点 D 的位置, 再次单击动画按钮, 你会发现, 随着点 D 的位置不同, 小蛮腰的形状也各不相同。

那么, 你能否观察和总结一下, 点 D 是如何影响小蛮腰的性质的:

当点 D 距离圆心 A 越远时, 小蛮腰的形状会如何变化?

当点 D 距离圆心 A 越近时, 小蛮腰的形状会如何变化?

当点 D 在圆 A 的圆周上时, 跟踪 EF 得到了什么图形

当点 D 在圆 A 的内部时, 跟踪 EF 又得到了什么图形? 点 D 的位置对图形又具有怎样的影响?

当点 D 在与圆心 A 重合时, 跟踪 EF 又得到了具有什么性质的图形?

第 14 部分 跟踪即得苹果线

1, 动圆下的苹果线

通过不同的运动方式跟踪直线可以得到多姿多彩的美丽图案。事实上, 由于点的运动也可以让圆有规律的运动, 同时跟踪圆周也能得到形色各异的图案。下面就是一个例子。

我们仍以任意点为圆心画圆:

(1) 在新的页面当中, 单击【画图】工具, 在空白处单击鼠标右键, 并按住拖动后松开, 即可做出以点 A 为圆心、经过点 B 的圆, 记作圆 A。

然后在圆上任取两个点:

(2) 在圆 A 上任取两个点 C 和 D。

作出以点 C 为圆心, 经过点 D 的圆:

(3) 指向点 C, 单击鼠标右键, 并按住拖动鼠标到点 D 的位置松开鼠标, 即可作出以点 C 为圆心经过点 D 的圆, 记作圆 C, 如图 1 所示:

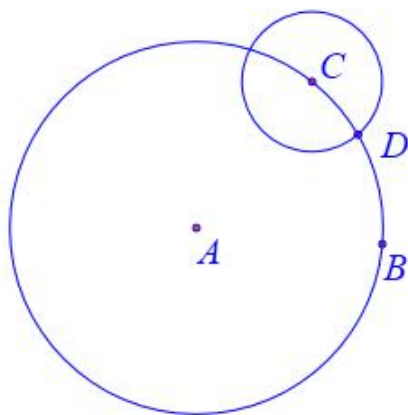


图 1

跟踪圆 C 并设置跟踪颜色:

(4) 鼠标指向圆 C 的圆周, 单击鼠标即可选择圆 C, 执行【画图】菜单中的【跟踪】命令, 即可得到圆 C 的跟踪对象。

(5) 然后在对象框中右击圆 C 的跟踪对象, 在【画笔】标签中把颜色设置为绿色。


点 C 和点 D 之间的线段长度决定了圆 C 的半径, 当点 C 的位置不变, 而当点 D 在圆上运动时, 圆 C 的性质会如何发生改变? 跟踪圆 C 所得到的图形会是一个什么形状的区域?

(6) 选择点 C 和 D, 执行【视图】菜单中的【动画框】命令, 如图 2 所示: 在弹出的动画

控制对话框中，选择 D：类型：一次。



图 2

单击  按钮，就可以看到点 D 沿圆 A 运动一周的过程中，跟踪圆 C 所得到的图形，结果如图 3 所示。

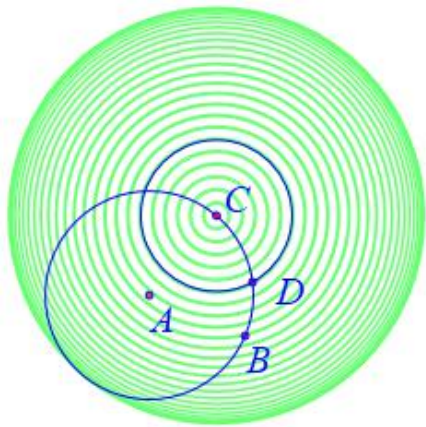



图 3

当点 C 在圆上运动过程中，圆 C 的性质会发生怎样的改变呢？圆 C 所经过的区域又具有什么样的特征呢？现在让我们继续进行实验和操作：

(7) 如果动画还在继续，控制对话框点击  使动画停止；执行【编辑】菜单中的【清除跟踪】命令，清除上一步画出的轨迹。

(8) 在动画控制对话框中选择点 C，类型：一次，单击 ，可以观察到点 C 在圆 A 的圆周上运动过程中，跟踪圆 C 所得到的图案，如图 4 所示。

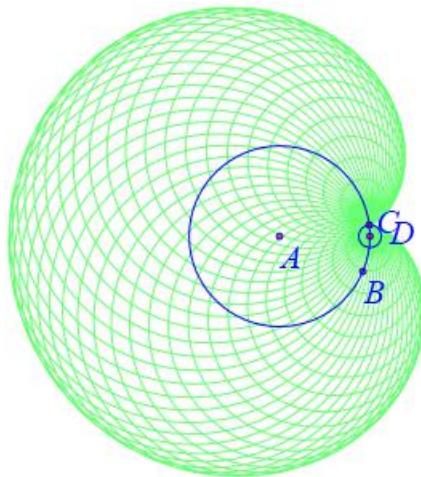



图 4

在控制对话框点击 ，即可停止点 C 的动画。在执行动画的过程中，若需要进行其他操作，首先要把动画停下来。因为“一心不够二用”，否则在动画过程中进行其他操作，会让计算机的大脑运转不过来而“死机”。

前面我们分别研究了点 D 和点 C 在圆 A 上运动的过程中，跟踪圆 C 得到的图案。那么当点 C 和点 D 在圆 A 上同时运动过程中，跟踪圆 C 得到的图案又可能是什么图形呢？我们不妨通过实验观察看一看：

(9) 执行【编辑】菜单中的【清除跟踪】命令，清除上一步画出的轨迹；在控制对话框同时选择点 C 和点 D，类型：一次，单击 ，结果如图 5 所示：

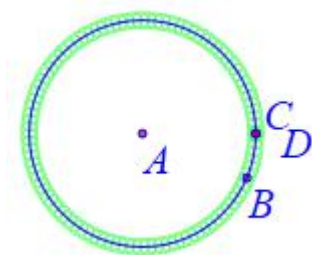


图 5

这是因为，点 C 的运动范围是：0 到 2π ，运动类型是：一次运动。这表示它从圆心 A 的正右侧沿逆时针顺序旋转了一周又回到了圆心正右方的位置。而点 D 的运动范围也是：0 到 2π ，运动类型也是：一次运动。这表示点 D 也是从圆心 A 的正右侧沿逆时针顺序旋转了一周又回到了圆心正右方的位置。

因此，在整个运动的过程中，点 C 和点 D 的位置都是重合在一起的。那么圆 C 的半径就等于 0，圆也就退化成为了一个点。所以得到了上面的图案。

第 15 部分 速度不同结果变

1, 改变速度图案变

除了利用动画框控制动画外,我们也可以利用按钮的方式更精确地控制动画。作为练习,我们用按钮控制地方式重新绘制出前面的图形:

(1) 在新的案例中,单击【画图】工具,在空白处按住击鼠标右键并拖动,即可作出以点 A 为圆心、经过点 B 的圆,记作圆 A。

(2) 在圆 A 上任意点按住击鼠标右键并拖动到圆 A 上的另外一点处,作出以点 C 为圆心经过点 D 的圆,记作圆 C。

(3) 单击【选择】工具,选择圆 C,执行【画图】菜单中的【跟踪】命令,得到圆 C 的跟踪对象。

(4) 稍微拖动一下点 D 使得轨迹出现,选择刚作出的轨迹,执行【编辑】菜单下【对象管理】子菜单中的【移到对象到最后】命令,将圆 C 的跟踪对象运动到“最后”,再点击【属性】菜单中的【颜色】菜单下的【红色】,设设置其画线颜色为:红色。最后执行【编辑】菜单中的【清除跟踪】命令,清除刚才画出的跟踪图像。

(5) 执行【插入】菜单下【常用按钮】中的【对象一次运动】按钮,在弹出的动画属性对话框中点击【动画】,把其“程序命令”输入框中的命令改为:

```
ClearAllTrace();
```

```
ObjAnimation(6,50,3);
```

```
ObjAnimation(5,50,3);
```

点击【修改动作】按钮,再点击【确定】完成动画按钮制作。

这时候,如果启动这个动画按钮,点 C 和点 D 就同时从点 A 的正右侧沿圆周按照逆时针顺序运动一周后回到了起点。

事实上,从起点绕圆周旋转之后又回到起点,可以是运动了一圈,也可以是运动了两圈,或者是三圈……。当点 C 绕圆周运动一圈之后回到起点的过程中,如果点 D 正好绕圆周运动了两圈再回到起点,那么在这个过程中圆 C 的半径会发生改变吗?跟踪圆 C 所得到的图案可能是什么图形呢?我们自己动手试一试:

(6) 右击【动画】按钮,打开它的属性对话框,如图 1 所示,把【动画】的程序命令

改为: `ClearAllTrace();`

`ObjAnimation(6,50,3);`

`ObjAnimation(5,100,3);`

点击【修改动作】按钮，再单击【确定】完成动画按钮修改。

这里 `ClearAllTrace();`的作用是清除所有的轨迹；`ObjAnimation()`为对象运动命令，的格式为: `ObjAnimation(obj1, frequency1, type1, interval1, ...)`

参数: obj1-拖动对象; frequency1-整数, 运动频度; type1-0/1/2/3/4, 运动类型, interval1-浮点数, 定时器时间间隔, 单位为秒。

功能: 执行对象 obj1,... 的动画。运动类型 type 的值为 0(向前)、1(向后)、2(双向)、3(一次向前)和 4(一次向后)。

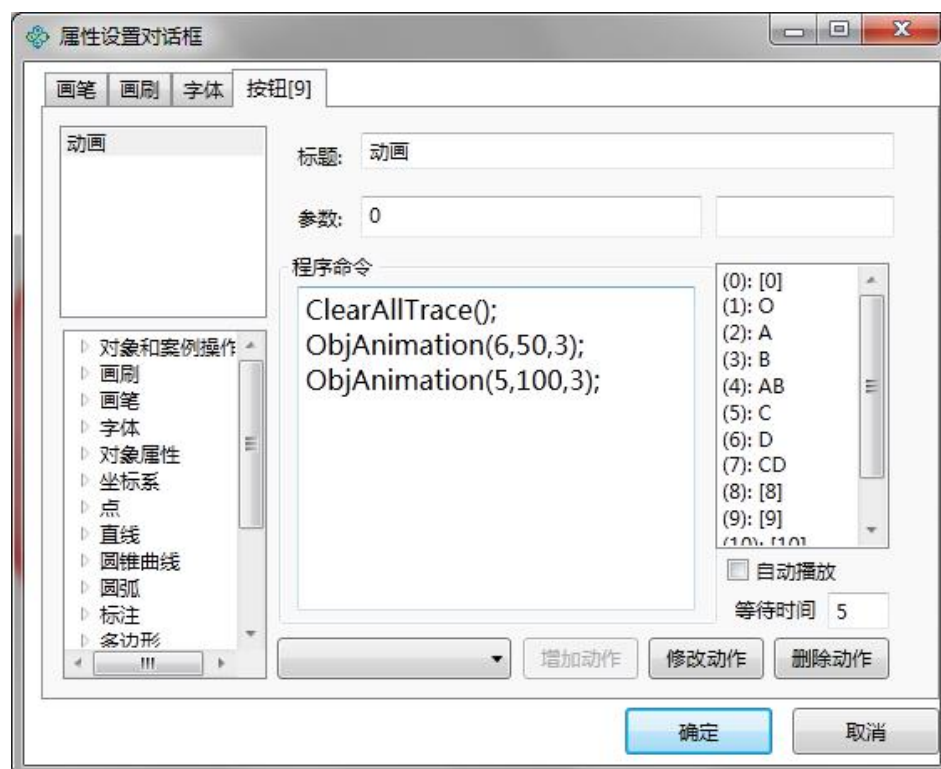


图 1

(7) 点击【动画】按钮，结果如图 2 所示：

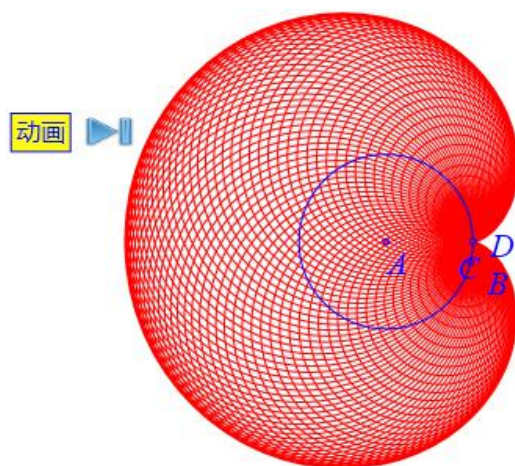


图 2

这个结果，与只有点 C 运动相比较，有什么联系与区别吗？请你进行比较，而且尝试着解释其中的道理。

当点 C 绕圆周运动一圈之后回到起点的过程中，如果点 D 正好绕圆周运动了三圈再回到起点，那么应该如何设置点 D 的运动参数范围？在这个过程中圆 C 的半径会发生改变吗？跟踪圆 C 所得到的图案可能是什么图形呢？我们也要亲自动手试一试：

（8）参考前面修改按钮的方法，把程序命令修改为：

```
ClearAllTrace();
```

```
ObjAnimation(6,50,0);
```

```
ObjAnimation(5,150,0);
```

同时给按钮增加停止功能，如图 3 所示填写参数信息，点击【新建命令】再点击【确定】完成按钮修改。

（9）单击【动画】按钮，结果如图 4 所示：

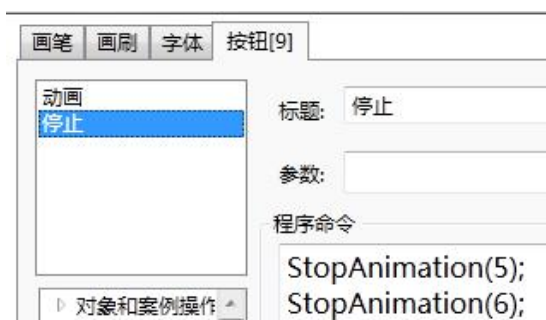


图 3

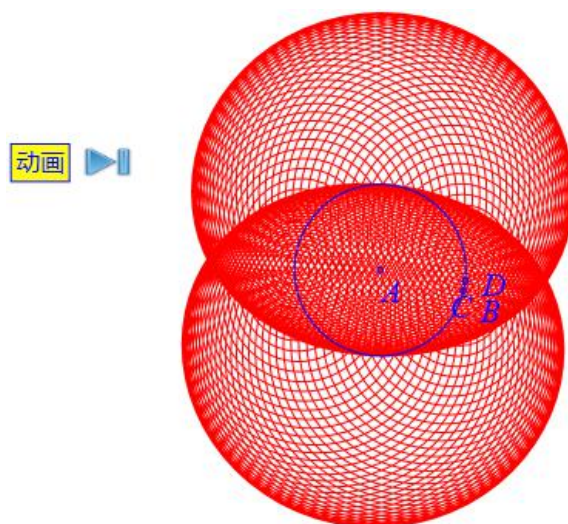


图 4

这个结果在你的想象之中？还是在你的意想之外？

2，想一想，做一做

【拓展训练】

(1) 当点 C 绕圆周运动一圈之后回到起点的过程中，请你绘制出点 D 正好绕圆周运动了四圈的过程中，跟踪圆 C 所得到的图案。

(2) 当点 C 绕圆周运动一圈之后回到起点的过程中，请你绘制出点 D 正好绕圆周运动了五圈的过程中，跟踪圆 C 所得到的图案。

(3) 当点 C 绕圆周运动一圈之后回到起点的过程中，请你绘制出点 D 正好绕圆周运动了六圈的过程中，跟踪圆 C 所得到的图案。

(4) 当点 C 绕圆周运动一圈之后回到起点的过程中，请你绘制出点 D 正好绕圆周运动了七圈的过程中，跟踪圆 C 所得到的图案。

【思考问题】

跟踪圆 C 得到的图案与点 D 绕圆周运动的圈数 n 之间有什么联系？或者说 n 是如何影响图案的形状和性质的？

第 16 部分 两人抬轿百花现

1, 多点控制下的轨迹

通过前面的研究和实践，我们可以发现，在动态数学系统 Hawgent 皓骏动态数学软件当中，当一个点运动时，与之相关的圆的性质也会发生改变，无论这一点是决定圆的半径还是决定圆心的位置，或者是同时决定圆心的位置和半径的大小。

当然，在一般的图形当中，与点有关的点、直线或者其他对象，当点的位置发生改变时，也会同时发生改变。

与跟踪圆形、直线会得到形形色色的美丽图案一样，跟踪一个点同样有机会得到各种各样的美丽图案。

我们仍以前面的例子为原型进行研究，不过为了更方便地观察研究得到的结果，我们把任意绘制的圆变成半径固定的圆，把一个圆变为两个圆，把一个圆上的两个点变为每个圆上各有一个点。

首先在坐标系的横轴对应的水平直线上任意取两个点：

- (1) 通过对象框，隐藏整个坐标系。
- (2) 通过【画图】菜单中【参数点】子菜单下的【坐标点】命令，作出坐标为 $(-3, 0)$ 上的点 A 和坐标为 $(3, 0)$ 的点 B。

分别以点 A、点 B 为圆心构造半径均为 2 的圆：

- (3) 选择点 A，执行【画图】菜单中的【圆和圆弧】子菜单【已知圆心和半径的圆】命令，在弹出的输入编辑框中输入：2，单击【确定】按钮即可作出以点 A 为圆心、半径为 2 的圆，记作圆 A；类似地，作出以点 B 为圆心、半径等于 2 的圆，记作圆 B。

在圆 A 和圆 B 上各取一点，连接这两点之间的线段，并作出线段的中点：

- (4) 单击【画图】工具，在圆 A 上任取一点 C，在圆 B 上任取一点 D，连接点 C 和点 D 之间的线段，并作出线段 CD 的中点 E，结果如图 1 所示：

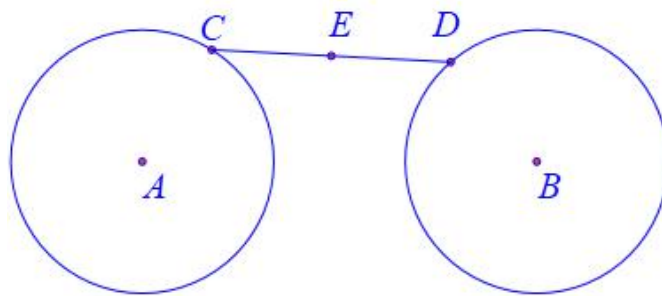


图 1

点 C 和点 D 就像两个抬轿子的人，而点 E 可以被看作是乘坐轿子的人。抬轿子的人可以停下来休息也可以选择在圆周上转圈圈，可以跑得快也可以跑得慢，两个人旋转的方向相同也可以相反。那么，无论怎样，坐轿子的人都要受制于抬轿子的人，坐轿子的人所经过的路径取决于抬轿子的人的运动方式。

分别构造出点 C 的动画按钮和点 D 的动画按钮，并跟踪点 E：

(5) 执行【插入】菜单中【常用按钮】子菜单下的【对象一次运动】命令，在弹出的对话框中：把标题改为：“C 运动”；程序命令修改为：`ObjAnimation(6,50,3);`；点击修改命令，单击【确定】按钮完成；类似地，做出点 D 的动画按钮。

(6) 选择点 E，执行【画图】【跟踪】命令，得到点 E 的跟踪对象，并设置跟踪颜色为：蓝色。

当点 C 的位置发生改变时，点 E 的位置会同时发生改变，那么点 C 的位置是如何影响点 E 的位置的呢？如果点 C 在圆 A 的圆周上运动，点 E 又会进行怎样的运动呢？也就是说，当点 C 在圆 A 上旋转一周的过程中，点 E 所经过的路径会是什么图案呢？

(7) 单击点 C 的动画按钮，让点 C 绕圆 A 运动一周，观察点 E 的跟踪图像，检验你的结论。

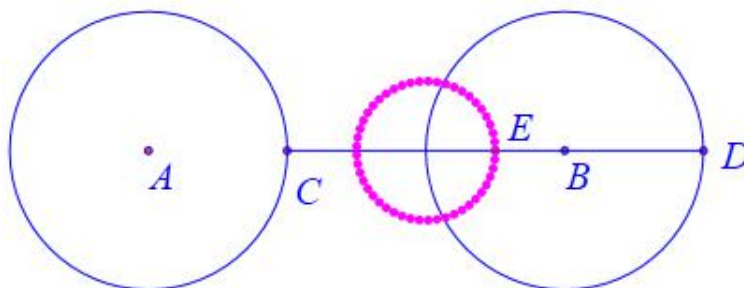


图 2

当然，如果点 D 的位置发生改变，点 E 的位置同样会发生改变。那么点 D 的位置又是如何影响点 E 的位置的呢？如果点 D 在圆 B 的圆周上运动，点 E 又会进行怎样的运动呢？

当点 D 在圆 B 上旋转一周的过程中，点 E 所经过的路径会是什么图案呢？与点 C 在圆周上运动一周的过程点 E 所经过的路径有什么相同和不同之处？

执行【编辑】菜单下的【清除跟踪】命令，清除先前所作的跟踪图像。

(8) 单击点 D 的动画按钮，让点 D 绕圆 B 运动一周，观察点 E 的跟踪图像，检验你的结论。

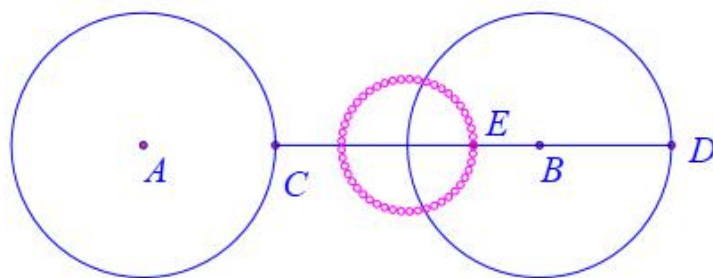


图 3

如果点 C 和点 D 分别绕圆 A 和圆 B 从圆心的正右侧出发均按照逆时针方向同时运动一周回到出发点的过程中，点 E 所经过的路径会是什么图案呢？

(9) 执行【插入】菜单中【常用按钮】子菜单下的【对象一次运动】命令，在弹出的对话框中：把标题改为：“同时运动”；程序命令修改为：

ObjAnimation(6,50,3);

ObjAnimation(6,50,3);

点击修改命令，单击【确定】按钮完成；类似地，做出点同时运动的动画按钮；单击【同时动画】按钮，观察点 C 和点 D 按照相同的方式分别在圆 A 和圆 B 上运动一周的过程中，点 E 所经过的路径，并检验你的结论。

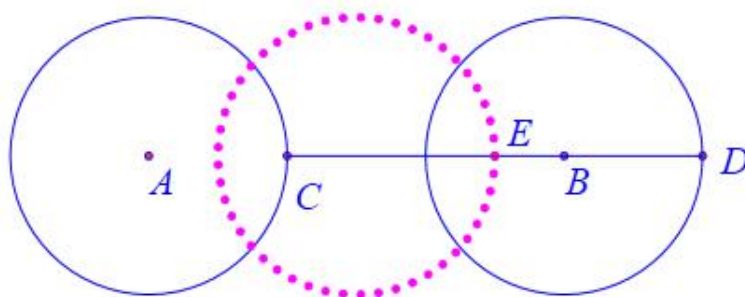


图 4

为 0 度的位置绕点 B 按照逆时针方向旋转了一周。

若点 C 绕点 A 逆时针方向旋转一周的同时，点 D 绕点 B 顺时针旋转了一周，那么点 E

的轨迹图形是什么形状的呢？

(10) 右击动画按钮弹出属性对话框，如图 5 所示：修改动画的程序命令，运动类型分别为：3(正向一次运动)，4 反向一次运动。

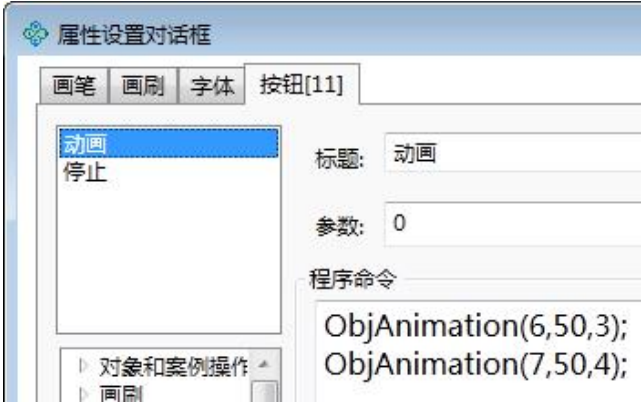


图 5

点击【确定】后按下个动画按钮，结果如下图 6 所示：

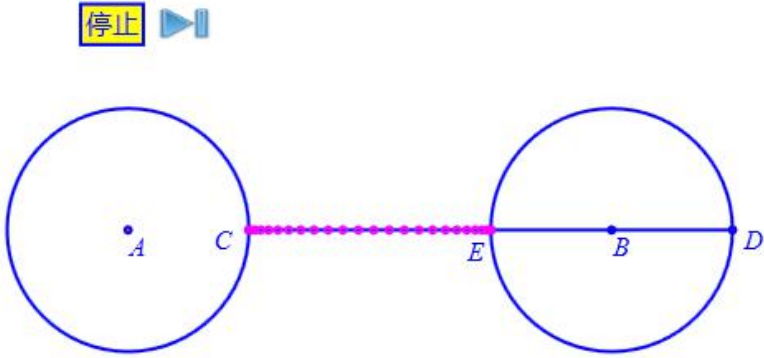


图 6

2，参数不同轨迹变

若点 C 绕点 A 逆时针方向旋转 a 周的同时，点 D 绕点 B 逆时针旋转了 b 周，那么点 E 的轨迹图形是什么形状的呢？

事实上，如果想得到点 E 的运动路径，不需要每次都让点 C 和点 D 在圆轴上转圈。就像我们知道地球绕太阳旋转所经过的路径是近似椭圆形，不需要也不能够通过跟踪的方式得到，而是在观察的基础下通过计算的方式而得出的结论。所以，我们通常说地球绕太阳运动的轨迹，而不说跟踪地球所得到的路径或踪迹。

在计算机和 Hawgent 皓骏动态数学软件当中，也可以通过计算而得到点的轨迹。

为了更加方便地研究点 E 在点 C 和点 D 驱动下的轨迹图形，我们可以直接作出点 E 的轨迹曲线，操作如下：

(6) 为了不影响观察，先删除前述步骤所作的轨迹。

(7) 依次选择点 C、点 D 和点 E，执行【画图】菜单中的【轨迹】命令，右键生成的曲线，如图 5.7.7 所示，在弹出的轨迹属性对话框中：设置间断点的最小值为：0.5；样本点总数为：5000；设置点 C 运动区间的最大值为： $a \cdot 2\pi$ ，设置点 D 运动范围的最大值为： $b \cdot 2\pi$ ；单击【确定】按钮完成，即可生成点 E 的轨迹。

图 5 a 点 C 的运动参数图

图 5 b 点 C 的运动参数

(8) 执行【插入】菜单下【常用按钮】子菜单中的【变量一次运动】，增加参数 a 的动画按钮，如图 8 所示设置程序命令：生成变量 a 的值复位到 1 的按钮

图 8

(9) 执行【插入】【常用按钮】【变量一次运动】，增加参数 a 的动画按钮，如图 9 所示设置程序命令：生成变量 a 的值增加 1 的按钮。

图 9

(10) 执行【插入】【常用按钮】【变量一次运动】，增加参数 a 的动画按钮，如图 10 所示设置程序命令：生成变量 a 的值减少 1 的按钮。

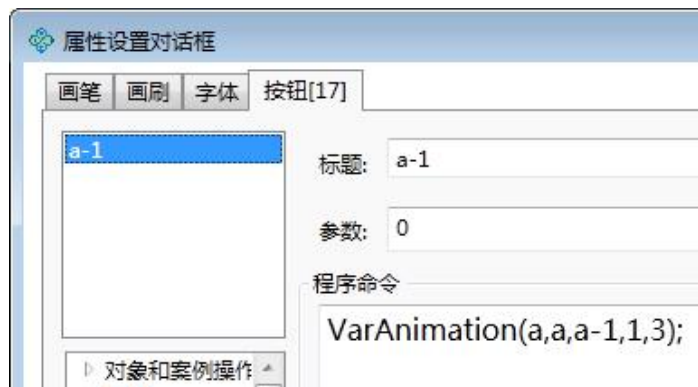


图 10

(11) 按照前述方法，分别作出变量 b 的“ b 复位”“ $b+1$ ”及“ $b-1$ ”三个按钮。

(14) 分别测量参数 a 和参数 b 的值。

图 11 和图 12 是其中两种轨迹曲线：

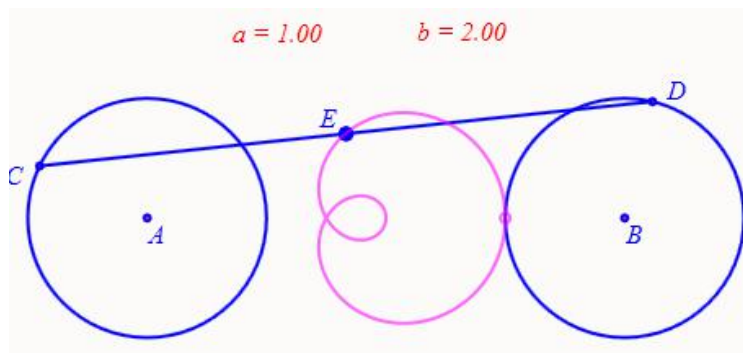


图 11

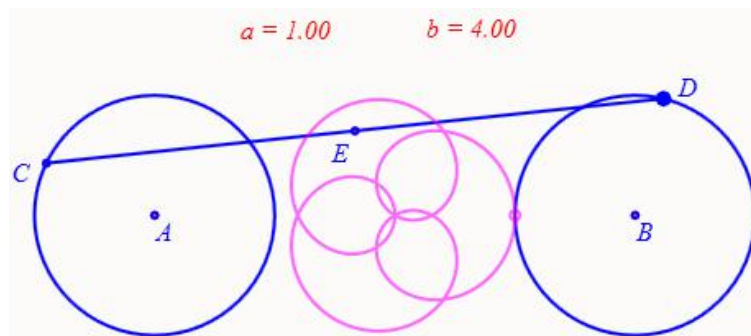


图 12

为了更加一般地研究点 E 的轨迹曲线，我们可以插入参数 a 和参数 b 的变量控制尺，让参数 a 和参数 b 可以任意的实数。

类似的问题，凡此种种，我们可以继续不断地研究下去。例如，点 C 也可以运动两圈、三圈、四圈、……。通过前面的经验我们可以判断，必将得到变化多端、风情万种的曲线。

但是我们需要关注和弄清楚下面几个重要的问题：

到底有多少种曲线呢？有限多种？还是无限多条？

在这么多曲线当中，存在了多少规律？

点 C 和点 D 是如何影响曲线性质的呢？

图 13 是其中一种情况下的轨迹曲线：

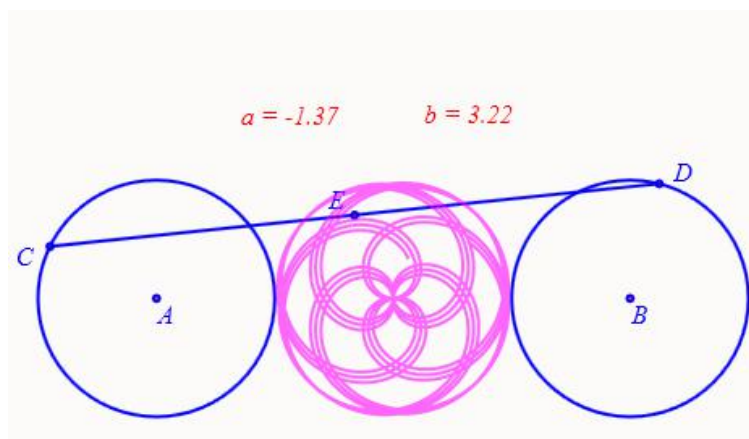


图 13

3, 想一想, 做一做

【拓展训练】

重新完成上述绘图过程, 并增加参数 c 的动画按钮【 $c=0$ 】、【 c 增加 1】、【 c 减小 1】和参数 d 的动画按钮【 $d=0$ 】、【 d 增加 1】、【 d 减小 1】, 并设置对应的动画属性与参数。

【思考与练习】

- (1) 当 $a=1$ 、 $b=2$ 与 $a=3$ 、 $b=6$ 时, 点 E 的轨迹曲线有什么特征? 你能发现哪些规律?
- (2) 通过建立适当的坐标系, 你能写出点 E 的轨迹曲线对应的方程吗?
- (3) 若点 E 不是线段 CD 的中点, 而是直线 CD 上的任意一点, 请你重新设计类似的实验, 研究点 E 的轨迹曲线, 能产生什么新的结论?
- (4) 若圆 A 和圆 B 的半径不同, 请你重新研究上面的问题, 是否有不同的结论?
- (5) 若点 C 和点 D 在同一个圆上, 请重新研究点 E 的轨迹曲线, 与上面的实验相比能有哪些共同点和不同点?

第 17 部分 小试身手来旋转

1, 旋转训练做一做

前面我们研究了大量圆周运动的问题。从变换的角度看圆周运动，它就是旋转。

我们知道：一个物体如果能够旋转，需要有三个前提条件：旋转中心、旋转角度和旋转方向。

在一个平面上，所谓的旋转方向不是逆时针方向就是顺时针方向。当然，前面就像我们规定了正数、负数一样，我们也为角度规定了正角和负角。当我们知道角度的情况下，自然也就知道了旋转方向。

当明确了这些事情之后，我们就可以小试身手，在计算机上进行旋转的操作：

- (1) 在新建页面中，单击【画图】工具，任意绘制一条线段 AB；
- (2) 单击【选择】工具，按住【Ctrl】键，依次选择点 A 和点 B，执行【变换】菜单中的【旋转】命令，在弹出输入对话框中，如图 1 所示，输入：180，然后单击【确定】按钮完成。结果就得到了点 C，如图 2 所示：



图 1

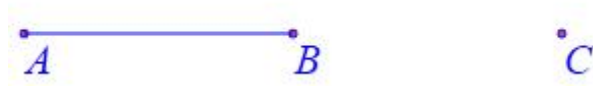


图 2

在旋转过程中，我们把点 C 叫做点 A 的对应点，或者把点 C 和点 A 叫做一组对应点。

当然还可以继续旋转其他对象，例如旋转线段 AB：

- (3) 单击【选择】工具，按住【Ctrl】键，依次选择线段 AB 和点 B，执行【变换】菜

单中的【旋转】命令，在弹出输入对话框中，如图 1 所示，输入：180，然后单击【确定】按钮完成。结果就得到了点 C，即可得到了线段 AB 旋转之后的线段。

旋转得到的线段以点 B 和点 C 为端点。类似地，我们把旋转得到的线段叫做线段 AB 的对应线段，或者把线段 AB 和经过旋转得到的线段称作一组对应线段。

当然我们也可以输入其他的旋转角度或者旋转中心，从而按照重新指定的中心和角度进行旋转，例如：

（4）按住【Ctrl】键，同时选择点 A、点 B、线段 AB 和线段 BC，最后选择点 C，执行【变换】菜单中的【旋转】命令，在弹出输入对话框中，如图 1 所示，输入：-90，然后单击【确定】按钮完成，结果如图 3 所示：

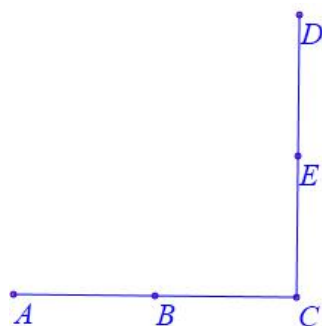


图 3

2，想一想，做一做

【思考问题】

- （1）如果只选取一点进行旋转，例如点 B，结果会如何呢？
- （2）把一个点或者一条线段进行旋转，如果旋转角度为： 2π ，结果会如何呢？

【拓展训练】

- （1）任意绘制一条线段 AB，通过旋转的方式，作出以 AB 为边的正三角形。
- （2）任意绘制一条线段 AB，通过旋转的方式，作出以 AB 为边的正方形。
- （3）任意绘制一条线段 AB，通过旋转的方式，作出以 AB 为边的正五边形。

第 18 部分 旋转半周谓对称

1, 旋转可得对称图

作为练习，我们再次进行旋转变换的操作：

- (1) 在新建页面中，单击【画图】工具，任意绘制一条线段 AB；
- (2) 单击【选择】工具，按住【Ctrl】键，依次选择点 A 和点 B，执行【变换】菜单中的【旋转】命令，在弹出输入对话框中，如图 1 所示，输入：180，然后单击【确定】按钮完成。结果就得到了点 C，如图 2 所示：



图 1

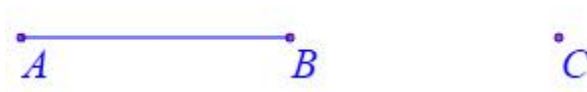


图 1

拖动点 A 或点 B，可以观察到：点 A、点 B 和点 C 看起来在同一条直线上，而且点 A 到点 B 的距离与点 C 到点 B 的距离也仿佛是相等的。这三个点之间是否确实存在这种关系呢？我们不妨通过测量检验一下：

- (3) 按住【Ctrl】键，同时选择点 A 和点 B，执行【测量】菜单中的【距离】命令，即可得到 点 A 到点 B 的距离测量值；类似地，请测量点 C 和点 B 之间的距离。

- (4) 按住【Ctrl】键，同时选择点 A、点 B 和点 C，执行【测量】菜单中的【角度】命令，得到 $\angle ABC$ 的测量值，如图 2 所示：

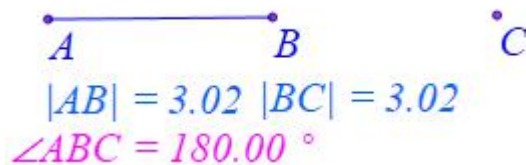


图 2

为什么会存在这种关系呢？还要从我们所进行的旋转操作探个究竟：

因为点 C 是点 A 绕点 B 旋转而得到的，而在旋转过程中线段的长度保持不变，因此有 $AB=CB$ 。这是所有的旋转变换具有的基本性质。

因为点 C 是点 A 绕点 B 旋转 180 角度而得到的，我们把 180 度的角称作为平角，也就是说构成平角的两条边是方向正好相反的两条射线。因此点 C 和点 A、点 B 在同一条直线上。这是只有当旋转角为 π 时旋转变换才具有的性质，当然旋转角度还可以是 $3*180$ 、 $5*180$ 、 $7*180$...或 -180 、 $-3*180$ 、 $-5*180$ 、...，不过在下面我们就暂时以 180 为例说明问题。

相对于旋转角度为其他数值，当旋转角为 180 时有一些特别的性质：

首先，当点 A 经过旋转之后得到了它的对应点 C，旋转中心 B 就是这两个对应点 A 和 C 之间的中点。

然后，把点 A 的对应点 C，继续旋转一次，就得到了与原来的点 A 完全重合的点。

如图 3 所示，有一条线段 PQ，我们可以取它的中点 M 作为旋转中心，设置 π 为旋转角度。那么将点 P 旋转之后就得到了与点 Q 重合的对应点，将点 Q 旋转之后就得到了与点 P 重合的对应点，将线段 PQ 旋转之后就得到了与它本身重合的对应线段。



图 3

当然，这条性质对于任何一条线段来说都是成立的，选择线段的中点作为旋转中心即可。

我们还可以把这个要求推广到一般的图形：如果一个图形，绕某个点旋转 180 度之后能够与自己重合，那么我们说这个图形是一个中心对称图形，把这个旋转中心叫做这个图形的对称中心。

2，旋转下的中心对称图

要找到一个中心对称图形很简单。事实上，你只要任意给出一个图形，可以通过选择任

意一个点为旋转中心，把这个图形旋转 180 度，所得到的图形与原来的图形就组成了一个中心对称图形。例如：

(5) 在新的页面当中，单击【画图】工具，随意绘制一个三角形 ABC；

(6) 按住【Ctrl】键，依次选择点 A、点 B、线段 AB、线段 BC 和线段 CA，最后选择点 C，执行【变换】菜单中的【旋转】命令，在弹出输入对话框中，如图 1 所示，输入：180，然后单击【确定】按钮完成，如图 4 所示，就得到了一个中心对称图形。

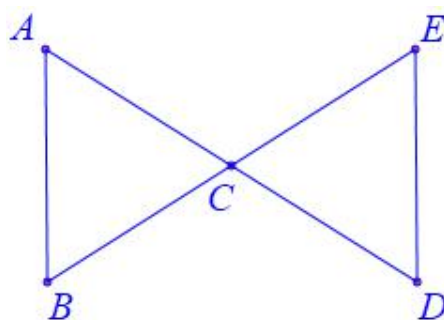


图 4

根据旋转变换的性质，我们知道，在这个中心对称图形当中， $AB=DE$ 、 $BC=EC$ 、 $CA=CD$ ，点 C 是 AD 的中点也是 BE 的中点。

根据中心对称图形的性质，我们知道：如果把这个中心对称图形绕它的对称中心旋转 π 角度后，就能够与自己重合。中心对称图形具有这个性质，本质在于：在这个中心对称图形当中，其中的一部分旋转 180 度之后能够与另外的一部分完全重合。

在中心对称图形当中，如果其中一部分绕对称中心旋转 π 角度之后能够与另外一部分完全重合，顺便我们也把其中一部分称作是另外一部分的中心对称图形。

例如，我们可以说线段 PQ 是一个中心对称图形，它的中点 M 就是它的对称中心；也可以说，在这个中心对称图形当中，线段 PM 和线段 MQ 关于点 M 中心对称；也可以说，线段 PM 是线段 MQ 的中心对称图形，对称中心为点 M。

当然，任意给出一个图形，然后任意指定一个点为中心，也可以做出这个图形关于这个点的中心对称图形。

【思考问题】

(1) 一个点本身，是否中心对称图形？如果是，它的对称中心和关于对称中心对称的两部分图形又各是什么？

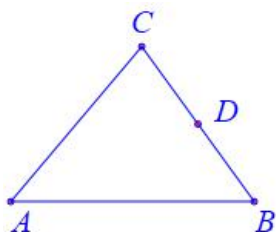
(2) 一个圆，是否中心对称图形？如果是，它的对称中心和关于对称中心对称的两部

分图形又分别是什么？

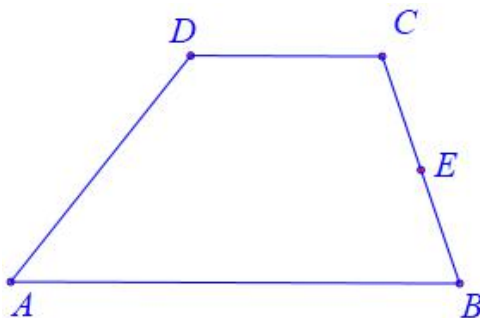
3，想一想，做一做

【拓展训练】

(1) 任意绘制一个三角形 ABC 以及 CA 边上的中点 D ，作出点 A 、线段 AB 和线段 AC 关于点 D 的中心对称图形。拖动点 A 或点 B 、点 C ，观察和研究所得到的图形具有什么性质？



(2) 任意绘制一个梯形 $ABCD$ ，其中 $AB \parallel CD$ ，并做出 BC 边上的中点 E 。以点 E 为中心，作出点 A 、点 D 、线段 AB 、线段 CD 和线段 DA 的中心对称图形。



第 19 部分 检验中心对称图形

1, 中心对称的检验

通过旋转变换, 我们就能够轻松地做出一个图形关于一个点的中心对称图形。

反过来, 对于一个图形来说, 如何判断它是不是中心对称图形呢?

要判断一个图形是否为中心对称图形, 需要完全弄清楚中心对称图形究竟有什么特点和性质?

我们知道, 对于一般的多边形来说, 我们要做出它关于某个点的中心对称图形, 事实上只要做出多边形的各个顶点的中心对称图形, 然后把通过旋转变换作出的点对照原来的图形连接线段, 即可做出完整的中心对称图形。

因此, 要判断一个多边形是不是中心对称图形, 重点是研究多边形的各个顶点之间的关系。

我们知道, 对于一个中心对称图形来说, 它的对称中心, 是每一组对应点的中点。也就是说, 中心对称图形的对称中心把每一组对应点之间的连线平分。

那么自然而然地就得到了一个性质: 在中心对称图形当中, 每一组对应点之间连线都交于一点, 并且这个交点是所有对应点之间连线的中点, 即对应点之间连线的交点平分这些对应点之间的连线。

通过操作和实验, 我们进行观察和检验:

(1) 单击【画图】工具, 任意绘制一个四个点: A、B、C、D;

(2) 单击【选择】工具, 将点 D 指定为旋转中心; 指定旋转角为: π ;

(3) 按住【Ctrl】键, 依次选择点 A、点 B 和点 C, 最后选择点 D, 执行【变换】菜单中的【旋转】命令, 在弹出输入对话框中, 如图 1 所示, 输入: 180, 然后单击【确定】按钮完成, 得到点 E、点 F 和点 G;

(4) 同时选择点 A、点 B 和点 C, 执行【画图】菜单中【多边形】子菜单下的【多边形】命令,, 构造多边形 ABC; 同理, 同时选择点 E、点 F 和点 G, 构造多边形 EFG。如图 1 所示, 我们就到了三角形 ABC 关于点 D 的中心对称图形: 多边形 EFG。

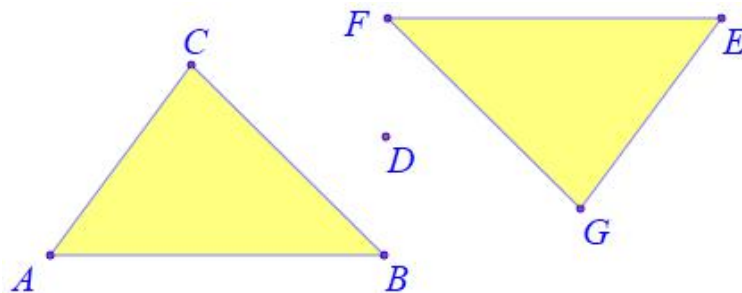


图 1

我们要用线段把对应点连接起来：

(5) 单击【画图】工具，连接线段 AE、BF、CG；

(6) 单击【选择】工具，同时选择线段 AE、BF 和 CG，在【属性】菜单中的【画线颜色】子菜单下选择【红色】，设置画线颜色为红色，如图 2 所示：

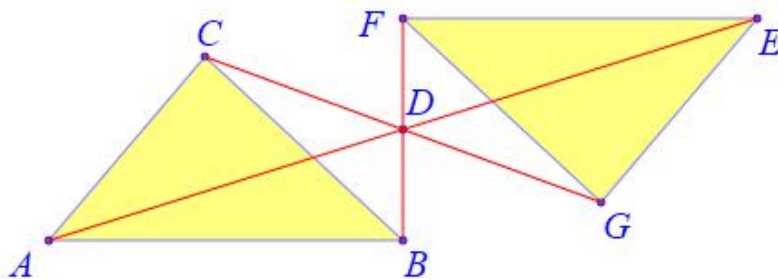


图 2

任意拖动点 A、点 B 或点 C，可以观察到对应点之间的连线 AE、BF 和 CG 始终交于一点，这一点正是旋转中心 D。当然，我们还知道，在图形当中， $AD=DE$ 、 $BD=DF$ 、 $CD=DG$ 。

不但如此，在多边形 ABC 上的任意一点与它关于点 D 的对称点之间的连线，都经过点 D 并且被点 D 所平分：

(7) 选择多边形 ABC 的边界，执行【画图】菜单下【自由点】子菜单中的【多边形上的点】命令，即可做出多边形 ABC 的边界上的点 H；

(8) 依次选择点 H，点 D，执行【变换】菜单中的【旋转】命令，在弹出输入对话框中，如图 1 所示，输入：180，然后单击【确定】按钮完成，进行旋转，得到点 I；

(9) 单击【画图】工具，连接线段 HI；

(10) 单击【选择】工具，选择线段 HI，设置画线颜色为绿色。如图 3 所示：

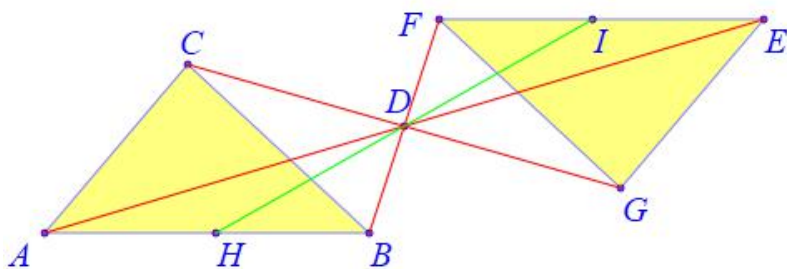


图 3

拖动点 H，它可以在多边形 ABC 的边界上运动，而无论它运动到哪里，它与它的对称点 I 之间的连线都经过点 D，并且被点 D 所平分。

2，如何判断中心对称图形

基于这种性质就可以判断一个图形是不是中心对称图形。

我们随手绘制一个平行四边形 ABCD：



图 4

问题是，如何确定一组对应点，或者说确定一组对应点的原则是什么？

因为，所有对应点之间的连线都交于一点。而在平行四边形 ABCD 当中， $AB \parallel CD$ 、 $AD \parallel BC$ ，所以 A 和 B 或 A 和 D 不可能是一组对应点，因此只能考虑点 A 和点 C。

这个事实告诉我们，当我们试图确定一组对应点时，尽量选择不邻近的两个点，它们之间的连线才有可能与其他点之间的连线相交。

接下来，我们可以连接 BD，并做出它的中点 E，如图 5 所示：

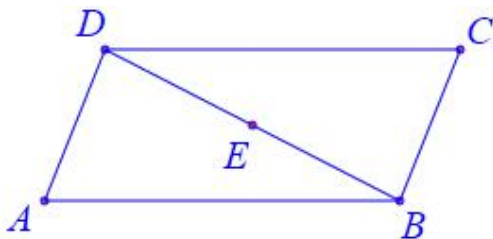


图 5

最后只需要判断点 A 和点 C 是否关于点 E 对称即可。那么应该如何判断呢？

测量线段 AE 的长度和线段 BE 的长度，观察它们是否相等？

但这是否能够足以说明点 A 和点 C 关于点 E 对称？继而说明平行四边形 ABCD 是中心对称图形而对称中心就是对角线 BD 的中点 E？因为在下图中，也存在 $AE=EC'$ ，那么点 C' 是否点 B 关于 E 的对称点呢？

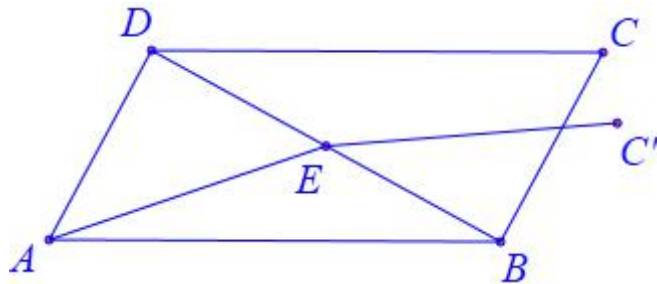


图 6

3，想一想，做一做

【思考问题】

- (1) 一个多边形，如果它有奇数个顶点，那么它是否一定不是中心对称图形呢？
- (2) 事实上，现在我们还不清楚，如何利用没有刻度的尺子和圆规做出一条线段的中点。在这种情况下，如何判断一个平行四边形是否为中心对称图形呢？请你设计一套方案，并在计算机上进行实验和验证。

【拓展训练】

- (1) 打开文件“19-五角星.dmr”，如图 7 所示，有一个五角星，选择五角星对应的多边形，做出五角星边界上的一点，记作点 A；做出点 A 关于点 O 的对称点，记作点 B；选择点 B，单击【跟踪】按钮，跟踪点 B；

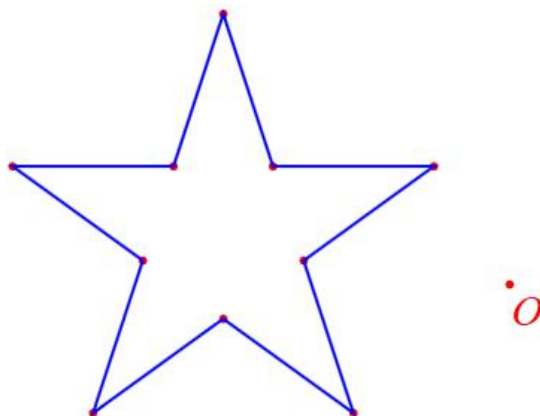


图 7

拖动点 A，观察跟踪点 B 所得到的图形。或者，增加一个点 A 的动画按钮：

选择点 A，单击【动画】按钮，即可让点 A 自动地、均匀地在五角星的边界上运动。

(2) 打开文件“19-梯形.dmr”，如图 8 所示，有一个梯形 ABCD，并且绘制出了对角线 AC 及其中点 E。

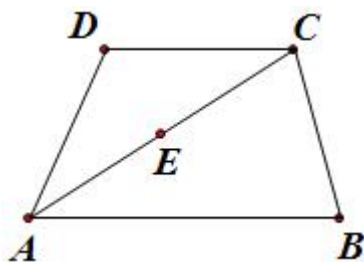


图 8

请你通过测量数据说明它是否为中心对称图形。

第 20 部分 中心对称数量析

1, 中心对称画数轴

我们学会了在计算机上的旋转变换,也就学会了绘制一个图形关于一个点的中心对称图形。

但是在一张纸上,只具有铅笔、尺子的情况下,如何绘制出一个图形关于一个点的中心对称图形呢?

事实上,我们早就接触了具有中心对称性质的图形,早就研究过点关于点的对称点。数轴上所表示的位置就是一例,如图 1:

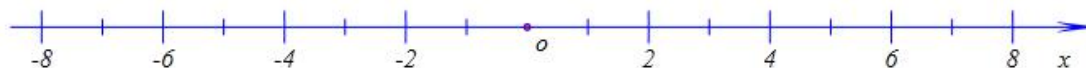


图 1

不难发现,在数轴上,具有对称关系的一组点,比比皆是。例如:

-8 和 -6 所表示的两个点,关于 -7 所表示的点对称;

-8 和 -2 所表示的两个点,关于 -5 所表示的点对称;

-8 和 2 所表示的两个点,关于 -3 所表示的点对称;

-8 和 6 所表示的两个点,关于 -1 所表示的点对称;

等等。

对于这些数字,不难发现下面的一些规律:

$$-8 + (-6) = 2 * (-7);$$

$$-8 + (-2) = 2 * (-5);$$

$$-8 + 2 = 2 * (-3);$$

$$-8 + 6 = 2 * (-1)。$$

从而我们得到:

在数轴上,两个位置所表示的两个数的和,等于它们的对称中心所表示的数的两倍;或者说,对称中心所表示的数,等于关于它对称的两个位置所表示的两个数之和的一半。

这一规律,在数轴上是否普遍存在呢?我们试试看:

(1) 右击坐标轴,在属性窗口中把 y 轴隐藏。单击【画图】工具,画任意点 A 和 B;

(2) 单击【选择】工具，依次选择点 B 和点 A 执行【变换】菜单中的【旋转】命令，输入旋转次数为：1，角度为 180，点击【确定】得到点 C；

(3) 选择点 A，执行单击【测量】菜单中的【x-坐标】命令，类似地，测量点 B 和点 C 的 x 轴坐标。

(4) 右击点 A 对应的测量文本，将属性窗口中\&之前的内容修改为：A=，类似地修改点 B、点 C 对应的测量文本为：B=、C=，把 A 点我 B 点拖动到坐标轴上，结果如图 2 所示：

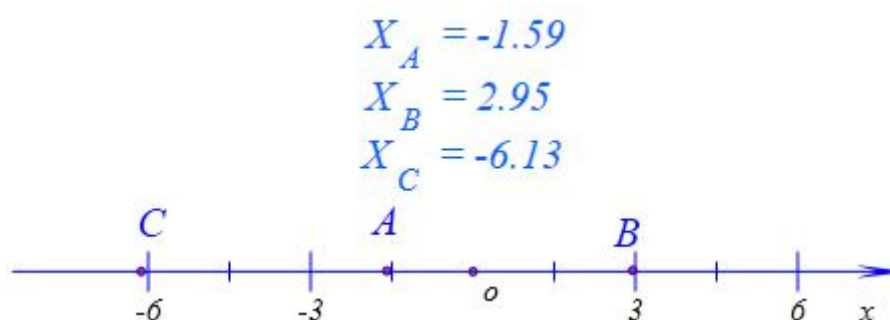


图 2

拖动点 A 或点 B，观察一下，前面我们所得到的结论是否仍然成立。

为了便于观察和检验，我们可以把 B 和 C 的值加起来，同时把 A 的值乘 2：

(6) 执行【测量】菜单中的【表达式】命令，在弹出的测量表达式对话框中，如图 3 所示，输入：2*v000，单击【确定】按钮即可得到 2*A 的值，右击表达式的值，把将属性窗口中\&之前的内容修改为 2*A 在单击【确定】完成；类似地，执行【测量】菜单中的【表达式】命令，在弹出的测量表达式对话框中，输入：v001+v002，单击确定按钮即可得到 B+C 的值，右击表达式的值，把将属性窗口中\&之前的内容修改为 B+C=，在单击【确定】完成。



图 3

完成后，关闭测量对话框，结果如图 4 所示：

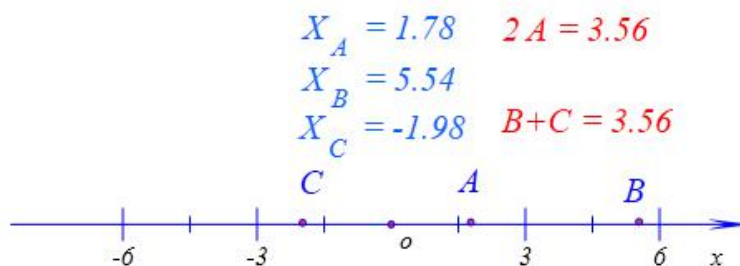


图 4

在拖动点 A 或点 B 的位置的过程中，点 C 的位置会随之改变。但无论如何变化，可以发现，总有 $2 \cdot A = B + C$ 成立。

事实上，通过中心对称图形的概念和性质不难理解，数轴上具有对称关系的两个点及其对称中心所表示的数之间的关系：

对称中心是两个对应点之间连线的中点，所以，线段 BA 的长度=线段 AC 的长度。即， $A - B = C - A$ ，因此 $2 \cdot A = B + C$ 。

当得到了这个结论之后，我们就能快速、准确地用带有刻度的直尺做出一个点关于另外一个点的对称点。例如，图 5 中有一个点 M 和点 N，要作出点 M 关于点 N 的中心对称点的操作是：

把一个尺子的 0 刻度位置与点 M 重合，然后让尺子带刻度的边沿与 MN 所在直线重合，读出点 N 所在的刻度，例如这里的是 17，然后把这个数乘以 2，在尺子上找出这个刻度对应的位置，就是我们所求得点。

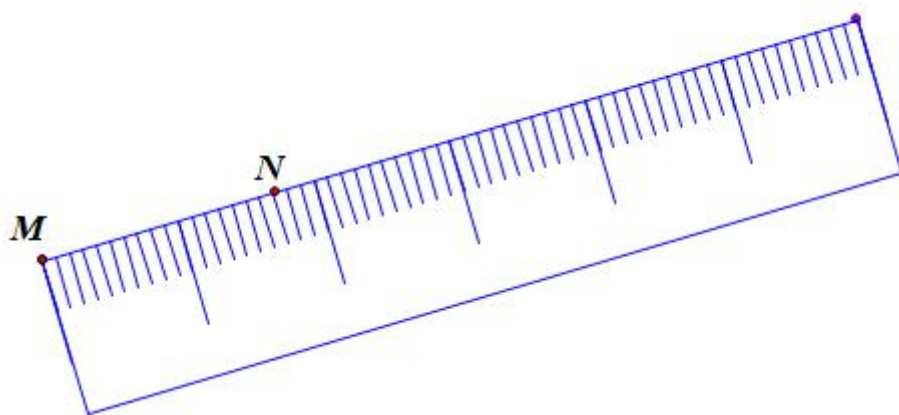


图 5

2, 想一想, 做一做

【思考问题】

(1) 如果在上图中, 让尺子带刻度的边沿与 MN 所在的直线重合的情况下, 点 M 不在尺子的 0 刻度位置处, 能够做出点 M 关于点 N 的对称点吗? 如果你认为可以, 请说出你的画图方案; 如果你认为不能, 请说明你的理由。

(2) 有一个刻度尺有 10 个单位长度。尺子带刻度的边沿与 AB 所在直线重合, 点 A 在刻度为 3 的位置, 点 B 在刻度为 7 的位置, 如何作出点 A 关于点 B 的对称点? 又如何做出点 B 关于点 A 的对称点呢?

【拓展训练】

(1) 在数轴上, 有两个点 M 、 N , 它们所在的位置分别表示实数 m 、 n , 请用 m 和 n 表示: M 关于 N 的对称点所在位置表示的数、 N 关于 M 的对称点所在位置表示的数、 M 与 N 之间的中点所在位置表示的数。

(2) 研究平面上直角坐标系中, 关于原点 O 对称的两个点坐标之间的关系:

单击【画图】工具, 任意绘制一个点 A ;

依次选择点 A 和点 O , 将其旋转 180 度, 得到点 B ;

测量点 A 和点 B 的 x 坐标和 y 坐标;

拖动点 A , 观察和探索点 A 的坐标与点 B 的坐标之间的关系。

尝试着得到你的结论并进一步解释你的结论。

(3) 研究平面上直角坐标系中, 关于任意一点对称的两个点坐标之间的关系:

在新的页面当中, 单击【画图】工具, 任意绘制一个点 A 和点 B ;

单击【选择】工具, 依次选择点 A 和点 B , 将其旋转 180 度, 得到点 C ;

选择点 A , 将其旋转, 得到点 C ;

测量点 A 、点 B 和点 C 的 x -坐标;

测量点 A 、点 B 和点 C 的 y -坐标。

拖动点 A 或点 B , 观察和探索点 A 、点 B 和点 C 的 x -坐标之间的关系; 观察和探索点 A 、点 B 和点 C 的 y -坐标之间的关系。

尝试着得到你的结论并进一步解释你的结论。

第 21 部分 可用字母当角度

1, 参数角度推面积

也许你知道三角形和梯形的面积公式？但是，你知道它们是如何推导得到的吗？

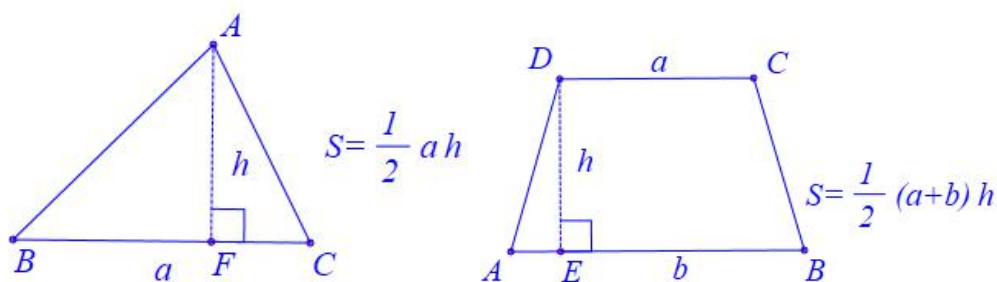


图 1

下面我们尝试着利用旋转变换，通过平行四边形或者长方形的面积推导三角形的面积和梯形的面积。

(1) 启动 Hawgent 皓骏动态数学软件，单击【画图】工具，作出任意点 A、B、C，选择点 A 和点 C，执行【画图】菜单下【约束点】子菜单中的【中点】命令，作出线段 AC 的中点 D；

(2) 右击点 D，在属性窗口中把它的名字修改为 O；

(3) 同时选择点 A、点 B 和点 C，执行【画图】菜单下【多边形】子菜单中的【多边形】命令，作出多边形 ABC；

我们希望看到三角形 ABC 绕点 O 动态旋转的过程，根据前面的经验我们知道，若将旋转角设定为：pi，就直接得到了三角形 ABC 关于点 O 的中心对称图形。那么，如何动态展示这个旋转的过程呢？

进入中学阶段的学习之后，我们学会了利用字母代替了数。字母的好处在于，它可以表示任何的数，它可以在不同时刻、不同情况下表示不同的数。

因此，我们可以利用一个字母，例如 t，当作旋转角，然后让这个字母的数值从 0 变化到 pi，就实现了图形从原来的位置开始动态旋转到关于点 O 中心对称的位置而结束。

(4) 按住【Ctrl】键，依次选择三角形 ABC 和点 O，执行【变换】菜单中的【旋转】命令，在弹出的对话框中旋转次数输入：1，角度输入：t，单击确定按钮完成；结果如图 2

所示。

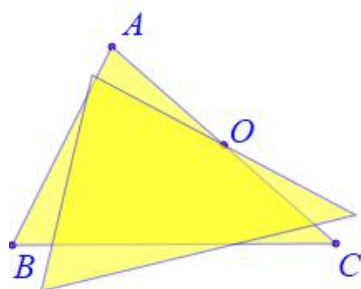


图 2

这时候 t 是多大呢？应该如何改变 t 的值呢？通过变量控制条我们能够轻松地让字母 t 的值从 0 变化到 180 度，操作方法是：

（7）执行【插入】菜单中的【变量】命令，在弹出的用户输入对话框中输入变量名字： t ，最小值：0，最大值：180，单击【确定】按钮；

向右拖动 t 的控制点，使得 t 的值等于 180，的结果如图 4 所示，通过三角形 ABC 的旋转变换，得到了一个与三角形 ABC 等底、同高的平行四边形。

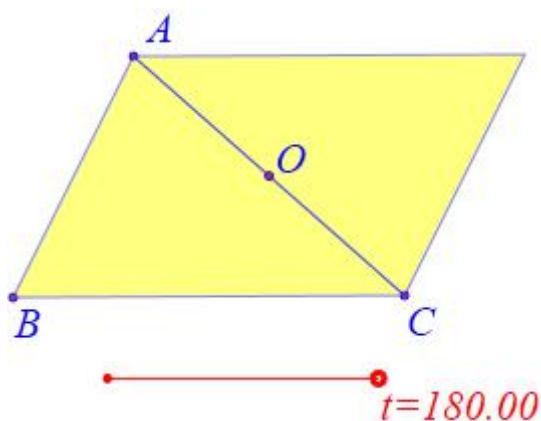


图 4

因为旋转得到的三角形与三角形 ABC 的形状和大小完全相同，所以三角形 ABC 的面积为平行四边形面积的一半。而平行四边形的面积等于底乘以高，所以三角形的面积等于底乘以高再除以 2。

拖动变量 t 的控制点到控制条的最左端，则旋转的图形重新回到与三角形 ABC 重合的位置。也就是说动画按钮的中间辅助按钮与它左边主按钮的运动过程的方向是相反的，这个功能在动画“类型”为一次运动时才能起到作用，也才有意义。

2, 想一想, 做一做

【思考问题】

(1) 在执行旋转几何对象之前, 我们为什么没有选择点 A 和点 C? 如果把点 A 和点 C 同时旋转了, 结果会如何呢?

(2) 要控制变量 t 的变化还可以采取按钮的方法实现, 请你试着添加变量 t 从 0 到 180 度单项一次运动的按钮。

【拓展训练】

利用类似的方法你能说明梯形的面积公式吗? 如图所示, 请你自己动手展示由梯形旋转得到平行四边形, 并利用平行四边形的面积推导得到梯形的面积。

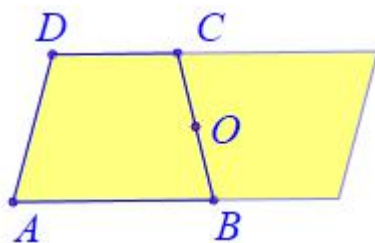


图 5

第 22 部分 说明面积用矩形

1, 三角形面积的推导

我们可以把三角形复制旋转之后得到一个平行四边形，利用平行四边形的面积推导出三角形的面积公式。

实际上，平行四边形的面积公式又是由矩形，即长方形，的面积公式推导而来的，这个问题我们将在后面进行研究和说明。

那么，不如直接把三角形变换为矩形，由长方形直接推导出三角形的面积。下面的方法就是其中的一个例子。

建立新的文档或页面。

(1) 单击【画图】工具，画任意三角形 ABC；依次选作点 A 和线段 BC 执行【画图】菜单下【约束点】子菜单中的【垂足】命令，作出点 A 到底边 BC 的垂足 D 和对应垂线段，依次选择点 A 和点 B，执行【画图】菜单下【约束点】子菜单中【中点】命令，作出 AB 的中点 E，同理作出 AC 的中点 F，如图 1 所示。

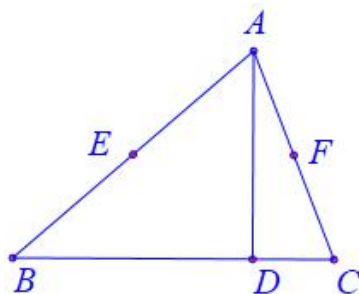


图 1

(2) 同时选择点 A、点 B 和点 D，执行【画图】菜单下【多边形】子菜单中的【多边形】命令，作出多边形 ABD；通过类似操作，作出多边形 ACD。

我们希望实现的过程是：三角形 ABD 绕点 E 旋转的过程中，三角形 ACD 也同时绕点 F 旋转；而且要求三角形 ABD 绕点 E 顺时针旋转。

三角形 ACD 绕点 F 逆时针旋转的过程，可以通过将旋转角设置为 t ，而让 t 从 0 变化到 π 的过程实现。那么，与此同时三角形 ABD 绕点 E 顺时针旋转的过程如何实现呢？请学习和研究下面的操作过程：

(3) 依次选择多边形 ABD 和点 E，执行【变换】菜单中的【旋转】命令，输入旋转次数：1，旋转角为： $-t$ ，点击【确定】按钮完成。

(4) 类似地，依次选择多边形 ACD 和点 F，执行【变换】菜单中的【旋转】命令，输入旋转次数：1，旋转角为： t ，点击【确定】按钮完成。结果如图 2 所示。

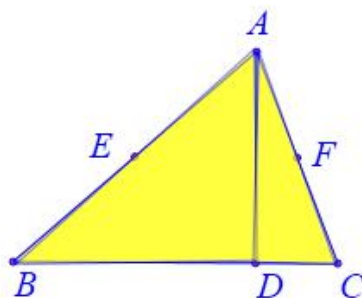


图 2

这时候看似图像和图 1 并没有什么变化，其实是因为旋转角度 t 和 $-t$ 的值还没设定，系统给 t 随机设定了一个很接近 0 的值，导致作出了的旋转图像几乎和原图重叠在一起，所以看起来没什么变化。下我们就来添加变量 t 的控制条，主动地控制 t 的取值：

(5) 执行【插入】菜单中的【变量】命令，在弹出的用户输入对话框中输入变量名字： t ，最小值：0，最大值：180，单击【确定】按钮；

(6) 拖动变量 t 的控制点到控制条的最右端，结果如图 3 所示，将两个直角三角形旋转后得到一个同底、同高的长方形，所以三角形的面积等于底乘以高再除以 2。

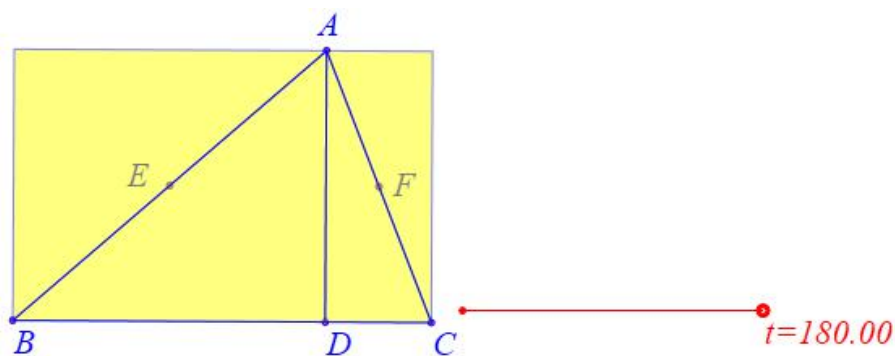


图 3

2, 想一想, 做一做

【拓展训练】

图 1 中的三角形 ABC 是一个锐角三角形，即它的三个角都是锐角。若 $\angle A$ 是钝角，如图

4 所示，那么上述说理过程仍然成立；若 $\angle B$ 或者 $\angle C$ 是钝角，如图 5 所示，应该如何通过矩形的面积推导得到三角形的面积呢？

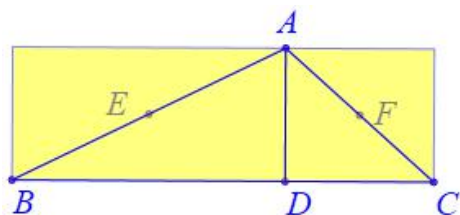


图 4

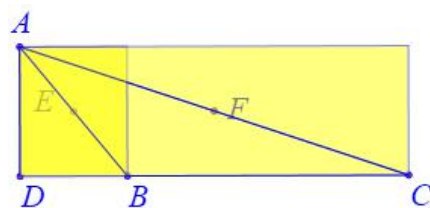


图 5

当 $\angle B$ 是钝角时，如图 5 所示，请利用矩形的面积直观地推导出三角形 ABC 的面积。

【思考问题】

1，如图 6 所示，点 D、点 E 分别是三角形 ABC 的边 AB、AC 的中点，那么点 D 和点 E 之间的连线就叫作三角形 ABC 的**中位线**。三角形的中位线有一条重要的性质是：三角形的中位线平行于第三边并且它的长度等于第三边的一半，即 $DE \parallel BC$ 且 $DE = BC/2$ 。请你自己动手在计算机上检验这条重要的性质。

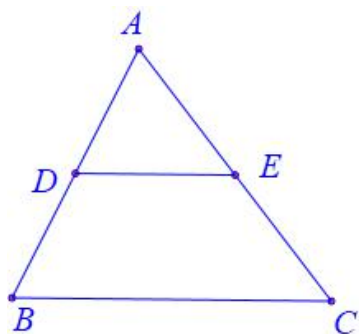


图 6

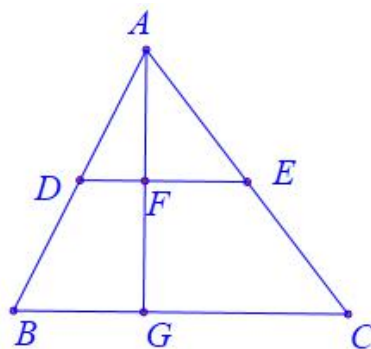


图 7

2，在图 6 中，三角形 ADE 与三角形 ABC 的形状相同而大小不同，具有这种性质的两个图形叫作**相似图形**。两个相似图形之间，对应部分的长度都成比例，例如在相似三角形 ABC 与 ADE 中，AD 与 AB 的比、AE 与 AC 的比以及 DE 与 BC 的比均为 1：2。同样，边 DE 上的高 AF 也等于边 BC 上的高 AG 的二分之一，如图 7 所示，因此 FG 的长度也等于 AG 的二分之一。那么就可以将三角形 ABC 按照图 8 所示剪切后，通过旋转得到同底而高为原来的二分之一的长方形，结果如图 9 所示，从而通过长方形的面积直接推导出三角形的面积。

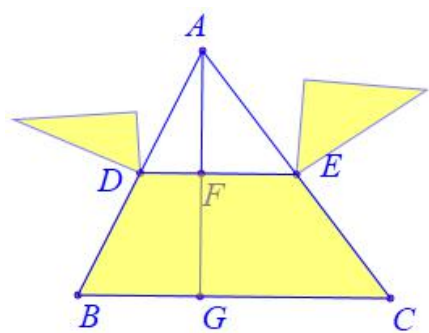


图 8

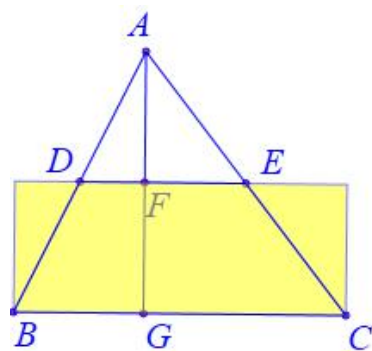


图 9

第 23 部分 平行移动谓平移

1, 平移的探究

生活周围，最简单、最基本的运动方式有两种：旋转和平移。事实上，大部分复杂的运动也是由这两种基本形式的运动组合而成的。

我们早就接触并认识了这两种运动方式。但是关于它们，也许我们还有许多需要更进一步去了解的内容。

如图 1 所示，点 P 到点 O 的距离在保持不变的情况下，若它能够运动，唯有一直改变运动的方向，直到回到原来的位置，结果它所运动过的路径就形成了一个圆。

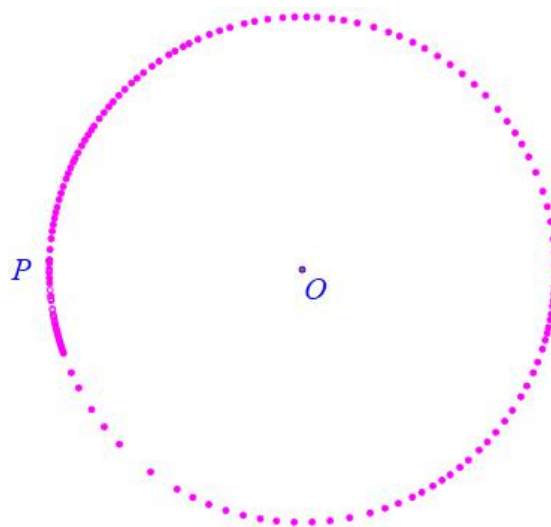


图 1

还有一种情况是：如图 2 所示，一个点 A，在保持水平向右运动方向不改变的情况下，若它能够运动，唯有距离出发的位置点 O 渐行渐远，结果它的路径就形成了一条直线。



图 2

这是两种最简单的运动方式：第一种我们已经非常熟悉了，叫做旋转；第二种我们也了解过，叫做平移。

平移二字什么含义呢？那么，缘何把这种沿着一个方向运动的过程叫做平移呢？我们需要认真分析一下这种运动方式的特征，从中体会“平移”二字的含义。

首先要解决的问题是：如何才能保证一个点一直沿着同一个方向运动呢？在计算机和

Hawgent 皓骏动态数学软件当中，最简单的方式是在已知直线上取一个点，那么这个点的位置无论怎么改变也只能这条直线上运动。

(1) 单击【画图】工具，绘制一段线段 AB，右击线段，如图 3 所示，在属性窗口中把端点箭头类型改为 3。

(2) 在 AB 上作一点 C。

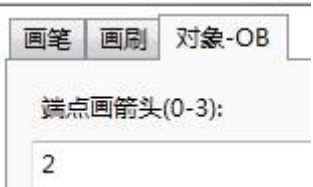


图 3

我们知道，从一个点到另外一个点不但确定了一段距离，还确定了一个方向。我们把有方向的量叫做向量。点 C 在水平直线上，无论它在直线上、点 A 右侧的位置如何改变，A 到 B 的方向，即向量 AB 的方向，始终为水平向右。因此，我们可以把向量 AB 的方向当作为平移的方向：

(3) 在 A 点附近作两个自由点 D 和 E，按住【Ctrl】键，选择点 A 和点 D 和点 E，执行【画图】菜单中【多边形】子菜单下的【多边形】命令，作出多边形 ADE

下面我们要把整个三角形 BOC 按照我们指定的方式进行平移：

(4) 按住【Ctrl】键，依次选择点 D、点 E、三角形 ADE 和点 A、点 C，执行【变换】菜单下【平移】命令，在弹出的窗口中直接点击【确定】，结果得到平移后的三角形 CFG，如图 4 所示：

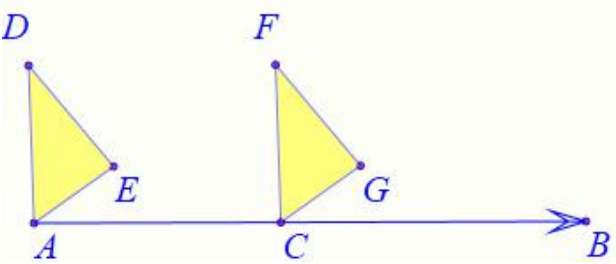


图 4

拖动点 C 回到点 A 的位置，然后向右移动一段距离，可以发现三角形 CFG 随点 C 的位置而改变。

在点 C 从原点 A 出发，水平向右运动的过程中，三角形 ADE 是如何运动的？

(6) 按住【Ctrl】键、选择点 F、点 C，执行【画图】菜单下的【跟踪】命令，得到点 F、点 C 的跟踪对象。

再次拖动点 C 回到原点 A 的位置，然后向右移动一段距离，结果如图 5 所示：

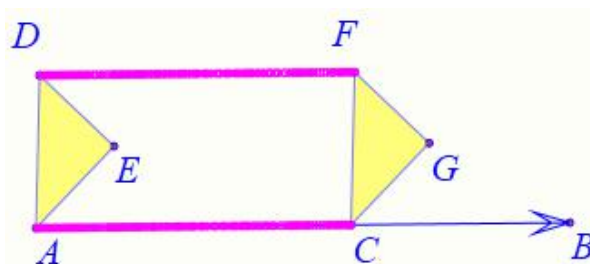


图 5

2，平移的结论

当然，在三角形 CGF 水平向右的方向移动过程中，点 C、点 G 与点 F 的相对位置始终保持不变。

并且点 F、点 G 一直“紧跟”点 C 的步伐，所以有向线段 AC 的长度与有向线段 DF 的长度也是相同的。

由此，我们得出了一个结论：

在三角形 CGF 移过程中，点 F 所经过的路径与点 C 所经过的路径方向相同且距离相等。

类似地，点 G 所经过的路径，即有向线段 EGA 与有向线段 SCDMA 的长度和方向是否完全相同呢？三角形 CGF 上其他位置上的点，所经过的路径与有向线段 AC 是否完全相同呢？

这应该是必须的！因为，如果有一点所经过的路径与有向线段 AC 的方向或长度不相同的话，那么这个三角形在运动过程中肯定发生了变形。

所以，这是平移的基本特征。不满足这种特征的移动方式，就不能称之为平移。这也是这种运动方式称之为“平移”的原因：各点所经过的路径相等且平行。

而且，这也应该是任何方向的平移都需要满足的特征。我们不妨进行实验和检验：

(7) 在新建页面中，单击【画图】工具，任意绘制一条线段 AB，在 AB 上任取一点 C；

(8) 然后在其他位置任意绘制点 D，并连接 AD。

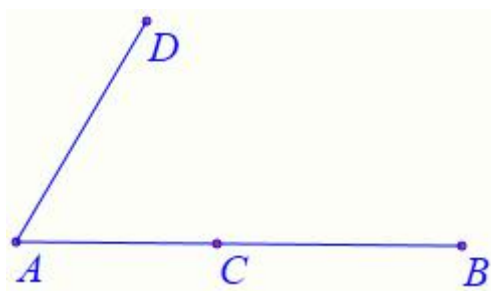


图 6

(9) 按住【Ctrl】键，依次选择点 D、线段 AE、点 A 和点 C，执行【变换】菜单中的【平移】命令，，在弹出的窗口中直接点击【确定】，得到点 E 和线段 CE。

为了操作和观察的方便，我们不再跟踪点 E，而是把点 D 和点 E 之间用线段连接起来，结果如图 7 所示：

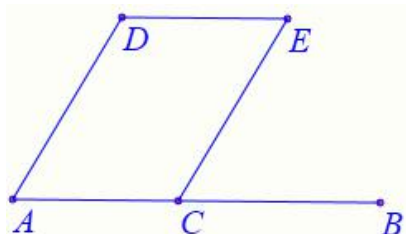


图 7

看起来有向线段 DE 和有向线段 AC 是相等的，即它们的方向相同且长度相等。

但是结论是否确实成立呢？我们可以测量线段 AC 和 DE 的长度进行检验。但是，如何判断 AC 与 DE 的方向是否一致呢？请你根据判定直线平行的方法设计一种方案，并进行检验和验证。

然后任意拖动点 B，可以改变向量 AC 的方向，观察结论是否依然成立。

【思考问题】

(1) 例如我们设置了平移向量为：OA，为什么没有平移点 O，如果把点 O 进行了平移，结果会如何？

(2) 沿着水平直线行走中的一个人，是在做平移运动吗？

【拓展训练】

在图 7 中，请你设计一种方案判断 AC 和 DE 的方向是否相同。根据你的方案进行操走和实验，并进一步得出结论。

第 24 部分 平移变换得平行

1, 平移与平行

研究平移，我们是从下面这个例子开始的。其中， OA 为水平向右的方向， OB 为竖直向上的方向。

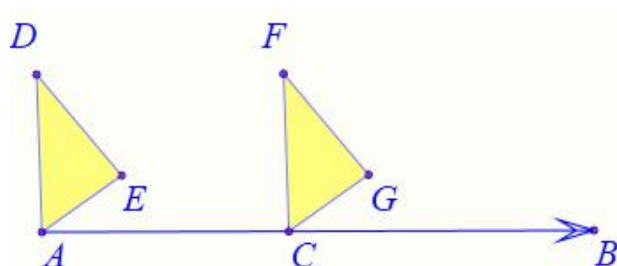


图 1

我们应该注意到，当点 C 从点 A 水平向右移动的过程中，有向线段 CF 始终保持与有向线段 AD 平行；当然它的长度也保持不变，始终等于 AD 的长度。那么就有：有向线段 CF 等于有向线段 AD 。

当平移的方向不再是水平向右，被平移的线段也不再是竖直向上时，是否仍然有平移前的线段与平移后的线段的方向和长度均相同呢？如下图 2，将线段 DE 按照向量 AC 平移得到了向量 FG 。

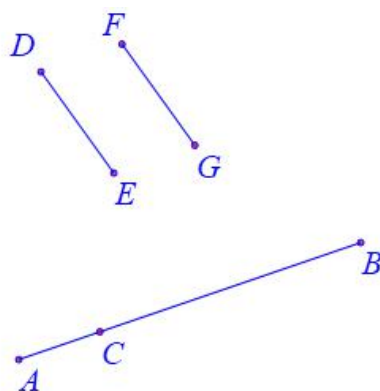


图 2

你可以通过测量进行实验和判断。事实上，我们通过思考也可以得出这个结论：

有向线段 DE 等于有向线段 FG 。

首先，在 DE 平移的过程中，它的长度保持不变是显而易见的，这也是平移变换的基本

特征。否则它就会发生了变形，就不是平移运动。

其次，在 DE 平移的过程中，它的方向也是保持不变的；否则，若 FG 与 DE 不再平行，则 DF 的长度不再等于 EG 的长度，即平移点 E 得到点 G 所经过的距离，与平移点 D 得到点 F 的距离不相同，这与平移的基本特征相矛盾。

2，平移下的平行

于是我们的到了一个结论：

一条线段按照某个向量平移后，得到的线段与原来的线段方向平行且长度相等。

又因为，对应点之间的连线均与平移向量相等，即方向相同且长度相等。根据平行四边形的定义知道，那么任何一条线段的两个端点与平移后的线段的两个端点就组成了一个平行四边形。

在这里四边形 DEGF 是一个平行四边形，四边形 ADFC 和四边形 AEGC 也都是平行四边形。

这样，我们就得到了利用平移的方式得到平行四边形的方法。我们动手操作一下：

(1) 单击【画图】工具，任意绘制三个点：A、B、C。

(2) 单击【选择】工具，按住【Ctrl】键，依次选择点 A、点 B 和点 C，执行【变换】菜单中的【平移】命令，得到点 D。结果如图 3 所示：

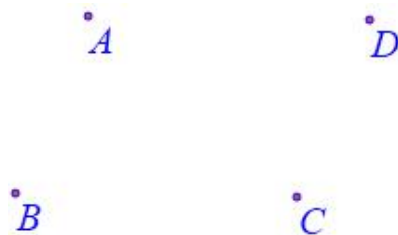


图 3

那么，因为直线 AD//直线 BC，并且直线 AB//直线 CD，所以点 A、点 B、点 C 和点 D 所在的多边形是一个平行四边形。我们可以把它构造出来，观察一下：

(3) 依次选择点 A、点 B、点 C 和点 D，执行【画图】菜单中【多边形】子菜单下的【多边形】命令，结果如图 4 所示：

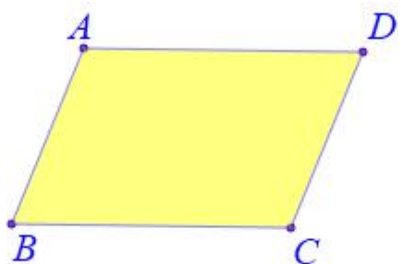


图 4

如果继续把点 D 和点 C 平移，结果会如何呢？

例如点 D 和点 C 平移分别对应得到了 E 和点 F，那么应该有直线 $CD \parallel$ 直线 FE，并且直线 $DE \parallel$ 直线 CF，因此点 C、D、E 和 F 四个点所在的多边形仍然是一个平行四边形。我们试试看：

(4) 按住 **【Ctrl】** 键，依次选择平行四边形 ABCD、点 B 和点 C，执行 **【变换】** 菜单中的 **【平移】** 命令，得到新的平行四边形，结果如图 5 所示：

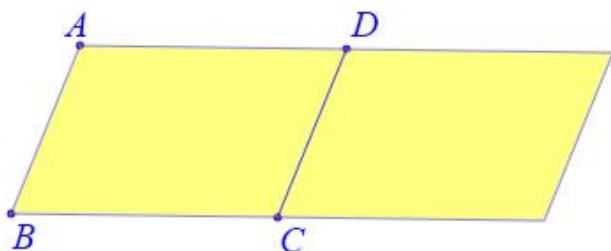


图 5

我们看到，通过一次平移，就从平行四边形的一条边得到了它的另外一条边，例如从平行四边形 ABCD 的边 AB 得到边 CD、从平行四边形 CDEF 的边 CD 得到未命名的一边。

在这里，CD 既是平行四边形 ABCD 的边，也是新平行四边形的边。因此平行四边形 ABCD 和新平行四边形之间就没有任何缝隙地紧靠在一起。

平移的操作继续下去，就可以不断地按照向量 BC 的方向不断地继续下去。我们针对平移多边形的操作尝试几次：

(5) 按住 **【Ctrl】** 键，依次选择刚作的平行四边形、点 B 和点 C，执行 **【变换】** 菜单中的 **【平移】** 命令，在弹出窗口中输入平移次数 3，得到新的三个平行四边形，结果如图 6 所示，当然在这个过程并没有平移平行四边形的顶点，也没有得到平行四边形的顶点。

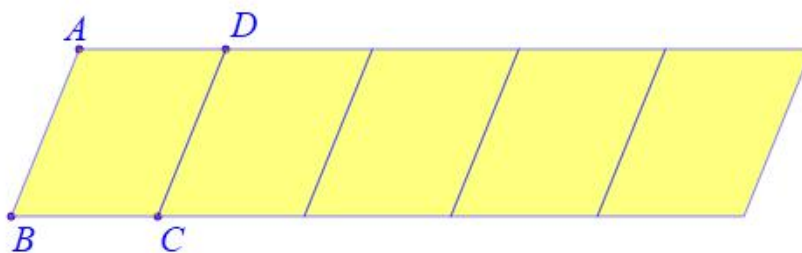


图 6

只要你愿意，这个平移的过程，可以继续下去，直到你认为足够了，或者改变了平移的方向。

右边的多边形均是由左边的多边形通过平移而得到的，如果把左边的某个多边形删除了，那么它以及它右侧的所有多边形均会被删除：

(6) 选择中间的某个的多边形，单击【删除】按钮，结果如图 7 所示，该三角形开始右边的三角形全部被删除了。

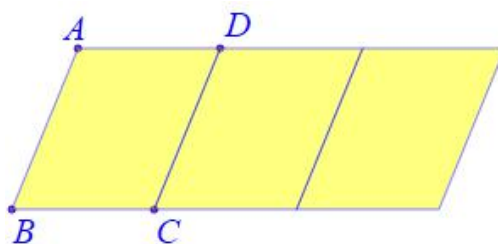


图 7

前面我们通过平移的方式，由平行四边形 ABCD 得到了新的平行四边形。当然，通过平移的方式，也可以由新的平行四边形得到平行四边形 ABCD。只不过，选定有向线段 CB 为平移向量即可。不信你试试看：

(7) 选择平行四边形 ABCD，执行【编辑】菜单中的【隐藏】命令，隐藏平行四边形 ABCD。结果如图 8 所示：

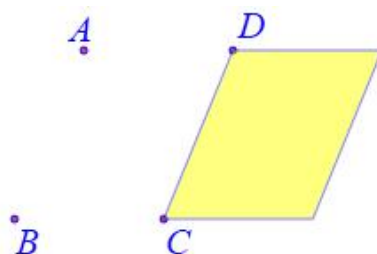


图 8

(12) 按住【Ctrl】键，依次选择刚作的平行四边形、点 C 和点 B，执行【变换】菜单中的【平移】命令，结果发现刚刚隐藏的又“出现”了，其实这个并不是原来的四边形。而

是刚作的平行四边形向左平移后得出的图像，结果如图 9 所示：

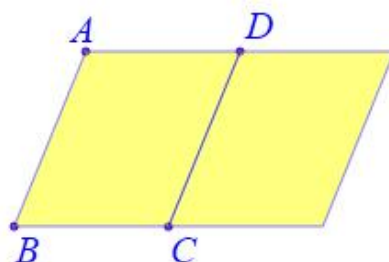


图 9

通过前面的研究，我们知道了平移之后的图形与原来的图形之间所存在的关系和性质。如果两个图形之间存在这种关系，那么一个图形可以通过另外一个图形通过平移的方式得到；反过来，如果这两个图形之间不存在这种关系，那么其中任何一个图形都不能通过平移另外一个图形的方式得到。

3，想一想，做一做

【思考问题】

(1) 已知平行四边形的三个顶点 A、B、C，将点 A 按照向量 \overrightarrow{BC} 进行平移，可以得到平行四边形的第四个顶点 D。还可以按照什么向量将哪个点通过平移的方式得到平行四边形的第四个顶点 D？当然，要保证 $\angle ABC$ 是平行四边形 ABCD 的内角。

(2) 如图 10 所示，右侧的小象是由左边的小象按照向量 \overrightarrow{AC} 平移而得到的。在这个图形当中，是否存在平行四边形？如果存在，请你找出来；如果不存在，请你说明理由。

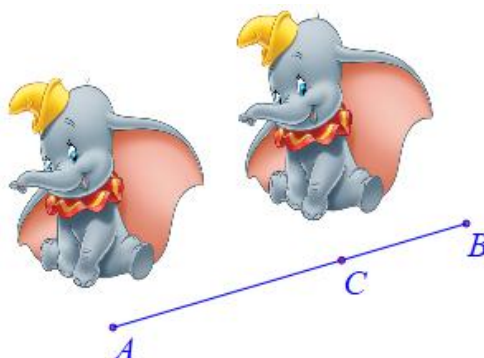


图 10

【拓展训练】

如图 11 所示，有两个形状和大小都完全相同的三角形 XYZ 和 X'Y'Z'，你认为能够通

过平移的方式由三角形 XYZ 得到三角形 $X'Y'Z'$ 吗？请你设计一种方案，并且通过操作验证你的结论。

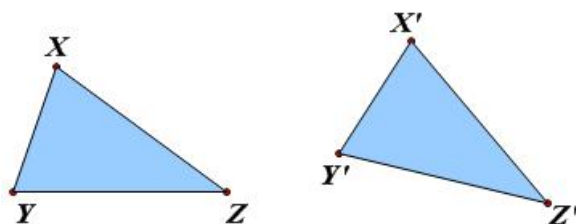


图 11

打开文件“两个全等的三角形.dmr”可以看到上述图案中的两个大小和形状都完全相同的三角形。

第 25 部分 平移图案得镶嵌

1, 平移下的镶嵌图案

我们知道：将一组图形，如果能够不重叠、不留空隙地铺满平面，就形成了**密铺图案**，密铺图案也叫**镶嵌图案**。

通过前面的操作和研究，我们发现，将一个平行四边形按照它的一条边对应的向量平移后，两个平行四边形就能够不重叠、不留缝隙地排列在一起。这让我们想到，利用平行四边形制作密铺图案的可能性。当然，只在一个方向上平移是远远不够的，还需要按照这条边的邻边作为平移向量进行平移，才有可能在另外一个方向上发展，从而有机会铺满整个平面。是否可行，现在就让我们自己动手做做看：

(1) 单击【画图】工具，任意绘制三个点：A、B、C。

(2) 单击【选择】工具，按住【Ctrl】键，依次选择点 A、点 B 和点 C，执行【变换】菜单中的【平移】命令，得到点 D。结果如图 1 所示：



图 1

(3) 依次选择点 A、点 B、点 C 和点 D，执行【画图】菜单中【多边形】子菜单下的【多边形】命令，结果如图 1 所示：

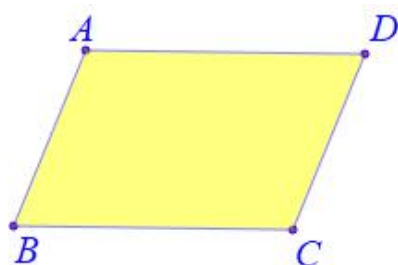


图 2

(5) 按住【Ctrl】键，选择平行四边形和 B、C 两点，执行【变换】菜单中的【平移】命令，平移次数设为 4 次。将有向线段 BC 设置为平移向量，结果如图 4 所示：

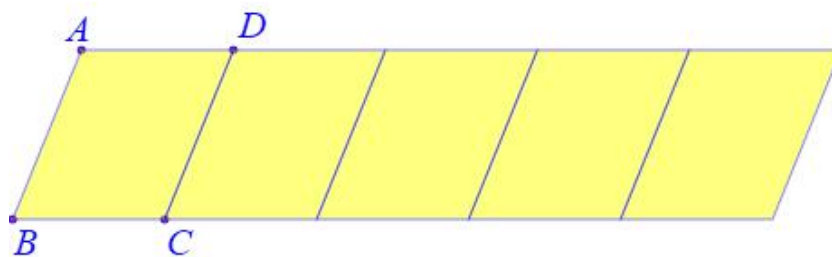


图 3

(6) 选择所有三角形和 B、A 两点，执行【变换】【平移】，平移次数设为 4 次。将向量 \overrightarrow{BA} 设置为平移向量，结果如图 5 所示：

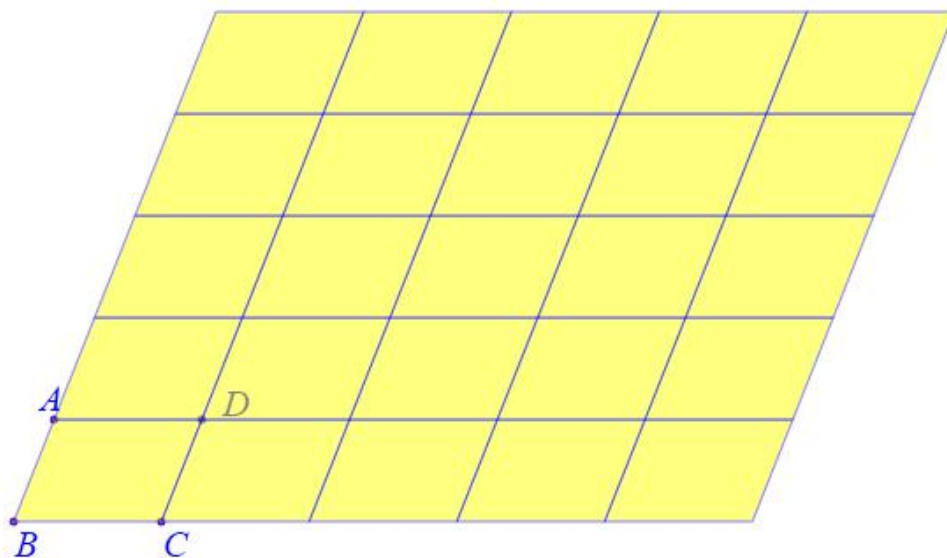


图 4

(7) 隐藏点所有点，并给四边形填充合适的颜色，这样就得到了平行四边形的密铺图案。

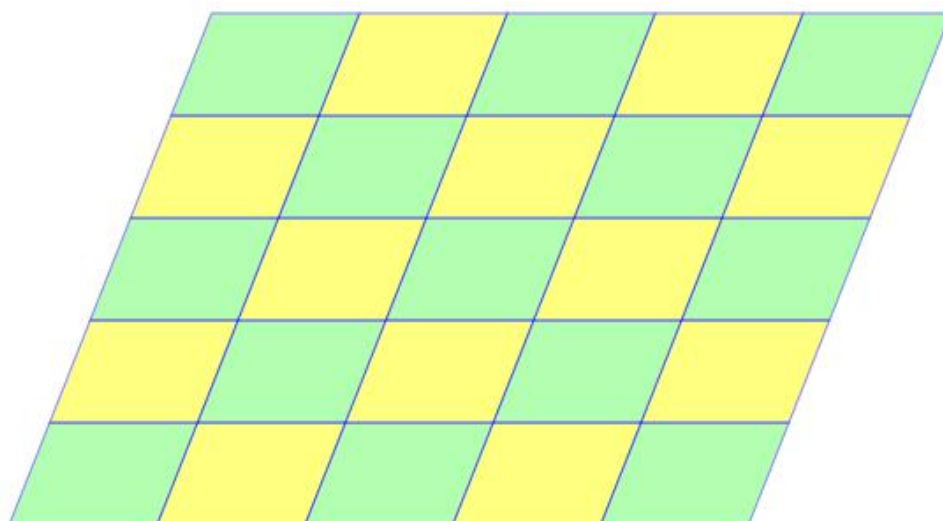


图 5 最终结果

第 26 部分 利用平移说道理

1, 解说平行四边形的面积

前面我们通过旋转的方式,利用平行四边形的面积或长方形的面积推导出了三角形的面积和梯形的面积。看来,恰当地运用直观的图形变换还可以用来揭示一些数学本质,能够将一些深刻的道理通过浅显、易懂的方式表现出来,让所有人都能明白并且印象深刻。

学习了平移变换,在这里我们也介绍一个利用平移变换帮助我们直观、形象地理解平行四边形面积公式的例子。

我们知道,边长为 1 的正方形的面积等于 1。如图 1 所示,长为 3、宽为 2 的长方形的面积,就等于 3×2 个边长为 1 的小正方形面积之和,等于 6。我们还知道更加一般的情况:长为 a 、宽为 b 的长方形的面积等于 ab 。

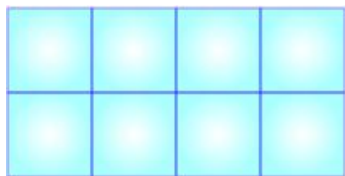


图 1



图 2

如图 2 所示,这是一个长为 3、高为 2 的平行四边形,那么它的面积等于多少呢?可能你已经知道结论:平行四边形的面积等于底 \times 高。

在我们学数学的过程中,处处都需要讲清楚其中的道理。如果我们知道平行四边形面积的公式,同时还知道它是如何推导出来的,那么我们就能够加深对它的认识和理解。因此,即使将来忘记了,自己也能够非常迅速地重新推导出来。当然,平行四边形的面积公式相对来说较为简单,而将来我们遇到的许多公式会比较复杂,这时深刻理解它们的内涵就显得尤其重要。

那么,究竟如何根据长方形面积公式推导得到平行四边形的面积公式呢?

首先,我们这样考虑问题:既然平行四边形的面积等于底乘高,那么对于一个底为 a 、高为 b 的平行四边形来说,剪切之后一定可以重新拼凑成为一个长为 a 、宽为 b 的长方形。

2, 验证平行四边形的面积

剪切的方法有很多，最主要的任务就是能够得到直角，最基本的原则就是剪切的次数越少越好。下面我们就来完成这个剪切并重新拼凑的过程。

- (1) 单击【画图】工具，作任意三点 A、B 和 C。
- (2) 单击【画图】工具，按住【Ctrl】键，依次选择点 A，点 B 和点 C，执行【画图】菜单下【多边形】子菜单中的【平行四边形】命令，作出平行四边形 ABCD。
- (3) 按住【Ctrl】键，依次选择点 A 和线段 BC，执行【画图】菜单下【约束点】子菜单中的【垂足】命令，作出点 A 到线段 BC 的垂足 E 及相应的垂线段，结果如图 3 所示。

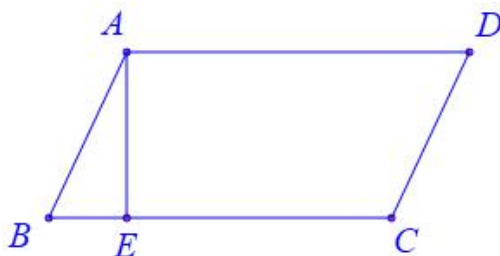


图 3

为了动态地展示平移的过程，让平移的方向始终保持不变，我们可以在平行四边形的边 BC 上任意取一点，那么这个点只能在直线 BC 上运动，当然也可以从点 B 移动到点 C，这样就构造了一个长度改变而方向不变的向量：

- (4) 单击【画图】工具，在线段 BC 上任意作一点 F。
- (5) 按住【Ctrl】键，依次选择点 A、B 和 E，执行【画图】菜单下【多边形】子菜单中的【多边形】命令，作出多边形 ABE；类似地依次选择点 AECD，作出多边形 AECD。
- (6) 按住【Ctrl】键，依次选择三角形 ABE 和点 B 和点 E，执行【变换】菜单下的【平移】命令，结果如图 4 所示，得到平移后的三角形。

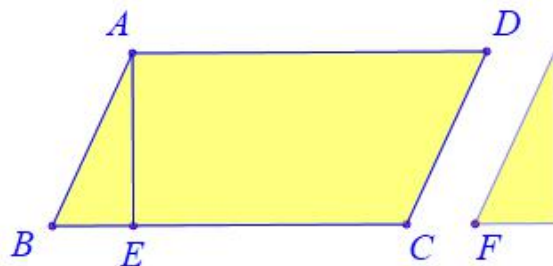


图 4

为了后面操作的方便，我们可以将点 F 拖动到点 C 的右侧。那么点 G 和点 H 也被拖动到

了平行四边形之外。

(7) 选择三角形 ABE，执行【编辑】菜单中的【隐藏】命令，将它隐藏；选择点 A、B、C、D、E、F，执行【编辑】菜单中的【隐藏】命令，将这些点隐藏，将其从作图区中隐藏；重复类似操作，隐藏所有线段。（提示：借助【属性】菜单中的【选择】子菜单，可以让我们跟方便地选取对象，请自行尝试。）结果如图 5 所示。

多边形本身带有边界，前面我们隐藏所有的线段是避免边界的重复出现。



图 5

为了让点 F 自动地运动，并且准确地展示从点 B 运动到点 C 的过程，我们可以构造点 F 的动画按钮，并且按照我们自己的需求运动的方式：

(8) 执行【插入】菜单下【常用按钮】子菜单中的【对象一次运动】命令，如图 6 所示，在弹出的动画属性设置对话框中点击“动画”标签，把其程序命令修改为：修改为：`ObjAnimation(12,50,3);`，点击【修改动作】，接着给按钮增加还原的动作，如图 7 所示再在标题中输入：还原，程序命令中输入：`ObjAnimation(12,50,4);`，点击【增加动作】，再单击【确定】完成。



图 6

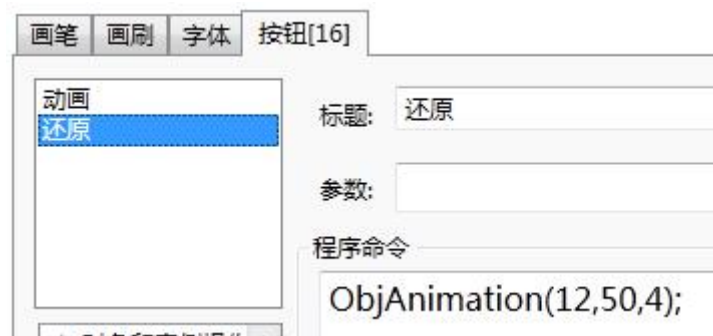


图 7

(9) 单击【动画】按钮，按钮名字变为【还原】，三角形平移到梯形的右侧从而拼凑成一个长方形如图 8 所示；单击【还原】按钮，按钮名字变为【动画】，三角形平移到梯形的左侧从而拼凑成一个平行四边形，如图 9 所示。



图 8



图 9

这个动态平移的过程，就是平行四边形与长方形相互转换的过程，由此可以知道：

平行四边形的面积=底×高。

推导平行四边面积公式的过程依赖于如下简单而明了的道理：

一个平面图形被分割成若干部分后，面积的总和保持不变。

在动画按钮中，缘何参数 u000 的范围设置为：0 到 1，单击动画按钮后，点 F 就自动地从点 B 运动到点 C 呢？

打开点 F 的属性对话框，可以看到参数 u000。

前面我们介绍过圆上的点对应的参数表示从以圆心为顶点的一个角的大小，其中角的始边是从圆心出发水平向右的射线，而角的终边就是圆心出发到这个点的所在方向的射线。同样，有向线段上的点对应的参数也有它所表示的意义。而具体表示什么意义，请你自己动手操作和研究。

3, 想一想, 做一做

【思考问题】

(1) 如图 10 所示, 平行四边形 ABCD 的边 AB 固定, 点 D 在以点 A 为圆心的圆周上运动, 请问, 平行四边形 ABCD 的面积有没有最大值? 何时最大? 最小值呢?

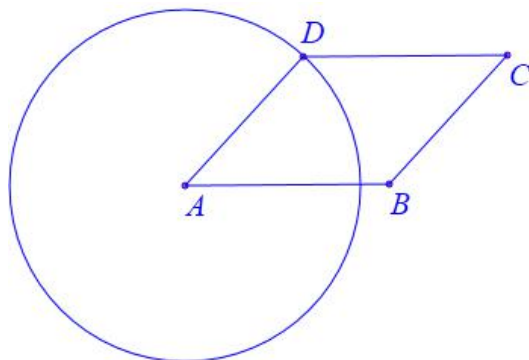


图 10 边长不变平行四边形

(2) 你还记得梯形的面积公式吗? 你能通过长方形的面积推导出梯形的面积吗?

(3) 前面我们说过“一个平面图形被分割成若干部分后, 面积的总和保持不变”。打开文件“图形的剪切与拼接.dmr”, 如图 11 所示。单击“平移”按钮, 结果如图 12 所示, 图形怎么少了一块? 这是怎么回事? 你能解释其中的道理吗?

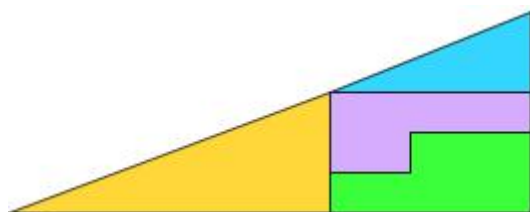


图 11

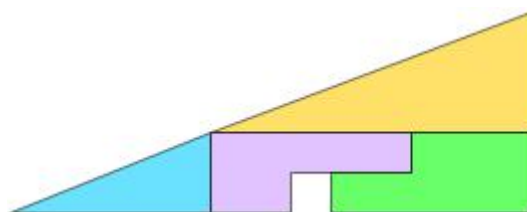


图 12

【拓展训练】

首先完成以下操作:

- (1) 在新的页面中, 任意绘制一条线段 AB;
- (2) 在线段 AB 上任意取一点 C;
- (3) 插入参数 u000 的变量尺, 并设置范围为: -1 到 1;

然后进行以下操作, 研究参数 u0000 所表示的意义:

- (1) 拖动点 C 到与点 A 重合附近的位置, 参数 u000 的值大约是多少?
- (2) 拖动点 C 到与点 B 重合附近的位置, 参数 u000 的值大约是多少?
- (3) 点 C 在线段 AB 之间时, 参数 u000 的大小范围是多少?

(4) 点 C 在线段 AB 的延长线时, 参数 u_{000} 的大小范围是多少?

(5) 点 C 在线段 AB 的反向延长线时, 参数 u_{000} 的大小范围是多少?

同构以上研究, 你能断定 u_{000} 所表示的几何意义吗? 然后设计一种实验方案, 检验你的结论。

第 27 部分 平移变换代数析

1, 几何、代数是一家。

自从笛卡尔（Descartes）建立了解析几何，意味着几何与代数正式巧妙地结合在一起了。从此，开始了数学的一次根本性变革，这是数与形的统一，这是数学发展的转折。

如图 1 所示，例如点 A 在第 3 行、第 2 列，我们知道点 A 的位置就可以表示为 (3, 2)。

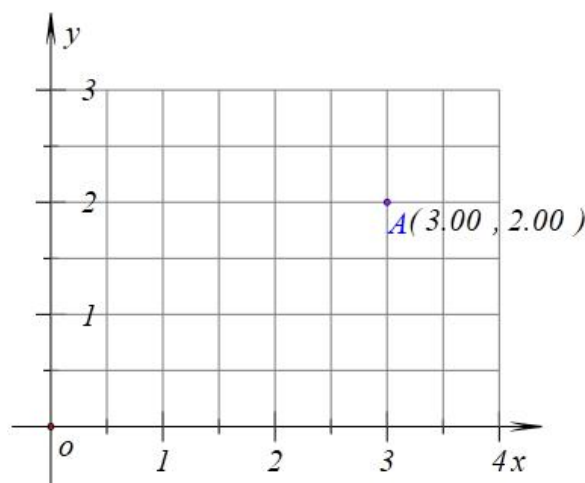


图 1

那么 (3, 2) 就叫作点 A 的坐标。在坐标中有两个数值，用逗号分开，逗号前的数值叫作点的行数，即横坐标，在坐标系中也叫做 x-坐标；逗号后的数值叫作点的列数，即纵坐标，在坐标系中也叫做 y-坐标。

打开文件“点 A 及其坐标.dmr”，如图 2 所示，拖动点 A 可改变它的位置，请你说出点 A 对应的坐标。

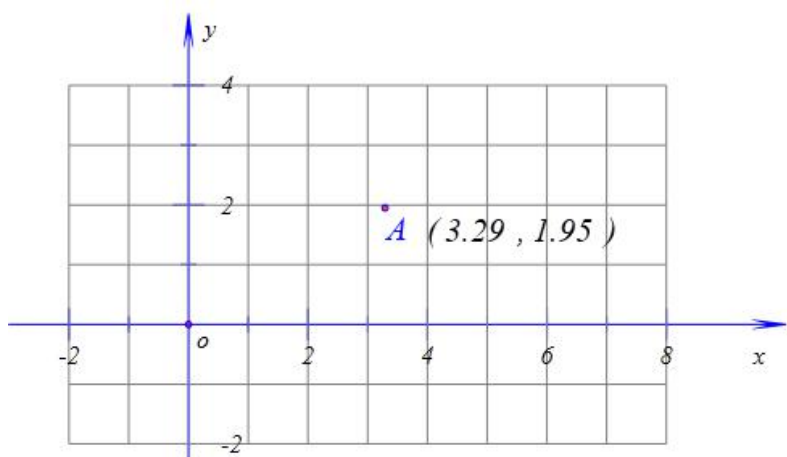


图 2

点 A 不但可以在原点 O 的右侧，它也可以在原点 O 的左侧，这时它的横坐标就为负数，如图 3 所示；同样道理，点 A 不但可以在原点 O 的上方，它也可以在原点 O 的下方，这时它的纵坐标就为负数，如图 4 所示。

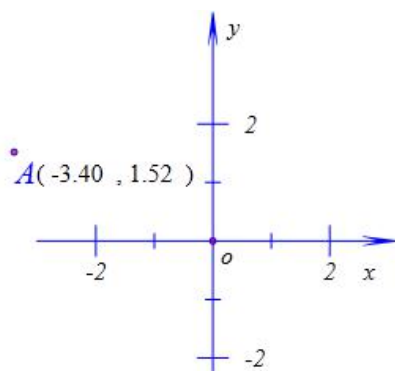


图 3

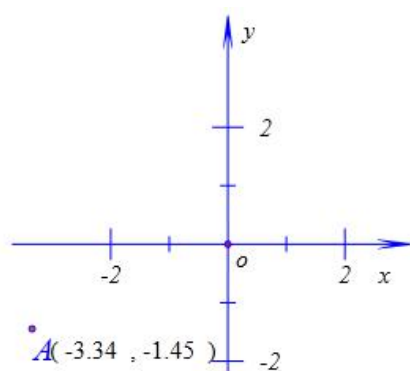


图 4

单击“坐标”按钮可以显示出它的坐标，对照这个文本检验你所说的坐标是否正确。

2，平移下的坐标点

下面我们就以平移变换为例，从代数的角度理解几何中的图形变换。

如图 5 所示，已知点 A 的坐标为 (2, 2)，若点 B 是将点 A 向右平移 2 个单位而得到的，点 C 是将点 A 向上平移 3 个单位而得到的。请你直接读出点 B、点 C 的坐标，并猜想它们的坐标与点 A 的坐标之间的关系。

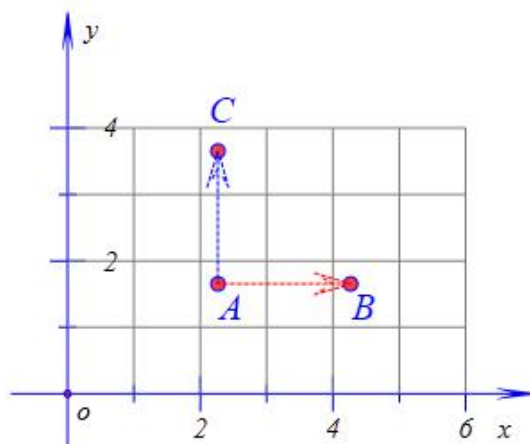


图 5

通过以上关系我们可以看出：点 B 的横坐标 4 等于点 A 的横坐标 2 加上 2，而它们的纵坐标相等；点 C 的纵坐标 5 等于点 A 的纵坐标 2 加上 3，而它们的横坐标相等。这就是平移变换后两个点之间的坐标关系，即：

设点 A 的坐标为 (x, y) ，如果把它按照水平向右平移 m 个单位，得到点 B，那么点 B 的坐标可表示为 $(x+m, y)$ ；如果把它按照竖直向上平移 n 个单位，得到点 C，那么点 C 的坐标可表示为 $(x, y+n)$ 。

类似地有：

设点 A 的坐标为 (x, y) ，如果把它按照水平向左平移 m 个单位，得到点 B，那么点 B 的坐标可表示为 $(x-m, y)$ ；如果把它按照竖直向下平移 n 个单位，得到点 C，那么点 C 的坐标可表示为 $(x, y-n)$ 。

3，平移下的坐标关系

打开文件“平移之后的坐标关系 2.dmr”，点 A 可以被任意拖动，点 B 可以在水平方向上被拖动，点 C 可以在竖直方向上被拖动。观察和检验线段 AB 的长度与点 A、点 B 的坐标之间的关系，以及观察和检验 AC 的长度与点 A、点 C 之间的关系。如图 6、图 7 所示。

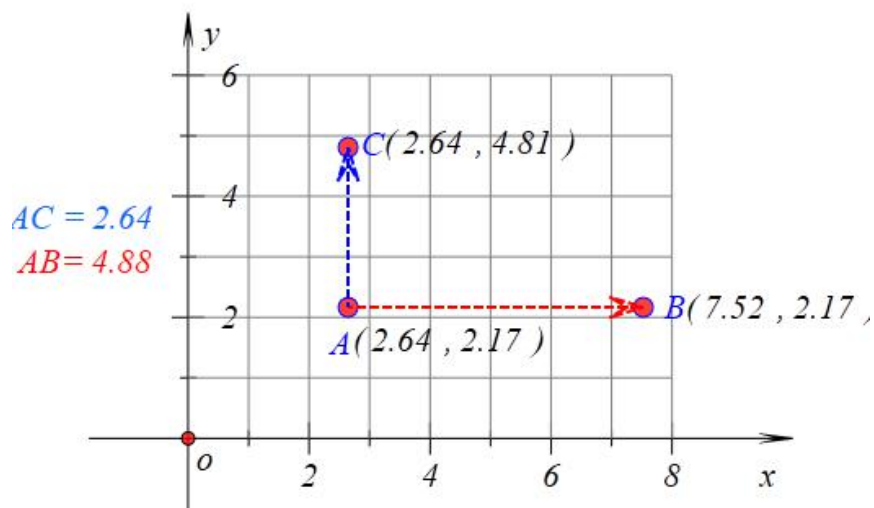


图 6

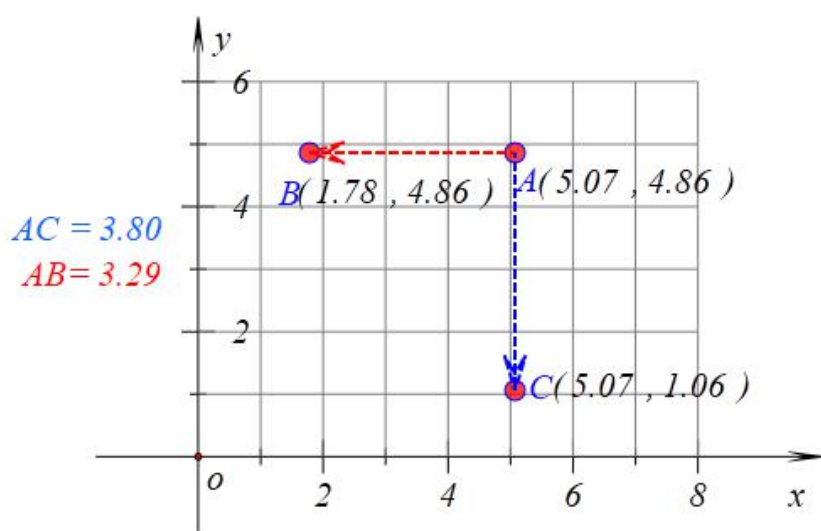


图 7

如图 8 所示，若点 D 是经过点 A 平移得到的，但点 D 和点 A 不在同一水平方向也不在同一竖直方向，那么如何利用点 A 的坐标表示点 D 的坐标呢？（提示：可以利用文件：平移之后的坐标关系 3.dmr 进行探究。）

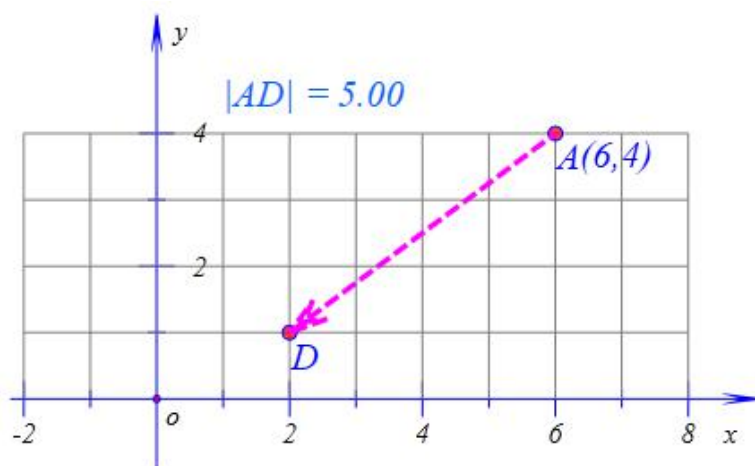


图 8

假如有一点 E，使得 AE 处于水平方向，而 DE 处于竖直方向。那么点 A 平移到点 D 的过程可以认为是：点 A 首先按照水平方向首先平移到点 E 的位置，然后点 E 按照竖直方向平移到点 D 的位置，如图 9 所示，这时点 E 的坐标可表示为 $(6-4, 4)$ ，即 $(2, 4)$ ，从而点 D 的坐标可表示为 $(2, 4-3)$ ，即 $(2, 1)$ ；当然也可以认为是点 A 首先按照竖直方向平移到点 E 的位置，然后点 E 按照水平方向平移到点 D 的位置，如图 10 所示，这时点 E 的坐标可表示为 $(6, 4-3)$ ，即 $(6, 1)$ ，从而点 D 的坐标可表示为 $(6-4, 1)$ ，即 $(2, 1)$ 。

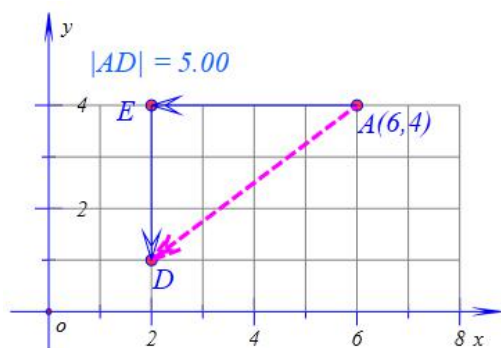


图 9

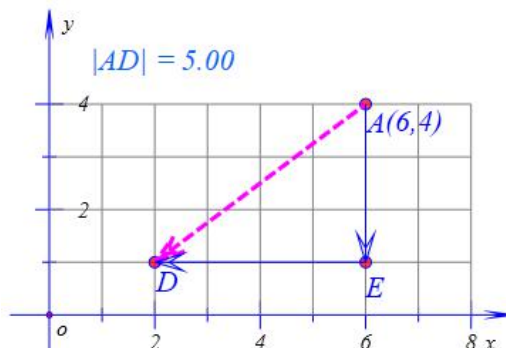


图 10

对于以上两种情况都有：点 D 的坐标为 $(6-4, 4-3)$ ，即 $(2, 1)$ 。

4，想一想，做一做

【拓展训练】

事实上，对于任何情况下，知道了平移的距离和方向之后，通过已知点的坐标都能求得平移之后的点的坐标。请设计实验检验一般情况下上面得到的结论仍然成立。

【思考问题】

我们知道，有些时候虽然平移的距离相等，但是平移的方向不同，那么平移之后的位置也不相同。所以，问题的关键是，若知道起始点的位置 A 和平移后的终点的位置 D，如何知道在水平方向和竖直方向上分别平移的距离？

当我们学习了直角三角形的有关知识之后，就会知道，水平方向的长度 DE 等于 $AD\cos\alpha$ ，竖直方向上的长度 AE 等于 $AD\sin\alpha$ ，其中 α 是水平向右的方向到有向线段 AD 的角度，如图 11、图 12 所示。

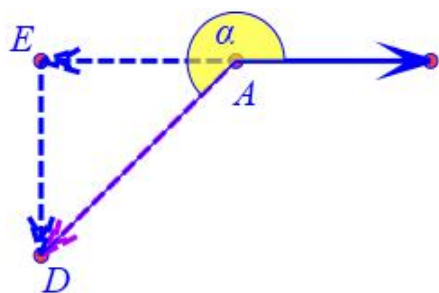


图 11

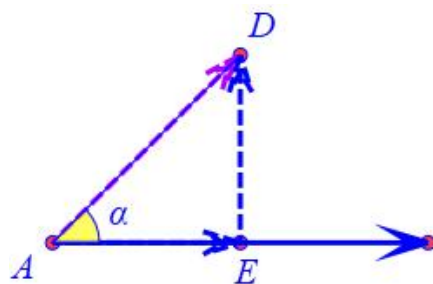


图 12

因此不难得到平移变换的坐标转换公式：
$$\begin{cases} x' = x + d \cos \alpha \\ y' = y + d \sin \alpha \end{cases}$$
，其中原来的位置为 A (x, y)，

平移了长度为 d 的距离后，得到点 A' (x' , y')，其中 α 为 x 轴正方向到平移方向的角度。

第 28 部分 平移旋转螺旋线

1, 平移旋转螺旋线

在现实世界中，进行平移运动或者进行旋转运动的现象比比皆是，但更多的时候，这两种运动形式的组合，即某个物体在进行平移运动的同时也在做旋转运动。

例如沿着直线向前行驶的汽车，从整体上看它的车身在进行平移，从局部上看它的四个车轮在进行平移运动的同时也在进行着旋转变换。

我们知道，车轮的转动的快慢与汽车向前行驶的速度之间是有关系的：车轮不转动，汽车就停滞不前；车轮转得慢，汽车就行驶得慢；车轮转得越快，汽车就行驶得越快。

看来，对于向前行驶的汽车来说，车轮的旋转快慢影响了汽车向前行驶的速度。

你知道如何表示汽车的行驶速度吗？是否也知道如何表示车轮的旋转快慢呢？那么汽车的行驶速度与车轮的旋转速度之间具有什么样的确定的关系呢？这是我们后面将要进行深入研究的问题。

你所熟悉的生活周围，还有哪里现象既有旋转又有平移。有哪些现象旋转的快慢与平移的速度之间能够相互影响？而有些现象旋转的快慢与平移的速度之间没有相互依赖的关系？

当然，也有一些现象，旋转和平移之间并没有绝对的关系。下面就是一个例子：

在转盘的中央位置有一只蚂蚁，在转盘的边沿处有一份食物。请你为蚂蚁设计一条路线，使得它所经过最短的路程便能吃到盘子边沿的食物？

如图 1 所示，如果圆盘是在转动过程中，蚂蚁若能够吃到食物，它所经过的最短路径是一条什么图案呢？

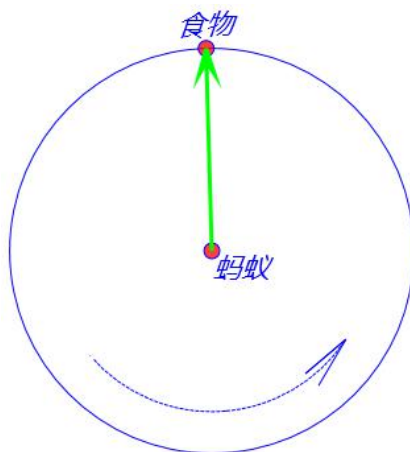


图 1

蚂蚁是很聪明的，它不考虑转盘是否在转动，直接朝转盘的方向爬去，并且最终吃到了食物。你认为这是吃到食物所经过的最短路程吗？很显然，在转盘静止的情况下，这的确是正确的。

实际上，根本无须考虑转盘是否在旋转，蚂蚁也不关心盘子旋转的快慢，在转盘上的蚂蚁朝着食物的直线方向爬行，所经过的路程都是最短的，而且蚂蚁所经过的路程都是相同的。

然而，对于置身事外的我们，通过我们的眼睛观察到的爬行的蚂蚁所经过的路线是什么形状呢？

因为蚂蚁从盘子中心到食物是沿着直线的方向移动，因此是在进行平移；同时它也随着盘子在进行旋转，因此同时进行旋转。所以，在盘子旋转过程中，爬行中的蚂蚁在进行平移的同时也在进行旋转，因此蚂蚁的运动过程是一个既有平移又有旋转的组合运动方式。

下面我们在计算机上模拟蚂蚁的运动过程，首先绘制一个圆盘：

(1)只显示坐标原点 O，而隐藏坐标系中的其他对象；

(2)选择点 O，执行【画图】菜单下【圆和圆弧】子菜单中的【已知圆心和半径的圆】命令，在弹出的对话框中输入：2，单击【确定】按钮即可做出以点 O 为圆心、半径为 4 的圆。

然后在圆上取一点，当作食物所在的位置；并连接圆心与这一点之间的线段，作为蚂蚁爬行的路线，然后在路线上任意取一点当作蚂蚁：

(3)单击【画图】工具，在圆 O 的圆周上任意作一点，右击该点，在弹出的属性对话框中将其名字修改为 P。

(4)连结线段 OP，在线段 OP 上任意取一点，将其名字修改为 Q。

跟踪蚂蚁对应的点 Q，并增加点 Q 和点 P 的动画按钮：

(5) 执行【插入】菜单下【常用按钮】菜单中的【对象一次运动】命令，在弹出的对话框中点选“动画”，把“程序命令框”中的内容改为：

```
ClearAllTrace();
```

```
ObjAnimation(3,200,3);
```

```
ObjAnimation(6,200,3);
```

点击【修改动作】按钮，并点击【确定】按钮完成点 P 在圆周上作匀速圆周运动和 Q 在线段 OP 上运动的动画按钮。

(6) 单击【选择】工具，单击点 Q，执行【画图】菜单中的【跟踪】命令。

结果如图 2 所示：

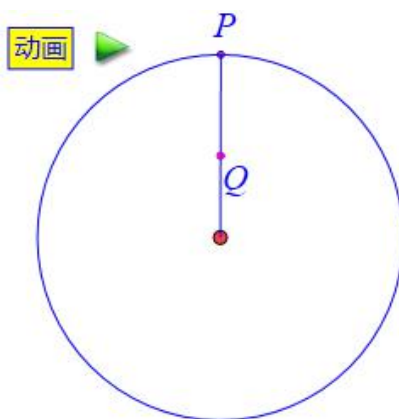


图 2

点 Q 的动画按钮能够让蚂蚁从中心平移到食物对应点 P 所在的位置，点 P 的动画按钮能够使得转盘转动起来。

单击点 Q 的动画按钮，点 Q 作直线运动；单击点 P 的动画按钮，点 Q 随盘子一起做圆周运动。当然，以让点 Q 同时做直线运动和圆周运动：

(7) 单击【动画】按钮，则点 Q 在作匀速圆周运动的同时作匀速直线运动。这时可以观察到点 Q 留下的踪迹：

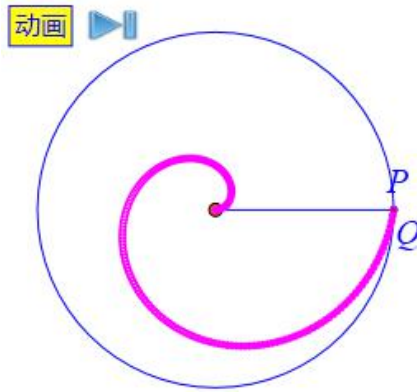


图 3

上面的过程是，当点 Q 沿直线 OP 从点 O 运动到点 P 的同时，转盘旋转了一周。

这种曲线叫作等速螺旋曲线，是由匀速直线运动与匀速圆周运动的组合所产生。

据说第一个研究这种曲线的人是古代希腊的数学家阿基米德，故也叫做阿基米德螺线。。

若点 Q 沿直线 OP 从点 O 运动到点 P 的同时，转盘旋转两周，这时的等速螺线是什么形状的呢？

(7) 执行【插入】菜单下【常用按钮】菜单中的【对象重复运动】命令，在弹出的对话框中点选“动画”，把“标题”内容改为：双周螺旋动画，“程序命令框”中的内容改为：

```
ClearAllTrace();
ObjAnimation(3,200,0);
ObjAnimation(6,400,0);
```

点击【修改动作】按钮；点选“停止”，把“程序命令框”中的内容改为：

```
ClearAllTrace();
ObjAnimation(3,200,0);
ObjAnimation(6,400,0);
```

点击【修改动作】按钮，并点击【确定】按钮完成点

然后点击【双周螺旋动画】按钮，可以观察到当点 Q 从点 O 运动到点 P 的过程中，点 P 运动了 2 周。

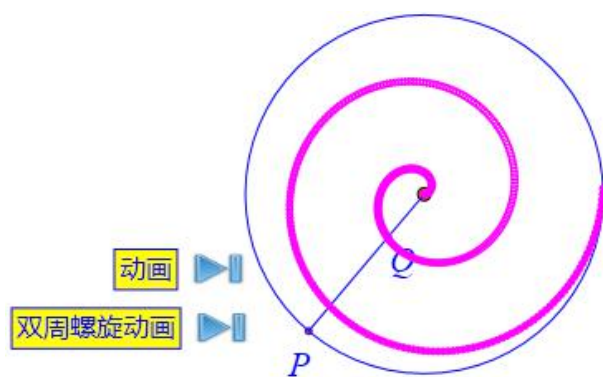


图 4

当点 P 旋转 1 周时，点 Q 正好运动到线段 OP 的中点位置。由此可见，对于等速螺线来说，每转一圈往外增加的距离都相等，“等速”之命也因此而来。

假如点 Q 沿直线 OP 运动的很慢，转盘又不停的旋转，则结果可以是类似下边的情况：

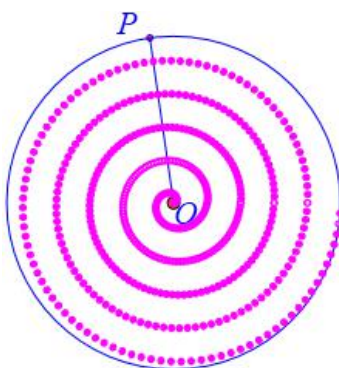


图 5

这种情形的等速螺线曲线，不必通过动画跟踪实现，而可以通过生成轨迹的形式直接生成。操作步骤是：

(8) 在点击程序窗口右下侧的【程序】标签，在程序的输入框中输入输入： $\text{Locus}(3,6,6);$ ，再点按 F8 键，生成等速螺线的轨迹。

其中 3 和 6 分别表示点 P 和点 Q 的序号。在 Hawgent 皓骏动态数学软件中，可以通过多个点的驱动，而生成另一个对象的轨迹。右击生成的轨迹，可以修改轨迹的生成参数，请自行探究。

熏蚊子的盘香是一条等速螺线。卷筒纸的横截面也是一条等速螺线。你还能说出生活中哪些是等速螺线？



图 6

在机械上，有些凸轮的外形是等速螺线。凸轮是很多机器非常重要的部件。

直线运动和圆周运动，虽然是两种完全不同的运动方式，但是它们之间却可以相互转换。

打开文件“圆周运动转变为直线运动.dmr”，可以看到一个简化的凸轮模型。

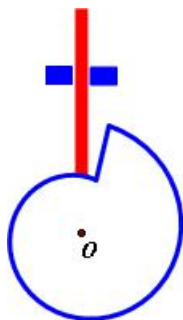


图 7

单击“动画”按钮，凸轮开始工作。

凸轮旋转的时候，拖动红色连杆来回作等速直线运动。

利用等速螺线制造的凸轮竟然可以将等速旋转运动转变为等速直线运动！

2，想一想，做一做

【拓展训练】

1，点 P 在圆周上按照逆时针方向运动，请你绘制出点 Q 从盘子边沿爬行到盘子中心位置的过程中所经过的路径。

2，点 P 在圆周上按照顺时针方向运动，请你绘制出点 Q 从盘子边沿爬行到盘子中心位置的过程中所经过的路径。

3，点 P 在圆周上按照顺时针方向运动，请你绘制出点 Q 从盘子中心爬行到盘子边沿位置的过程中所经过的路径。

【思考问题】

有一个底面直径为 6、高为 12 的圆柱，在它的下底面的 A 点有一只蚂蚁，它想吃到上底面上与 A 点相对的 B 点处的食物，蚂蚁沿侧面如何爬行，才能使得爬行的路程最短？

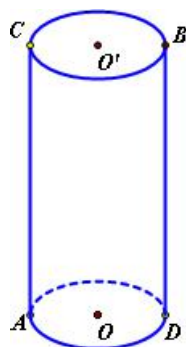


图 7

请你想象一下，蚂蚁经过的路线可能有哪些？

打开文件“圆柱侧面上爬行的蚂蚁.dmr”，可以观察到蚂蚁可以选择爬行的红色路线。

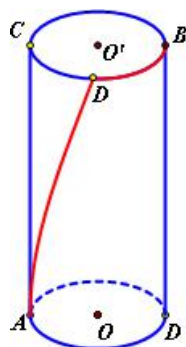


图 8

拖动点 D，可以改变蚂蚁的爬行路线。对于点 D 在不同位置所对应的爬行路线，你了解那条路线是最短的吗？

当点 D 在圆弧 CB 之间时，蚂蚁所经过的路线 AD 对应曲线也是一条螺旋曲线，这种螺旋曲线叫作圆柱螺旋线。

圆柱螺旋线的特点是：一个动点沿着圆柱等速旋转，同时又等速上升。

圆柱螺旋线也是由等速圆周运动与等速直线运动的组合而生成。不过这里直线运动的方向与圆周运动所在的平面垂直，它是一条空间曲线。

单击按钮“侧面展开”，可以观察到圆柱的侧面展开图，以及蚂蚁爬行路线的平面图形。

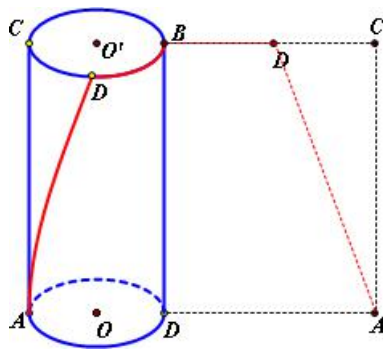


图 9

这时蚂蚁爬行的螺旋曲线 AD 和圆弧 DB 在平面图形中等价为折线段 ADB。

容易知道，当点 D 与点 B 重合时，蚂蚁所经过的路程最短。此时，蚂蚁在圆柱上所经过的路线为一条圆柱螺旋线。

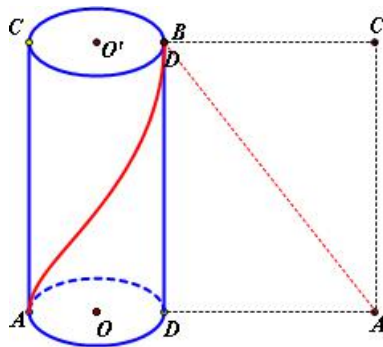


图 10

仍然是蚂蚁爬行路线最短的问题，请阅读下面的内容：

有一个圆柱，它的高 h cm，底面半径 3 cm，在圆柱下底面的 A 点有一只蚂蚁，它想到上底面上与 A 点相对的 B 点处的食物，当高为 10 cm、8 cm、6 cm 和 4 cm 时，沿圆柱表面爬行的最短路程是多少？

打开文件“在圆柱侧面上爬行的蚂蚁.dmr”，研究 h 在不同情况下，蚂蚁在圆柱表面爬行最短路程的问题。

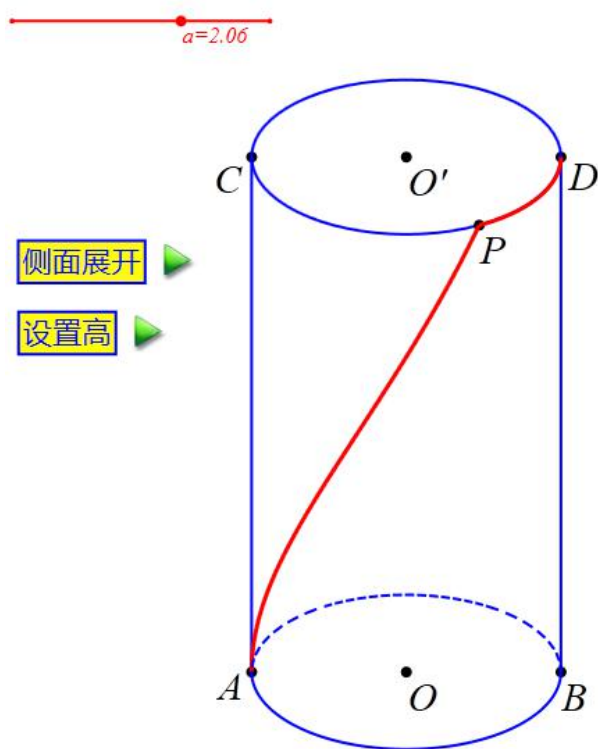


图 11

点击【设置高】按钮，输入高的数值，改变圆柱的高度。可以让圆柱的高度转变为对应的数值。

第 29 部分 旋转之后再平移

1, 先旋转后平移的密铺

我们知道, 对于任意的平行四边形来说, 只需要经过平移变换就可以得到密铺图案, 如图 1 所示。

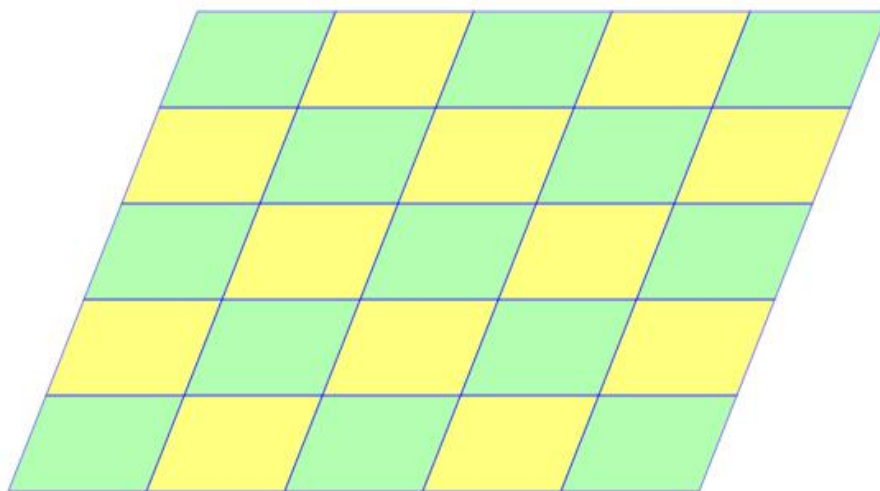


图 1

平行四边形是两组对边分别平行的四边形, 那么只有一组对边平行的四边形—梯形是否能够得到密铺图案呢?

要回答这个问题其实并不困难。我们知道梯形绕它的一个腰的中点旋转 180° 就可以得到一个平行四边形, 然后这个合成的平行四边形只需要经过平移变换也可以得到密铺图案, 如图 2 所示。

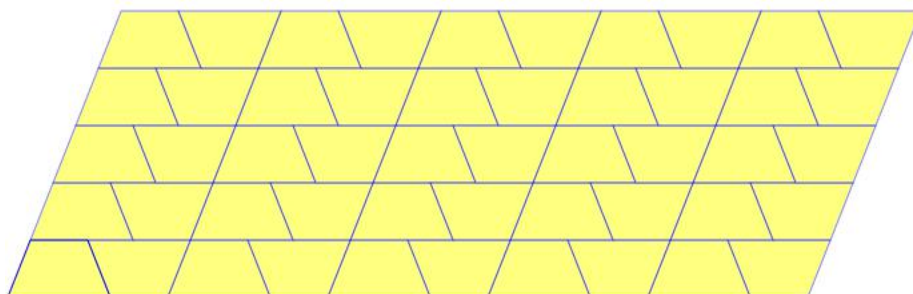


图 2

看来, 无论利用哪种变换 (轴对称、平移、旋转等), 只要能够将一种图形组成平行四边形, 就一定能够利用该图形得到密铺图案。

那么，对于没有任何一组对边平行的任意四边形呢？如图 3 所示，利用它们是否能够得到密铺图案呢？

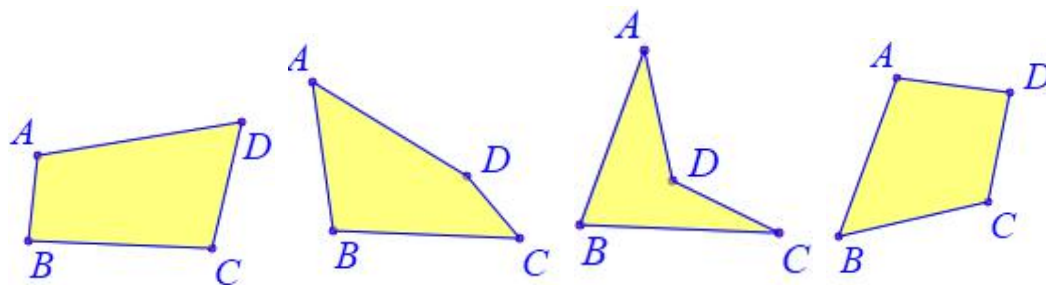


图 3

下面我们完成操作步骤：

- (1) 在新建文档中，任意画四个点 A、B、C、D。
- (2) 作出点 A 和点 D 之间的中点 E，点 C 和点 D 之间的中点 F。
- (3) 以点 A、点 B、点 C 和点 D 为顶点，作多边形，将其内部填充适当颜色。
- (4) 作出多边形 ABCD 和点 C 关于点 E 的中心对称图形，将旋转得到的多边形内部填充为另外一种颜色。
- (5) 作出多边形 ABCD 和点 B 关于点 F 的中心对称图形，将旋转得到的多边形内部填充为另外一种颜色。
- (6) 以有向线段 BD 为平移向量，将多边形 ABCD 平移，将平移得到的多边形内部填充为重新选择一种填充颜色。结果如图 4 所示：

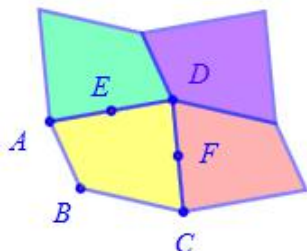


图 4

- (7) 将 B 点绕 F 点旋转 180 度得到 H 点，以 AH 为平移向量，将四个多边形对象平移 3 次。结果如图 5 所示：

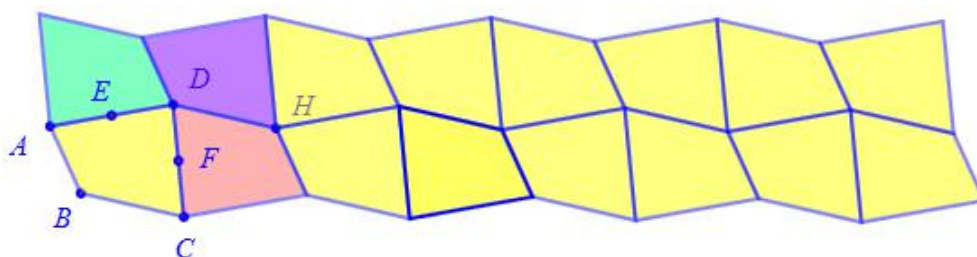


图 5

- (8) 将 B 点绕 E 点旋转 180 度得到 G 点，选定所有多边形，以 BG 标记为平移向量，平移三次。
- (9) 将点 E、点 F、点 G 和点 H 隐藏。

这样就做出了任意四边形的密铺图案。拖动四边形 ABCD 的顶点，可以改变其形状，如图 6 所示，四边形 ABCD 也可以是凹多边形。

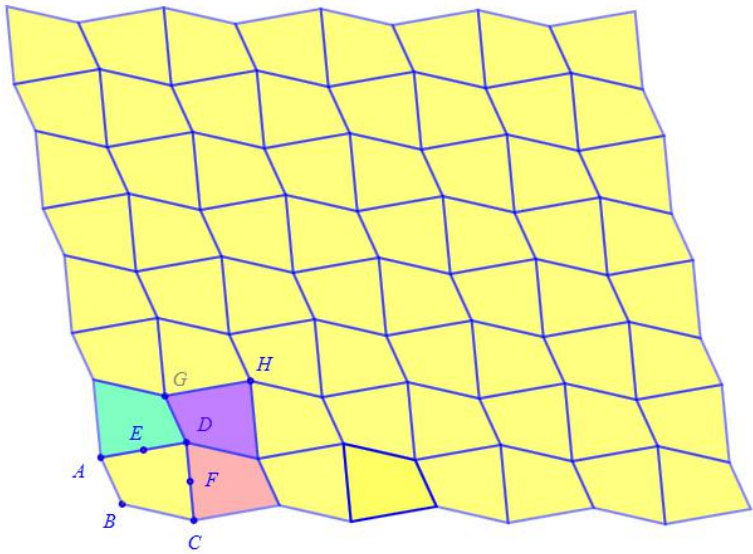


图 6

2，想一想，做一做

【思考问题】

通过以上操作我们可以看出，利用任意四边形设计密铺图案的过程，最终还是要归结于对平行四边形的平移变换，虽然是变了形的四边形。密铺图案，实际上就是要求能够不重叠、无空隙地铺满整个平面。而平面是没有边界的，要多大就有多大。所以，事实上永远不可能铺满整个平面。但是通过上面的平移变换过程让我们发现，这个密铺的过程可以无限地继续下去，因此在理论上是可以铺满整个平面的。事实上，是否只有通过平移变换才能铺满整个平面呢？轴对称变换或者旋转变换可以实现吗？

【拓展训练】

我们知道，通过旋转变换可以将任意三角形组合成为平行四边形，如图 21 所示，从而通过平移变换得到密铺图案。通过上面的研究，我们可以发现，通过任意四边形也可以得到密铺图案。那么，利用任意五边形能够得到密铺图案吗？任意六边形、七边形、八边形呢？如果可以得到密铺图案，请你设计并实现你的方案；如果不可以，请说明你的理由。

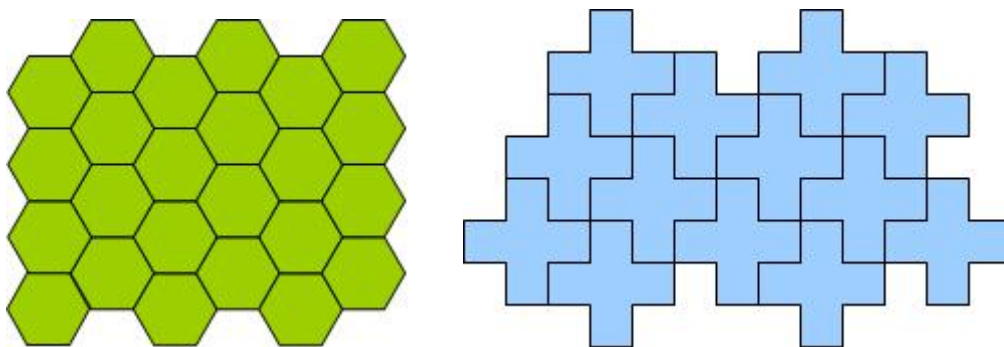


图 7

第 30 部分 漂亮小鸡爱美丽

1, 小鸡照镜子

漂亮小鸡爱美丽，经常喜欢照镜子。

你能画出一只可爱的小鸡，并满足它喜欢照镜子的愿望吗？

先让我们动手画一只的小鸡。

(1) 单击【画图】工具，进入画图状态。

(2) 单击鼠标右键，并按住拖动一段距离后松开，作出以点 A 为圆心、经过点 B 的圆。

就将这个圆 A 当作小鸡的身躯。

(3) 画出任意线段 BC；在圆 A 上任取一点 D 并画线段 DE。将线段 BC 和 DE 当作小鸡的两只脚。

(4) 在圆 A 之外右键单击鼠标，并按住拖动到圆 A 上之后松开，作出以点 F 为圆心、经过点 G 的圆，其中点 G 在圆 A 上。可以将圆 F 当作小鸡的头部。

(5) 在圆 F 上任取两点 H、I，在圆 F 外任取一点 J。将点 H、点 I 和点 J 所在的多边形当作小鸡的嘴部，结果如图 1 所示。

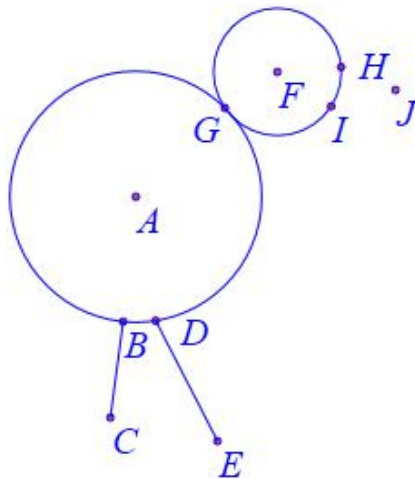


图 1

(6) 单击【选择】工具，返回到选择状态。

(7) 按住【Ctrl】键，分别单击点 H、点 I 和点 J（就可以将它们同时选中），执行【画图】菜单下【多边形】子菜单中的【多边形】命令，作出多边形 HIJ。

(8) 单击多边形 HIJ 的边将其选中，点击【属性】菜单下【填充颜色】子菜单中的【红色】选项，将多边形 HIJ 内部填充为红色，当然你也可以把它填充为其他喜欢的颜色。

(9) 选择圆 A，点击【属性】菜单下【填充颜色】子菜单中的【红色】选项，将圆 A 的内部填充为浅黄色。重复类似操作，将圆 F 的内部填充为浅黄色。

(10) 选择圆 A，执行【】菜单下【对象管理】菜单中的【对象移到最后面】命令，将其移动到后面；同样地，选择圆 F，【对象移到最后面】命令，将其移动到后面。想一想、看一看，究竟现在谁在最后面？

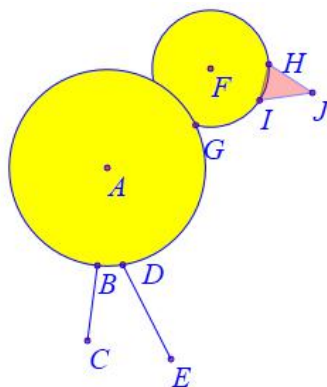


图 2

然后在小鸡面前竖起一面镜子。

(11) 单击【画图】工具，进入绘图状态。

(12) 在小鸡的前方分别单击鼠标两次，任意取两个点 K、L。

(13) 单击【选择】工具，重新返回到选择状态。

(14) 右击点 K，可以将其名字修改为 M；重复类似操作将点 L 的名字修改为 N。

(15) 按住【Ctrl】键，连续单击点 M 和点 N（将它们同时选择），执行【画图】菜单下【直线】菜单中的【直线】命令，作出直线 MN。可以将直线 MN 当作小鸡前面的镜子。

接着通过变换的方式画出镜子中的小鸡：

(16) 在什么都没有选择的情况下，在空白处右击鼠标，在弹出的窗口中的“其他”标签下，如图 3 所示，在弹出的用户对话框中输入 A，单击【确定】按钮完成。



图 3

(17) 按住【Ctrl】键，按照顺序依次选择圆 F、圆 A、点 A、点 B、点 C、线段 BC、点 D、点 E、线段 DE、点 F、点 G、点 H、点 I、点 J 和多边形 HIJ、直线 MN，执行【变换】菜单中的【发射】命令，结果得到了镜子中的小鸡。不过可惜的是小鸡的身体和嘴巴没有颜色，我们只需要按照前面的方法把对应的部分填充上对相应的颜色就可以了，结果如图 4 所示。

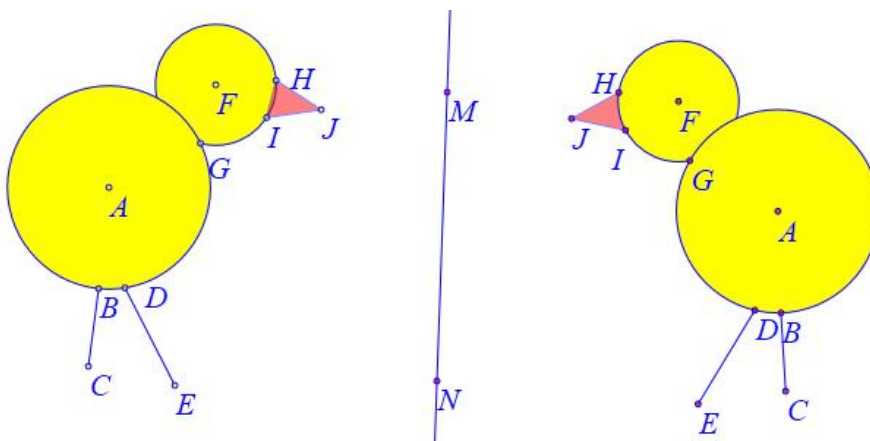


图 4

(18) 同时选择小鸡的眼睛对应的点 F 和镜子中的点 F，单击工具条中的放大工具，可以将小鸡的眼睛变大些。

(19) 执行【属性】菜单下【选择】菜单中的【选择所有点】命令，选择所有的点，再执行【编辑】菜单中的【隐藏】命令，可以把所有点的名字隐藏。

可以通过拖动小鸡身上各部分对应的点以实现：让它抬抬脚、低低头、翘翘嘴巴或者

转过身，看看镜子中的小鸡有什么变化？如图 5 所示。

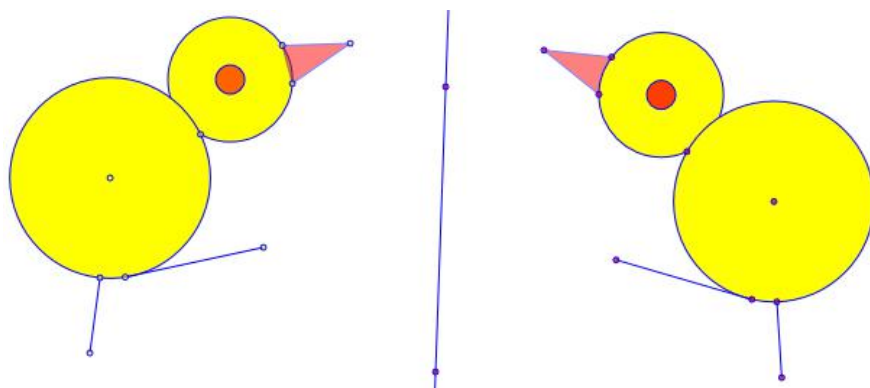


图 5

2，想一想，做一做

【拓展训练】


请你动手制作一个在河里游水的小鸭子，能够看到小鸭子在河水中的影像，并且能够展示小鸭子在河里游动的过程。

【思考问题】

- 1，当小鸡在镜子面前玩耍的过程中，镜子里的小鸡在干什么？
- 2，当小鸡朝着镜子前进一步的过程中，镜子里面的小鸡朝镜子的哪个方向运动了？运动了多少步？小鸡与镜子里面的自己之间的距离是减少了还是增加了？它们之间的距离变化了多少步？
- 3，当小鸡朝着镜子后退一步的过程中，镜子里面的小鸡朝镜子的哪个方向运动了？运动了多少步？小鸡与镜子里面的自己之间的距离是减少了还是增加了？它们之间的距离变化了多少步？

第 31 部分 镜子内外行动齐

1, 镜子内外现对称

打开文件“照镜子的小鸡.dmr”，右击其中一个点，在弹出的窗口中把【其他】标签下的  显示名字 勾选，使得点的名字可见，同样的，让所有的点的名字可见，为了方便下面叙述问题我们将镜子内点的名字都增加一个撇“'”，如图 1 所示。

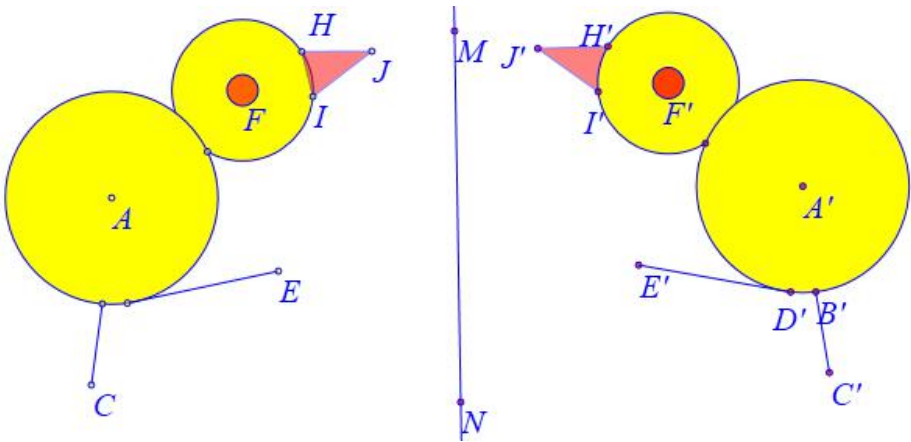


图 1

我们知道小鸡和它在镜子里的自己就形成了**轴对称图形**，镜子 MN 就是这个轴对称图形的**对称轴**，或者说小鸡和镜子里的自己**关于直线 MN 对称**。

点 A 和点 A'、点 B 和点 B'、点 C 和点 C'，……，或者小鸡的任何部位和它在镜子里对应的点，是**对称点**。

那么，如图 2 所示，梯形 ABCD 是一个轴对称图形吗？

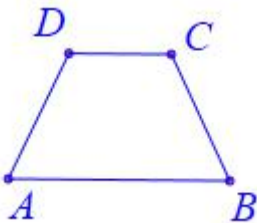


图 2

这时，也许利用我们的肉眼无法作出判断。那么如何才能检验一个图形是不是轴对称图形呢？这就需要我们从小鸡和镜子里的自己到镜子的距离相等，实际上是指小鸡的每一个部位与它在镜

子里的相同的部位到镜子的距离都相等。差一点儿也不行！

(1) 在图 1 中，按住【Ctrl】键，依次选择小鸡上点 A、镜子对应的直线 MN，执行【画图】菜单下【约束点】菜单中的【垂足】命令，就可以作出点 A 到直线 MN 的垂足 K，那么线段 AK 就是点 A 到镜子的距离。单击【画图】工具，连接点 K 和镜子中的点 A'，作出线段 KA'。

(2) 按住【Ctrl】键，依次选择点 A'、点 K 和点 M，执行【测量】菜单中的【角度】命令，得出 $\angle A'KM$ 的测量值；按住【Ctrl】键，依次选择点 A 点 K，执行【测量】菜单中的【距离】命令，得出点 A 到点 K 的距离；同样地测测出点 A' 到点 K 的距离，结果如图 3 所示。

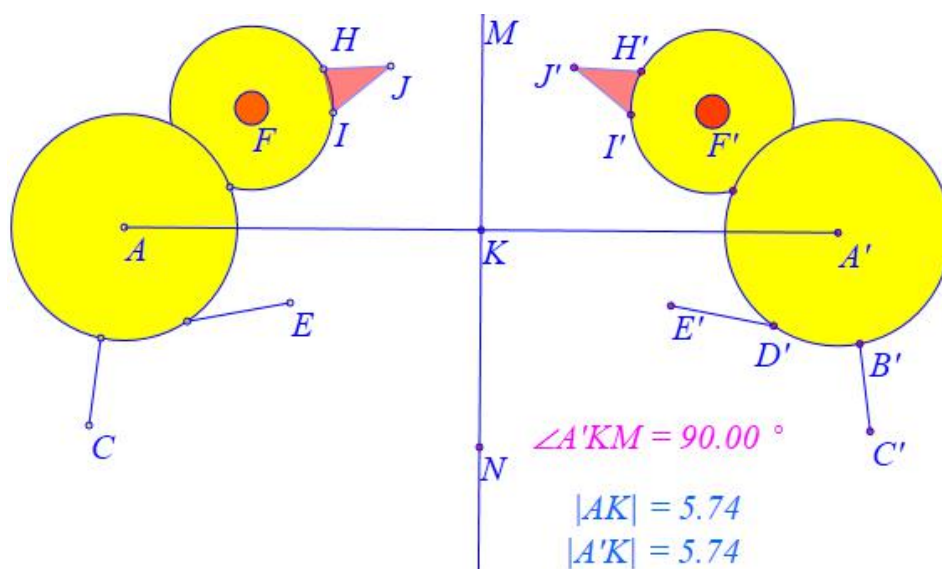


图 3

当镜子竖直放置时，线段 AK 就是水平的，那么线段 KA' 也处于水平状态。所以线段 KA' 与直线 MN 垂直，因此线段 KA' 就是点 A' 到镜面的距离，则有 $AK=KA'$ 。

可以拖动点 A 改变小鸡的形状或者小鸡距离镜子的距离，或者拖动点 M 使得镜子不再竖直放置，如图 4 所示，可以发现上述结论依然成立，总是有：

$\angle A'KM=90^\circ$ 并且 $AK=KA'$ 。

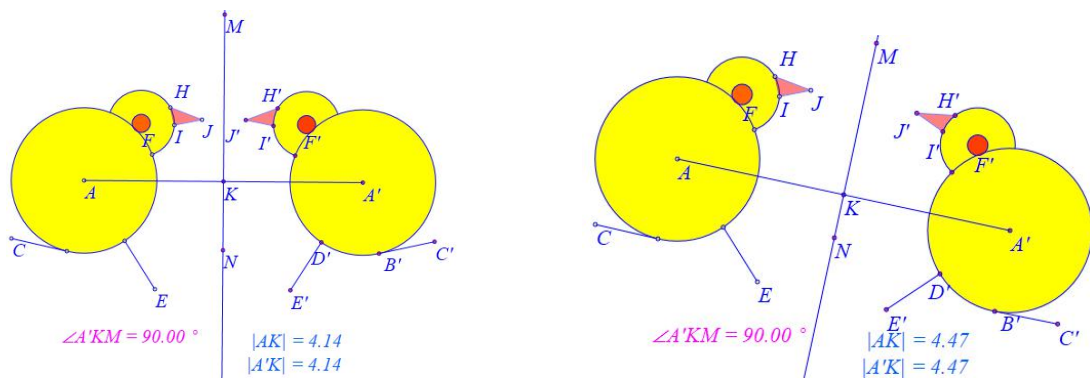


图 4

对小鸡其他位置的点进行类似的实验和研究，你会发现这个结论均成立：

小鸡身上的任何一点到镜子的距离，与它在镜子中的对应点到镜子的距离都相等。

因为 $AK \perp MN$ 并且 $KA' \perp MN$ ，所以线段 AK 和线段 KA' 在同一条直线上，也就是说点 K 经过点 A 与点 A' 之间的连线，或者说点 A 、点 K 和点 A' 三点共线。

由此我们可以马上得到下面的结论：

小鸡上的任何一点与它在镜子中的对应点之间的连线，都被镜子垂直且平分。

现在让我们回到前面的问题：检验一下图 2 中的梯形是否轴对称图形。

打开文件“梯形 ABCD. dmr”。

(5) 按住【Ctrl】键，依次选择点 A 和点 B ，执行【画图】菜单下【约束点】子菜单中的【中点】命令，作出底边 AB 的中点 E 。

(6) 按住【Ctrl】键，分别单击点 E 和线段 AB ，执行【画图】菜单下【直线】子菜单中【垂线】命令，作出经过点 E 垂直于 AB 的直线，即线段 AB 的中垂线。

我们检验梯形 $ABCD$ 是否轴对称图形，接下来只需要检验点 C 和点 D 是否关于 AB 的中垂线对称即可，操作如下：

(7) 单击【画图】工具，作出 AB 的中垂线与线段 CD 的交点 F 。

(8) 单击【选择】工具，依次选择点 D 、点 F ，执行【测量】菜单中的【距离】命令，得到线段 DF 的测量结果，重复类似操作测量线段 CF 的长度。结果如图 5 所示，你认为点 D 和点 C 关于 AB 的中垂线对称吗？那么 AB 的中垂线是梯形 $ABCD$ 的对称轴吗？

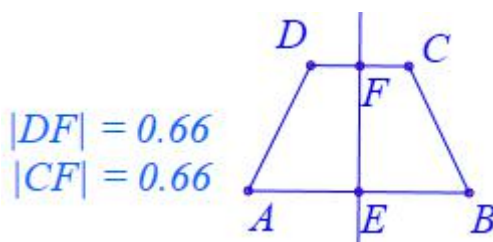


图 5

【拓展训练】

1, 我们知道梯形的性质是上底边 CD 与下底边 AB 平行。因此, 当 AB 处于水平状态时, 上底边 CD 也处于水平状态。因为直线 EF 是下底边 AB 的中垂线, 所以当 AB 处于水平状态时, 直线 EF 就处于竖直状态, 因此有上底边 CD 与直线 EF 也垂直。测量 $\angle EFD$ 的值, 拖动点 A 或者点 B, 观察和研究当 AB 不处于水平状态时是否还有线段 CD 与直线 EF 垂直。

2, 在梯形 ABCD 中, 若腰 AD 等于腰 BC, 则梯形 ABCD 被称为等腰梯形。在 Hawgent 皓骏动态数学软件中, 选择任意的三个点, 然后通过工具条上的“等腰梯形”命令就可以迅速构造一个等腰梯形。请你根据前面的步骤进行实验: 当梯形 ABCD 是等腰梯形时, 下底边 AB 的中垂线是否为梯形的对称轴。

第 32 部分 千姿百态万花筒

1, 千姿百态万花筒

你玩过万花筒吗？你了解它当中所隐含的道理吗？

打开文件“万花筒.dmr”，单击“动画”按钮就可以看到一个变化多段、千姿百态的万花筒，如图 1 所示是其中的几个图案，你想知道这个万花筒是怎么制作的吗？首先请你自己观察一下它有哪些特点。

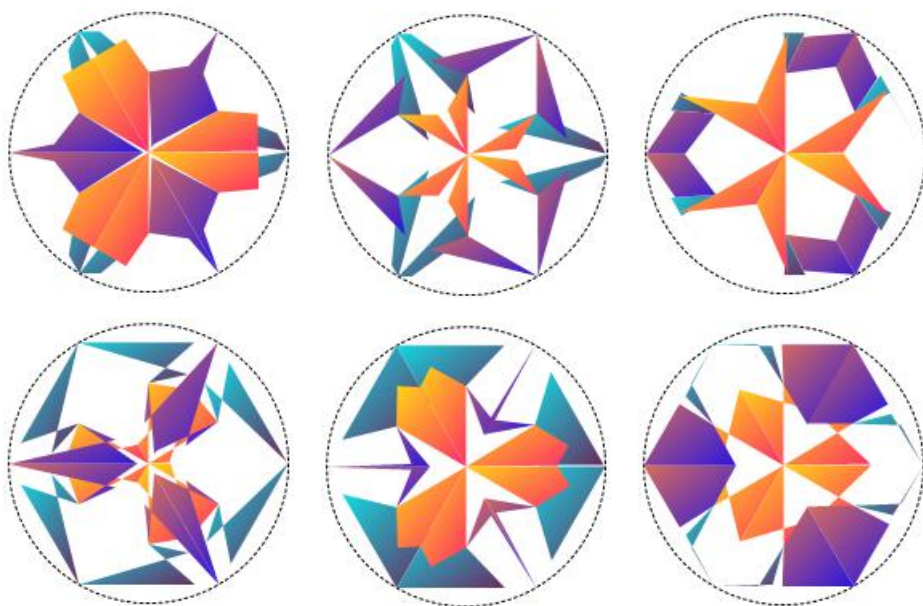



图 1

它是一个轴对称图形吗？如果是，它可能关于多少条直线对称呢？

在作图区空白位置双击鼠标停止动画，然后单击工具条中的“新建”按钮，建立一个新的文档，让我们开始学习它的构造原理和制作过程吧。

(1) 单击【视图】菜单下的【对象框】选项，如图 2（左）所示，在弹出的对象框中单击“点 0”前的方框，使其变为打勾状态如图，如果这时坐标系处于可见状态，把“坐标系”的勾去掉，使它们从作图区中隐藏，只保留坐标原点 0。



图 2

(2) 选择点 O ，执行【画图】菜单下【圆和圆弧】子菜单中的【已知圆心和半径的圆】命令，在弹出的用户输入对话框中输入：3，单击【确定】按钮，作出以点 O 为圆心、半径为 3 的圆。

(3) 单击【画图】工具，在圆 O 上任取一点 A ；单击【选择】工具返回。

(4) 按住【Ctrl】键，依次单击点 A 和圆 O ，执行【画图】菜中的【旋转】命令，在弹出的对话框中，旋转次数输入：6，旋转角度输入： $360/6$ ，单击【确定】，就可以作出正六边形 $ABCDEF$ 的六个顶点。之前所选择的点 A 就是它的一个顶点，而它的所有顶点都在圆 O 的圆周上。

这里的正六边形实际上是一个包括了内部的多边形。这个六边形的所有边是一个整体，并且还具有内部。

(5) 单击【画图】工具，连接 OA 、 OB 、 OC 、 OD 、 OE 、 OF 和 AB 。

(6) 单击【选择】工具，同时选择点 O 、点 A 和点 B ，执行【画图】菜单下【约束点】子菜单中的【内心】命令，作出三角形 OAB 的内心 G 。

三角形的内心就是与三角形的三条边都相切的圆的圆心，正三角形的内心也是它的中心。下面我们就继续作出三角形的内切圆。

(7) 选择点 G 和线段 AB ，执行【画图】菜单下【圆和圆弧】子菜单中的【已知圆心和切线的圆】命令，就可以作出以点 G 为圆心并且和 AB 相切的圆，即三角形 OAB 的内切圆。结果如图 3 所示。

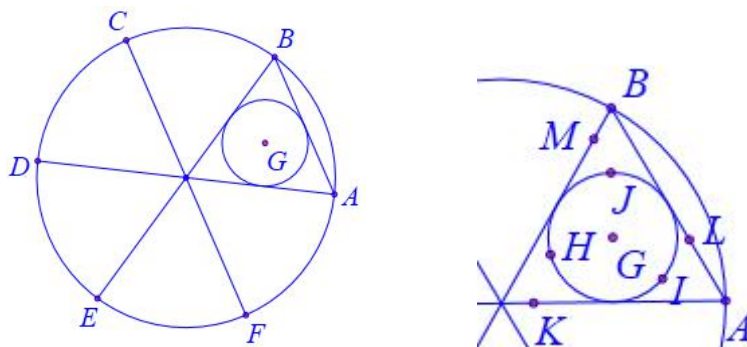


图 3

图 4

(8) 单击【画图】工具，在圆 G 上任意取三个点 H 、 I 、 J ；在线段 OA 、 AB 和 BO 上分别取任意点 K 、 L 和 M ，如图 4 所示。下面让这六个点组成变化无穷的图案。

(9) 单击【选择】工具，依次选择点 O 、点 H 、点 G 和点 K ，执行【画图】菜单下【多边形】子菜单中的【多边形】命令，作出多边形 $OHGK$ ；重复类似操作，作出多边形 $AIGL$ 和多边形 $BJGM$ 。

(10) 右击多边形 $OHGK$ 的边缘，打开它的属性对话框，在这里我们可以设置多边形内部的填充类型和填充颜色。如图 5 所示，在【画刷】属性页面“类型”中选择“线渐变画刷”选项，在“渐变颜色”中请你分别设置合适的颜色。这步可以多尝试各种颜色，直到自己满意为止，完成后按【修改】按钮，接着再按【确定】按钮完成填充；重复类似操作将另外两个多边形也按照你自己的要求设置成不同的填充类型和填充颜色。



图 5

(11) 执行【插入】菜单下【常用按钮】中的【对象重复运动】命令，如图 6 所示：把“动画”项的标题提改为：H 运动，把相应程序命令修改为：`ObjAnimation(18,150,0)`；，点击【修改动作】保存；把“停止”项的标题提改为：H 停止，把相应程序命令修改为：`StopAnimation(18)`；，点击【修改动作】保存；；点击【确定】完成该步操作。以上操作将“动画运动的频率”修改为 150，单击【确定】按钮完成。在这里，运动的频率实际上就是运动的步数。步数越多，运动的速度就越慢；步数越少，运动的速度就会越快。

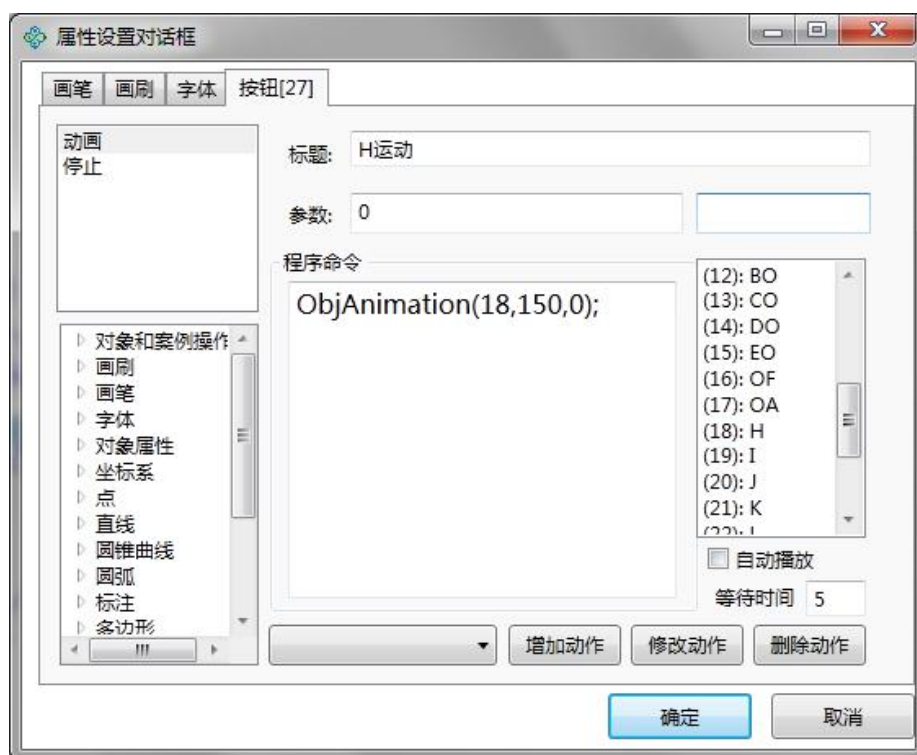


图 6

(12) 请你重复类似的操作，增加点 *I* 的动画按钮，将其运动频率修改为 180；增加点 *J* 的动画按钮，将其运动频率修改为 210；增加点 *K* 的动画按钮，将其运动频率修改为 50；增加点 *L* 的动画按钮，将其运动频率修改为 70；增加点 *M* 的动画按钮，将其运动频率修改为 90。我们将不同的点的运动频率设置成不同的值，是为了让它们以不同的速度运动，得到变化多样的图案。

(13) 选择点 *G*、点 *H*、点 *I*、点 *J*、点 *K*、点 *L*、点 *M*、圆 *G* 和线段 *AB*，执行【编辑】菜单中的【隐藏】命令，将它们全部隐藏，结果如图 7 所示。

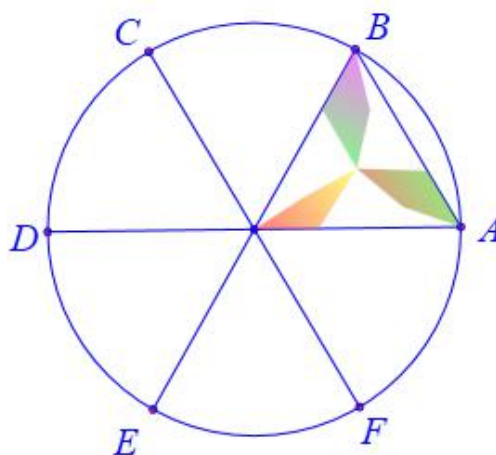


图 7

(14) 按住【Ctrl】键，依次选择三个多边形和线段 *OB*，执行【变换】菜单中的【反

射】命令；再依次选择变换得到的三个多边形线和线段 OC ，执行【变换】菜单中的【反射】命令；和上面类似，继续选新生成的三角形依次做对线段 OD 、 OE 、 OF 的对称变换，这样，就一步、一步地通过反射变换得到了一个万花筒。

（15）按照（10）的方法给新生成的多边形填充上对应的颜色。

最后隐藏线段 OA 、 OB 、 OC 、 OD 、 OE 、 OF 和点 A 、 B 、 C 、 D 、 E 、 F ，结果如图 8 所示：

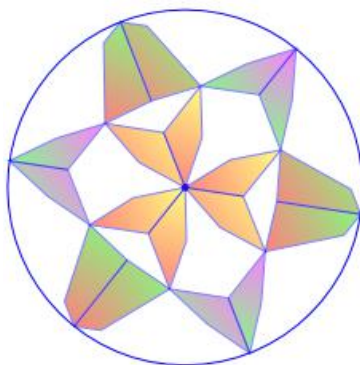


图 8

（16）依次单击所有动画按钮，就可以看到万花筒形形色色的图案了。

注意：为保证电脑操作流畅，请记得在停止所有动画，再进行其他操作。

2，想一想，做一做

【拓展训练】

请你按照自己的方式设计一个万花筒。

【思考问题】

1，这个万花筒有几个对称轴？

2，在图 9 中，有长方形 $ABCD$ 、正方形 $EFGH$ 、正五边形 $IJKLM$ 和圆 N ，它们都是轴对称图形吗？如果是，分别有多少条对称轴？

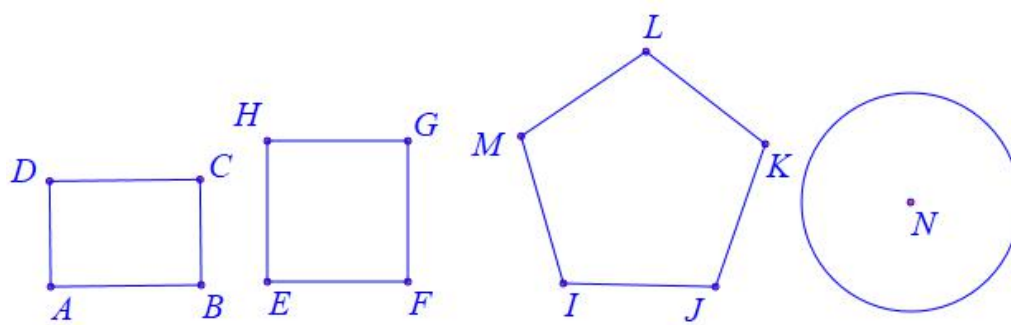


图 9

第 33 部分 请找对称在哪里

1，对称下的坐标点

如图 1 所示，我们可以用 $(3, 0)$ 表示大门的位置，用 $(3, 5)$ 表示熊猫馆的位置，用 $(1, 4)$ 表示大象馆的位置。那么请你试着表示出猴山与海洋馆的位置。

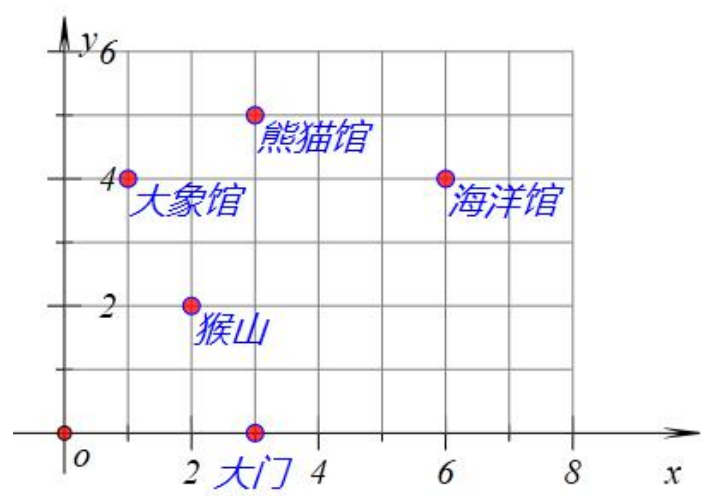


图 1

像这样在平面示意图上，能表示出点的具体位置的一组数据，就是**点的坐标**。点的坐标由两个数字组成，前一个数字表示它在水平方向上的位置，叫作**横坐标**；后一个数字表示它在竖直方向上的位置，叫作**纵坐标**。

(1) 启动 Hawgent 皓骏动态数学软件，在新的文档中，把【视图】菜单中的【系统坐标系】勾选，使得坐标系可见，用鼠标右击坐标轴，弹出坐标系的属性设置对话框，如图 2 所示，选择“网格”，单击【确定】完成。



图 2

(2) 执行【画图】菜单下【参数点】子菜单中的【坐标点】命令，输入任意整数，比如输入 x 坐标：2，y 坐标：4，点击【确定】完成，得出坐标为 (2, 4) 的点 A；同理画出坐标为任意整数的点 B，比如 (4, 1)、坐标为任意整数的点 C，比如坐标为 (1, 3)；如图 3 所示。

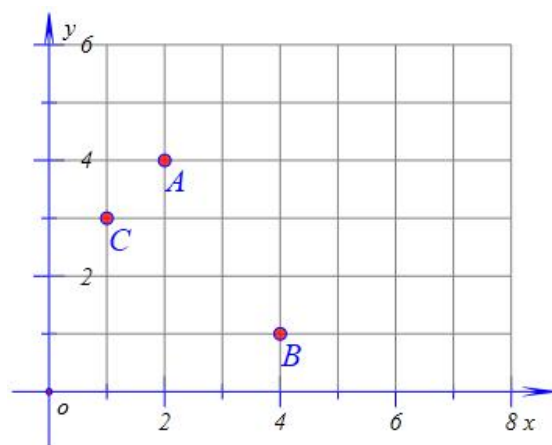



图 3

可以利用鼠标任意拖动点 C，改变它的位置。你能很快说出点 C 在当前位置的坐标吗？

右击其中一个点在弹出的属性对话框中可以任意修改点的坐标。请你修改点 A 或者点 B，使得它们处于同一竖直方向。

(4) 同时选择点 A 和点 B，执行【画图】菜单下【直线】子菜单中的【直线】命令，作出直线 AB，选择直线 AB，单击“放大”工具 ，增加它的画线宽度。结果如图 4 所示。

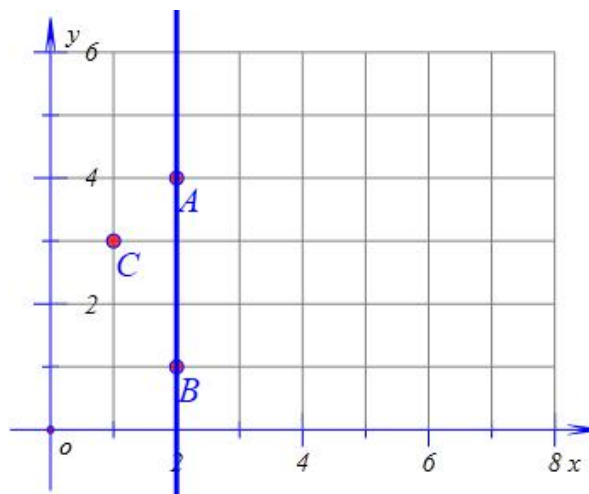


图 4

你能找到点 C 关于直线 AB 的对称点的位置并说出它的坐标吗？

修改，A 或者 B 的坐标值，让直线 AB 处于水平状态，如图 5 所示，任意改变点 C 位置的过程中，你能找到点 C 关于直线 AB 的对称点的位置并说出它的坐标吗？

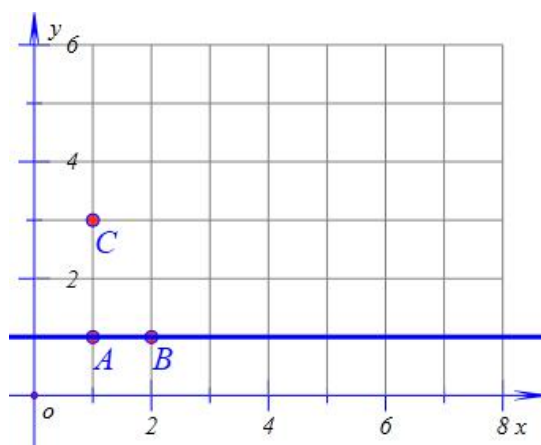


图 5

2，想一想，做一做

【拓展训练】

依次选择直线 AB 和点 C，单击工具条中“关于直线的对称图形”命令，作出点 C 关于 AB 的对称点，验证在问题（1）、（2）中你所得到的结论。

【思考问题】

1，当直线 AB 处于竖直状态时，点 C 的横坐标、点 A（或点 B）的横坐标、点 C 关于 AB 对称点的横坐标之间有什么关系？

2，当直线 AB 处于水平状态时，点 C 的纵坐标、点 A（或点 B）的纵坐标、点 C 关于 AB 对称点的纵坐标之间有什么关系？

第 34 部分 大小各异形状同

1, 形状一样大小异

如图 1 所示, 有许许多多的三角形。这些三角形之间有哪些不同? 又有哪些相同之处?

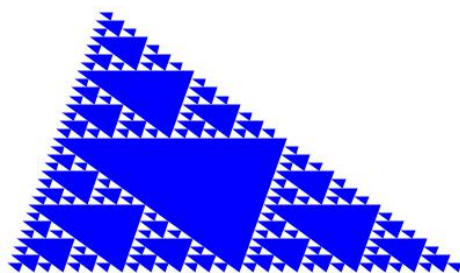


图 1

如果有一只大公鸡站在你的面前, 在它的旁边有一排大公鸡从近到远依次整齐地排列。那么, 距离你越近的大公鸡看起来就越大, 距离你越远的大公鸡看起来就越小。如图 2 所示, 最大的公鸡或者点 A 均可以被拖动, 请你拖动试试看, 能发现哪些规律?

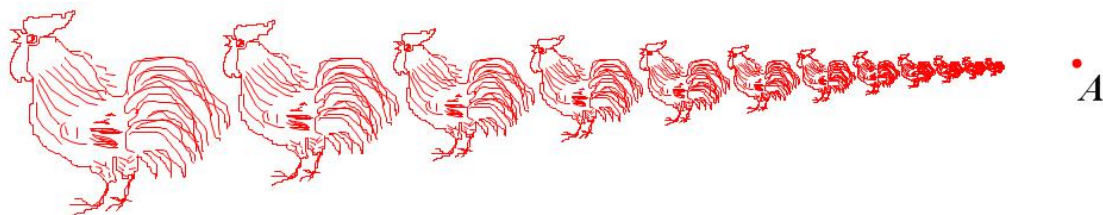


图 2

在图 1 中, 有许许多多的三角形, 它们的大小不同, 而形状却是相同的; 在图中, 画出来的一排大公鸡, 一摸一样, 只是大小不同而已。

我们把这种形状相同的图形称之为**相似图形**。

两个相似图形之间, 形状相同, 大小可以不同。那么将其中一个图形放大或者缩小, 就可以得到另外一个图形。那么现在就让我们通过放大或者缩小一个图形而得到另外一个图形吧。

在计算机上, 与放大或者缩小对应的命令, 叫作放缩。在我们熟悉了旋转的情况下, 利用 Hawgent 皓骏动态数学软件进行图形放缩命令就相对简单了, 下面我们就进行一个图形放缩试试看:

- (1) 启动 Hawgent 皓骏动态数学软件, 画任意两点 A 和 B。
- (2) 单击【画图】工具, 同时选择点 A 和点 B, 执行【画图】菜单下【多边形】子菜

单中的【正方形】命令，作出正方形 ABCD。

(3) 在正方形 ABCD 外取一个自由点 E，将点 F 的名字修改为：O，结果如图 3 所示。

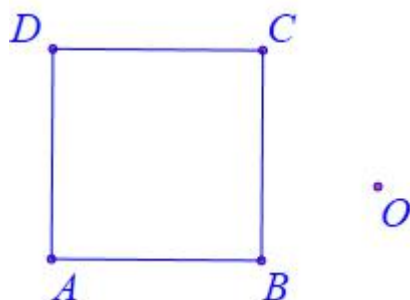


图 3

(4) 按住【Ctrl】键，依次选择点 A、B、C、D、线段 AB、BC、CD、DA 和点 O，执行【变换】菜单下的【放缩】命令在弹出对话框中，次数输入次数：1，放缩比例：0.5，单击【确定】按钮完成，结果如图 4 所示，得到缩小 0.5 倍后的正方形 FGHI。

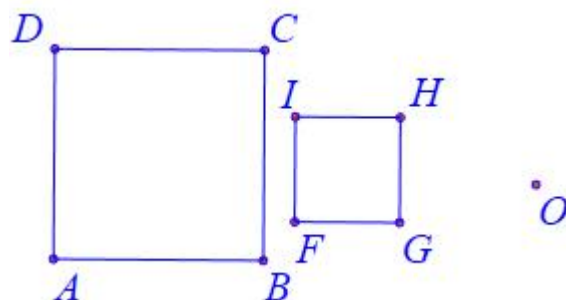


图 4

(5) 将点 J、点 G、点 H、点 I 的名字分别修改为：A'、B'、C'、D'。

(11) 拖动点 O，可以改变放缩中心的位置，则通过放缩得到的正方形 A' B' C' D' 的位置也相应发生改变，而大小始终保持不变，如图 6、图 7 所示，。

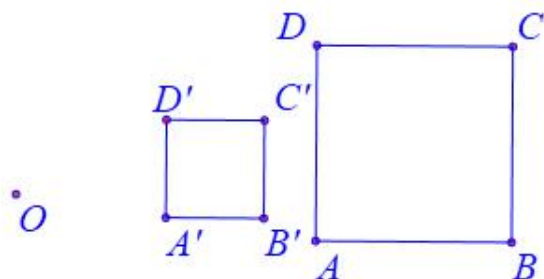


图 6

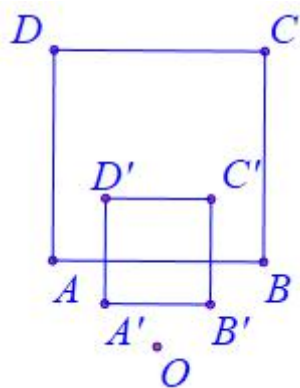


图 7

2, 想一想, 做一做

【拓展训练】

- 1, 以点 O 为中心、以 2 为放缩倍数, 将正方形 $ABCD$ 进行放缩。
- 2, 插入一张图片, 例如图 2 所示的大公鸡, 绘制出逐渐缩小的一排图片:
 - (1) 在新的页面当中, 隐藏坐标原点 O 之外的其他对象;
 - (2) 执行【插入】菜单中的【图片】命令, 按提示插入一张图片;
 - (3) 以原点 O 为缩放中心, 缩放次数为 10, 倍数为 0.7, 缩小这张图片。

【思考问题】

我们知道, 在图形旋转过程中, 两个对应点到旋转中心的距离相等且保持不变, 两个对应点与旋转中心所成的角 (旋转中心为角的顶点) 等于旋转角的大小。依次类比, 在放缩图形中, 你认为两个对应点、放缩中心、放缩倍数之间有哪些关系和哪些性质呢? 请利用适当的方式验证你的猜想。

第 35 部分 究竟何谓相似形

1, 探究相似图形的性质

前面我们谈到, 形状相同的图形叫做**相似图形**。

如图 1 所示, 矩形草坪 EFGH 的长为 60 米, 宽为 40 米, 沿草坪四周有 10 米宽的环形人行道。人行道内外所形成的两个长方形 EFGH 与 ABCD 是相似图形吗?

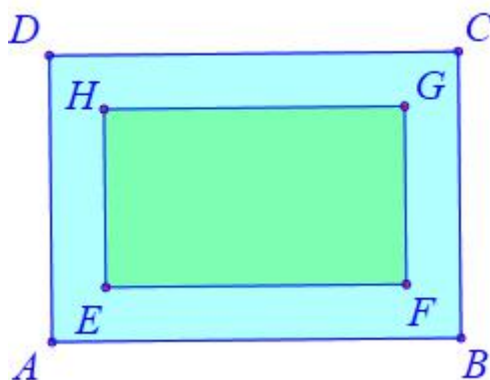


图 1

要回答上面这两个问题, 这就需要我们利用数学的语言说明什么是相似, 就需要知道通过验证哪些条件可以判断两个图形是否相似。

首先从我们熟悉的三角形开始, 研究和探索相似图形的性质。

(1) 启动 Hawgent 皓骏动态数学软件; 单击【画图】工具, 画任意三角形 ABC, 在三角形 ABC 外任意画一点 D。

(2) 单击【选择】工具, 右击点 D, 将点 D 的名字修改为: O。

(3) 将点 A、点 B、点 C、线段 AB、线段 BC 和线段 CA 进行以点 O 为缩放中心, 缩放次数为 1, 放缩倍数为: a 的放缩变换。结果如图 2 所示, 得到放缩后的三角形 EFG。

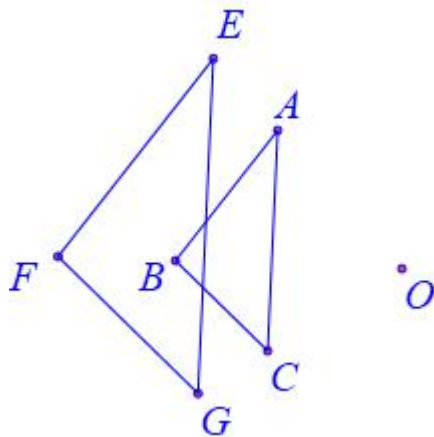


图 2

(3) 将点 E、点 F 和点 G 的名字分别修改为：A'、B'、C'。

三角形 ABC 与三角形 A' B' C' 之间究竟有什么关系呢？字母 a 的值是多少呢？它与两个相似三角形之间又有什么关系呢？

(4) 执行【插入】菜单中的【变量】命令，如图 3 所示，在弹出的对话框中输入：a，将它的范围修改为：0 到 10，然后单击【确定】按钮完成。如图 4 所示，就增加了一个可以观察和改变字母 a 的值的尺子，叫做字母 a 的变量尺。通过该变量尺可以使得字母 a 在 0 到 10 这个范围内改变，当然你也可以打开它的属性对话框重新修改它的拖动范围。



图 3



图 4

(5) 按住【CTRL】键，依次择点 A 和点 B，执行【测量】菜单中的【距离】命令，得出点 A 和点 B 距离即线段 AB 长度的测量值，同理测量出线段 BC、线段 CA 的长度。

(6) 按照 (5) 的方法测量点 A' 和点 B' 的距离，得到了线段 A' B' 的长度测量值。

既然三角形 A' B' C' 是通过三角形 ABC 放缩 a 倍后得到的，那么它们的边长之比是否与字母 a 的值有关呢？

(7) 执行【测量】菜单中的【表达式】命令，就弹出一个可以进行运算的对话框。输入：v003/v000，如图 5 所示，单击【确定】按钮就可以得到线段 A' B' 的长度与线段 AB

的长度之间的比值。为了增加结果的可读性，右击测量测量值，把\&之前的内容改为：
 $(\text{Abs}(A'B'))/(\text{Abs}(AB)) =$ ，点击【确定】即可。



图 5

重复类似操作，请测量线段 $B'C'$ 与线段 BC 的长度之比、线段 $C'A'$ 与线段 CA 的长度之比。在测量表达式对话框中可以看到，每个测量结果前面都有一个字母 v 加一串数字，我们将它们称作**变量**。计算机把每一个测量（或计算）结果都用一个变量记录了下来。第一个变量 $v000$ ，记录第一个测量（或计算）结果；第二个变量 $v001$ ，记录第二个测量（或计算）结果；第三个变量 $v002$ ，记录第三个测量（或计算）结果；依次类推下去。当我们需要用到哪个测量结果进行运算时，只需要输入对应的变量代替就可以，计算机习惯从 0 开始计数，所以测量结果的变量名分别是： $v000$ 、 $v001$ 、 $v002$ 、 $v003$ 、……。

如图 6 所示，可以看到，两个相似三角形中对应边的长度之比都相等，且等于放缩倍数 a 的值。

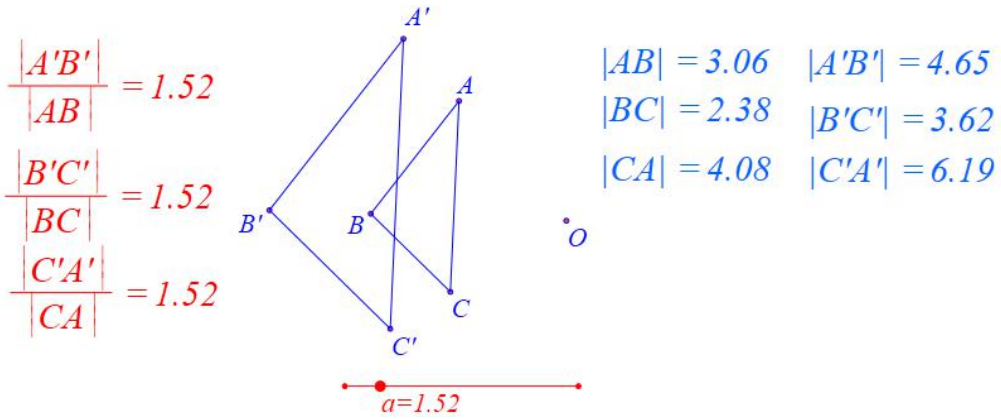


图 6

单击字母 a 的变量尺就可以将它选中，如图 7 所示，这时单击鼠标并按住左右拖动就可以改变字母 a 的数值大小。



图 7

可以发现，当字母 a 的数值大小改变时，三角形 $A'B'C'$ 各边的长度也会同时发生改变，而对应边的长度之比总是相等，并且等于字母 a 的数值大小。

也可以拖动点 A、点 B 或者点 C，而使得三角形 ABC 的形状发生改变。在三角形 ABC 的形状发生改变的过程中，两个三角形的形状总是相同，并且对应边的长度之比总是相等。事实上，对于任何相似多边形来说都有：

对应边的长度之比相等。

相似图形既然形状相同，那么它们的对应角就应该相等，我们可以通过测量检验这个结论。

(8) 依次选择点 C、点 A 和点 B，执行【测量】菜单中的【角度】命令，得到 $\angle CAB$ 的测量值；重复类似操作测量角 $\angle C'A'B'$ 的值，如图 8 所示，可以发现 $\angle CAB$ 的值等于 $\angle C'A'B'$ 的值。如图 8 所示：

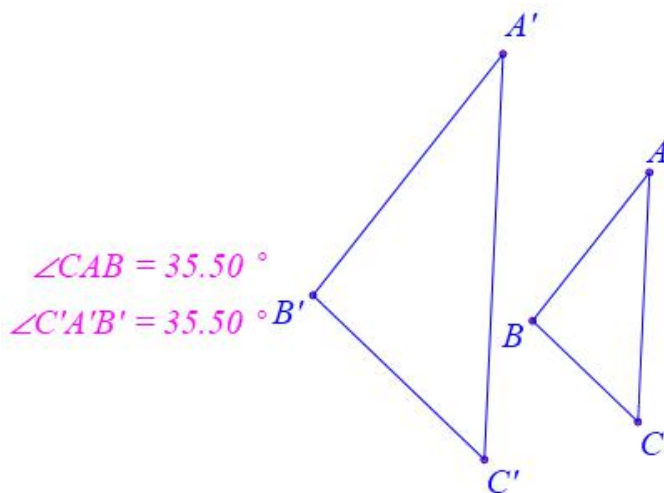


图 8

你可以继续测量其他两组对应角的大小，然后比较它们的值，可以发现对应角总是相等。而无论怎样改变三角形 ABC 的形状，对应角都始终相等。实际上，对于任何相似多边形来说都有：

对应角的值相等。

将以上两个结论简称为：**相似多边形的对应边成比例，对应角相等**。我们把相似多边形对应边的比称作**相似比**。

反过来，若两个多边形满足对应边成比例以及对应角相等的条件，那么它们就是相似多边形。

2, 想一想, 做一做

【拓展训练】

根据相似多边形的条件, 你认为图 1 中所示的两个长方形 ABCD 与 EFGH 是相似多边形吗? 请给出你的判断依据。

【思考问题】

我们知道, 在图 6 中, 三角形 $A'B'C'$ 是通过把三角形 ABC 以点 O 为中心、以 a 为倍数通过放缩变换得到的。反过来, 以点 O 为中心, 如果要将三角形 $A'B'C'$ 通过放缩变换得到三角形 ABC, 那么放缩倍数应该是多少?

第 36 部分 搭建美丽圣诞树

1, 用相似勾画圣诞树

圣诞节期间, 大大小小的广场、商店内外都摆满了圣诞树, 它们为节日带来了欢乐的气氛。如图 1 所示, 就是一个由明亮的灯泡所编制而成的一个圣诞树。观察一下, 这个圣诞树的结构有什么特点?



图 1

可以看到, 圣诞树的树身是由六个圆台所组成的。圆台的轴截面, 即它的正视图, 是一个等腰梯形。从下往上, 梯形逐步变小, 而形状相同, 是相似图形。下面就利用放缩变换建造一个按照你自己喜欢的色彩所设计的圣诞树吧。

(1) 启动 Hawgent 皓骏动态数学软件; 单击【画图】工具, 画任意点 A、B、C。

(2) 单击【画图】工具, 依次选择点 C、点 B 和点 A, 执行【画图】菜单下【多边形】子菜单中的【等腰梯形】命令, 结果如图 2 所示, 作出等腰梯形 ABCD。

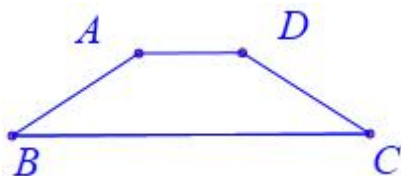


图 2

(3) 选择点 D 和点 C, 执行【画图】菜单下【约束点】子菜单中的【中点】命令, 作 BC 的中点 E;

(4) 依次选择点 E 和线段 BC，执行【画图】菜单下【直线】子菜单中的【垂线】命令，作出垂直于 BC 的直线，在垂线上上取任意点 F 和点 G，把 F 拖动到线段 BC 下方，G 拖动到 BCD 上方；作出线段 AD 与线段 FE 延长线的交点 H。

(5) 隐藏直线，连接 EF，依次选择 ABCD 四点，执行【画图】菜单下【多边形】子菜单中的【多边形】命令，作出多边形 ABCD，结果如图 3 所示：

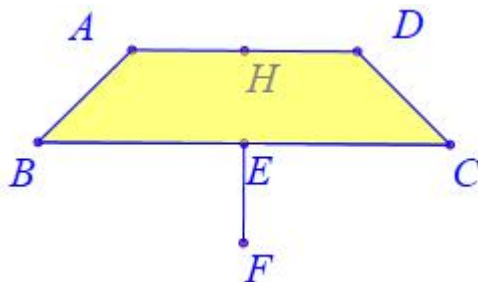


图 3

以点 G 为中心将梯形 ABCD 放缩就可以得到另外一个图形。如果希望通过放缩得到的梯形的下底边与线段 AD 共线，那么放缩的比例应该是多少呢？

若通过放缩得到的梯形其下底边与梯形 ABCD 的上底边 AD 重合，那么点 H 与点 E 就是两个相似图形中的对应点。因此，放缩比例应为线段 GH 与线段 GE 的长度之比。

下面就让我们动手做出圣诞树的剩余部分。

(5) 同时选择点 G、点 H，执行【测量】菜单中的【距离】命令，得到点 G 与点 H 之间的长度测量值；重复类似操作，测量点 G 与点 E 之间的长度测量值。

(6) 执行【测量】菜单中的【表达式】命令，在测量表达式对话框的编辑框中输入： $v000/v001$ ，单击【确定】就可以得到，线段 GH 的长度与线段 GE 的长度之比，如图 5 所示，计算机自动用变量 v002 记录。然后关闭测量表达式对话框就可以。



图 4

$$\frac{1}{v001} v000 = 0.79$$

图 5

(7) 隐藏点 E、点 H、线段 AB、线段 BC、线段 CD、线段 DA。

(8) 按住【Ctrl】键，依次选择多边形 ABCD 和点 G，执行【变换】菜单中的【放缩】命令，如图 6 所示，在弹出的输入对话框中次数输入：10，放缩比例输入：v002，单击【确

定】完成。结果如图 7 所示：



图 6

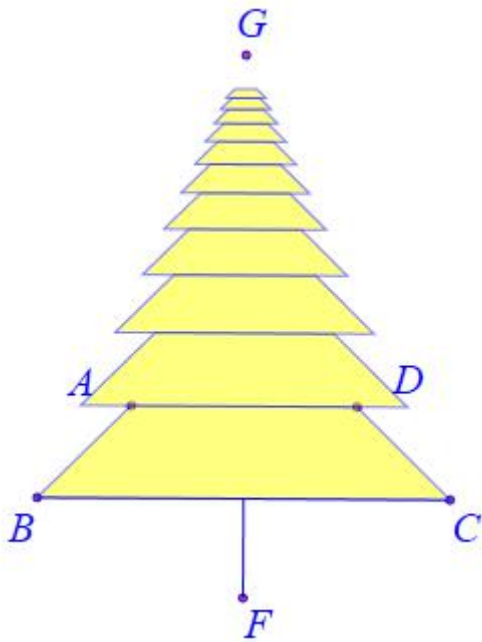


图 7

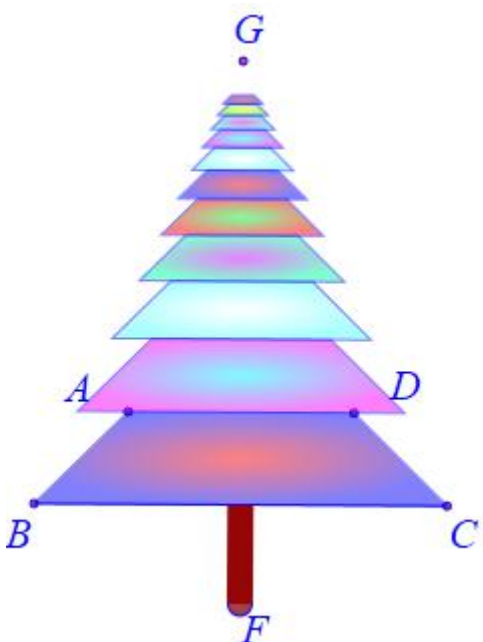



图 8

(9) 右击多边形 ABCD 的下边缘，打开其属性对话框，在“填充”选项界面中选择“填充”选项，并选择“类型”为：路径渐变画刷；然后可以在“画刷”选项界面中重新设置填充类型和颜色，其他四边形也类似地修改。选择树干 EF，点击“放大”按钮，把它调粗，并填充合适的颜色，请按照你自己喜欢的类型和颜色装饰一下你自己直走的圣诞树吧！如图 8 所示，这是被装饰好的圣诞树。

2，想一想，做一做

【拓展训练】

制作一排大雪纷飞下的圣诞树，并在每个圣诞树的顶部安装一个旋转的五角星。

【思考问题】

1, 分别拖动点 A、点 B、点 C、点 F 或者点 G, 观察圣诞树的形状有什么变化。请你总结一下, 这些点对圣诞树的形状分别有什么影响?

2, 在上面的操作过程中, 放缩比例 v_{002} 小于 1, 因此不断把放缩得到的多边形继续放缩, 那么新得到的多边形距离放缩中心 G 就会越来越远。你认为, 通过放缩得到的多边形能够到达点 G 的位置吗? 如果能够, 那么至少需要经过多少次放缩之后才能到达? 如果不能, 请说明你的理由。

第 37 部分 放缩变换得位似

1, 放缩变换得位似

我们知道, 通过放缩变换能够得相似多边形; 反过来, 若两个多边形相似, 是否一定能够将其中的一个多边形通过放缩变换而得到另外一个多边形?

打开文件“两个相似三角形.dmr”, 如图 1 所示, 在三角形 ABC 与三角形 A' B' C' 中, 三组对应边成比例、三个对应角分别相等, 所以三角形 ABC 与三角形 A' B' C' 是相似三角形。拖动点 B' 可以改变线段 A' B' 的方向和长度, 三角形 A' B' C' 的位置与大小也同时发生改变, 但三角形 A' B' C' 与三角形 ABC 相似的性质始终不变。

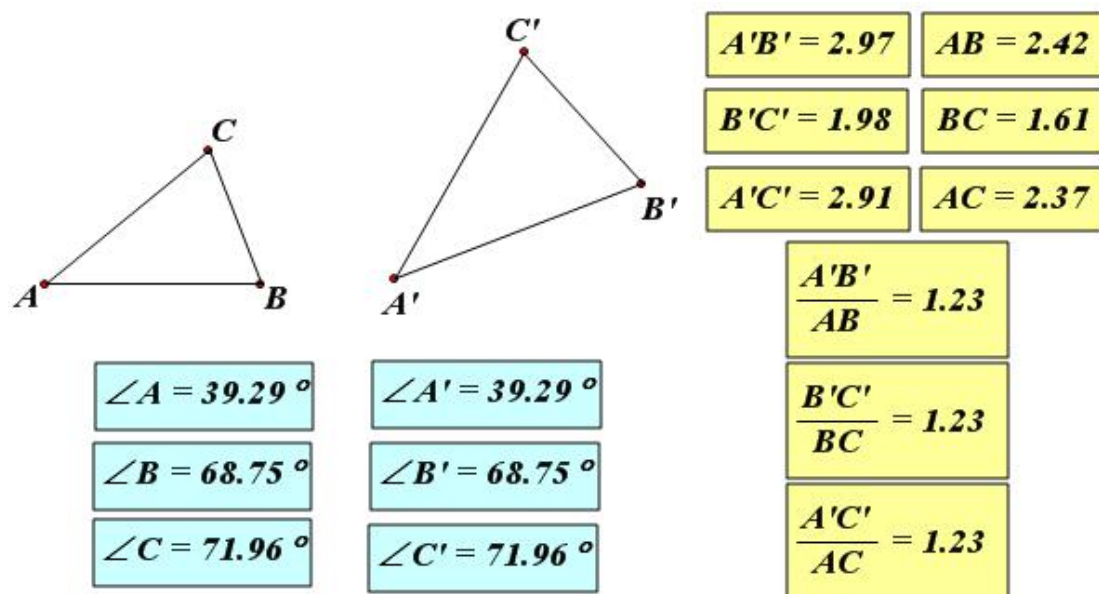


图 1

那么, 是否能够将三角形 ABC 通过放缩变换而得到三角形 A' B' C' 呢? 如果你认为可以, 请你找出放缩中心的位置; 如果你认为不可以, 能否说明其中的道理?

为了研究这个问题, 我们需要进一步研究放缩图形的性质。首先通过放缩变换作两个相似三角形:

- (1) 启动 Hawgent 皓骏动态数学软件; 单击【画图】工具, 任意做一个三角形 ABC 和任意点 D。
- (2) 单击【画图】工具, 右击点 D, 在弹出的属性对话框中将其名字修改为 O。
- (3) 依次选择 A、B、C 三点和 AB、BC、CA 三条线段, 执行【变换】菜单中的【缩放】

命令，在弹出的对话框中输入次数：1，放缩比例：a，点击【确定】得到将三角形 ABC 和线段 AB、BC、CA 放缩后的三角形 EFG，将点 E、点 F、点 G 的名字分别修改为：A'、B'、C'。

(4) 执行【插入】菜单中的【变量】命令，在弹出的用户输入对话框中输入：a，取值范围：-10 到 10，点击【确定】生成变量 a 的控制尺。

通过变量尺可以改变字母 a 的值。可以发现：当 a 为正数时，三角形 A' B' C' 与三角形 ABC 在放缩中心 O 的同侧，如图 2 所示；当 a 为负数时，三角形 A' B' C' 与三角形 ABC 在放缩中心 O 的两侧，如图 3 所示。

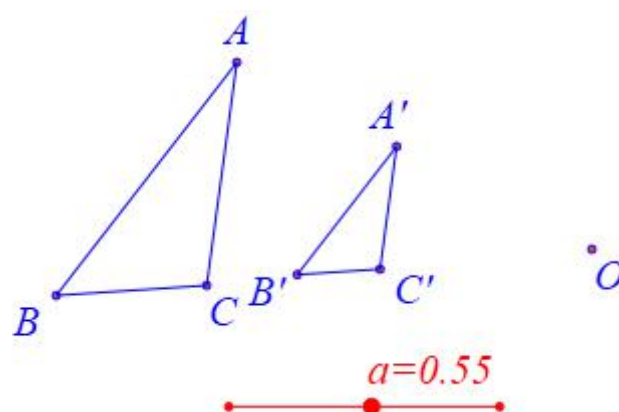


图 2

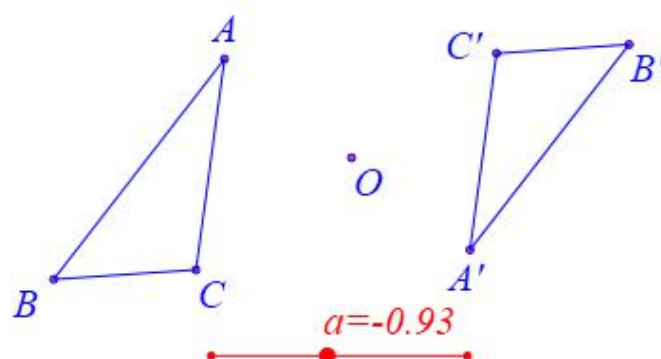


图 3

放缩倍数 a 对三角形 A' B' C' 还有哪些影响呢？我们选择放缩图形中的一个进行研究。

(5) 选择点 A'，执行【画图】菜单中的【跟踪】命令；通过变量尺改变字母 a 的数值大小，如图 4 所示，可以观察到随着字母 a 的变化，点 A' 所经过的路径是一条直线，并且这条直线经过点 A 和点 O。

也就是说，点 A' 不可能出现在任何位置，而只能出现在点 A 和点 O 所确定的直线上，也可以说点 O 在对应点 A 和 A' 之间的连线上。

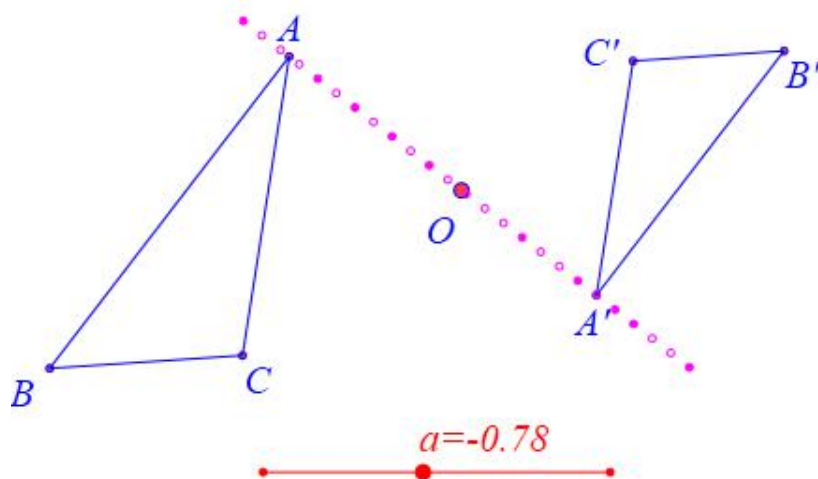


图 4

其实这一点不难理解，因为当 a 的值为 1 时（想想怎样精确控制 $a=1$ ？），点 A' 正好与点 A 重合，如图 5 所示；而当 a 的值为 0 时，点 A' （以及点 B' 、点 C' ）正好与点 O 重合，如图 6 所示。

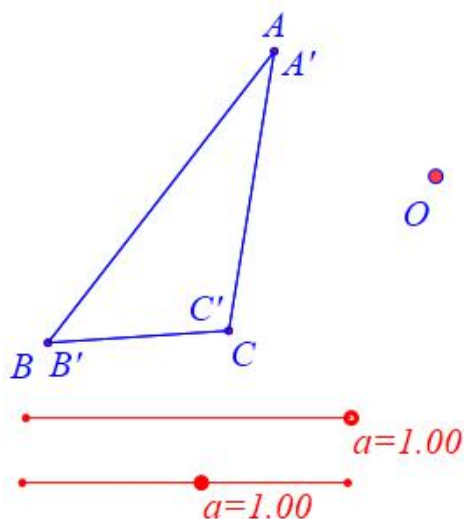


图 5

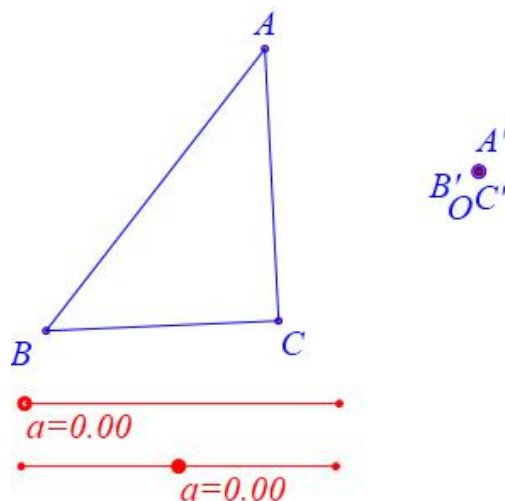


图 6

对点 B' 、点 C' 重新进行研究，也会得到相同的结果。因此通过放缩的方式得到的两个相似多边形中，对应点之间的连线总是经过放缩中心。所有对应点之间的连线都经过放缩中心，也可以叙述为：**对应点的连线交于一点**。

事实上，当字母 a 的值为 -1 时，如图 7 所示，正是三角形 $A'B'C'$ 与三角形 ABC 关于点 O 对称的情况。当然，点 O 经过任何一组对应点之间的连线的这条性质同样成立。同时，根据中心对称图形性质有： $AB \parallel A'B'$ 、 $BC \parallel B'C'$ 、 $CA \parallel C'A'$ 。

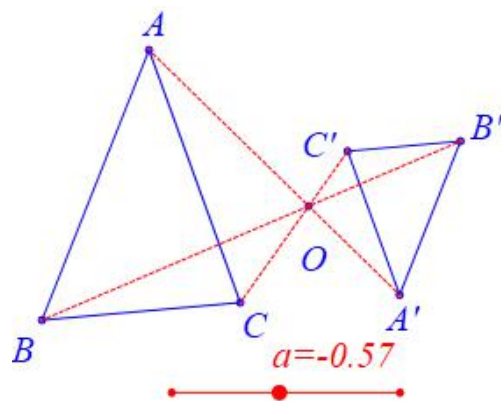


图 7

当放缩比例不是-1 而是其他数值时，以三角形 OAC 和三角形 OA' C' 为例，总有：

$$OA' : OA = A' C' : AC = C' O : CO = a。$$

根据平行线性质的判定问题知道 $AC \parallel A' C'$ 。同样，对于任何一组对应边来说都有：

对应边也相互平行。

我们将这种**对应点连线交于一点、对应边相互平行**的两个相似多边形称之为**位似图形**，将对应点连线的这个交点称作**位似中心**。可见，我们通过放缩变换得到的图形与原来的图形就具有位似关系，而不仅仅是对应边成比例、对应角相等。

2，想一想，做一做

【拓展训练】

利用放缩绘制两个大小不同的图案（本例画成牛头的模样，你可以尝试化成其他图案）：

（1）利用【画图】菜单下【参数点】子菜单中的【坐标点】命令，作出下列坐标点：A (-1, 6)、B (-4, 3)、C (-4, 2)、D (-2, 2)、E (-1, -1)、F (-2, -2)、G (0, -3)、H (2, -2)、I (1, -1)、J (2, 2)、K (4, 2)、L (4, 3)、M (1, 6)、N (2, 3)、O (-2, 3)；

（2）按住【Ctrl】键，按照作图顺序，依次选择以上点，执行【画图】菜单下【多边形】子菜单中的【多边形】命令，作出多边形 ABCDEFGHIJKLMNOP。

如图 8 所示，它的形状像牛头一样，我们暂且将它称之为牛头图案吧。

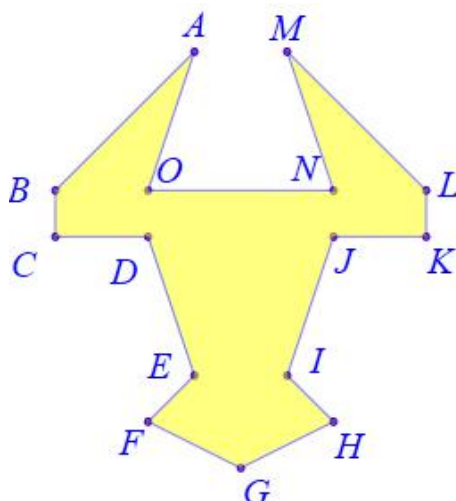


图 8

(3) 选择牛头图案，执行【画图】菜单下【自由点】子菜单中的【多边形上的点】命令，牛头边上的点 P。

(4) 单击【画图】工具，在牛头图案外任意画一点 Q；连接 PQ；在 PQ 上任意取一点 R。结果如图 9 所示。

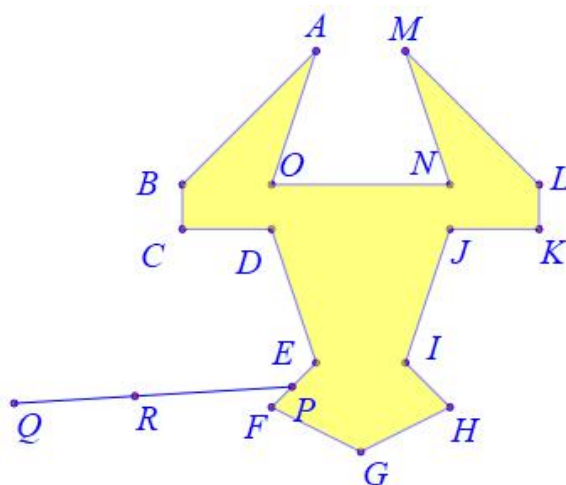


图 9

(5) 单击【选择】工具，依次选择点 Q 和点 R，执行【测量】菜单中的【距离】命令，测量线段 QR 的长度；类似地，测量线段 QF 的长度。

(6) 执行【测量】菜单中的【表达式】命令，在弹出的测量表达式对话框中输入： $v000/v001$ ，点击【确定】测量出线段 QR 与线段 QF 的长度之比。

(7) 执行【插入】菜单下【常用按钮】子菜单中的【对象重复运动】命令，在弹出的输入框中把“动画”的程序命令修改为：`bjAnimation(33,500,0);`；点击【修改动作】保存，把“停止”的程序命令改为：`StopAnimation(33);`；点击【修改动作】保存，最后点击【确

定】按钮生成点 P 动画按钮。

(8) 选择点 R，执行【画图】菜单中的【跟踪】命令，增加点 R 的跟踪。右击跟踪对象，把跟踪点数改为：2000。

(9) 单击【动画】按钮，结果如图 10 所示，跟踪点 R 得到了一个小的牛头图案。可以发现当点 P 在多边形方的边界上运动的过程中，线段 QR 与线段 QF 的长度之比始终不变。

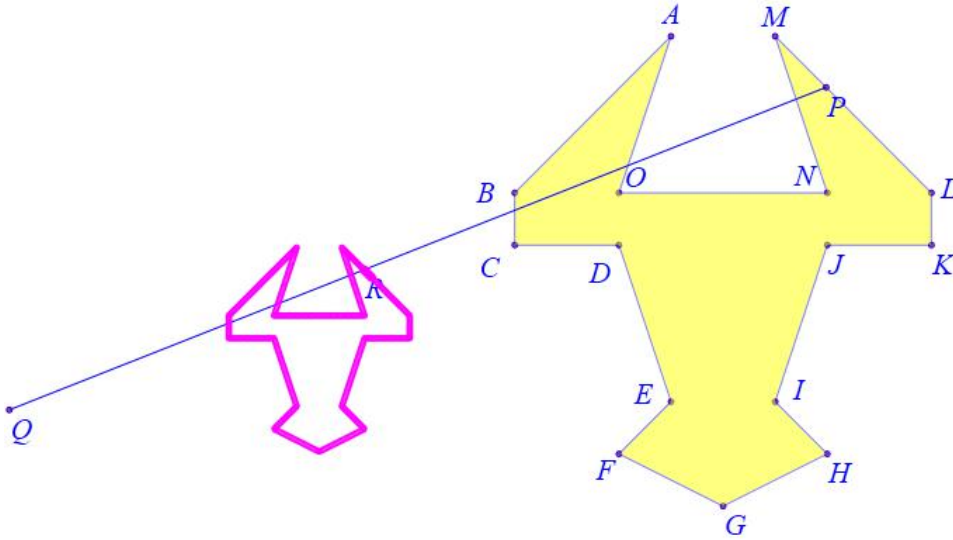


图 10

当然，你也可以拖动点 R 在直线 QP 上的位置，然后通过单击动画按钮得到不同的牛头图案。

【思考问题】

在图 1 当中，只需要做直线 AA' 、直线 BB' 、直线 CC' ，然后看三条直线是否交于一点，就可以判断这两个图形是否为位似图形，同时知道能否将三角形 ABC 通过放缩变换而得到三角形 $A'B'C'$ 。请你连接试试看，并叙述你的发现和结论。

第 38 部分 位置无关构造异

1，相似与位似

在很多时候，两个图形是相似图形，但不具有位似关系，如图 1、图 2 所示，这样我们就不能通过放缩变换通过一个图形得到另一个图形。

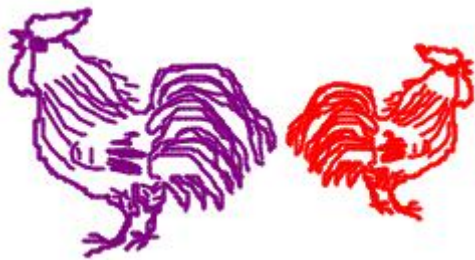


图 1

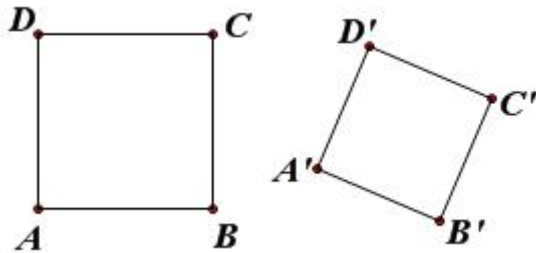


图 2

那么,在这种不具有位似关系的情况下，如何画一个与某一个图形具有相似关系的图形呢？例如图 3 所示，已知三角形 ABC 和线段 DE。已经知道一条边 DE，如何绘制一个三角形 DEF？使得它与三角形 ABC 相似，其中点 D、点 E 分别与点 A、点 B 对应。

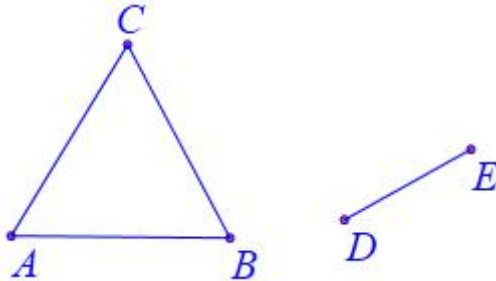


图 3

因为点 D 和点 E 已经存在，因此绘制三角形 DEF，关键在于构造与点 C 对应的点 F。点 F 与点 A、点 B、点 C、点 D 以及点 E 之间有什么关系呢？如何由这些点确定点 F 的位置呢？

我们知道 $\angle EDF$ 等于 $\angle BAC$ ，所以点 F 在以点 D 为顶点、与射线 DE 的夹角等于 $\angle BAC$ 的射线上；另一方面根据相似图形的性质有： $DF/DE=AC/AB$ ，得： $DF=DE*AC/AB$ ，所以，点 F 还在以点 D 为中心、半径为 $DE*AC/AB$ 的圆周上。因此，圆与射线的交点即为所求的点 F。操作如下：

- (1) 启动 Hawgent 皓骏动态数学软件；单击【画图】工具，作出如图 3 所示三角形 ABC

和线段 DE。

(2) 依次选择点 C、A、B，执行【测量】菜单中的【角度】命令，获得 $\angle CAB$ 的测量值；依次选择点 A 和点 B，执行【测量】菜单下的【距离】命令，测量出线段 AB 的长度，同理测量出 AC 的长度，计算机分别用 v000、v001、v002、记录了以上的测量结果

(3) 执行【测量】中的【表达式】命令，在弹出的对话框中输入： $v002/v001$ ，点击【确认】得出测量表达式；右击表达式，把\&之前的内容改为： $AC*DE/AB=$ ，点击【确定】完成表达式显示的修改，这次测量值计算机以 v003 命名。

(4) 依次选择线段点 E 和点 D，执行【画图】菜单下【参数点】子菜单中的【旋转缩放点】命令，如图 4 所示，在弹出的输入窗口中，填入旋转角度： $v000*180/\pi$ ，放缩倍数： $v003$ ，点击【确定】作出旋转放缩点 F，连结 EF，结果如图 5 所示

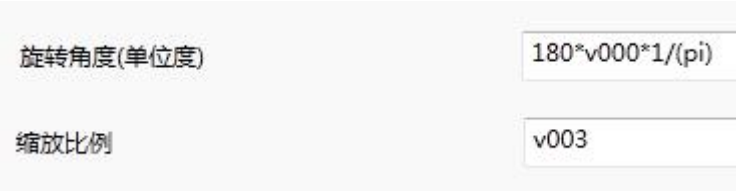


图 4

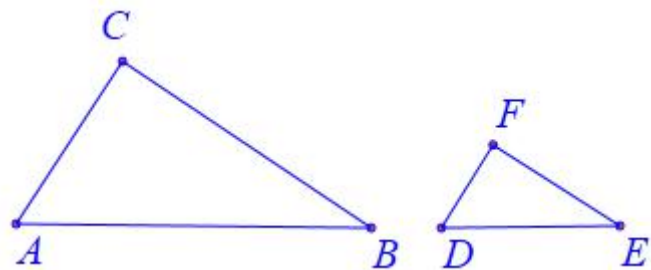


图 5

当然，点 F 也可能在直线 DE 的下方，如图 6 所示，那么只需要作点 F 关于直线 DE 的反射变换，就可以得到另一个满足要求的三角形 DEF'。

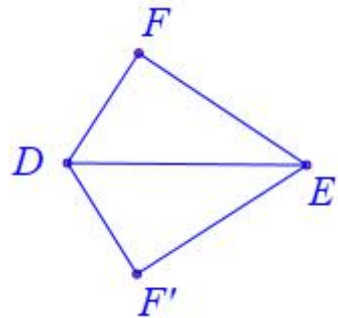


图 6

也就是说，将射线 DE 绕点 D 向上旋转与 $\angle CAB$ 大小相等的角就得到了点 F，向下旋转与

$\angle CAB$ 大小相等的角就得到了点 F' ，当然它们都在以点 D 为圆心、半径等于 $AC \cdot DE / AB$ 的圆周上。

可见，满足条件点 F 和点 F' 是确定的。那么这两个三角形 DEF 和 DEF' 与三角形 ABC 是否真的相似呢？我们可以通过对三角形 DEF 与三角形 ABC 进行测量而验证。

根据作图的过程我们容易推出： $\angle CAB = \angle EDF$ ，并且 $AC/DF = AB/DE$ 。那么其他边角是否满足相似三角形**对应角相等对应边成比例**的要求呢，请你自行同过测量验证。

由此，我们得到一个判断两个三角形相似的方法：

如果两个三角形的两组对应边的比相等，并且对应的夹角相等，那么这两个三角形相似。

这是判断两个三角形相似的**边角边**（SAS）定理。

2，想一想，做一做

【思考问题】

上述探究过程，用到了测量角度的变量，需要注意的是，测量角度命令保存在测量变量中的值是弧度值，所以我们在进行旋转放缩操作时在旋转角度项中输入的是 $v000 \cdot 180 / \pi$ ，而非 $v000$ ，其中 $180 / \pi$ 是弧度转化为角度的变换公式，请你思考一下该公式的由来。

【拓展训练】

1，已知三角形 ABC 和线段 DE ，还可以通过以下方法与步骤构造点 F ：

（1）分别测量线段 AB 、 BC 、 CA 和 DE 的长度。

（2）由 $AB/DE = BC/EF$ 得： $EF = DE \cdot BC / AB$ ；由 $AB/DE = CA/FD$ 得： $FD = DE \cdot CA / AB$ 。参考上上所述作图方法，测量出： $EF = DE \cdot BC / AB$ ； $FD = DE \cdot CA / AB$ 。

（3）以点 D 为圆心作半径为 $DE \cdot BC / AB$ 的圆；以点 E 为圆心作半径为 $DE \cdot CA / AB$ 的圆。

那么两个圆的交点之后两个 F 、 F' ，如图 7 所示，三角形 DEF 或三角形 DEF' 与三角形 ABC 是否相似呢？请分别测量 $\angle BAC$ 、 $\angle ABC$ 、 $\angle EDF$ 、 $\angle DEF$ 的值，看对应角是否相等。

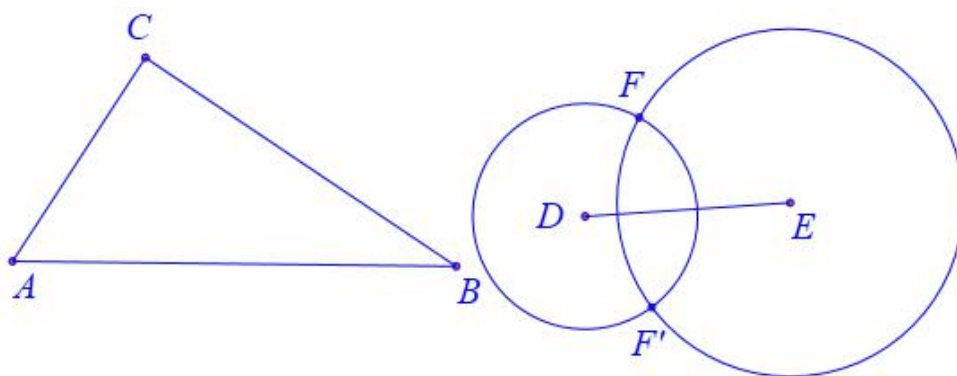


图 7

由作图过程知： $AB/DE=BC/EF=CA/FE$ ，即三组对应边的比相等。若三角形 ABC 与三角形 DEF 或 DEF' 相似的结论成立，那么我们就又得到了另一个判断两个三角形相似的方法：

如果两个三角形的三组对应边之比相等，那么这两个三角形相似。

这是判断两个三角形相似的**边边边**（SSS）定理。

2，已知三角形 ABC 和线段 DE，还可以通过第三种方法构造点 F：

（1）依次选择点 B、点 A 和点 C，测量 $\angle BAC$ 的测量值；依次选择点 A、点 B 和点 C，测量 $\angle CBA$ 的测量值。计算机分别用变量 v000、v001 记录它们的测量结果。

（2）依次选择点 D 和点 E，执行【画图】菜单下【直线】子菜单中的【直线】命令，作出直线 DER，依次选择直线 DE 和点 D 执行，【变换】菜单中的【旋转】命令，旋转角度为： $v000 \cdot 180/\pi$ ，得到过 D 点的旋转直线；同理，依次选择直线 DE 和点 E 执行，【变换】菜单中的【旋转】命令，旋转角度为： $v001 \cdot 180/\pi$ ，得到过 E 点的旋转直线。作出这两条直线的交点 F，则三角形 DEF 就是我们要作的三角形。

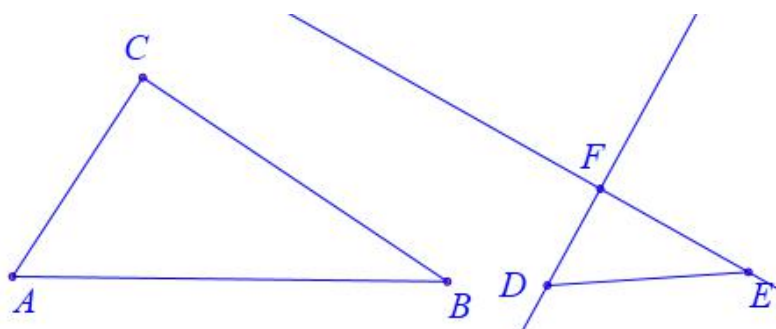


图 11

根据作图过程知 $\angle BAC = \angle EDF$ 、 $\angle CBA = \angle FED$ ，根据三角形内角为 180° 的性质知道 $\angle BCA = \angle EFD$ 。

请你分别测量三角形的六条边的长度，并计算对应边的比值，观察对应边的比是否相

等。若三组对应边的比相等，则三角形 ABC 与三角形 DEF 或 DEF' 相似的结论就成立，那么我们就又得到了第三个判断两个三角形相似的方法：

如果一个三角形的两个角与另外一个三角形的两个角对应相等，那么这两个三角形相似。

根据三角形内角和定理，容易知道第三角也相等，这是判断两个三角形相似的**角角角**（AAA）定理。

第 39 部分 多少才能填满

1, 计算面积的相似之比

打开文件“铺满更大的三角形.dmr”，如图 1 所示，三角形 ABC 与三角形 DEF 相似，并且它们的对应边之比为 1:3。你认为需要多少个三角形 ABC 才能将三角形 DEF 无空隙无重叠地填满？

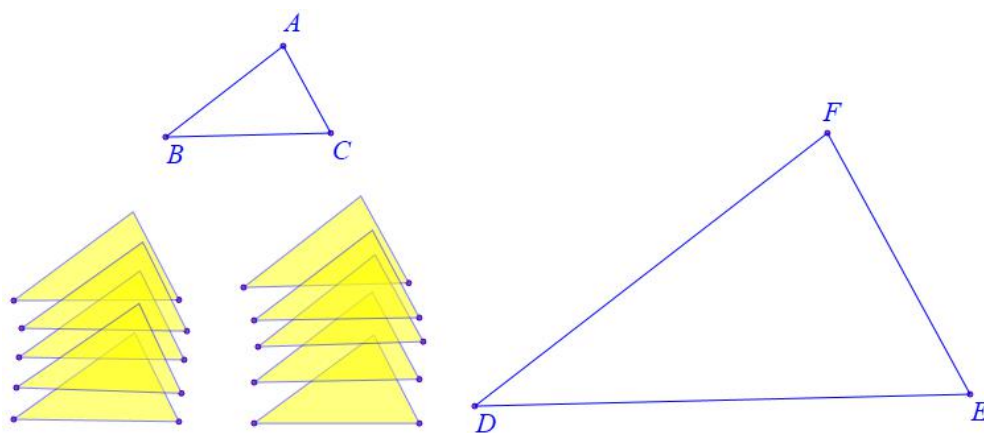


图 1

左下方的一堆三角形是与三角形 ABC 形状和大小都完全相同的三角形。拖动三角形的左下方端点可以将它们平移；拖动多边形右下方的顶点可以任意旋转。

请你动手试一试，看看需要多少个小的三角形才能将大的三角形 DEF 填满？

刚刚好将三角形 DEF 填满时，所占用的小三角形的个数，就是三角形 DEF 与三角形 ABC 的面积之比。

在这里，你所得到的面积之比是多少呢？你认为，它与两个三角形的边长之比有什么关系？

首先数一数如图 2 所示边长分别为 2、3、4 的正方形分别有多少个边长为 1 的单位正方形所组成。

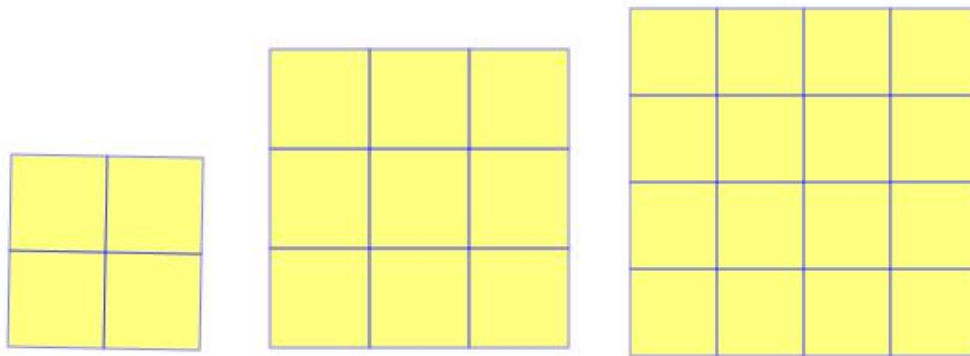


图 2

容易知道，它们分别由 4 个、9 个、16 个边长为 1 的单位正方形所组成。而这些正方形与边长为 1 的小正方形的边长之比分别为 2: 1、3: 1、4: 1。

可以看出对正方形来说，**面积之比等于边长之比的平方**。

对于其他性质的图形是否该结论仍然成立呢？请看看刚开始由小三角形铺满大三角形的结果，如图 3 可知，对于三角形来说，仍然有面积之比等于边长之比的平方这一结论成立。

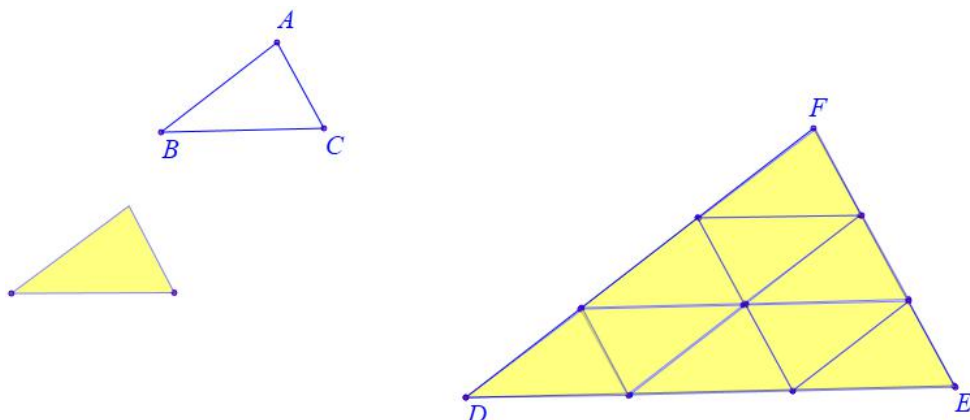


图 3

打开文件“相似三角形的高.dmr”，如图 4 所示，AD 和 A'D' 分别是两个相似三角形 ABC 与 A'B'C' 底边上的高。

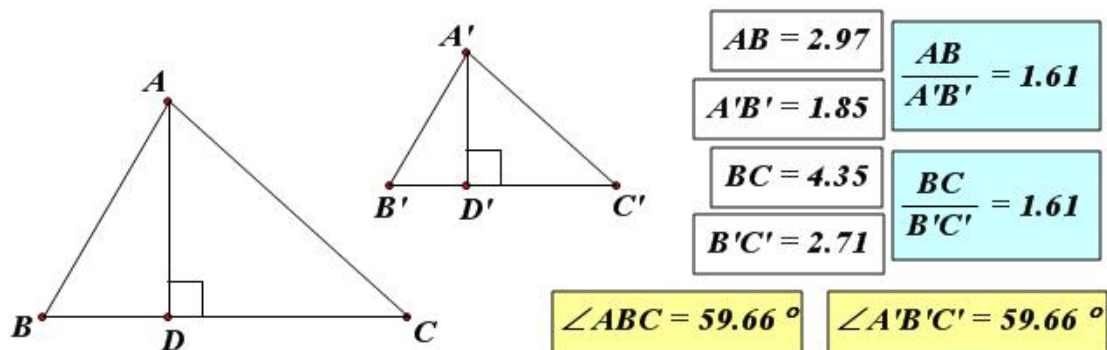


图 4 相似三角形及其对应边上的高

继续测量 AD、A'D' 的长度，并计算它们之间的比值。

拖动点 B' 可以改变三角形 A'B'C' 的大小，则线段 A'D' 的长度也相应改变；或者可以拖动点 A 改变两个三角形的形状。可以观察到，无论三角形 A'B'C' 的大小如何改变，或者无论它们的形状如何改变，两个三角形的对应高 AD 与 A'D' 的比始终等于对应边的比，如图 5 所示。

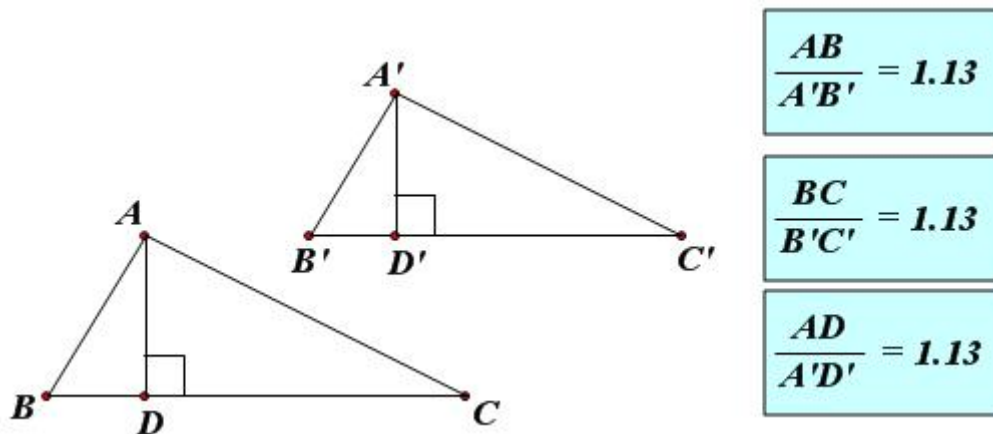


图 5

其实要证明这个结论也并不困难。下面是简要的推理过程：

∵ $\angle ABC = \angle A'B'C'$ ， $\angle ADB = \angle A'D'B'$ 。

∴ 三角形 ABD 与三角形 A'B'D' 相似（上一节“拓展训练”部分得到的结论）。

∴ $AD/A'D' = AB/A'B'$ 。

而三角形的面积等于底乘以高再除以 2，所以：

$$\frac{S_{\triangle ABC}}{S_{\triangle A'B'C'}} = \frac{\frac{1}{2} \times BC \times AD}{\frac{1}{2} \times B'C' \times A'D'} = \frac{BC}{B'C'} \times \frac{AD}{A'D'} = \frac{BC}{B'C'} \times \frac{BC}{B'C'} = \left(\frac{BC}{B'C'}\right)^2。$$

因此，我们有：**相似三角形的面积之比等于相似比的平方。**

因为任意多边形的问题都可以通过将它们分割成为若干个三角形的问题来考虑和解决，所以，对于任意相似多边形来说，都有：**相似多边形的面积之比等于相似比的平方。**

2，想一想，做一做

【拓展训练】

1，两个相似三角形中，如图 6 所示，对应边上的中线之比与两个三角形的相似比之间

有什么关系？请你通过测量、计算来验证你的猜想，并证明你所得到的结论。

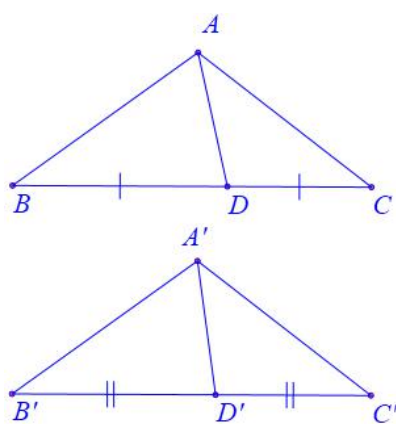


图 6

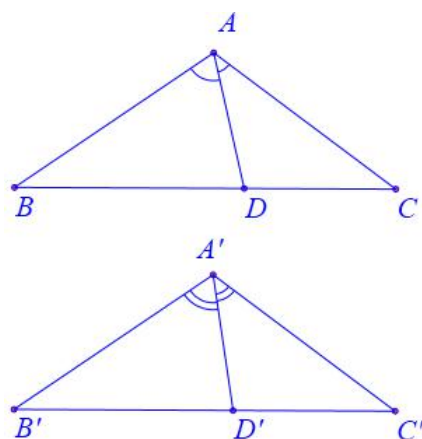


图 7

2, 两个相似三角形中, 如图 7 所示, 对应角的角平分线之比与两个三角形的相似比之间有什么关系？请你通过测量、计算来验证你的猜想, 并证明你所得到的结论。

第 40 部分 圆形压缩得椭圆

1, 圆与椭圆

椭圆与圆有许多相似之处，也有很多不同的地方。下面我们就利用学习过的放缩变换，研究椭圆与圆的内在关系与区别。

(1) 启动 Hawgent 皓骏动态数学软件；单击【画图】工具，画任意线段 AB 和它的中点 C 。

(2) 右键单击点 C 并按住拖动到点 B 的位置后松开，作出以点 C 为圆心经过点 B 的圆，那么线段 AB 就是圆 C 的直径。

(3) 在圆 C 上任取一点 D ，自点 D 做线段 AB 的垂足 E ，在线段 DE 上任取一点 F ，结果如图 1 所示。

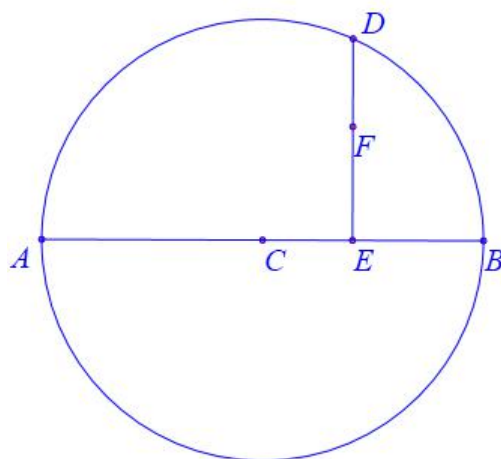


图 1

(4) 测量线段点 D 与点 E 之间的距离 $|DE|$ ，测量点 F 与点 E 之间的距离 $|FE|$ ，计算线段 $|DE|$ 与 $|FE|$ 的比值。拖动点 D ，观察线段 FE 与 DE 的长度之比的变化规律。如图 2 所示，可以观察到，当点 D 在圆周上不同位置时，线段 FE 与 DE 的长度之比保持不变。

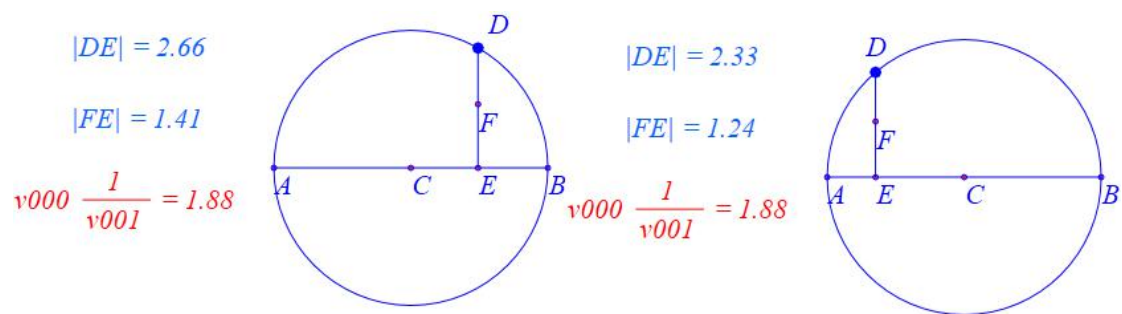



图 2

那么我们可以将点 F 看作是点 D 以点 E 为中心放缩而得到的。只不过这里的放缩中心 E 随着点 D 的位置改变而改变。

(5) 选择点 F，执行【画图】菜单中的【跟踪】命令，增加点 F 的跟踪对象。

(6) 执行【视图】菜单中的【动画框】命令，在弹出的对话框中选择点 D，类型：一次，步数修改为：300。

(7) 单击  按钮，如图 3 所示，点 F 所经过的路径是一个椭圆。

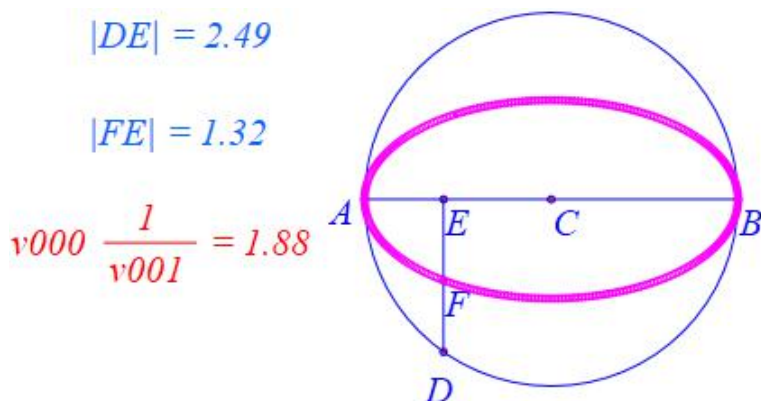


图 3

当线段 AB 处于水平状态的情况下，因为点 F 与点 D 总是在同一条竖直直线上（点 F 有时在点 D 的正下方，有时在点 D 的正上方），并且始终在圆的内部，因此我们将可以这个过程看做是将圆沿竖直方向压缩得到了椭圆。

(8) 隐藏点 F 的跟踪对象。

(9) 依次选择点 D 和点 F，执行【画图】菜单中的【轨迹】命令，在弹出的对话框中单击【确定】按钮，就可以得到点 F 的轨迹曲线；选择点 F 的轨迹，如图 4 所示。

当点 F 在线段 DE 上不同位置时会得到不同形状的椭圆。

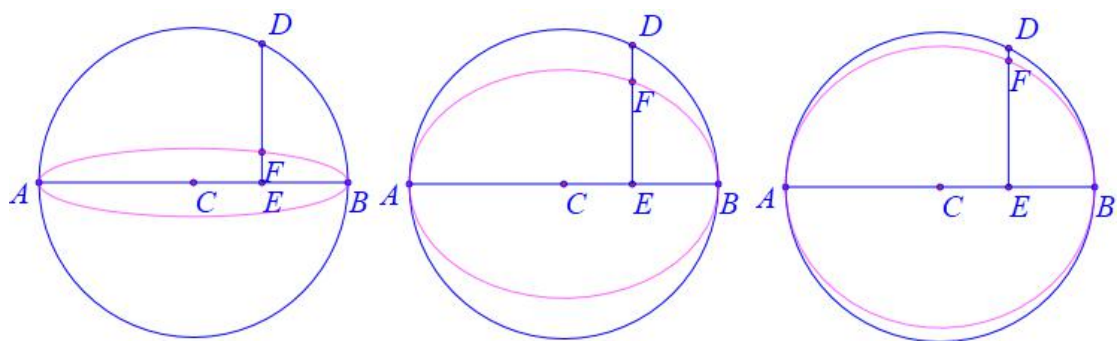


图 4

当点 F 在圆外时，如图 25 所示，就是将圆在竖直方向上拉伸之后得到了椭圆。

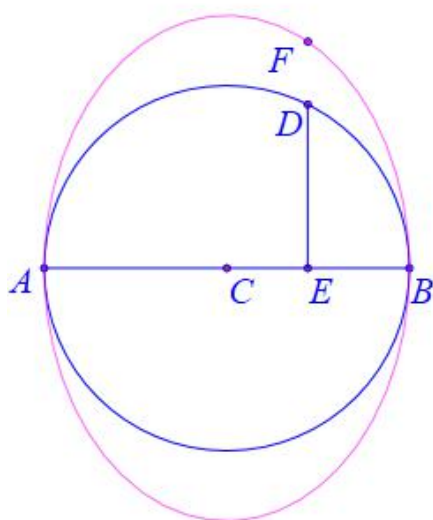


图 5

拖动点 B 使得线段 AB 处于竖直水平，如图 6 所示，这时得到的椭圆就是将圆在水平方向上压缩或者拉伸之后而得到的。

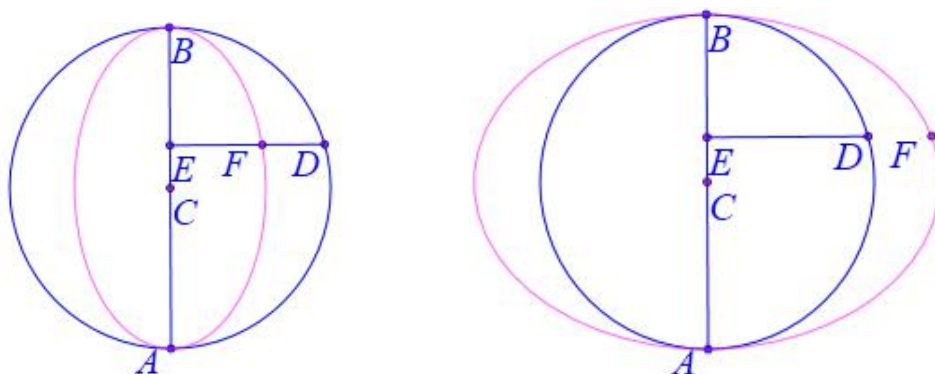


图 6

拖动点 B 使得线段 AB 的方向处于一般位置，如图 7 所示，这时得到的椭圆就是将圆在垂直于 AB 的方向上压缩或者拉伸之后而得到的。

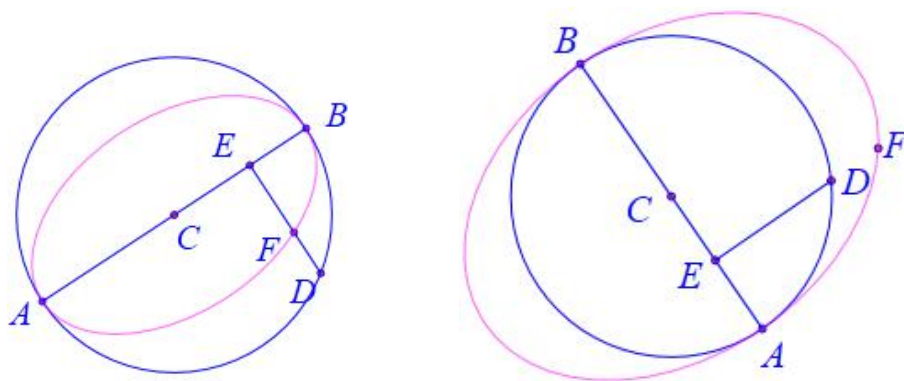


图 7

因此，我们可以把椭圆看做成是被压扁或拉伸的圆，也可以将圆看成是特殊的椭圆。

我们知道圆周上任何一点到圆心的距离都相等，椭圆是否具有类似的性质呢？圆在工业生产、日常生活中有非常重要而且广泛的应用，椭圆又有哪些重要的应用呢？这需要我们今后学习更多椭圆的知识，对椭圆进行更多的研究。

2，想一想，做一做

【思考问题】

1，如图 8 所示，利用一个平面去切割一个圆柱，可能得到什么形状的截面？请你自己动手做一做这个实验，并观察一下。从中能够帮助你理解圆形与椭圆之间的关系吗？

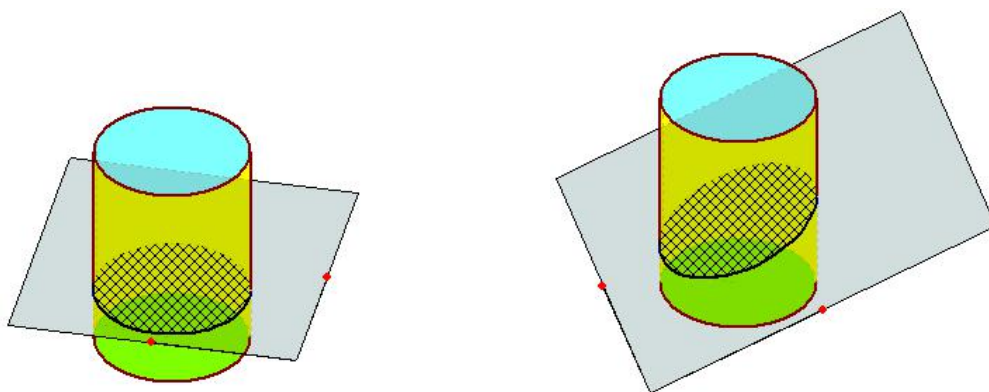
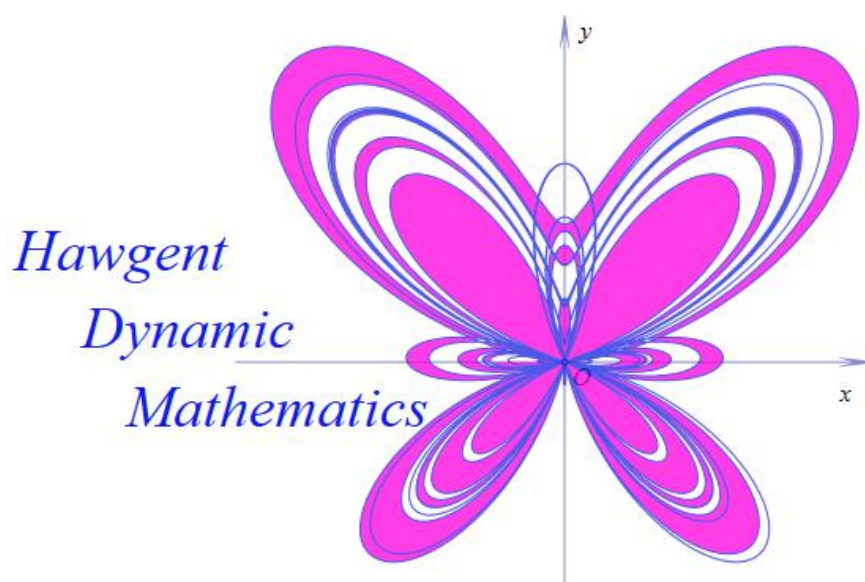


图 8

2，当早上或者傍晚，将一个圆盘竖立放在地面上，那么这个圆盘的影子是一个椭圆吗？当圆盘不是竖直地放在地面上，而是与地面有一定的倾斜度的情况下，这个圆盘的影子还是椭圆吗？想一想，如何检验你的猜想。

皓荡的大地，奔腾的骏马
只为向着那，最初的梦想



地址：广州市越秀区桂花岗广州大学北 8 号

广州市越秀区盘福路朱紫后街 1 号

邮件： 11033149@qq.com

电话： 020-36280771

网站： www.hawgent.com

QQ 群： 367878041