



几何

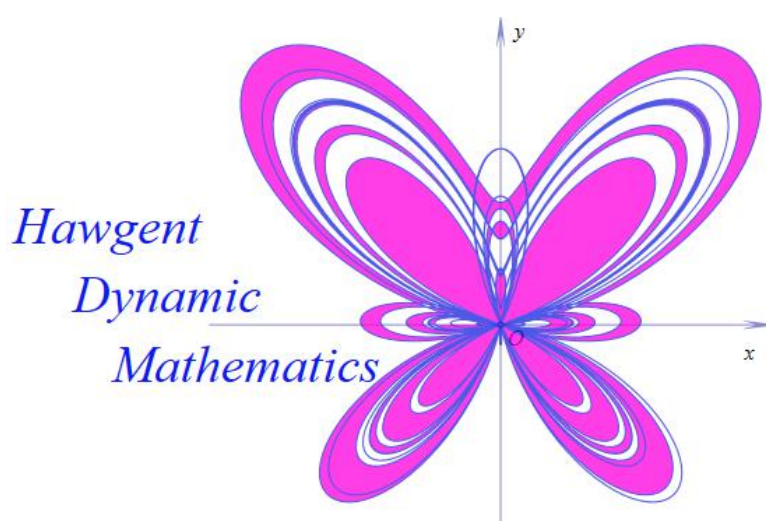
Hawgent 皓骏动态数学课程系列

Since 1998

小学数学专题学习

Exploring Mathematics with DMS

(图形与几何第 1 册)



皓骏（广州）数学技术中心

Hawgent Technology Center in Mathematics

目 录

一、 点动成线.....	1
活动 1， 沿着一个方向.....	2
活动 2， 方向改变一次.....	4
活动 3， 得到封闭图形.....	7
活动 4， 方向时刻改变.....	11
活动 5， 车轮边沿一点.....	15
活动 6， 点的随意运动.....	20
二、 线动成面.....	22
活动 1， 线动成方形.....	23
活动 2， 斜线水平移.....	26
活动 3， 方向任意定.....	30
活动 4， 线段的转动.....	33
活动 5， 固定长线段.....	38
活动 6， 长度会改变.....	44
活动 7， 各式花样变.....	47
三、 面动成体.....	54
活动 1， 移动正方形.....	55
活动 2， 运动方向变.....	61
活动 3， 移动又放缩.....	64
活动 4， 圆盘的移动.....	69
活动 5， 圆盘的缩放.....	73

活动 6，图形的旋转.....	77
四、 认识图形.....	83
活动 1，正方形.....	84
活动 2，长方形.....	87
活动 3，平行四边形.....	92
活动 4，三角形.....	96
活动 5，圆.....	102
五、 图形分割.....	106
活动 1，正方形分两块.....	108
活动 2，相同的两部分.....	115
活动 3，没有对称中心.....	121
六、 图形剪拼.....	129
活动 1，旋转之后重合.....	130
活动 2，检验是否相同.....	133
活动 3，利用旋转组图.....	138
活动 4，剪切以及拼组.....	142
活动 5，剪拼后周长变.....	149
七、 点与位置.....	157
活动 1，一点一位置.....	159
活动 2，数轴要两个.....	164
活动 3，位置即关系.....	170
活动 4，多边形顶点.....	176

八、线与长度.....	181
活动 1，各种各样线.....	182
活动 2，线段的长度.....	192
活动 3，直线与方向.....	202
九、角与方向.....	208
活动 1，方向与拐角.....	209
活动 2，旋转与角度.....	211
活动 3，各种各样角.....	217
活动 4，多边形的角.....	221
十、图形对折.....	230
活动 1，把线段对折.....	232
活动 2，检验轴对称.....	238
活动 3，对称的特征.....	244
活动 4，绘制对称形.....	248
活动 5，小鸡照镜子.....	254
活动 6，制作万花筒.....	263
十一、图形平移.....	268
活动 1，点到点平移.....	270
活动 2，平移得平行.....	276
十二、制作钟表.....	278
活动 1，一个常见的钟表.....	278
活动 2，设置钟表时间.....	279

活动 3 , 随时指定时间.....	280
活动 4 , 钟表中的进制.....	282
十三、图形的分类.....	285
活动 1 , 三角形的分类.....	285
活动 2 , 按照角度分类.....	289
活动 3 , 四边形的分类.....	292

一、点动成线

【活动目的】

观察一个点的运动过程以及研究它所经过的路径,能够我们以运动和变化的眼光看待事物、认识图形,从而能够获得对这些图形更加深入的了解.

【活动过程】

在笔直的公路上行驶的自行车以及骑车的人是怎样运动的呢?

如果从远处观察,可以把自行车以及骑车的人看做是一个点,那么这个点在沿着直线向前运动.



如果在近处观察,就可以看到自行车以及骑车的人不是简单的在向前运动,而是某些部位还在进行其他方式的运动. 例如:

人的身体是在沿着直线向前运动,而两条腿则同时在踩踏自行车.

车身的主体框架沿着直线向前运动,而两个车轮同时还在不停地转动.

那么自行车在行驶的过程中,不同的部位所经过的路径可能是什么图形呢?

这就是接下来我们所要研究的点动成线问题.

活动 1，沿着一个方向

如果一个点沿着同一个方向一直运动下去，一直向东或一直向西，一直向南或一直向北，一直向左或一直向右，那么它所经过的路径会是什么图形呢？

例如一个点在运动过程中方向始终没有改变，并且它同时经过了点 A 和点 B，你能不能用铅笔描绘出这个点所运动过的路径？



也许，你已经知道了结果或者答案，但是如果我们能够亲自动手操作一下，也许会加深对这个问题的印象或认识。

【动手与操作】

(1) 打开文件“点动成线.dmr”，如下图所示，有一个点 A 和一个点 B。



(2) 单击【运动】按钮，就可以观察到一个粉色的点从点 A 出发，沿着同一个方向运动到点 B 的过程。

(3) 单击【返回】按钮，粉色点就会返回到原来的位置。

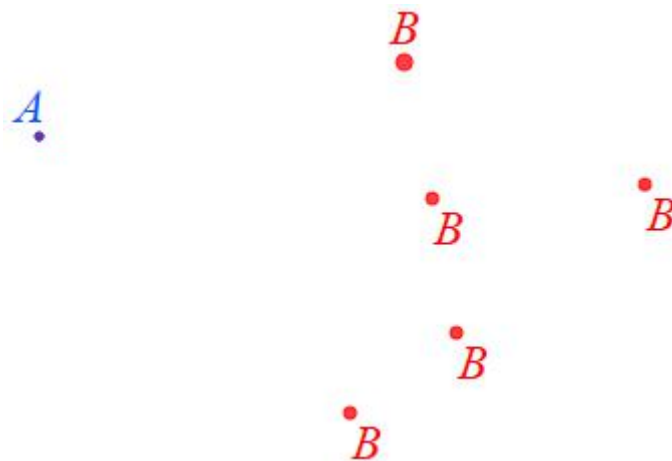
(4) 拖动右侧的点 B，还可以改变粉色点的运动方向。

【探索与发现】

(a) 改变点 B 的位置，粉色点运动过的路径都是一条直线吗？

结论：是。

(b) 粉色点出发的位置点 A 始终是固定不变的，那么点 B 在不同位置的情况下，粉色点所经过的路径具有什么共同点？如下图所示，显示了点 B 的几个不同个位置，绘制出粉色点所经过的路径，然后再谈谈你所发现的规律。



结论：经过同一个点 A.

活动 2，方向改变一次

沿着同一个方向运动的某个点，如果在某一个时刻它的运动方向改变了一次，那么方向改变前后的整个路径就不再是直线了。运动方向改变一次的路径是一个什么形状的图形呢？你能想象的出来吗？

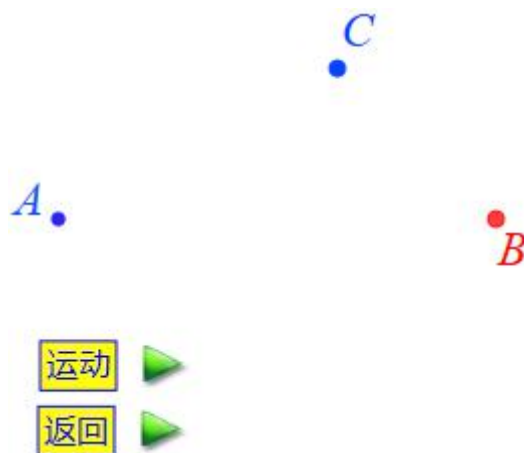
例如，如果一个点先后经过了下图序号为 1、序号为 2 和序号为 3 的点，请你把这个点所经过的路径画出来。



下面我们观察一个点在运动过程中方向改变一次的前后，所经过的路径。

【动手与操作】

(1) 进入文件“点动成线.dmr”的下一页，有一个点 A 和一个点 B，还有一个点 C。



(2) 单击【运动】按钮，可以观察到一个粉色点从点 A 出发，经过点 B，

然后在运动到点 C 的过程.

【探索与发现】

(a) 运动的粉色点在点 B 处改变了运动过的方向. 如果改变点 C 的位置, 会改变运动点到达点 B 之前的运动方向吗? 会改变运动点离开点 B 后的运动方向吗? 你能说说其中的道理吗?

结论：不会；会；到达前的方向与 A、B 有关，离开后的方向与 B、C 有关.

(b) 如果改变点 B 的位置, 会改变运动点到达点 B 之前的运动方向吗? 会改变运动点离开点 B 后的运动方向吗? 你能说说其中的道理吗?

结论：会；会；运动前的方向与点 B 有关，运动后的也与点 B 有关.

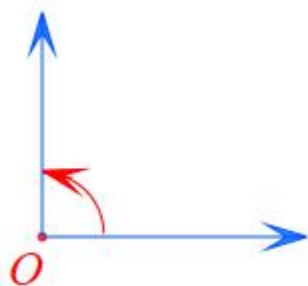
【多知道一点】

粉色动点从 A 出发运动到点 B 再运动到点 C 的过程中, 它运动方向发生了一次改变, 就形成了一个拐角, 简称为角. 改变方向的那个位置点 B, 即拐点, 称作角的顶点.

可见, 运动方向的改变, 就产生了角. 那么, 方向的改变量, 就可以用角的大小来表示.

【问题与思考】

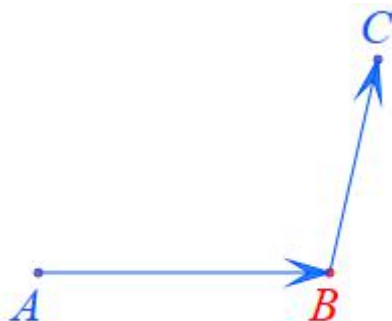
(1) 一条水平放置的线段, 绕它的左端点 O 旋转至竖直向上的方向, 它旋转过的角, 如下图所示, 已经用红色箭头标示了出来.



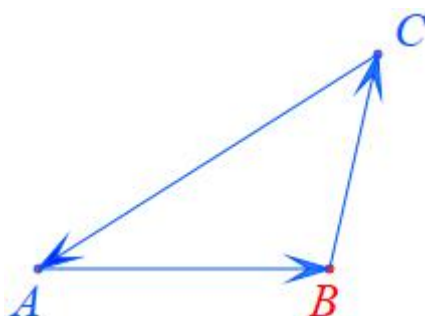
如果它继续旋转，直到旋转到水平向左的方向，请你把水平向右旋转到水平向左的过程中所旋转过的角标示出来。



(2) 如下图所示，一个动点首先从点 A 运动到点 B，然后再从点 B 运动到点 C，在拐角的顶点 B 处请你标示出运动方向的改变量。



如果从点 C 继续运动到点 A，请你在点 C 标示出从点 B 运动到点 C 再运动到点 A 的过程中运动方向的改变量。



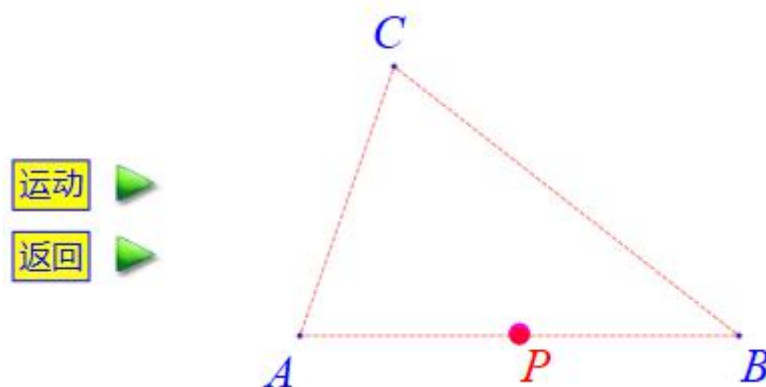
活动 3，得到封闭图形

点在运动的过程中，运动方向可以改变一次从而得到一个角，也可以改变两次而得到两个角，还可以改变三次得到三个角.

如果一个点从某个位置出发之后又回到原来的位置，并且运动结束后与运动开始前具有相同的运动方向，这样就可以得到一个封闭图形，那么它的运动方向至少需要改变几次？

【动手与操作】

(1) 进入文件“点动成线.dmr”的下一页，在边 AB 上有一点 P.



(2) 单击【运动】按钮，可以观察：

点 P 沿着边 AB 的方向运动到点 B；

然后沿着边 BC 的方向运动到点 C；

继续沿着边 CA 的方向运动到点 A，

最后沿着边 AC 的方向运动到原来的位置.

【探索与发现】

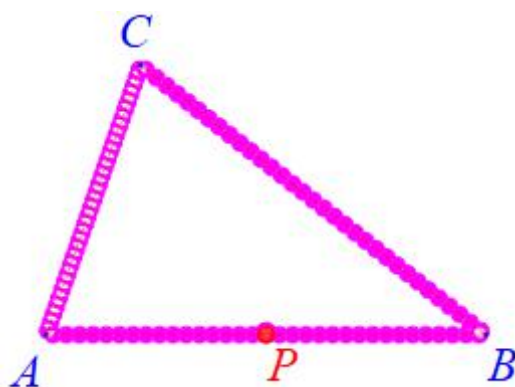
(a) 在上述运动过程中，点 P 的运动方向改变了几次？

结论：三次.

(b) 点 P 所经过的路径是一个封闭的图形吗？你知道这个图形的名称吗？

结论：是；三角形.

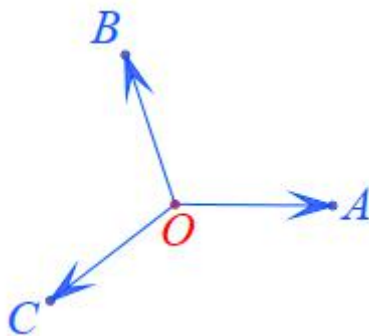
(c) 请你在下图中表示出来每次方向改变过程中所产生的角度.



【多知道一点】

点 P 从原来的位置运动到点 B、再运动到点 C、继续运动到点 A、最后回到原来位置的过程中，每次运动方向的改变过程都是按照与钟表时针相反的方向转动，称作逆时针方向转动.

如下图所示，一个水平放置的线段 OA，绕它的端点 O 沿着逆时针方向旋转到 OB 处，继续沿着逆时针方向旋转到 OC 处，最后再沿着逆时针方向旋转到 OA 原来的水平位置.



在这个过程中，线段 OA 绕它的端点 O 沿着逆时针方向旋转了一周之后回到了它原来的位置.

大家约定，旋转一周对应的角度是 360 ，记作 360° . 即，周角是 360° .

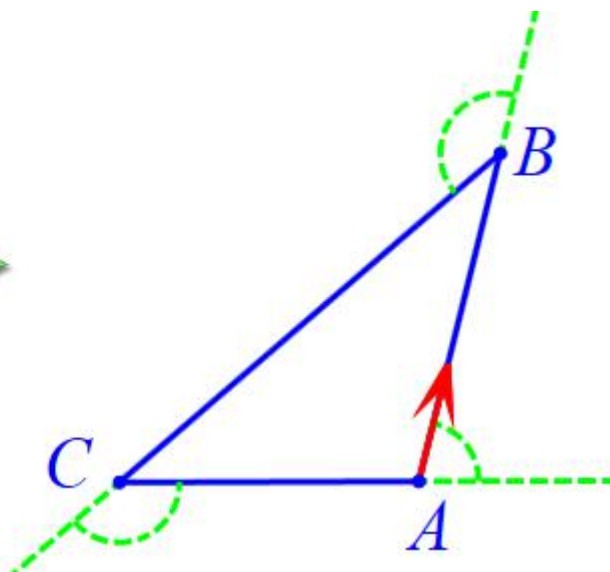
【问题与思考】

(1) 当点 P 从边 AB 的某个位置出发，绕三角形 ABC 的边界旋转一周的过程中，运动方向所改变的角度总和是否也是一个周角，即 360° 呢？

(2) 若点 P 最初在顶点 A 处，当点 P 绕三角形 ABC 的边界 AB - BC - CA 运动一周后回到点 A 处，我们可以把运动开始之前运动的方向看作是 AB 的方向，运动结束之后运动的方向仍然是 AB 的方向，那么在这个过程中运动方向所改变的角度总和是否也是一个周角呢？

(3) 打开文件“绕边界一周.dmr”，如下图所示，单击【绕边界一周】按钮，观察运动的整个过程，以及在每个顶点处表示方向改变的角度，然后检验你前面所得到的结论.

绕边界一周

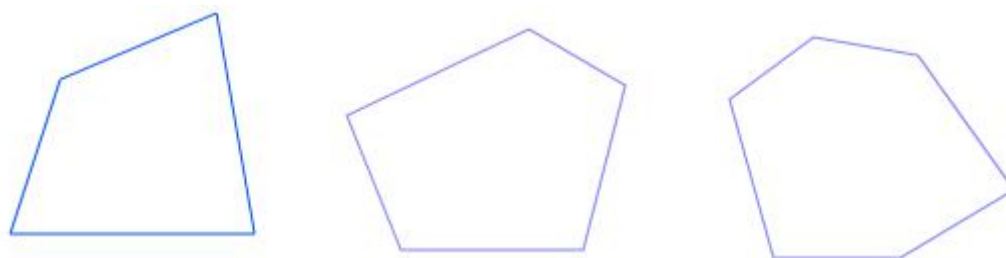


(4) 一个运动的点，如果它的运动方向只改变了两次，那么它所运动过的路径能够形成一个封闭图形吗？说说你的看法.

活动 4，方向时刻改变

前面我们研究了，绕三角形的边界旋转一周的过程中，运动点的运动方向改变的总和等于一个周角.

事实上，绕着如下图所示的四边形、五边形、六边形等多边形的边界运动一周的过程中，运动方向都是沿着相同的顺序（逆时针或顺时针）改变的，因此方向改变的总和也都是一个周角.



当运动点在多边形的边界上运动的过程中，只有在顶点处才改变运动方向，而在每条边界上运动时不改变方向.

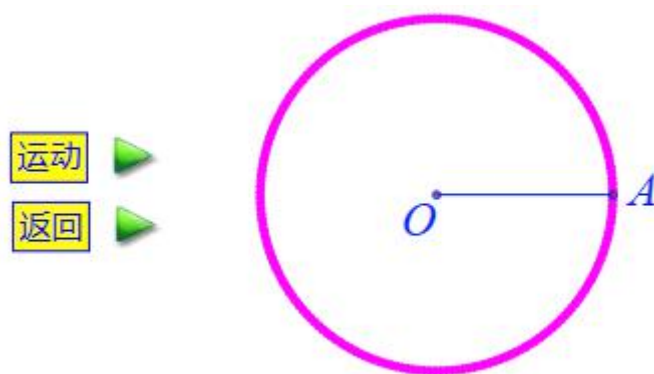
是否存在一种情况，运动点的运动方向时时刻刻都在改变呢？

【动手与操作】

(1) 进入文件“点动成线.dmr”的下一页，有一条水平放置的线段 OA.



(2) 拖动点 A，或单击【运动】按钮，就可以观察到点 A 的运动过程，以及运动过程中所形成的路径，如下图所示.



(3) 单击【返回】按钮，还可以让点 A 重新返回到原来的位置.

【探索与发现】

(a) 点 A 在运动过程中，点 O 的位置有没有发生改变？线段 OA 的长度有没有发生改变？点 A 运动过的路径是一个什么图形？

结论：没有；没有；圆形.

(b) 点 A 在运动过程中，有没有哪两个时刻的运动方向是相同的？

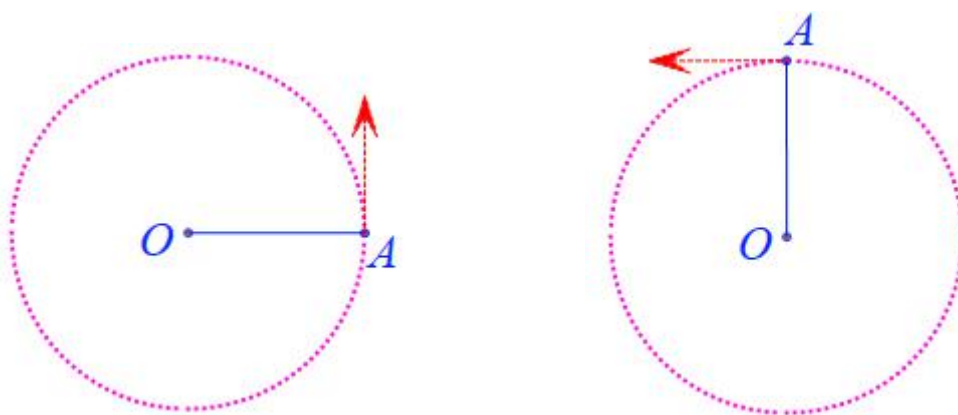
结论：没有.

(c) 点 A 的运动方向，与钟表指针的转动方向相同还是相反？

结论：相反.

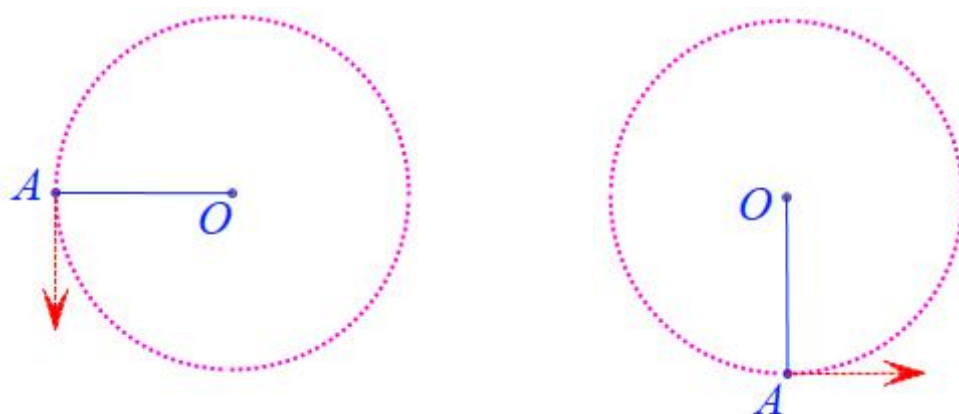
【多知道一点】

如下图所示，当点 A 处于点 O 的水平右侧时，OA 的方向是水平向右的，而这这一刻点 A 的运动方向是水平向上的，就如红色箭头所指示的方向. 因为下一时刻它所处的位置，在它目前所处位置的上方.

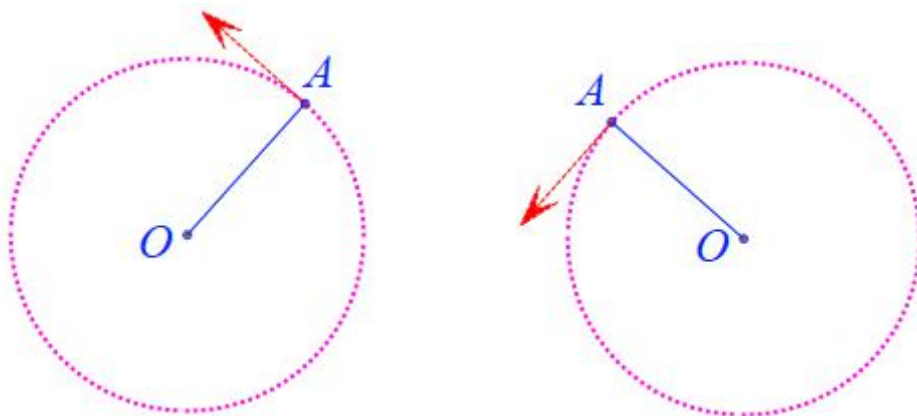


而当点 A 运动运动到点 O 正上方时，OA 的方向是竖直向上，而在这一刻点 A 的运动方向是水平向左.

类似地，我们还可以知道，当点 A 在点 O 正左侧位置时，点 A 的运动方向是数值向下；当点 A 在点 O 的正下方位置时，点 A 的运动方向是水平向右.



那么，在其他一般的时刻，点 A 的运动方向是什么？它与 OA 的方向具有什么关系？如下图所示，与 OA 成固定 90° 的角，即：垂直.



单击【方向】按钮，就可以观察到点 A 运动过程中在每一个时刻、每一个位置的运动方向.

【问题与思考】

当点 A 从点 O 的正右侧开始，绕点 A 沿着逆时针方向旋转一周回到原来的位置的过程中：

(1) 线段 OA 的方向是从水平向右开始，按照逆时针方向连续改变了一个周角吗？

(2) 点 A 的运动方向是从水平向上开始，按照逆时针方向连续改变了一个周角吗？

活动 5，车轮边沿一点

行驶的自行车，车轮不但在随着车身在向前移动，同时自己还在不停地转动，而且是转了一圈又一圈，一圈一圈不停地转。

那么车轮边沿上的点同时在进行着水平移动和旋转运动，如下图所示，这是一个简化的车轮，当它水平向右运动的过程中，车轮边沿上一点 P 所经过的路径会是什么形状的模式呢？你能否尝试着绘制出它大致的模样？

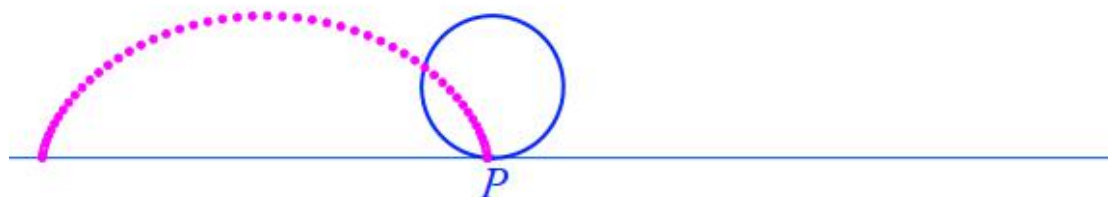


【动手与操作】

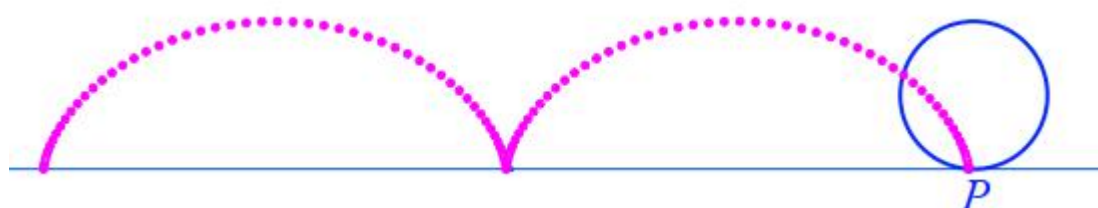
(1) 进入文件“点动成线.dmr”的下一页，如下图所示，可以看到一个车轮，以及车轮上一点 P ，并且这时点 P 位于地面上。



(2) 单击【运动】按钮，可以观察到车轮行驶的过程，以及点 P 所经过的路径，结果如下图所示，车轮边沿上的点 P 又重新回到了地面。



(3) 单击【继续】按钮，可以让车轮继续向前行驶，结果如下图所示，车轮边沿上的点再次回到了地面。



还可以继续单击【继续】按钮，让车轮继续向前行驶。也可以单击【返回】按钮，让车轮返回到原来的位置；还可以重新行驶一次，再认真观察一遍。

【探索与发现】

(a) 当车轮水平向右行驶的过程中，点 P 绕车轮中心旋转的方向是顺时针还是逆时针？如果车轮水平向左行驶呢？

结论：顺时针；逆时针。

(b) 点 P 从第一次离开地面到第一次回到地面所经过的路径，与第二次离开地面到第二次回到地面所经过的路径，你认为这两个路径对应的图案是一样的吗？请说说你的道理。

结论：一样的，后面的运动过程只不过是前面运动过程的重复。

(c) 请你描述一下点 P 所经过的路径有哪些特征，请你为它取一个形象的

名字吧.

结论：[学生自由发挥].

(d) 你认为点 P 所经过的路径与圆有什么关系？或者说它可能是圆周的一部分吗？

结论：[学生自由发挥].

【多知道一点】

人们把旋转车轮边沿上一点所形成的曲线，就叫做旋轮线.

旋轮线不是圆周的一部分，而是另一种特别的曲线. 它有许多奇妙的性质，也有许多重要的应用.

请你自己通过网络或书籍，查阅与旋轮线有关的相关知识，然后与你身边的同学进行讨论和交流.

【问题与思考】

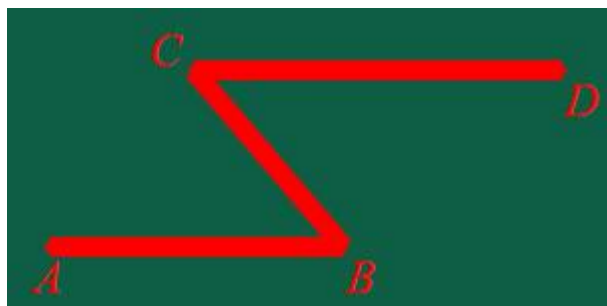
车轮边沿上一点在车轮行驶过程中，只能按照一个顺序连续地改变运动的方向：顺时针或逆时针.

那么有没有一个运动的过程，运动方向有时候按照逆时针顺序改变，又有时候按照顺时针顺序改变呢？

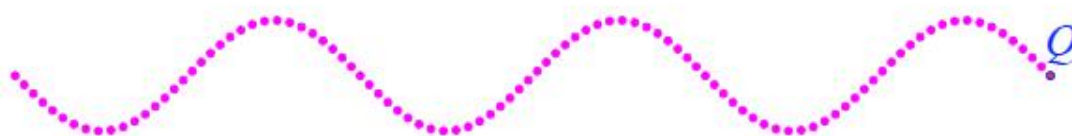
事实上，这在现实生活中是处处存在的. 人们在走路的过程中，汽车在行驶的过程中，许多物体在运动的过程中，都会存在这种现象. 而且可以说，这种现象是处处存在的.

举一个最简单的例子，如下图所示，如果要沿着红色的路径从 A 经过 B 和

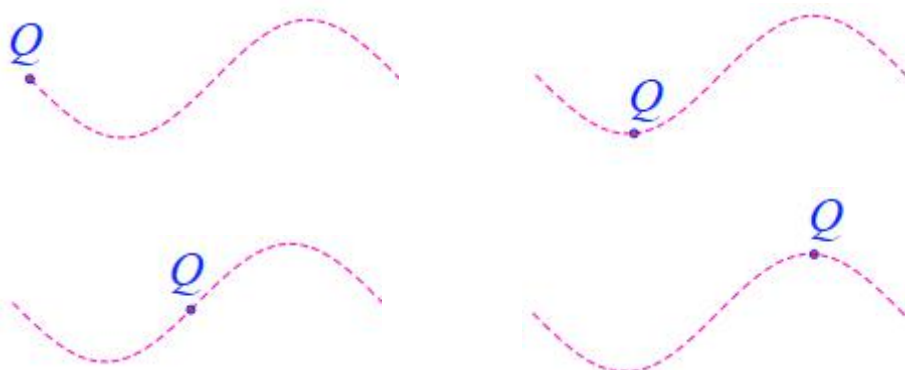
C 到达 D，那么在 B 处就需要按照逆时针改变运动方向，而在 C 处则需要按照顺时针改变运动方向.



进入文件“点动成线.dmr”的下一页，有一个点 Q，拖动点 Q，或单击【运动】按钮，结果如下图所示.



(1) 在下列几个位置处，你能标示出此时点 Q 的运动方向吗？



(2) 你能在下面标示出点 Q 的运动方向一直是按照逆时针顺序改变的一段路径吗？



(3) 你能在下面标示出点 Q 的运动方向一直是按照逆时针顺序改变的一段路径吗？



活动 6，点的随意运动

前面的那些点在运动过程中为什么能够形成直线、拐角、三角形、圆形、摆线、波浪等一些特别的形状的路径呢？

这是因为，它们受到了一些条件的约束，只能在这种条件下运动.

在大自然中，所有的东西都是受到了一些条件的约束，然后在这种约束下有规律的运动. 例如太阳、地球、月亮都是按照它们自有的规律运动.

但是在我们所研究的数学当中，可以把一个点理想地认为它不受任何条件的限制，那么它就是一个自由点.

我们可以在动态数学软件中绘制一个自由点，并观察和研究它的性质与特征.

【问题与思考】

(1) 进入文件“点动成线.dmr”的下一页，单击工具条中的【画笔】工具



，进入画图状态.

(2) 在下方的工作区中单击鼠标一下，作出一个点 A.

(3) 单击工具条中的【选择】工具

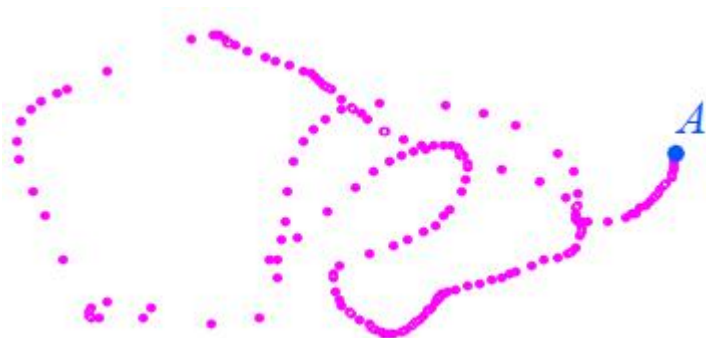


，返回到选择状态.

(4) 选择点 A，单击【跟踪】命令，生成点 A 的跟踪踪迹.

【探索与发现】

选择点 A，然后移动光标，可以观察到点 A 随着光标位置的改变而改变，如下图所示.



当然，也可以说它是受约束的，受光标位置的约束。因此，只要光标运动过的路径是什么图案，点 A 所经过的路径就是什么图案。

二、线动成面

【活动目的】

观察线的运动过程，并研究它们所生成的各种图形，更进一步认识这些图形的性质，了解这些图形的特征.

【活动过程】

平面上的一条线段，可以平动，也可以转动. 或者是平动的同时也在转动；运动中的线段，长度可以保持不变，也可以发生改变. 那么线段所经过的区域可能是什么图形？

下面我们在动手与操作过程中探索与研究这些问题，然后进一步思考与研究我们所发现的一些结果与想象.

活动 1，线动成方形

在正方形或长方形当中，如下图所示，任何两条邻边之间都是垂直关系，或者说它们成 90° 的角.



如图一条边 AB，沿着与它垂直的方向，例如沿着 BC 的方向运动，那么线段 AB 所经过的区域可能形成什么图形？

【动手与操作】

(1) 打开文件“线动成面.dmr”，如下图所示，有一条竖直的线段 AB 和三个按钮，分别是：运动、继续和返回.



(2) 单击【运动】按钮，可以观察到竖直方向的线段 AB 按照水平向右的方向运动的过程.

(3) 单击【继续】按钮（第 1 次），线段 AB 又向右移动了相同的距离.

(4) 单击【继续】按钮（第 2 次），线段 AB 再向右移动了相同的距离.

如果单击【返回】按钮，那么就可以让线段 AB 回到原来的位置.

【探究与发现】

(a) 单击【运动】按钮，线段 AB 经过了一段距离的运动，当它停下来之后，你认为它所经过的区域是一个什么图形？在它停下来之前的每一个时刻呢？

结论：长方形；长方形.

(b) 第 1 次单击【继续】按钮，线段 AB 继续水平向右运动，在它停下来之前的每个时刻，你认为它所经过的区域是一个什么图形？在它停下来之后呢？

结论：长方形；正方形.

(c) 第 2 次单击【继续】按钮，线段 AB 继续水平向右运动，在它停下来之前的每个时刻，你认为它所经过的区域是一个什么图形？在它停下来之后呢？

结论：长方形；长方形.

(d) 如果第 3 次、第 4 次、第 5 次、...，继续单击【继续】按钮，线段 AB 所经过的区域是一个什么图形？请说明你的理由，并谈谈你的看法，然后通过操作检验你的结论.

结论：长方形；长方形.

【多知道一点】

竖直方向的线段 AB，如下图所示，水平向右移动了 1 次得到了一个长方形，

水平向右移动了 2 次得到了一个正方形. 这说明, 正方形的边长, 即线段 AB , 是每次平移距离的两倍.



类似地：

如果平移了 3 次得到一个正方形, 那么正方形的边长就是平移距离的 3 倍；

如果平移了 4 次得到一个正方形, 那么正方形的边长就是平移距离的 4 倍；

... ..

这说明, 改变长方形的一组对边的长度, 可以得到正方形; 改变正方形一组对边的长度, 可以得到长方形.

【问题与思考】

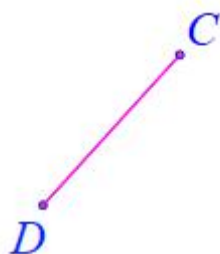
(1) 一块长方形的长和宽分别是 4 和 1, 利用这种长方形可以拼成一个正方形吗? 如果你认为不可以, 请说明理由; 如果你认为可以, 请说明需要多少块, 并画出它的大致图案.

(2) 一块长方形的长和宽分别是 3 和 2, 利用这种长方形可以拼成一个正方形吗? 如果你认为不可以, 请说明理由; 如果你认为可以, 请说明需要多少块, 并画出它的大致图案.

活动 2，斜线水平移

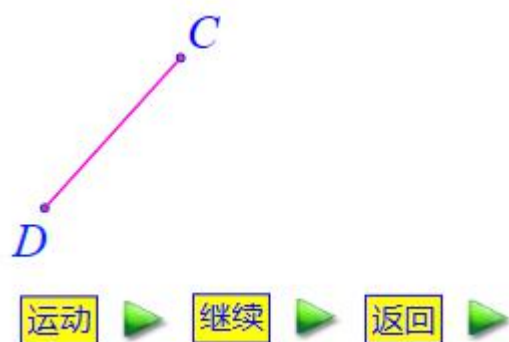
如果一条线段移动的方向与它本身不垂直，竖直方向的线段不是按照水平方向运动，或者按照水平方向移动的线段不是竖直方向，那么线段所经过的区域有可能是什么图形呢？

例如有一条长度为 2 的线段，它向右移动 1 个单位长度，那么它所经过的区域是一个什么图形？如果它继续向右移动 1 个单位呢？



【动手与操作】

(1) 如下图所示，有一条长度为 2 的线段 CD 和三个按钮，分别是：运动、继续和返回。



(2) 单击【运动】按钮，线段 CD 水平向右移动了 1 个单位。

(3) 单击【继续】按钮（第 1 次），又一次水平向右移动了 1 个单位。

(4) 单击【继续】按钮（第2次），再一次水平向右移动了1个单位.

类似地，单击【返回】按钮，那么就可以让线段 CD 回到原来的位置.

线段 CD 在运动过的过程中，它的方向不会改变.

拖动点 C，可以改变线段 CD 的方向，而它的长度仍然保持不变.

【探究与发现】

(a) 单击【运动】按钮，你认为它所经过的区域是一个什么图形？在它停下来之前的每一个时刻呢？

结论：平行四边形；平行四边形.

(b) 第1次单击【继续】按钮，你认为它所经过的区域是一个什么图形？在它停下来之前的每个时刻呢？

结论：菱形；平行四边形.

(c) 第2次单击【继续】按钮，你认为它所经过的区域是一个什么图形？在它停下来之前的每个时刻呢？

结论：平行四边形；平行四边形.

(d) 拖动点 C，使得 CD 处于竖直方向，重新回答前面的三个问题.

结论：(a) 长方形，长方形；(b) 正方形，长方形；(c) 长方形，长方形.

(e) 拖动点 C，使得 CD 处于水平方向，重新回答前面的三个问题.

结论：(a) 线段，线段；(b) 线段，线段；(c) 线段，线段.

【多知道一点】

(1) 长度为 2 的线段 CD ，如下图所示，水平向右移动了 1 个单位后得到了一个平行四边形，水平向右移动了 2 个单位后得到了一个菱形。这是因为，所得到的图形的水平边长等于 2，与另外两条边都相等。



这说明，菱形是一种特殊的平行四边形，它的特殊性在于：邻边相等。

就像利用相同的长方形总是可以拼成正方形一样，利用相同的平行四边形也总是可以拼成菱形。

(2) 拖动点 C ，使得 CD 处于竖直方向时，就是我们前面所研究的问题：移动 1 个单位得到长方形，移动 2 个单位的得到正方形。

这又说明：长方形是特殊的平行四边形，正方形是特殊的菱形，当然它也是特殊的长方形。

【问题与思考】

拖动点 C ，使得 CD 处于水平方向时，当 CD 沿着水平向右的方向移动的过程中，所得到的图案也总是一条线段，只不过运动的次数会影响这条线段的长度罢了。

(1) 那么，当长度为 2 的线段 CD ，当它处于水平方向时，当它向右运动了 1 个单位之后，所得到的图案是一条长度为多少的线段呢？如果运动了 2 个单位、3 个单位呢？

(2) 这是否同时又说明：平行四边形被完全压扁后就是一条线段？不过这条线段实际上是由 4 条线段组成的图形罢了。那么邻边分别是 2 和 1 的平行四边形被完全压扁后会得到一条长度为多少的线段？如果是边长为 2 的菱形呢？

活动 3，方向任意定

一条线段 XY ，沿着 XZ 的方向移动，那么线段 XY 在移动过程中所经过的区域会是什么图形？

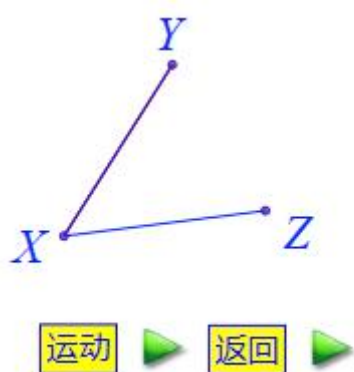
通过前面的研究，我们知道：最后的结果受移动距离的影响，还受被移动线段所处方向的影响.

那么是否还受移动方向的影响呢？还受其他条件所影响吗？或者说，一条线段通过移动所得到的图案的形状，究竟受哪些因素的影响呢？

在这里提供了一个完全开放的实验室，让我们有机会把这个问题研究清楚、研究透彻.

【动手与操作】

(1) 进入文件“线动成面.dmr”的下一页，如下图所示，有两条长度均为 2 的线段 XY 和 XZ ，还有两个按钮【运动】和【返回】.



(2) 拖动点 Y ，可以改变线段 XY 的方向，拖动点 Z 可以改变 XY 移动的方向.

(3) 单击【运动】按钮，如下图所示，会弹出一个输入对话框，例如输入：

1，单击【确定】按钮后，线段 XY 就会沿着 XZ 的方向移动 1 个单位.



【探索与任务】

请你自己动手，完成以下任务：

(1) 请你自己动手，让 XY 沿着 XZ 的方向平移后，所经过的区域是一个边长为 2 的正方形.

(2) 请你自己动手，让 XY 沿着 XZ 的方向平移后，所经过的区域是一个其中一边长为 3 的长方形.

(3) 请你自己动手，让 XY 沿着 XZ 的方向平移后，所经过的区域是一个边长为 2 的菱形.

(4) 请你自己动手，让 XY 沿着 XZ 的方向平移后，所经过的区域是一个其中一边长为 5 的平行四边形.

(5) 请你自己动手，让 XY 沿着 XZ 的方向平移后，所经过的区域是——条长度为 3 的线段.

(6) 请你自己动手，让 XY 沿着 XZ 的方向平移后，所经过的区域是——条长度为 6 的线段.

【多知道一点】

前面我们在按照指定的方向移动一条线段的过程中，线段的方向始终没有改

变. 原来是什么方向, 平移过程中每一个时刻仍然是什么方向, 平移结束后也依然是原来的方向.

不改变方向的移动, 叫做平行移动, 简称平移或平动.

在数学上, 我们把不相交的两条直线, 叫做平行.

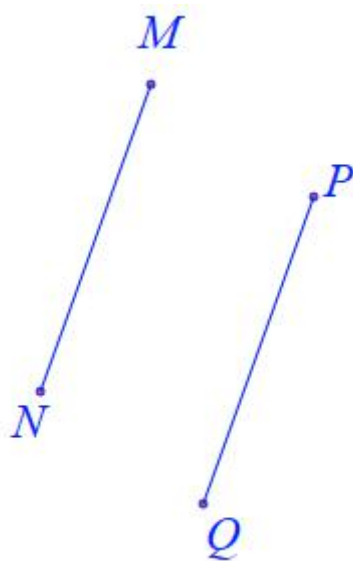
位置不同但方向相同的两条直线, 就是平行的, 没有交点.

那么, 通过平移一条线段, 能得到这条线的平行线.

【问题与思考】

如下图所示, 有两条线段 MN 与 PQ , 能够通过平移 MN 的方式得到线段 PQ ?

或者说, 如何判断 MN 与 PQ 是否平行?



请你设计一种方案, 然后进行探索 MN 与 PQ 的关系.

活动 4，线段的转动

除了平动之外，还有另外一种常见的运动，叫做转动. 在一个平面上，我们最熟悉的、也是最简单的一种转动过程就是：一条线段的一个端点固定，它的另外一个端点绕着它固定的端点转动.

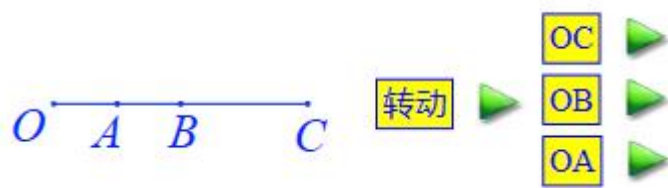
转动的端点所经过的路径就是一个圆周，这是我们之前就曾探索与研究过的问题.

那么绕固定端点转动的这条线段，所经过的区域是一个什么图形？

或许，你早就想到了结果. 不过，我们仍然有必要观察一下过程.

【动手与操作】

(1) 进入文件“线动成面.dmr”的下一页，如下图所示，在线段 OC 上有两个点：A 和 B，并且 $OA=AB$ ， $OB=BC$ ；同时有四个按钮，分别是：【转动】和【OC】、【OB】、【OA】.



(2) 单击按钮【转动】，可以让线段 OD 绕点 O 旋转一周.

(3) 单击按钮【OC】，可以显示线段 OC 所经过的区域；这时按钮的名称变为【隐藏】，单击按钮【隐藏】就可以隐藏线段 OC 所经过的区域. 另外两个按钮的作用是类似的.

【问题与思考】

线段 OC 绕点 O 旋转一周的过程中：

(a) 线段 OC 所经过的区域是一个什么图案？

结论：圆盘.

(b) 线段 OB 所经过的区域是一个什么图案？

结论：圆盘.

(c) 线段 OA 所经过的区域是一个什么图案？

结论：圆盘.

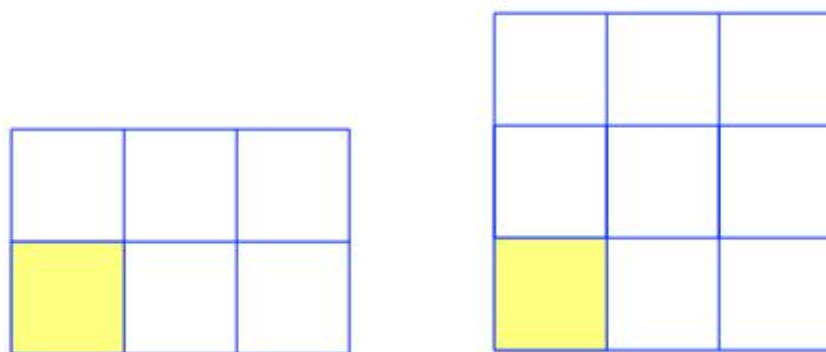
【多知道一点】

我们把一个图案在平面上所占据的区域大小，叫做这个图案的面积.

一条直线的面积为 0，或者说直线没有面积. 因为在数学中，我们规定直线没有宽度.

而在平面上围起来一个区域的封闭图形，是具有面积的. 例如，正方形、长方形、菱形、平行四边形、三角形，以及我们现在所研究的圆.

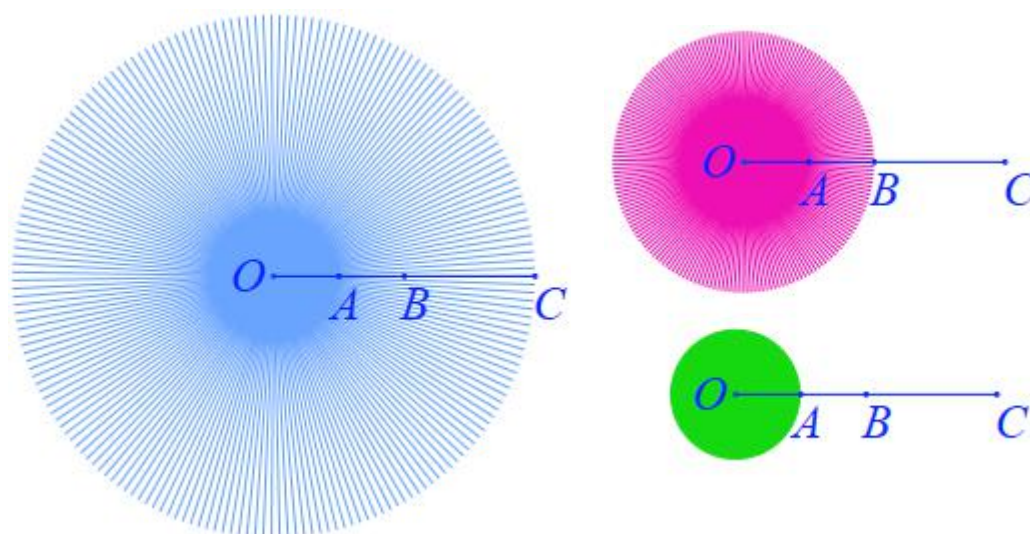
为了方便交流，我们还规定边长为 1 的正方形的面积为 1. 那么即刻就知道长和宽分别为 3 和 2 的长方形的面积等于： $3 \times 2 = 6$ ，边长为 3 的正方形的面积等于 $3 \times 3 = 9$.



以后我们还会研究平行四边形、三角形等多边形的面积，也会探索计算圆的面积的方法.

【问题与思考】

(1) 如下图所示，分别显示出了线段 OC 经过的区域、线段 OB 经过的区域和线段 OA 经过的区域，分别记作圆 C、圆 B 和圆 A.



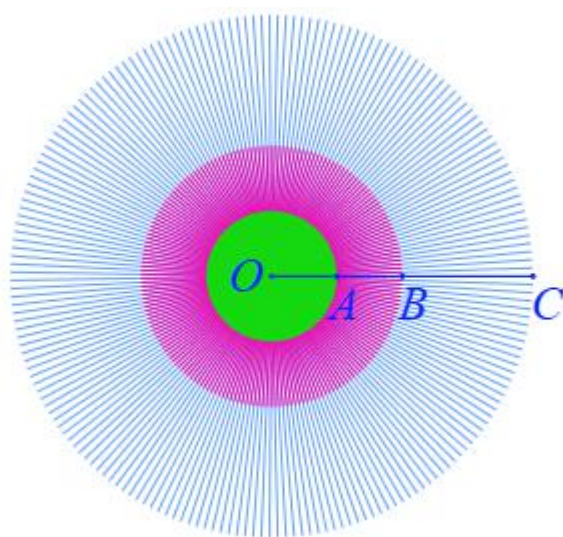
由 $OA=AB$ 知道，线段 OB 的长度是线段 OA 长度的两倍，你认为圆 B 的面积与圆 A 的面积之间，存在什么数量关系？

类似地可以知道，线段 OC 的长度是线段 OB 长度的两倍，你认为圆 C 的面

积与圆 B 的面积之间，存在什么数量关系？

你是如何计算的？请试着说说你的想法与思路.

(2) 把它们放在一起之后，就是下面的图案.



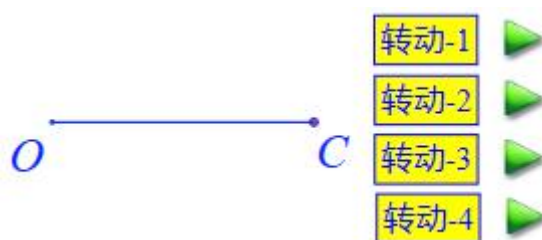
圆 A 把圆 B 覆盖了一部分，那么圆 B 除去圆 A 之后剩下的部分，就得到了一个圆环，记作圆环 AB. 那么圆环 AB 的面积与圆 A 的面积、圆 B 的面积之间又存在什么数量关系？

(3) 在线段 OC 转动过程中，它绕端点 O 转动一周与转动两周，所经过的区域或者说形成的图案的面积，是一样的吗？如果你认为是一样的，请说明道理；如果你认为是不一样，请说明它们之间的数量关系.

如果它绕端点 O 旋转半周呢？所经过的区域或形成的图案是一样的吗？如果你认为是一样的，请说明道理；如果你认为是不一样，请说明它们之间的数量

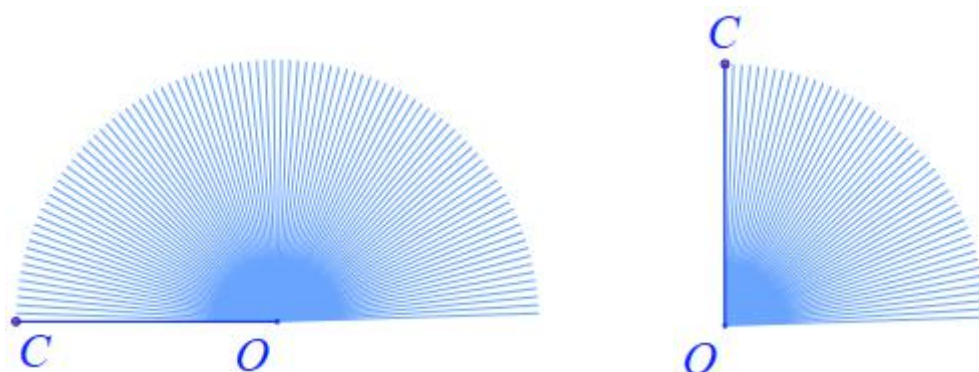
关系.

进入文件“线动成面.dmr”的下一页，如下图所示，单击按钮【转动-1】、【转动-2】、【转动-3】，可以使得线段 OP 绕点 O 分别转动一周、半轴、半轴的一半.



单击按钮【转动-4】，会弹出输入框，可以输入一个数值，然后线段 OP 转动的圈数就是你所输入数值的倍数.

如下图所示，就是转动半周（即： 180° ）以及旋转半周的一半（即： 90° ）对应的区域.



请根据观察与实验得到的结果，检验前面所得到的结论.

活动 5，固定长线段

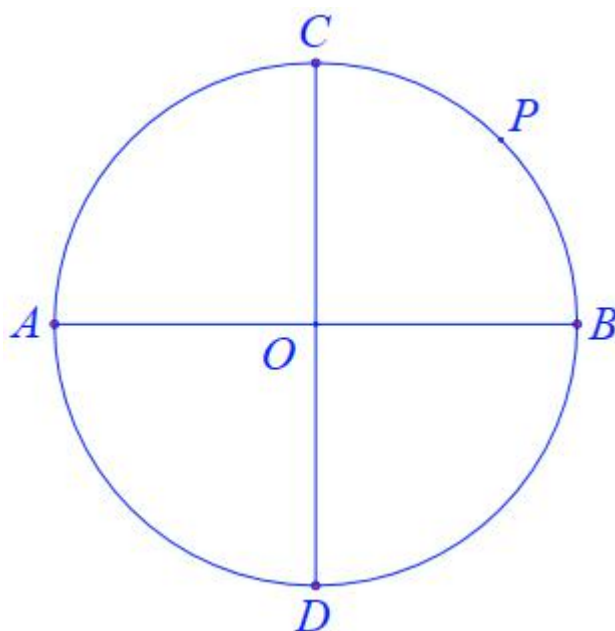
无论是线段的平动，还是线段的转动，它们都有一个共同的特征：运动线段的长度没有发生改变.

事实上，长度不变的物体，在生活中随处可见. 例如一根筷子，一把尺子，..... 你无论怎么摆放它们，它们的长度都固定不变.

在这里我们自己动手构造一个两端点变化但是长度不变的线段.

【动手与操作】

(1) 进入文件“线动成面.dmr”的下一页，如下图所示，在圆 O 内有一条水平方向的直径 AB 和一条竖直方向的直径 CD ，以及圆上的一个点 P .



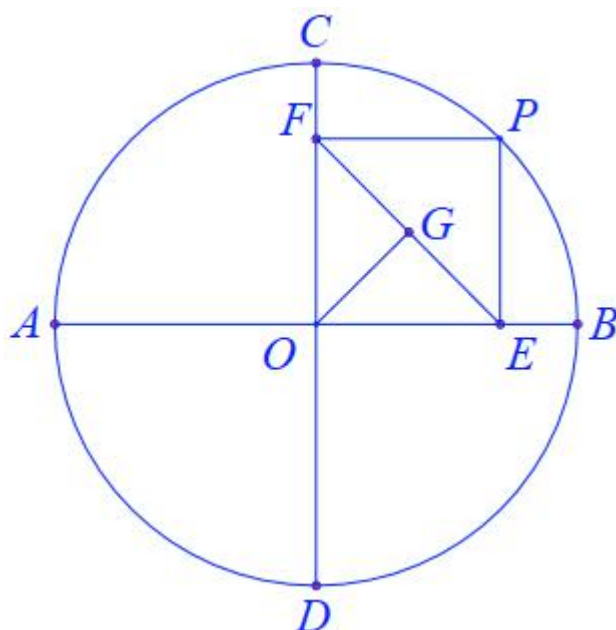
(2) 按住键盘中的 Ctrl 键，或者在软件界面左下角选择“连续选择”选项

☒ 连续选择 进入连续选择状态；先后单击点 P 和线段 AB ，就可以同时选中它们，单击【点】菜单中的【垂足】命令，如下图所示，结果就做出了点 P 到线段 AB

的垂足 E 和垂线段 PE.

(3) 类似地, 作出点 P 到线段 CD 的垂足 F 和垂线段 PF.

(4) 同时选择点 E 和点 F, 单击【线】菜单中的【线段】命令, 作出线段 EF, 结果如下图所示.



(5) 选择线段 EF, 单击【构造】菜单中的【跟踪】命令.

(6) 拖动点 P, 可以观察点 P 在圆周上运动的过程中, 线段 EF 运动的过程, 还可以观察到 EF 所经过的区域; 单击【擦除】按钮可以清除跟踪线段 EF 所得到的图案.

(7) 单击【运动】按钮, 可以让点 P 在圆周上均匀地、自动地运动; 之后, 按钮的名称变为【停止】, 单击【停止】按钮, 可以让点 P 随时停止下来.

【探索与发现】

(a) 当点 P 在圆上运动的过程中, 点 E 的位置会改变吗? 点 F 的位置呢?

结论: 会; 会.

(b) 当点 P 与点 B 的位置重合时，点 E 在什么位置？点 F 呢？

结论：与点 B 重合；与点 O 重合.

(c) 当点 P 与点 C 的位置重合时，点 E 在什么位置？点 F 呢？

结论：与点 O 重合；与点 C 重合.

(d) 在四边形 OEFP 当中，有没有直角？如果有，请分别指出来，并说明你的道理.

结论：有； $\angle FOE$ 、 $\angle OEP$ 、 $\angle EPF$ 、 $\angle PFO$ ，两条垂线所成的角是直角，

有三个角是直角的四边形是长方形.

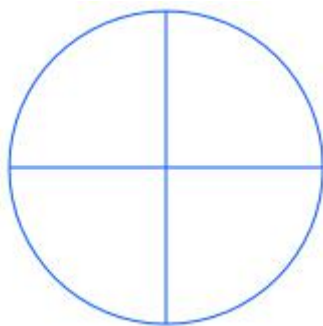
(e) 当点 P 在圆周上运动的过程中，你认为线段 EF 的长度会保持不变吗？请谈谈你的看法.

结论：是的；长方形当中，对角线相等；

【多知道一点】

人们习惯，把转动一周所形成的角称作是周角，大家还约定周角等于 360° .

那么把 1 周平分为 4 份，如下图所示，那么每一份就是 90° . 看起来，这个 90° 的角，实际上就是长方形、正方形中所出现的角度？



大家把成具有 90° 角的两条边称作具有垂直关系. 由此我们可以知道, 正方形和长方形中的邻边都是垂直关系. 根据上面的作图过程, 我们知道:

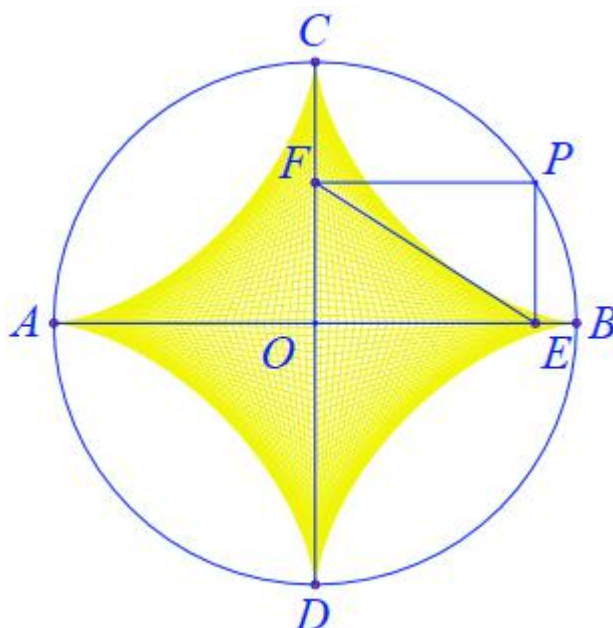
因为 AB 垂直 CD 于点 O 、 PE 垂直 AB 于点 E 、 PF 垂直 CD 于点 F , 因此四边形 $OEPF$ 有三个角是直角, 所以它是一个长方形 (四边形的四个内角之和等于一个周角).

今后, 我们还会学习到长方形的一个重要性质: 对角线相等. 即: 在长方形 $OEPF$ 中, $OP=EF$. 对于这个结论, 你还可以通过操作与实验, 进一步验证:

你还可以选择点 E 和点 F , 单击【测量】菜单中的【长度】命令, 得到线段 EF 的长度测量值. 然后, 拖动点 P , 观察线段 EF 测量结果的变化规律.

【问题与思考】

(1) 如下图所示, 黄色区域是线段 EF 所经过的区域. 你见过这个图案吗? 你能叙述一下它哪些特点吗? 你还能给它取一个形象的名字吗?



(2) 根据前面的实验、观察与研究, 我们知道当点 P 在圆周上运动的过程中, 点 E 和点 F 分别在 AB 和 CD 上运动, 但是线段 CD 的长度始终保持不变.

如果把 AB 当作地面, 把 OC 看做墙面, 那么就可以把 EF 看做一端沿着墙面滑动, 另一端沿着地面滑动的梯子. 这是因为, 梯子在滑动过程中, 梯子的长度和形状始终保持不变.

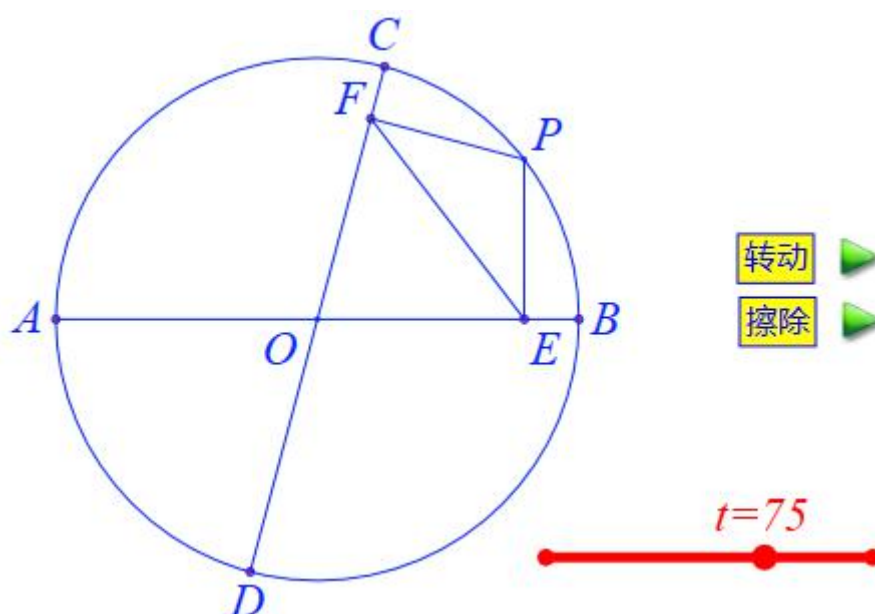


现实中, 有一些墙面不完全是竖直的, 也就是说, 如果这里的 CD 与 AB 不

再垂直,那么从点 P 到 AB 和 CD 的两个垂足是否仍然能够成为梯子的两个端点呢?也就是说,通过这种方式得到的线段 EF 是否仍然能够保持长度不变呢?



进入文件“线动成面.dmr”的下一页,如下图所示,通过变量尺改变字母 t 的值,从而可以改变 AB 与 CD 之间的角度.然后拖动点 P ,观察线段 EF 的长度测量值,判断它的长度是否保持不变.

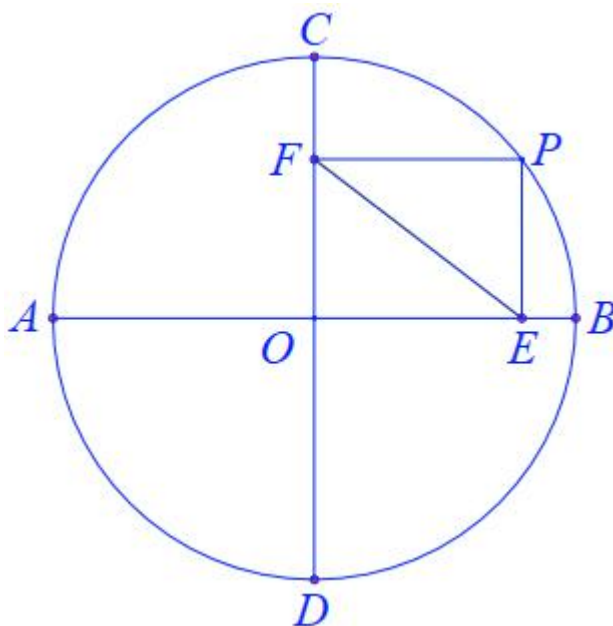


活动 6，长度会改变

前面我们移动或转动的线段，都有一个共同的特征：长度保持不变.

那么如果有一条线段在移动或转动过程中，它的长度会发生改变，变长或变短，那么会出现什么样的结果呢？

事实上，在我们前面所研究的梯子滑动模型问题，就具有线段时而变长又时而变短的问题. 例如，梯子 EF 到墙角 O 距离最短的一点，就是点 O 到梯子 EF 的垂足，例如是 K ，那么这个最短的距离就是这个垂线段 OK .



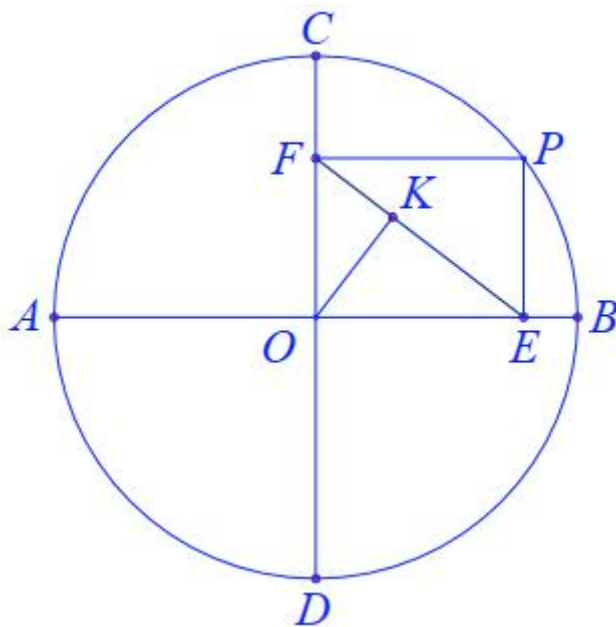
那么，当梯子滑动时，梯子上到墙角距离最短的哪一点 K 的位置会改变吗？
这个最短距离 OK 会变化吗？如果会改变，那么会怎样改变？

你能在上图中，绘制出当点 P 在圆上运动的过程中，这个最短线段 OK 所经过的图形吗？

【动手与操作】

在前面的文件“线动成面.dmr”中，继续操作：

依次同时选择点 O 和线段 EF ，执行【垂足】命令，做出点 O 到直线 EF 的垂足 K 和垂线段 OK 。



【探索与发现】

(a) 当点 P 在圆上运动的过程中，点 K 的位置会改变吗？线段 OK 的长度会变化吗？

结论：会；会。

(b) 当点 P 与点 B 的位置重合时，点 E 在什么位置？线段 OK 的长度为多少？

结论：与点 O 重合；0。

(c) 当点 P 离开点 B 的位置之后到达点 C 之前， OK 的长度发生了怎样的变化？

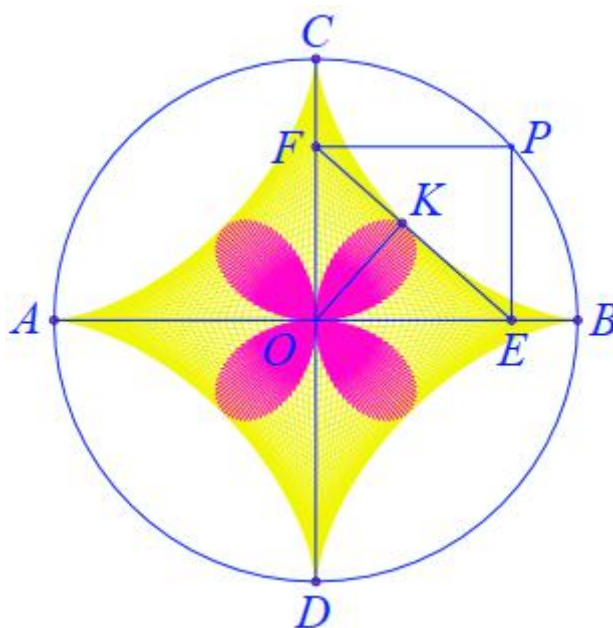
结论：与点 O 重合；0.

(d) 当点 P 与点 C 的位置重合时，点 E 在什么位置？线段 OK 的长度为多少？

结论：与点 O 重合；0.

【多知道一点】

如下图所示，粉色区域是线段 OK 所经过的区域。你见过这个图案吗？你能叙述一下它哪些特点吗？你还能给它取一个形象的名字吗？



通过观察我们可以发现，当点 P 在圆周上运动的过程中，线段 OK 在绕点 O 旋转的同时长度也在不断发生变化，例如点 P 从点 B 开始按照逆时针顺序运动到点 C 的过程中：OK 的长度从 0 开始，逐渐变长，达到最长之后，又逐渐变短，直到长度为 0.

然后这个过程会不断的重复下去.

我们熟悉的运动方式包括：平动和转动.

我们熟悉的变化方式包括：变长和变短.

另外，当线段的长度变化过程中，它可以像上面的 OK 一样从一端变化，也可以从两端同时变化.

【问题与思考】

(1) 在上图中，你认为 OK 的长度什么时候达到最长，最长是多少？

(2) 请你想想一下，一条线段在平动的过程中，它的长度从一端开始逐渐变短直到长度为 0 的过程. 然后绘制出它经过的区域的大致形状.

(3) 请你想想一下，一条线段在平动的过程中，它的长度从两端开始逐渐变短直到长度为 0 的过程. 然后绘制出它经过的区域的大致形状.

(4) 请你想想一下，一条线段在转动的过程中，它的长度从一端开始逐渐变短直到长度为 0 的过程. 然后绘制出它经过的区域的大致形状.

活动 7，各式花样变

针对面前提出的几个问题，我们有必要继续进行更加深入的探究与探索. 而在这次活动当中，我们主要研究下面的内容：

线段在平动的过程中，只有一端变化与两段同时变化的构成中，线段所经过的区域.

【动手与操作】

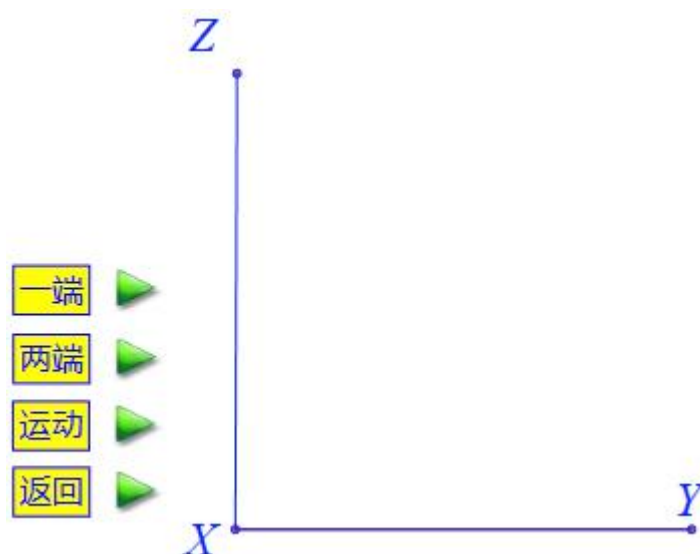
进入文件“线动成面.dmr”的下一页,如下图所示,有一条水平方向的线段 XY 和一条竖直方向线段 XZ , 它们的长度都等于 2; 还有四个按钮, 它们分别是:

【一端】, 显示线段经过的区域, 平动的线段只是在一侧改变长度.

【两端】, 显示线段经过的区域, 平动的线段同时在两侧改变长度.

【运动】, 每执行一次, XY 按照 XZ 方向运动 1 个单位的距离.

【返回】, XY 返回水平方向, 运动的线段返回到与 XY 重合的状态.



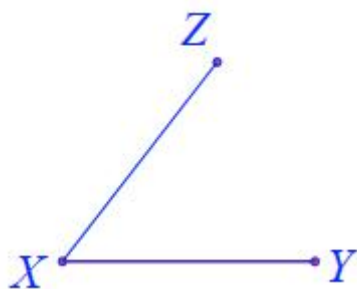
步骤 1: 单击按钮【返回】, 再单击按钮【一端】.

步骤 2: 单击按钮【运动】(第 1 次); 再单击按钮【运动】(第 2 次);
继续单击按钮【运动】(第 4 次); 还要单击按钮【运动】(第 4 次).

步骤 3: 单击按钮【返回】, 再单击按钮【两端】.

步骤 4: 单击按钮【运动】(第 1 次); 再单击按钮【运动】(第 2 次);
继续单击按钮【运动】(第 4 次); 还要单击按钮【运动】(第 4 次).

步骤 5: 单击按钮【返回】; 拖动点 Z , 使得 XY 不再处于竖直方向, 如下图所示; 再单击按钮【一端】.



步骤6：；单击按钮【运动】（第1次）；再单击按钮【运动】（第2次）；
继续单击按钮【运动】（第4次）；还要单击按钮【运动】（第4次）。

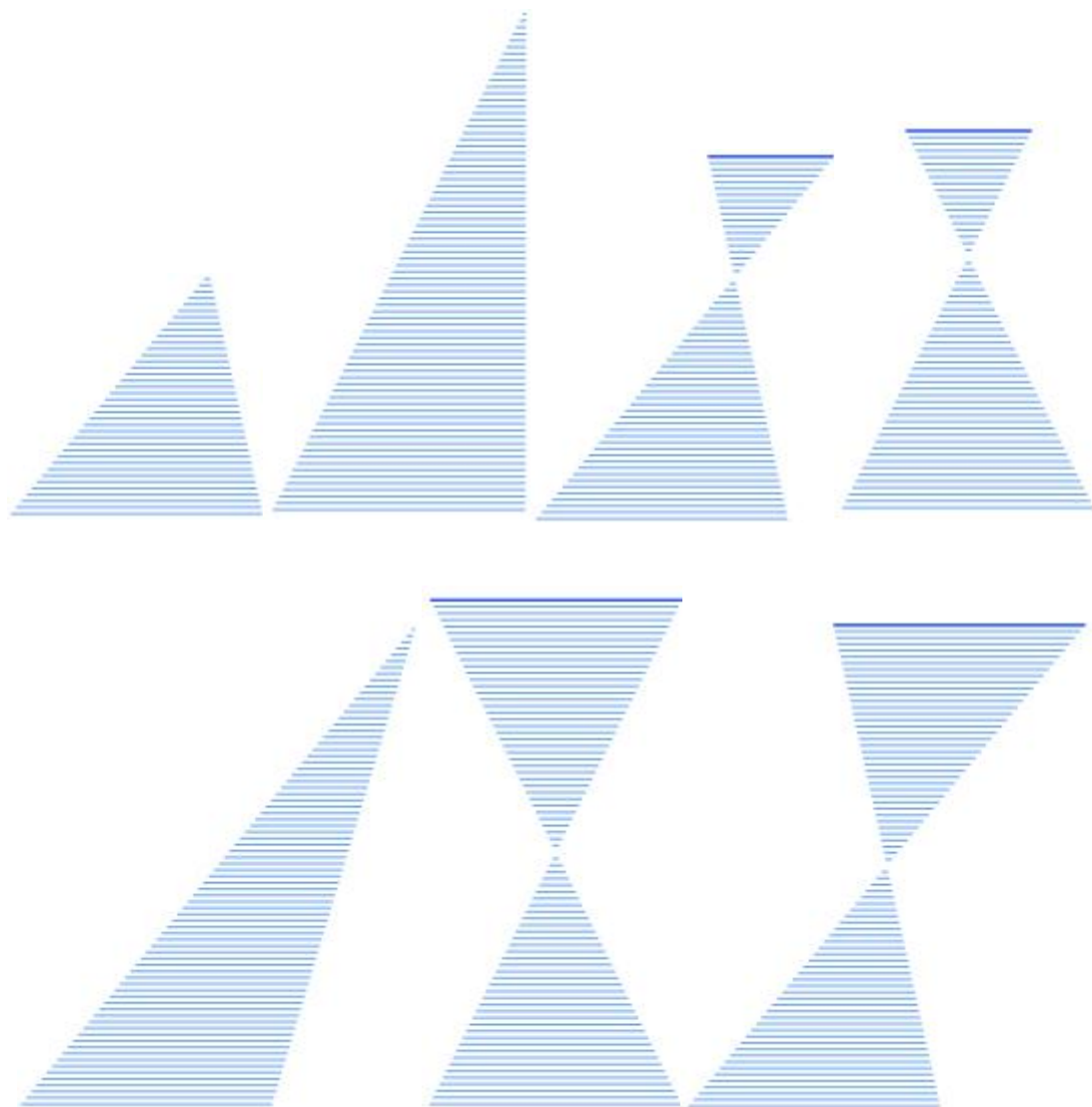
步骤7：单击按钮【返回】；再单击按钮【两端】。

步骤8：单击按钮【运动】（第1次）；再单击按钮【运动】（第2次）；
继续单击按钮【运动】（第4次）；还要单击按钮【运动】（第4次）。

【探索与发现】

（a）下面有一些图案，它们分别是什么图形？请你在它们的下方分别写出它们的名字；你得到了与它们相同或或相近的图形有几个？





(b) 在步骤 2 中分别得到了什么图形？

结论：直角梯形；直角梯形；直角梯形；直角三角形。

(c) 在步骤 4 中分别得到了什么图形？

结论：等腰梯形；等腰三角形；两个形状相同的等腰三角形；两个完全相同的等腰三角形。

(d) 在步骤 6 中分别得到了什么图形？

结论：梯形；梯形；梯形；三角形。

(e) 在步骤 8 中分别得到了什么图形？

结论：梯形；三角形；两个形状相同的三角形；两个完全相同的三角形。

【多知道一点】

(1) 平动过程中长度同时改变的线段，所经过的区域是一个梯形：有两组对边平行而另外一组对边不平行。通常大家把平行的一组对边称作梯形的底，而把不平行的一组对边称作梯形的腰。

同时，又把两条腰相等的梯形称作等腰梯形，腰与底垂直的梯形称作直角梯形。如下图所示，就是我们在前面分别得到的等腰梯形、直角梯形和一般梯形。

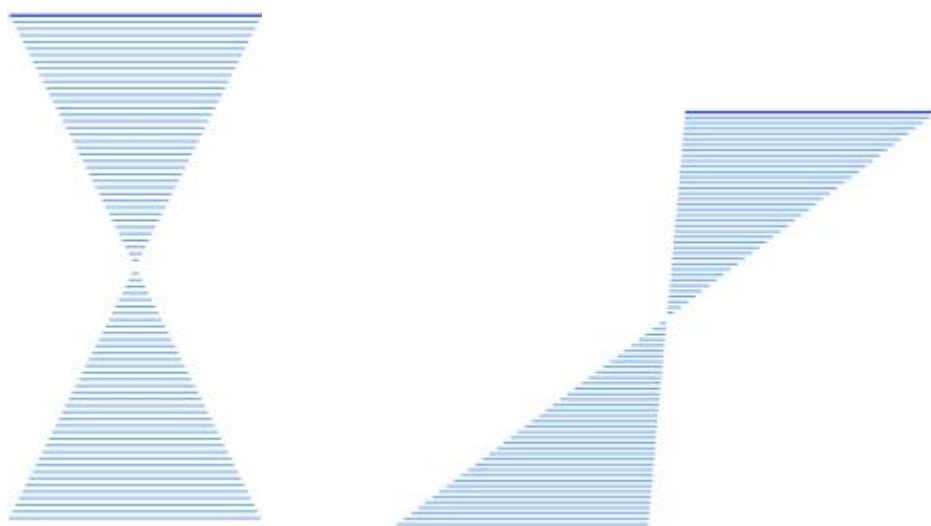


当梯形的一条边的缩短为 0 时，梯形就变为了三角形，如下图所示，这些三角形都是由上图中的三角形在继续平动之后而分别得到的，分别是：等腰三角形、直角三角形、一般三角形。因此，我们可以说三角形是梯形的特殊情况，也可以说梯形是三角形的一部分。



(2) 线段能够以缩短，就能够伸长，因此就得到了如下图所示的情况. 在我们的实验当中，线段伸长的速度与它缩短的速度是相同的.

例如：运动了 2 个单位后线段的长度从 2 变为 0，再经过 2 个单位后线段的长度再由 0 变为 2，如下图所示，那么就得到了两个完全相同过的三角形，即：形状与大小都相同，我们把它称之为全等的两个三角形.



当运动线段的长度为 0 之后，再运动 1 个单位，即运动线段的长度变为 1 时，如下图所示，两个三角形的形状也是相同的，只是大小不同，具有这种关系的图形叫做相似图形.



实际上，在运动线段的长度变为 0 之后继续运动的每一个时刻，重新出现的三角形都与原来的三角形具有相同的形状，都具有相似的关系.

关于图形的全等与相似，以后我们会专门的进行学习与研究.

【问题与思考】

我们前面谈到全等与相似时，都提到了三角形的形状与大小. 那么：

三角形的形状指的是什么？怎样用什么表示三角形的形状？

三角形的大小指的又是什么？又该如何描述三角形的大小？

请谈谈你的看法.

三、面动成体

【活动目的】

各种各样的几何体，它的表面实际上也是分别是由不同的面所组成的。

之前我们在“线动成面”专题中所研究的面，是平面中的区域，是同一个平面上的面。而几何体存在于我们现实的空间当中，它们的几个面都不在同一个面当中。因此，几何体，也通常被称为立体图形。

那么空间几何体中的面，与我们之前所研究的平面中图形，有哪些不同？又有哪些类似呢？

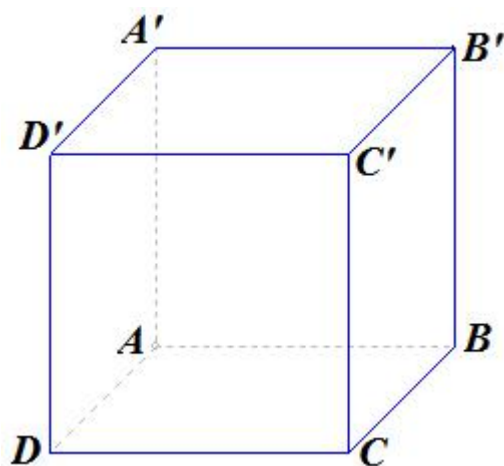
【活动过程】

虽然空间几何体中的面，可能不在同一个平面内，但是是这些面的形成过程仍然可以看做是由线的运动所生成的。因此在熟悉了线动成面的过程，也就不难理解面动成体的道理。

活动 1，移动正方形

如下图所示，是一个正方体，它有六个面，每个面都是一个正方形.

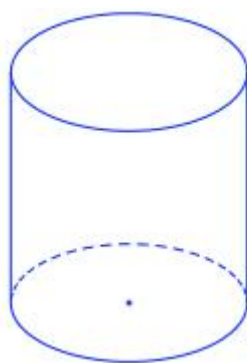
然而只有正对着我们的这个面 $CC'D'D$ 和背对着我们的那个面 $ABB'A$ 看起来是我们熟悉的正方形，其他四个面则看起来像是平行四边形.



实际上，这就是空间立体图形的一种画法，叫做斜二测画法.

人的视觉与现实结果之间会产生差别，而斜二测画法正好体现了这种差别.

类似的，我们还会把空间中的圆绘制成为一个椭圆，如下图所示.



我们可以在立体图形当中识别我们熟悉的平面图形，反过来，也可以让我们熟悉的平面图形通过运动过程得到空间立体图形.

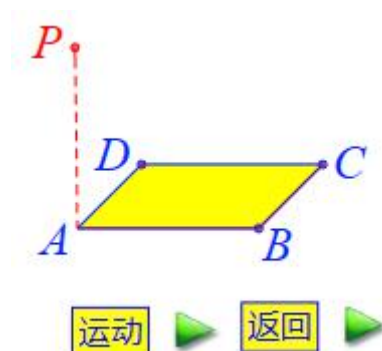
例如，下面就有一个在平面上放置的正方形，通过它的运动能够形成什么形状的几何体？



现在就让我们自己动手来试一试.

【动手与操作】

(1) 打开文件“面动成体.dmr”，如下图所示，在空间内有一个放置在水平面上、边长为 1 的正方形 ABCD，一条长度为 1、竖直向上的红色虚线 AP，还有两个按钮：运动和返回.



(2) 单击【运动】按钮（第 1 次），正方形 ABCD 就沿着 AP 的方向移动 1 个单位的距离.

(3) 单击【运动】按钮（第 2 次），正方形 ABCD 就沿着 AP 的方向又移动 1 个单位的距离.

如果单击【返回】按钮，那么就可以回到之前刚打开文件时的初始状态.

【探究与发现】

(e) 下面有一些图案，它们分别是什么图形？请你在它们的下方分别写出它们的名字；你得到了与它们相同或或相近的图形有几个？

(f) 第 1 次单击【运动】按钮，正方形 ABCD 沿着 AP 的方向运动了 1 个单位的距离。当它停下来之后，AB 和 BC 所经过的区域分别是什么图形？你认为正方形 ABCD 所经过的空间是一个什么几何体？在它停下来之前的每一个时刻呢？

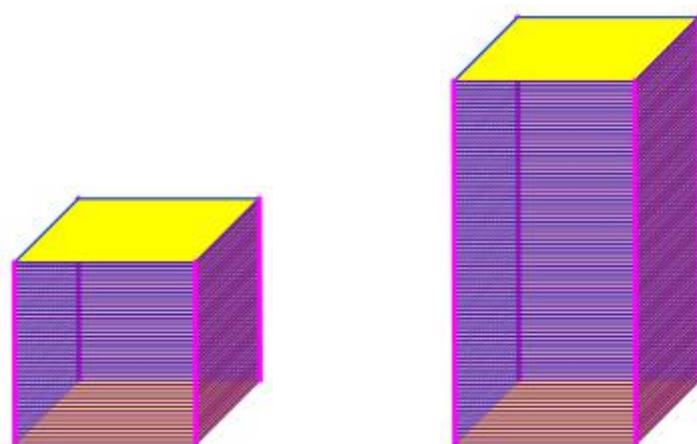
结论：正方形，正方形，正方体；长方形，长方形，长方体。

(g) 第 2 次单击【运动】按钮，正方形 ABCD 继续沿着 AP 的方向运动了 1 个单位的距离。当它停下来之后，AB 和 BC 所经过的区域分别是什么图形？你认为正方形 ABCD 所经过的空间是一个什么几何体？在它停下来之前的每一个时刻呢？

结论：长方形，长方形，长方体；长方形，长方形，长方体。

【多知道一点】

(1) 水平放置的、边长为 1 的正方形沿着竖直方向运动 1 个单位之后得到了一个正方体，继续移动只有就得到了一个长方体。这揭示了正方体与长方体之间的关系：正方体是特殊的长方体，或者说长方体是把正方体沿着一条边的方向拉伸之后而得到的。



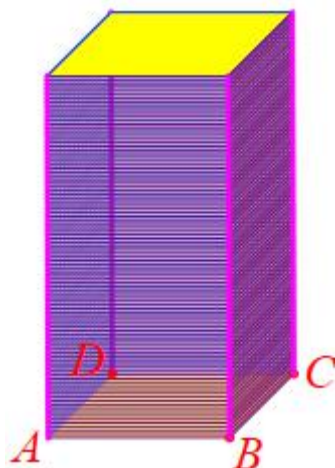
(2) 正方形运动过程中所经过的空间是一个正方体或长方体，那么这个几何体有六个面，其中有两个面：一个是正方形 $ABCD$ 刚开始的位置，另一个是正方形最终的位置，而另外四个面分别是由 AB 、 BC 、 CD 和 DA 在运动过程中所经过的区域。

因此，可以通过我们熟悉的“线动成面”问题帮助理解“面动成体”问题，或者通过“面动成体”问题进一步加深对“线动成面”问题的理解。

(3) 我们可以把长方体的六个面进行简单的分类，例如我可以把正方形 $ABCD$ 起始的位置称作是长方体的底面，与它相对的是正方形 $ABCD$ 运动结束后的位置，也是长方体的底面。因此可以把它原来的位置称作是下底面，把它运动结束后的位置称作是上底面。而其他的四个面，都可以简单地统一称之为侧面。

根据长方体的形成过程我们知道：长方体的底面是边长为 1 的正方形，侧面是边长为 1 和 N 的长方形。在这里 N 是运动的次数。而当 N 为 1 是，长方体就变成了正方体。

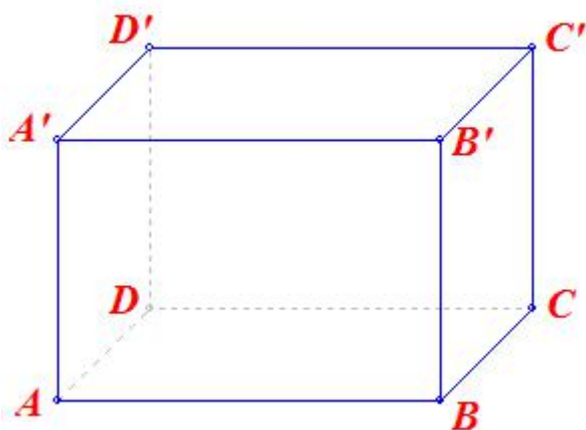
更进一步，还可以把 AB 的长称作是长方体的长，把 BC 的长称作是长方体的宽，把运动的次数 N 称作是长方体的高。



对于一个长方体来说，它的长、宽、高可以是完全不相等的. 而对于一个正方体来说，它的长、宽、高则需要是完全相等的.

【问题与思考】

(3) 如下图所示有一个长方体 $ABCD-A'B'C'D'$ ，它的长、宽、高分别是 AB 、 BC 、 AA' . 请你找出分别与长、宽、高相等的线段.



(4) 我们利用任何形状的长方形都可以拼成一个更大的正方形. 那么利用任何形状的长方体，例如它的长、宽、高分别是 4、2、3，是否也可以拼成一个更大的正方体呢？如果你认为不可以，请说明理由；如果你认为可以，请说明需

要多少块，并画出它的大致图案.

(5) 一块长方形的长和宽分别是 3 和 2，利用这种长方形可以拼成一个正方形吗？如果你认为不可以，请说明理由；如果你认为可以，请说明需要多少块，并画出它的大致图案.

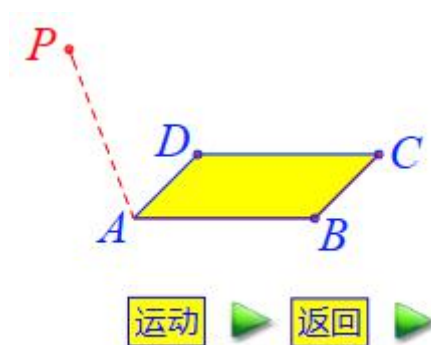
活动 2，运动方向变

竖直方向的直线与水平放置的正方形具有垂直关系，所以水平放置的正方形沿着竖直向上的方向移动过程中，才能够形成长方体。这就像一条线段沿着与它垂直的方向移动才能够得到长方形的区域一样。

当一条直线沿着与它不垂直的方向移动时，就会得到平行四边形。类似地，当一个平面沿着与它不垂直的方向移动时，会形成什么形状的几何体呢？

【动手与操作】

(5) 单击【返回】按钮，拖动点 P，使得 AP 不再处于竖直方向，如下图所示。



(6) 单击【运动】按钮（第 1 次），正方形 ABCD 就沿着 AP 的方向移动 1 个单位的距离

(3) 单击【运动】按钮（第 2 次），正方形 ABCD 就沿着 AP 的方向又移动 1 个单位的距离。

如果单击【返回】按钮，那么就可以回到之前刚打开文件时的初始状态。

【探究与发现】

(a) 下面有一些图案，它们分别是什么图形？请你在它们的下方分别写出它们的名字；你得到了与它们相同或或相近的图形有几个？

(b) 第 1 次单击【运动】按钮，正方形 ABCD 沿着 AP 的方向运动了 1 个单位的距离。当它停下来之后，AB 和 BC 所经过的区域分别是什么图形？你认为正方形 ABCD 所经过的空间是一个什么几何体？在它停下来之前的每一个时刻呢？

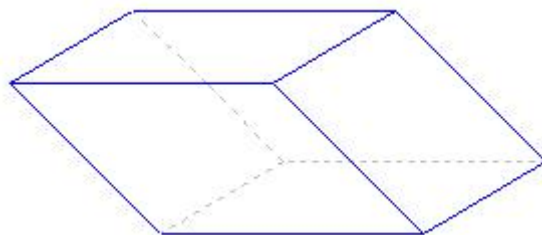
结论：菱形，菱形，平行六面体；平行四边形，平行四边形，平行六面体。

(c) 第 2 次单击【运动】按钮，正方形 ABCD 继续沿着 AP 的方向运动了 1 个单位的距离。当它停下来之后，AB 和 BC 所经过的区域分别是什么图形？你认为正方形 ABCD 所经过的空间是一个什么几何体？在它停下来之前的每一个时刻呢？

结论：平行四边形，平行四边形，平行六面体；平行四边形，平行四边形，平行六面体。

【多知道一点】

当 AP 与平面 ABCD 不再垂直时，平面 ABCD 沿着 AP 的方向移动的过程中，所形成的六个面当中的每两个相对的面仍然是平行的，因此所得到的几何体称作是平行六面体，如下图所示，是一个更加一般的平行六面体，它的六个面都是一般的平行四边形。



这说明，长方体是一种特殊的平行六面体，它的特殊性在于所有的面都是长方形.

【问题与思考】

拖动点 P ，当点 P 与点 B 重合时，直线 AP 就处于正方形 $ABCD$ 所在平面之内. 类似地，当点 P 与点 C 重合或者与点 D 重合时，直线 AP 也处于正方形 $ABCD$ 所在平面之内.

除此之外，还有哪些位置使得点 P 位于正方形 $ABCD$ 所在平面上？

当点 P 位于正方形 $ABCD$ 所在平面上时，正方形 $ABCD$ 沿着 AP 的方向移动过程中，得到了什么？

活动 3，移动又放缩

前面我们研究过，把一条线段移动的同时又把它缩短，就可以得到一个梯形或一个三角形。那么，将一个正方形移动的同时也把它缩小，可以得到什么形状的几何体呢？

之前，线段在平移的过程中，可以只是从一端伸缩，也可以从两端同时伸缩。那么，如果正方形在伸缩过程中需要同时保持为正方形，应该如何放缩呢？有多少种放缩方式呢？

【动手与操作】

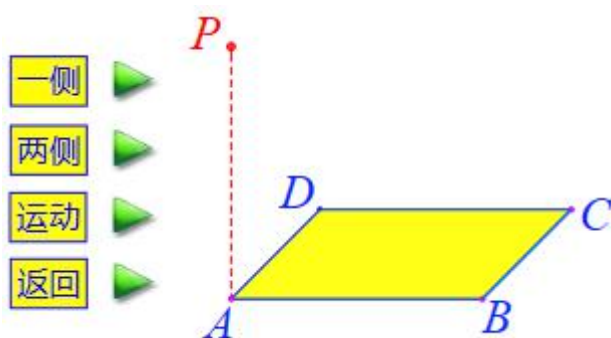
进入文件“线动成面.dmr”的下一页，如下图所示，有一个在水平面上放置、边长为 1 的正方形、一条竖直向上且长度为 1 的线段 AP；还有四个按钮，它们分别是：

【一侧】，显示正方形经过的空间，正方形从一侧改变大小。

【两侧】，显示正方形经过的空间，正方形从两侧侧改变大小。

【运动】，每执行一次，正方形沿着 AP 的方向运动 1 个单位的距离。

【返回】，正方形返回原来的位置与状态。



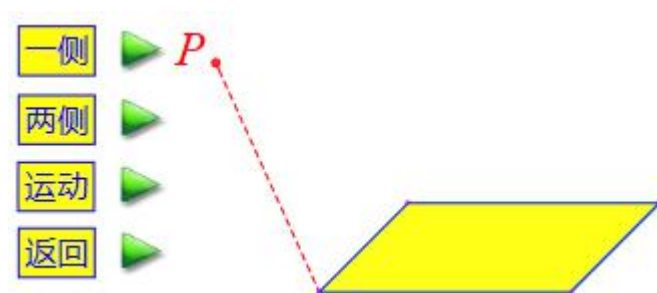
步骤 1：单击按钮【返回】，再单击按钮【一侧】。

步骤 2：单击按钮【运动】（第 1 次）；再单击按钮【运动】（第 2 次）；
继续单击按钮【运动】（第 4 次）；还要单击按钮【运动】（第 4 次）。

步骤 3：单击按钮【返回】，再单击按钮【两侧】。

步骤 4：单击按钮【运动】（第 1 次）；再单击按钮【运动】（第 2 次）；
继续单击按钮【运动】（第 4 次）；还要单击按钮【运动】（第 4 次）。

步骤 5：单击按钮【返回】；拖动点 Z，使得 OP 不再处于竖直方向，如下图所示；再单击按钮【一侧】。



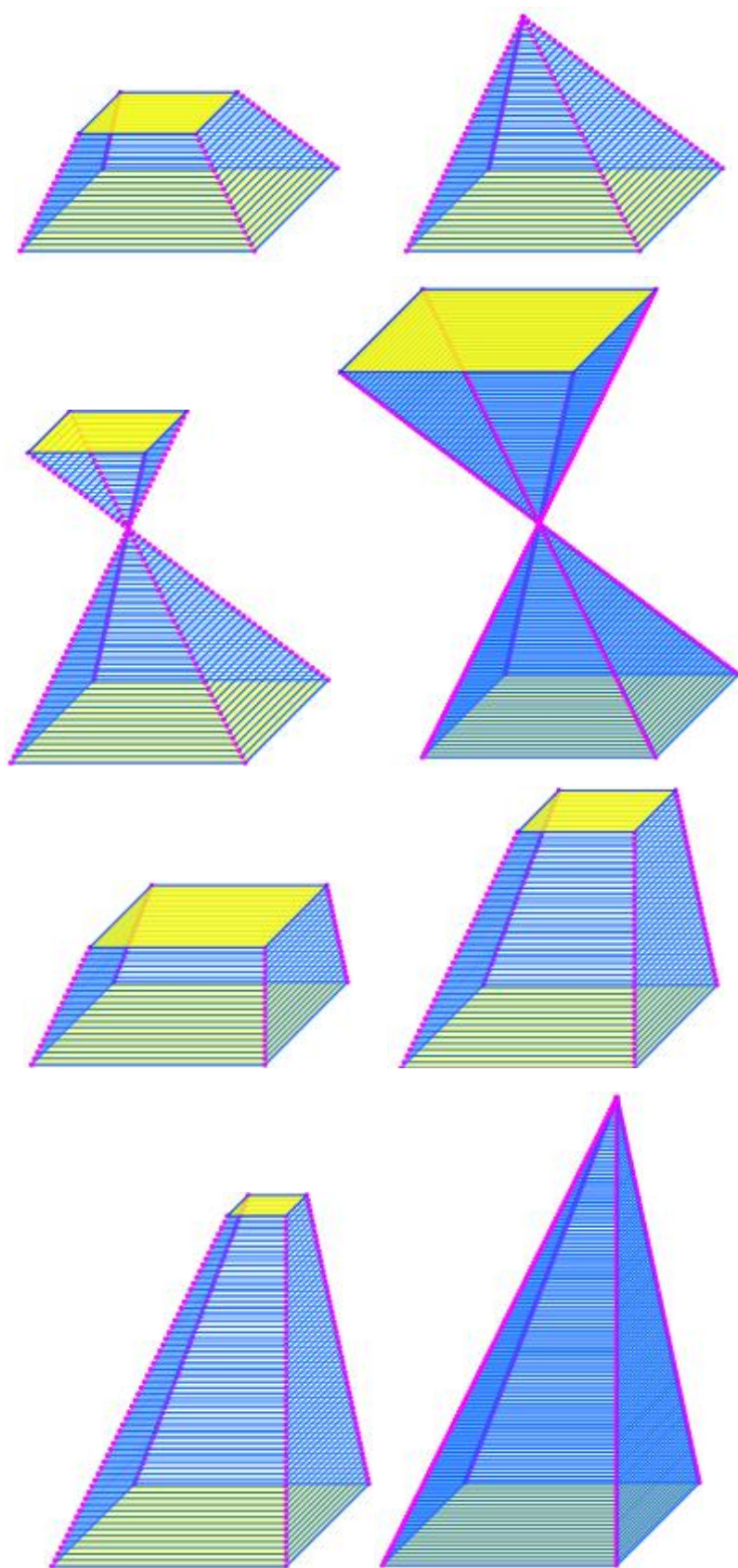
步骤 6：单击按钮【运动】（第 1 次）；再单击按钮【运动】（第 2 次）；
继续单击按钮【运动】（第 4 次）；还要单击按钮【运动】（第 4 次）。

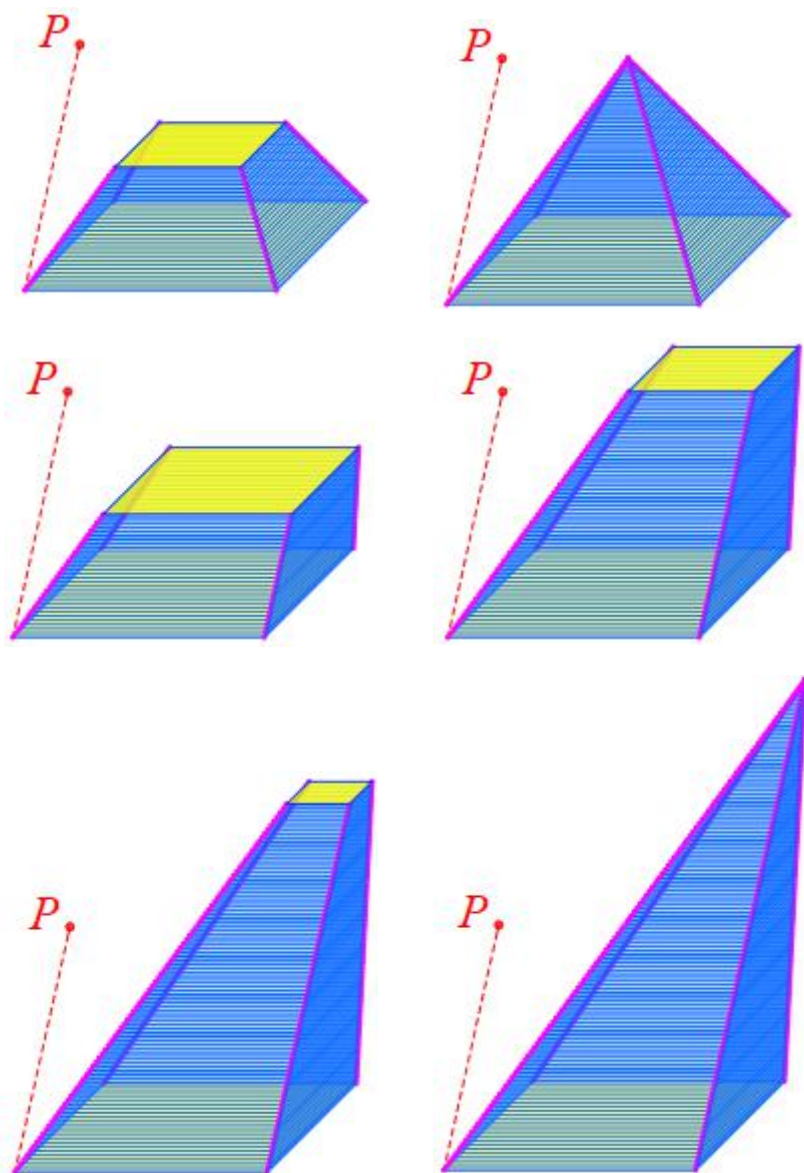
步骤 7：单击按钮【返回】；再单击按钮【两侧】。

步骤 8：单击按钮【运动】（第 1 次）；再单击按钮【运动】（第 2 次）；
继续单击按钮【运动】（第 4 次）；还要单击按钮【运动】（第 4 次）。

【探索与发现】

(a) 下面有一些图案，它们分别是什么图形？请你在它们的下方分别写出它们的名字；你得到了与它们相同或或相近的图形有几个？





(b) 在步骤 2 中分别得到了什么图形？

结论：棱台；棱台；棱台；棱锥。

(c) 在步骤 4 中分别得到了什么图形？

结论：棱台；棱锥；两个形状相同的棱锥；两个完全相同的棱锥。

(d) 在步骤 6 中分别得到了什么图形？

结论：棱台；棱台；棱台；棱锥。

(e) 在步骤 8 中分别得到了什么图形？

结论：棱台；棱锥；两个形状相同的棱锥；两个完全相同的棱锥.

【多知道一点】

一条线段在平动的过程中不断缩小，当线段的长度变为 0 时，线段所经过的区域就是一个三角形，在之前的过程中线段所经过的区域是一个梯形. 类似地，正方形在平动过程中不断缩小，当它变为一个点时，它所经过的空间就是一个棱锥，在之前的过程中它所经过的空间是棱台.

因此，就像梯形是三角形的一部分一样，棱台也是棱锥的一部分.

【问题与思考】

- (1) 你认为，棱台的上底面与下底面是否具有平行关系？
- (2) 棱台除了上底面和下底面之外，其他的面是什么形状的图形？

活动 4，圆盘的移动

前面我们研究了正方形在空间内的平移过程，类似地其他多边形也都可以进行平移。它们所经过的空间，对应地也会形成不同的几何体。

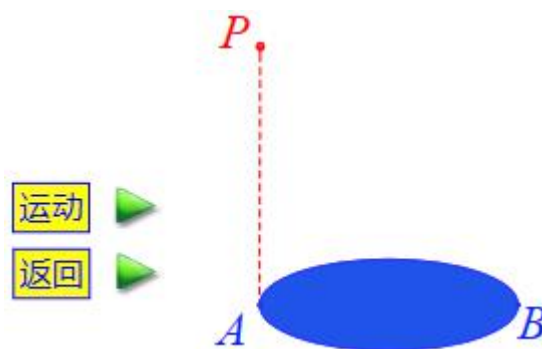
圆是我们所熟悉的另外一种图形，我们有必要研究与圆有关的移动问题，从而能够更加深入地了解和研究与圆相关的圆柱、圆锥和圆台等有关的几何体的性质。

【动手与操作】

进入文件“面动成体.dmr”的下一页，如下图所示，在空间内有一个水平放置、以长度为 2 的线段 AB 为直径的圆，一条竖直向上的线段 AP，还有两个按钮：

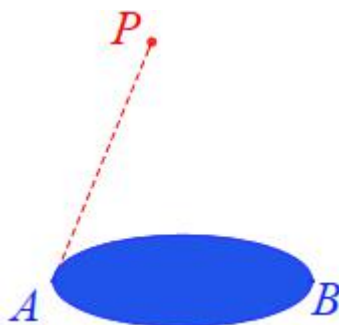
【运动】，每单击一次，圆沿着 AP 的方向运动单位为 1 的距离；

【返回】，使得圆 AB 回到原来的位置和状态。



步骤 1：单击【运动】按钮（第 1 次），圆盘沿着竖直的方向移动一段距离；
单击【运动】按钮（第 2 次），圆盘沿着竖直的方向又移动一段距离。

步骤 2：单击【返回】按钮；拖动点 P，使得 AP 不再处于竖直状态，如下图所示。



步骤 3: 单击【运动】按钮（第 1 次），圆盘沿着 AP 的方向移动一段距离；
单击【运动】按钮（第 2 次），圆盘沿着 AP 的方向又移动一段距离.

【问题与发现】

(a) 下面有一些图案，它们分别是什么图形？请你在它们的下方分别写出它们的名字；你得到了与它们相同或或相近的图形有几个？

(b) 在步骤 1 中分别得到了什么图形？

结论：圆柱；圆柱；

(c) 在步骤 3 中分别得到了什么图形？

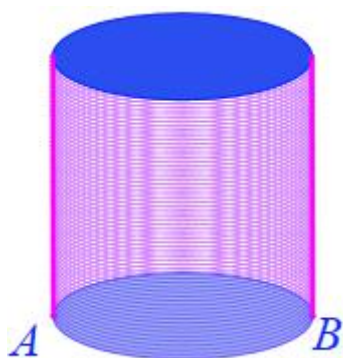
结论：斜圆柱；斜圆柱；

【多知道一点】

在水平面内放置的圆，沿着与它垂直的方向移动的过程中，形成一个圆柱，圆柱的上底面与下底面都是一个圆. 圆周所经过的区域是圆柱的侧面.

圆在运动过程中，圆上任意一点所经过的路径都是一条与圆柱的底面垂直的

线段，它被称作是圆柱的母线，如下图所示，点 A 或点 B 所经过的路径，都是圆的母线.

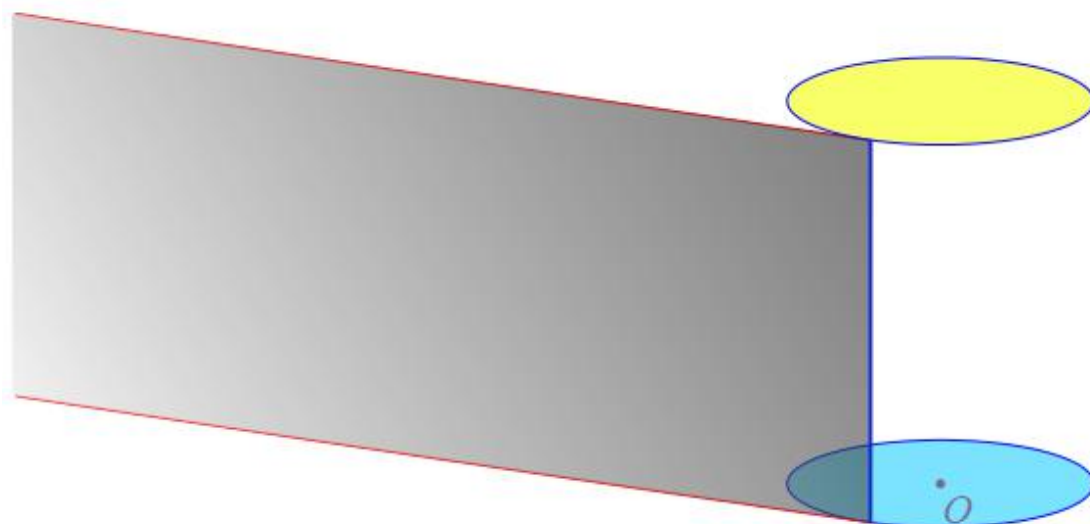


圆柱有无数条母线.

从圆柱的上底面上一点到下底面上一点，经过圆柱侧面的路径有无数条，而母线是最短的路径.

沿着圆柱的母线把圆柱的侧面剪开，然后再展开，就可以得到一个长方形.

进入文件“面动成体.dmr”的下一页，单击【剪开】按钮就可以观察将圆柱的侧面剪开得到长方形的过程，结果如下图所示.



【问题与思考】

(1) 圆柱沿着母线剪开后，得到一个长方形，长方形的长和宽与圆柱中的哪些量对应？

(2) 对于斜圆柱来说，沿着它的母线把它的侧面展开，得到一个什么图形？

活动 5，圆盘的缩放

正方形在移动的过程中同时伸缩，所经过的空间会形成棱台、棱锥和对顶的两个棱锥.

类似地，圆盘在移动过程中也可以同时伸缩，同时移动和放缩的圆盘能够形成圆台、圆锥和对顶圆锥.

这是我们能够想到的，也是可以想象出来的.

但是，平移并伸缩的圆盘是否只能形成圆台、圆锥或对顶圆锥呢？或者说，是否还可以形成其他的几何体呢？

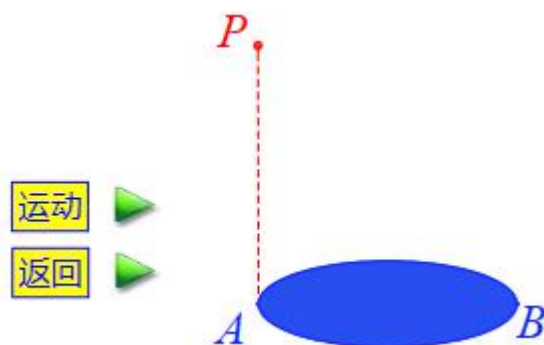
这说明仍然有一些问题需要我們进行深入的研究.

【动手与操作】

进入文件“面动成体.dmr”的下一页，如下图所示，在空间内有一个水平放置、以长度为 2 的线段 AB 为直径的圆，一条竖直向上的线段 AP ，还有两个按钮：

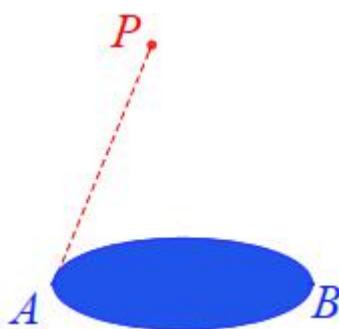
【运动】，每单击一次，圆沿着 AP 的方向运动单位为 1 的距离；运动过程中，圆的半径逐渐缩小，当运动的距离为 2 时半径缩小为 0，然后逐渐增加.

【返回】，使得圆 AB 回到原来的位置、状态和大小.



步骤 1：单击【运动】按钮（第 1 次）；单击【运动】按钮（第 2 次）；单击【运动】按钮（第 3 次）；单击【运动】按钮（第 4 次）。

步骤 2：单击【返回】按钮；拖动点 P，使得 AP 不再处于竖直状态，如下图所示。



步骤 3：单击【运动】按钮（第 1 次）；单击【运动】按钮（第 2 次）；单击【运动】按钮（第 3 次）；单击【运动】按钮（第 4 次）。

【问题与发现】

（a）下面有一些图案，它们分别是什么图形？请你在它们的下方分别写出它们的名字；你得到了与它们相同或或相近的图形有几个？

（b）在步骤 1 中分别得到了什么图形？

结论：圆台；圆锥；两个形状相同的对顶圆锥；两个完全相同的对顶圆锥。

（c）在步骤 3 中分别得到了什么图形？

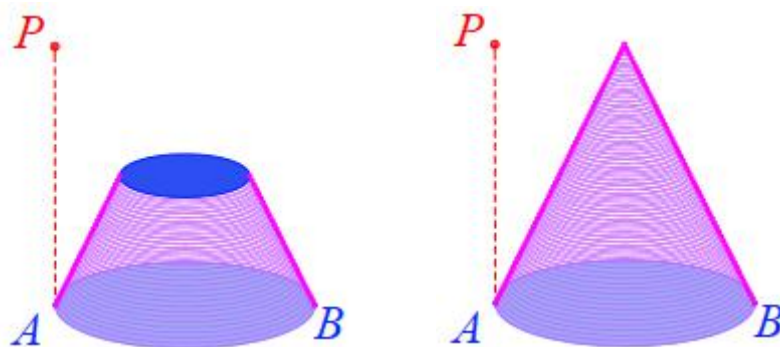
结论：斜圆台；斜圆锥；两个形状相同的对顶斜圆锥；两个完全相同的对顶

斜圆锥；

【多知道一点】

就像棱台是棱锥的一部分一样，圆台也是圆锥的一部分.

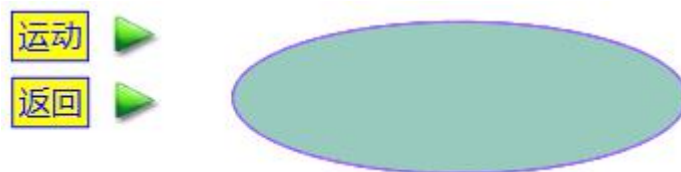
在棱台中，它的上底面与下底面平行. 同样，圆台的上底面与它的下底面也平行.



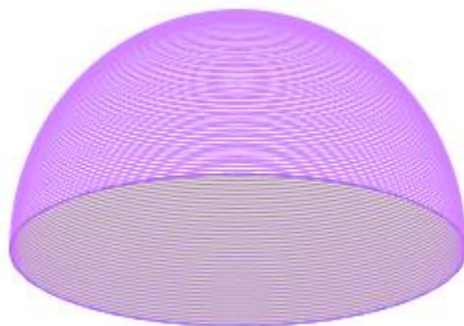
【问题与思考】

(1) 圆锥的侧面展开图是一个长方形，那么圆锥的侧面展开图会是一个什么图形？圆台的侧面展开图呢？

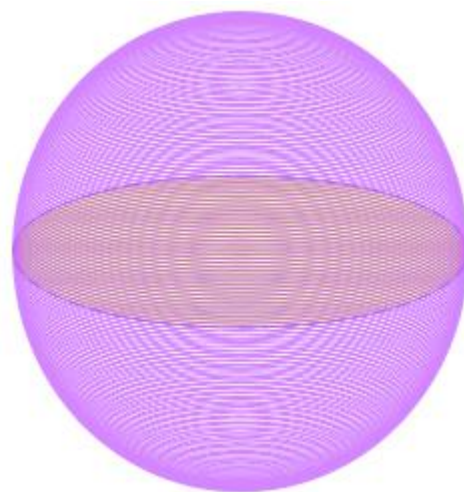
(2) 进入文件“面动成体.dmr”的下一页，如下图所示，在空间中有一个水平放置的圆盘，还有两个按钮：【运动】和【返回】.



单击【运动】按钮，结果如下图所示，圆盘在向上移动的过程中也同时缩小，直到它变成一个点为止，结果得到了一个_____。这时按钮的名称变为【继续】.



单击【继续】按钮，如下图所示，原来的圆盘向下移动的过程中也同时缩小，最后也变为一个点，那么整个几何体是一个_____.



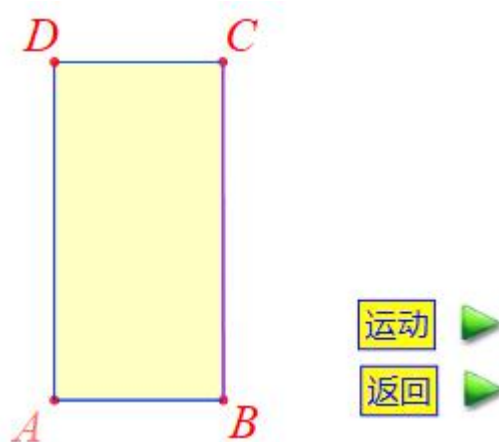
为什么前面圆盘在移动过程中同时也伸缩，变成了一个圆锥. 而在这里却变成了另外一种形状的几何体呢？你认为根本的原因是什么？

活动 6，图形的旋转

圆柱、圆台、圆锥和球都是旋转体. 也就是说，可以通过旋转的方式得到它们. 不过它们是通过哪些图形以怎样的旋转方式而得到的呢？接下来我们通过研究图形通过旋转得到旋转体的过程，进一步深入地了解旋转体的结构，研究旋转体的性质..

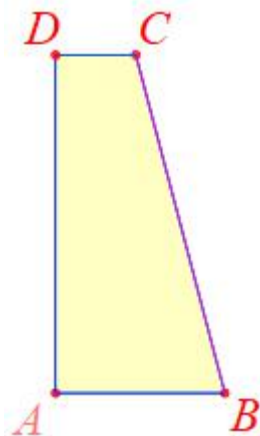
【动手与操作】

进入文件“面动成体.dmr”的下一页，如下图所示，有一个四边形 ABCD. 其中它的顶点 C 可以被拖动，使得四边形可以成为长方形、直角梯形、直角三角形等图形；还有两个按钮：【运动】与【还原】.



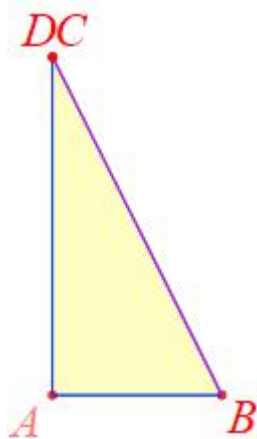
步骤 1：单击【运动】按钮，长方形 ABCD 绕它的一条边 AD 旋转了一周.

步骤 2：向左拖动点 C，让长方形 ABCD 变成一个直角梯形，单击【还原】按钮，结果如下图所示.



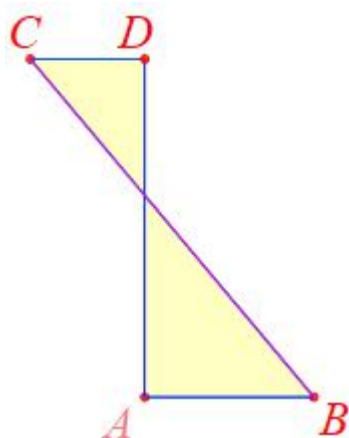
步骤3：单击【运动】按钮，梯形ABCD绕与底边垂直的一条边AD旋转了一周。

步骤4：继续向左拖动点C到与点D重合的位置，让长方形ABCD变成一个直角三角形ABC或ABD，单击【还原】按钮，结果如下图所示。



步骤5：单击【运动】按钮，直角三角形ABC绕它的一条直角边旋转了一周。

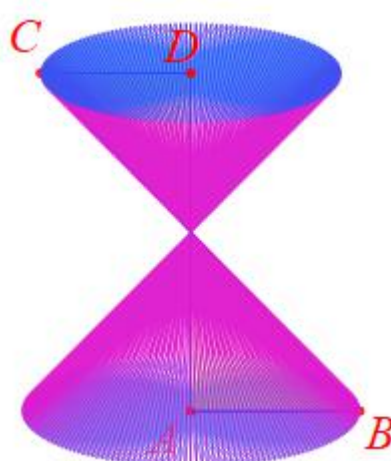
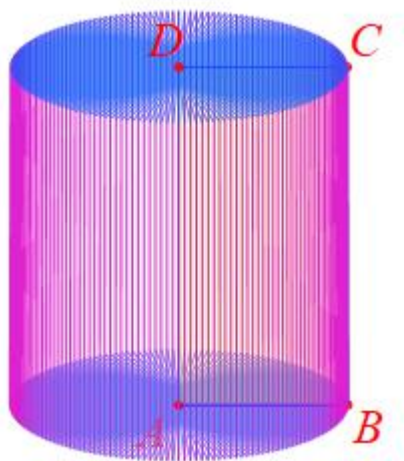
步骤6：继续向左拖动点C到点D左侧的位置，得到两个顶点相对的直角三角形，单击【还原】按钮，结果如下图所示。

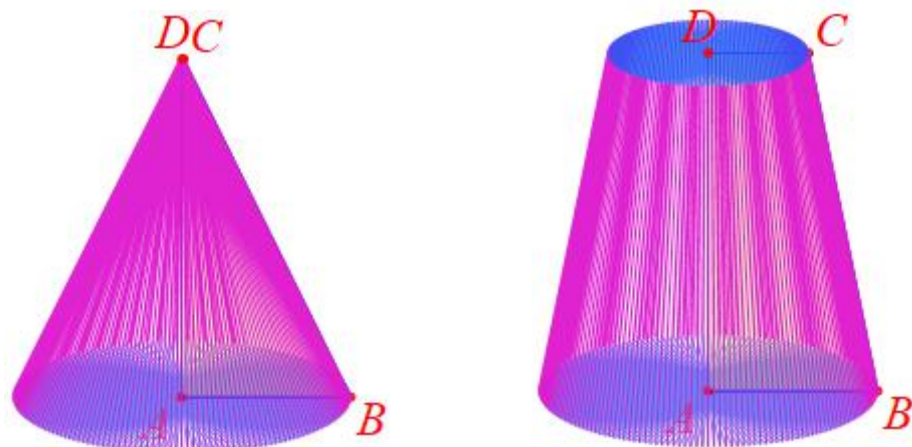


步骤 7: 单击 **【运动】** 按钮，整个图形绕 AD 旋转了一周。

【探索与发现】

(a) 下面有一些图案，它们分别是什么图形？请你在它们的下方分别写出它们的名字；你得到了与它们相同或或相近的图形有几个？





(b) 在步骤 1 中，长方形 ABCD 绕着它的一条边 AD 旋转一周之后，得到了什么图形？

结论：圆柱.

(c) 在步骤 3 中，梯形 ABCD 绕它与底边垂直的一条边 AD 旋转一周之后，得到了什么图形？

结论：圆台.

(d) 在步骤 5 中，直角三角形 ABC 绕它的一条直角边 AC 旋转了一周，得到了什么图形？

结论：圆锥.

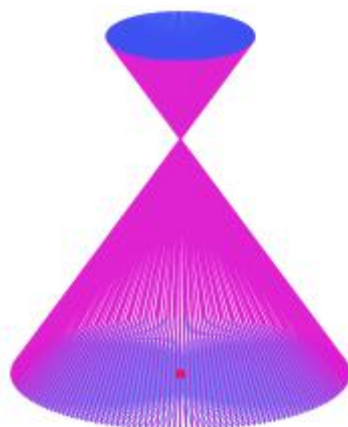
(e) 在步骤 7 中，整个图形绕线段 AD 旋转一周之后，得到了什么图形？

结论：两个对顶圆锥.

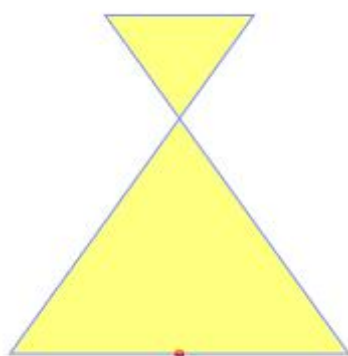
【多知道一点】

由两个对顶的直角三角形，绕着它们共同的直角边旋转一周，如下图所示，

就得到了两个对顶的圆锥.



反过来,如果一个竖直方向的平面经过这两个圆锥共同的顶部所在的点,那么这个平面截取这个几何体所得到的截线,就是两个对顶的等腰三角形.



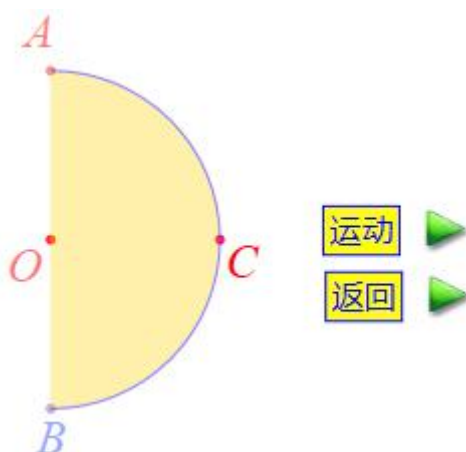
【问题与思考】

(1) 圆在平移过程中, 同时进行伸缩, 所经过的空间也会生成两个对顶的圆锥. 那么, 利用平行于圆锥底面的平面截取这个几何体, 可能得到什么形状的图形?

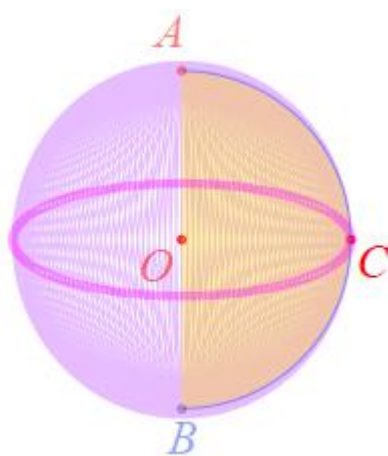
(2) 前面我们还研究了圆在平移过程中, 同时进行放缩, 还可以得到一个

球 实际上将一个半圆绕着它所在圆的直径旋转一周，也可以得到一个球.

进入文件“面动成体.dmr”的下一页，如下图所示有一个半圆，AB 是它的直径，点 C 是圆弧上的一点.



单击【运动】按钮，结果如下图所示，半圆在绕着它的直径 AB 旋转一周的过程中，所经过的空间得到了一个_____.



如果半圆绕着它的半径 OC 旋转一周，那么得到的几何体是什么呢？

经过 O 的一个平面截取这个几何体，会得到什么形状的图形？

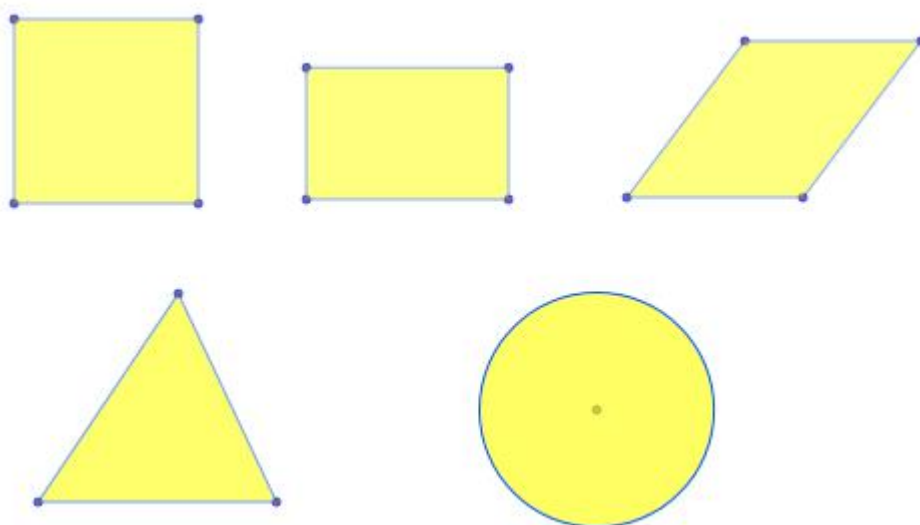
四、认识图形

【活动目的】

通过动态变化的过程，加深长方形、正方形、平行四边形和圆形的认识与理解。

【活动过程】

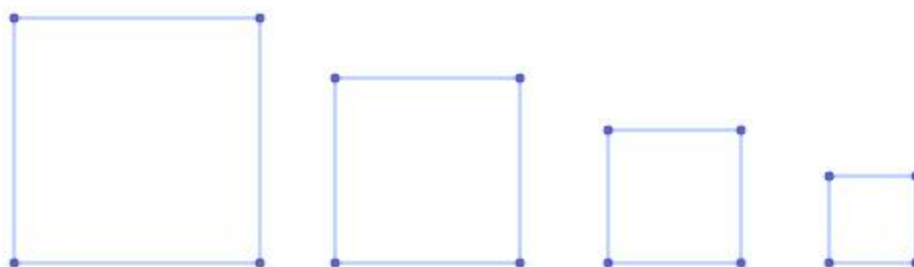
这节课学习的内容是“认识图形”，包括正方形、长方形、平行四边形、三角形和圆。实际上，在之前我们就见过这些图形，并且已经认识这些图形，而且还能够在一大堆图形当中指出哪些是正方形，哪些是长方形，哪些是平行四边形，哪些是三角形，以及哪些是圆形。



那么，为什么还要继续学习它们、了解它们呢？

完成下面的内容，相信你就会获得一些新的收获，就能进一步认识它们。

活动 1，正方形



正方形是一个封闭的图形，它把平面分成了内部和外部. 如果从它的内部到它的外部，或者从它的外部到它的内部，都必须穿过这个正方形.


这个封闭图形由四条直线段组成，它们叫做正方形的边界，简称边.


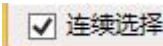
相邻的两边有一个共同的点，叫做正方形的顶点，正方形有四个顶点.

让我们在计算机上绘制一个能随意变化的正方形，在运动与变化中也许我们能够更加容易地发现它更多的特征.

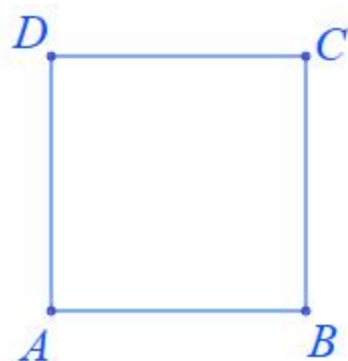
【动手与操作】

绘制正方形的操作的步骤和过程是：

(1) 打开动态数学软件，单击工具条中的【画笔】工具，进入画图状态；在下方的工作区中单击鼠标一下，作出一个点 A；然后在其他位置再单击一下，继续作出一个点 B.

(2) 单击工具条中的【选择】工具，返回到选择状态；按住键盘中的 Ctrl 键，或者在软件界面左下角选择“连续选择”选项进入连续选择状态.

(3) 先后单击点 A 和点 B，就可以同时选中它们，单击【多边形】菜单中的【正方形】命令，如下图所示，结果就做出了一个正方形 ABCD.



为了区分不同的点，计算机还自动给它们取了一个名字. 在这里正方形有一个顶点，分别是 A、B、C、D. 那么正方形的四条边就可以表示为：AB、BC、CD、DA.

【探索与发现】

(a) 拖动点 A 或点 B 时，四边形 ABCD 的位置和边长就会发生改变，那么它仍然是正方形吗？

结论：仍然是正方形.

(b) 拖动点 C 或点 D 时，点 A 和点 B 的位置会同时发生改变吗？如果改变，那么点 A 和点 B 是随着点 C 或点 D 如何改变的？

结论：会发生改变；按照完全相同的方向移动.

(c) 当拖动点 A 或点 B 时，正方形四条边 AB、BC、CD、DA 的长度会发生改变吗？如果改变，它们是怎么改变的？请你说一说你所发现的规律.

结论：会发生改变；它们的长度始终相等.

(d) 当拖动点 C 或点 D 时, 正方形四条边 AB、BC、CD、DA 的长度会发生改变吗? 如果改变, 它们是怎么改变的? 请你说一说你所发现的规律.

结论: 不会发生改变.

【多知道一些】

点 A 和点 B, 是我们在工作区任意位置绘制的点, 它们可以被随意地拖动, 具有完全的自由, 我们把这类点称作自由点.

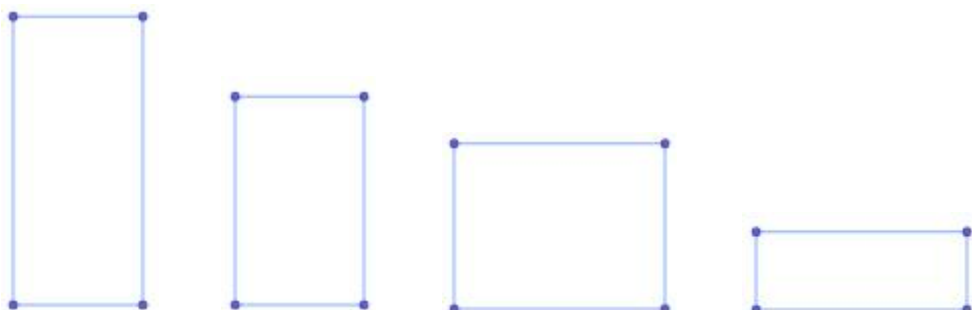
计算机根据我们所选择的两个顶点 A 和 B 做出了正方形 ABCD, 为了使得四边形 ABCD 一直保持为正方形, 那么点 C 和点 D 的位置就需要根据点 A 或点 B 位置的改变而随时发生改变, 因此它们没有自由, 称作非自由点, 或者受约束点, 简称约束点.

【问题与思考】

(1) 正方形的“形”就是形状的意思. “正”与“方”表明了正方形的形状的特征. 通过上面的探索与研究, 你能说说正方形的“正”是什么含义? 正方形的“方”又是什么含义呢?

(2) 在正方形当中, 每个顶点以及与它相连的两条边就组成了一个角, 那么在正方形的内部有几个角? 一个点用一个字母表示, 一条边用两个字母表示, 那么一个角应该怎么表示?

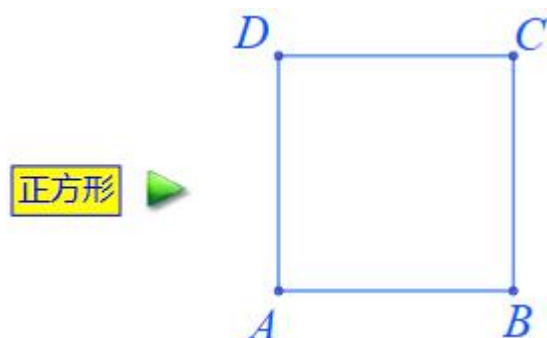
活动 2，长方形



长方形与正方形的形状看起来有些接近，但是又有所不同。那么，长方形与正方形有哪些相同？又有哪些不同呢？或者说，它们之间具有什么联系与区别呢？通过下面的动手、操作、探索与实验过程，也许会帮助我们有所发现。

【动手与操作】

(1) 打开文件“认识长方形.dmr”，如下图所示，有一个正方形 ABCD，它的边 AB 和 CD 是水平方向，边 BC 和 DA 是竖直方向。



(2) 向上或向下拖动点 C，它就变成了一个长方形。

(3) 单击按钮【正方形】（的绿色部分），长方形又会重新变为正方形。

【探索与发现】

(a) 在拖动点 C 的过程中，边 AB 和 CD 的长度发生变化了吗？边 BC 和

DA 的长度呢？

结论：没有变化；发生了变化。

(b) 在拖动点 C 的过程中，边 AB 和 CD 仍然是水平方向吗？边 BC 和 DA 依然是竖直方向吗？


结论：仍然水平；仍然竖直。

(c) 你可以用自己的语言描述以下长方形与正方形的联系与区别吗？

结论：都是方的，对边相等；邻边一个相等一个不等。

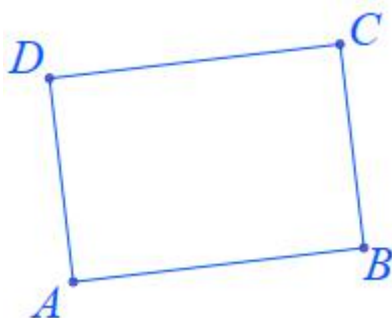
【动手与操作】

我们自己动手绘制一个长方形，它的两条边不一定是水平的，它的另外两条边也不一定是竖直的。操作过程与步骤是：

(1) 在动态数学软件中，单击工具条中的【新建】工具 ，建立一个新的文档，同时也会出现一个空白的工作区；

(2) 单击【画笔】工具，进入画图状态，在工作区作出两个自由点 A 和 B。

(3) 单击【选择】工具，返回到选择状态；同时选择点 A 和点 B，执行【多边形】菜单中的【长方形】命令，结果如下图所示，作出一个长方形 ABCD。



【探索与发现】

(a) 拖动点 A 或点 B, 都会改变边 AB 的方向, 在这个过程中, CD 与 AB 的方向一直是相同的吗? DA 与 BC 的方向一直是相同的吗? BC 与 AB 的方向有什么关系?

结论: 相同; 相同; BC 随着 AB 改变而改变.

(b) 拖动点 A 或点 B, 都会改变边 AB 的长度, 在这个过程中, CD 与 AB 的长度一直是相同的吗? DA 与 BC 的长度一直是相同的吗? BC 与 AB 的长度会同时变大或变小吗?

结论: 相同; 相同; 会的.

(c) 拖动点 C, AB 与 CD 的长度与方向都改变了吗? BC 与 DA 的长度与方向都改变了吗? 如果改变了, 你能说一说在改变过程中, 存在哪些规律吗?

结论: 都没改变; 方向都没变, 长度都变了.

(d) 拖动点 C, 你能把长方形变为正方形吗? 请你操作试试看.

结论: 可以拖动成为大概的正方形.

【多知道一些】

通过点 A 和点 B 所绘制的长方形 ABCD 当中, 点 C 可以被拖动, 从而能够改变正方形的形状. 但是它又不能被随意拖动, 因为它需要保证四边形 ABCD 始终是一个长方形. 我们把这种只能按照约束条件运动的点, 称作半自由点或半约束点.

而这里的点 D, 就是我们前面提到的约束点.

【问题与思考】

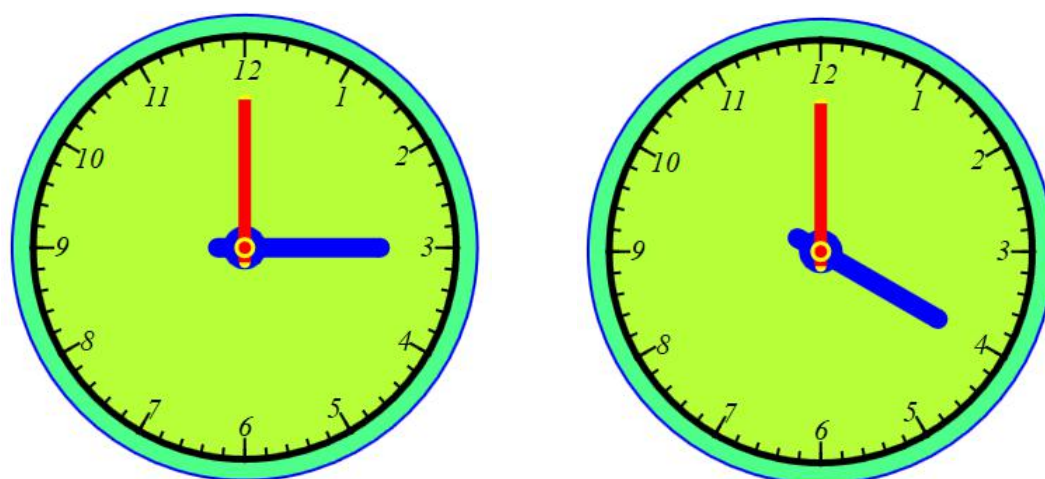
(1) 长方形与正方形，它们的形状都是“方”的，但一个为“长”，一个是“正”。

有长，就会有短。因此，我们可以字面意思知道：

在长方形当中，有一组对边是长的，而另外一组对边相对来说是短的。也就是说相邻的两条边长度不同，一长一短。

现在你能更加深刻地了解正方形中的“正”所表示的含义了吗？

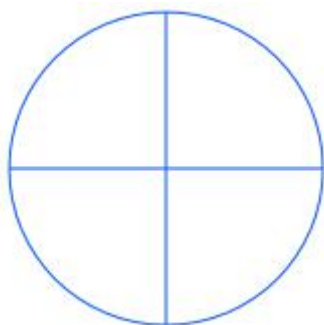
(2) 前面我们认识了钟表，通过钟表会看时间。实际上，钟表的指针每时每刻都在不停地转动。例如下面两个时间分别是 3 时和 4 时，在 3 时时针指向了 3、在 4 时时针指向了 4，而从 3 时到 4 时的过程中，分针绕着表盘的中心旋转了一周。



我们还可以打开文件“钟表.dmr”，单击按钮【下 1 时】，认真地观看一遍。

人们习惯，把转动一周称作转动了 360° 。那么把 1 周平分为 4 份，如下图所示，那么每一份就是 90° 。看起来，它是否就是前面我们所研究过的正方形和长

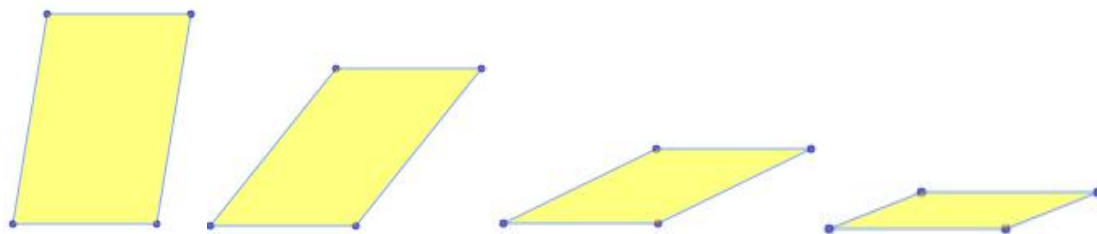
方形当中每个角的形状？



大家把成 90° 角的两条边称作具有垂直关系。由此我们可以知道，正方形和长方形中的邻边都是垂直关系。

现在你能更加深刻地理解正方形和长方形当中“方”所表示的含义了吗？

活动 3，平行四边形



我们可以将正方形看做是特殊的长方形，也可以将长方形看作是把正方形沿着一条边延长而得到的图形.

无论是正方形还是长方形，它们的对边都具有相同的方向，也具有相同的长度. 那么长方形所具有的以上特点，在平行四边形当中是否也存在呢？

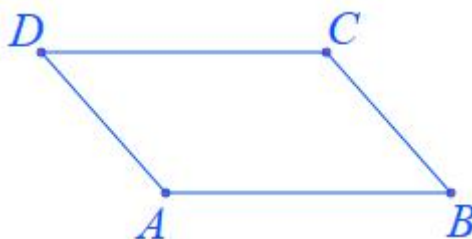
正方形或长方形中的“方”表示方正、方直，它表明了邻边之间的位置关系：垂直，或者说每个角都是固定的 90° . 那么在平行四边形当中，邻边之间的角度是否也是固定的呢？

【动手与操作】

首先我们需要动手绘制一个平行四边形，操作过程和步骤如下：

(1) 建立一个新的文档；单击【画笔】工具，在工作区作出三个自由点 A、B 和 C.

(2) 单击【选择】工具；按照先后顺序同时选择点 A、点 B 和点 C，执行【多边形】菜单中的【平行四边形】命令，结果如下图所示，作出一个平行四边形 ABCD.



在这里点 A、点 B 和点 C，都是自由点，都能够被随意拖动.

【探索与发现】

因为点 A、点 B 和点 C 都是自由点，所以只需要拖动点 C，就可以任意改变平行四边形的形状与特征，从而研究它的性质与特点.

拖动点 C，通过观察图形，回答以下问题：

(a) 当 BC 的长度改变时，AB 的长度会发生改变吗？CD 的长度呢？DA 的长度呢？

结论：不会；不会；会的.

(b) AB 与 CD 具有相同的长度吗？BC 与 DA 具有相同的长度吗？

结论：相同；相同.

(c) 当 BC 的方向改变时，AB 的方向会同时发生改变吗？CD 的方向呢？DA 的方向呢？

结论：不会；不会；会的.

(d) AB 与 CD 具有相同的方向吗？BC 与 DA 具有相同的方向吗？

结论：相同；相同.

类似地，也可以通过拖动点 A 甚至是点 B，检验上述问题 (b) 和问题 (d) 中结论是否仍然成立.

【多知道一些】

在绘制平行四边形 ABCD 的过程中，所选择的三个点 A、B、C 都是自由点，而得到的它的第四个顶点 D，是约束点。

在这里点 D 的位置，由点 A、点 B 和点 C 的位置共同决定。因此，只要点 A、点 B 或点 C 当中任何一个点的位置发生变化，点 D 的位置都会发生变化。而点 A、点 B 与点 C 之间的位置却是相互独立、互不影响的。

【问题与思考】

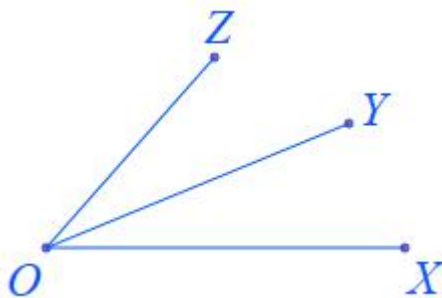
(1) 平行四边形，首先是一个四边形，有四个顶点、四条边。那么，这里的“平行”什么含义？为什么它叫做“平行”四边形？

通过前面的探索与研究发现，在平行四边形当中，相邻的两边却毫不相干，而对边具有相同的方向和长度。

那么，在四边形当中，“平行”与“对边的方向相同”以及“对边的长度相同”具有什么关系或联系？

(2) 因为每个角都是由 1 个顶点、两条边所组成的，所以我们需要用三个字母表示一个角，例如在平行四边形当中有四个角，分别是： $\angle DAB$ 、 $\angle ABC$ 、 $\angle CBA$ 和 $\angle BCD$ 。其中 \angle 是角的符号，第 2 个字母是角的顶点名字，第 1 个字母和第 3 个字母是角的两条边上的两个点的名字。

如下图所示，一共有几个角，请你分别表示出来。



不过，有时候在简单的情况下，在一个顶点处只有一个角，我们也可以只用角的符号 \angle 和这个顶点的名字表示这个角。例如，我们可以说，在平行四边形当中有四个角，分别是： $\angle A$ 、 $\angle B$ 、 $\angle C$ 和 $\angle D$ 。

活动 4，三角形



正方形、长方形和平行四边形都有四个顶点、四条边，但是在这些图形当中点与点之间、边与边之间，都存在一定的关联，它们的位置不是任意的。当然，也可以由四个完全自由、互不相干的点组成一个四边形，那么，这个四边形就是一个任意的四边形，简称四边形。

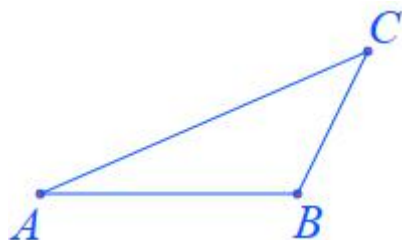
四边形是一个封闭图形。事实上，三个点也可以组成一个封闭图形。由三个点组成的封闭图形，叫做三角形。

【动手与操作】

下面，我们就动手绘制一个三角形，操作过程和步骤如下：

(1) 建立一个新的文档；单击【画笔】工具，在工作区作出三个自由点 A、B 和 C。

(2) 单击点 A，并按住拖动到点 B 后松开，作出边 AB；单击点 B，并按住拖动到点 C 后松开，作出边 BC；单击点 C，并按住拖动到点 A 后松开，作出边 CA，结果如下图所示，绘制出了三角形 ABC；单击【选择】工具，返回到选择状态。



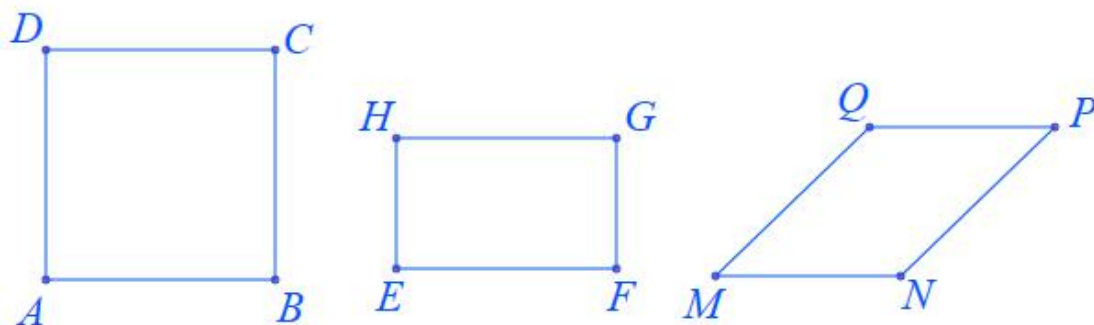
在这里点 A、点 B 和点 C 都是自由点，它们之间没有任何关系，也互不相干。在拖动其中任何一个点时，另外两个点的位置会保持不变；但是无论拖动哪个点，三角形的形状都会发生改变。

实际上，只需要拖动其中任何一个点，就会得到任意形状的三角形。

在前面我们研究的正方形、长方形和平行四边形当中，都有四个顶点。事实上，这四个点当中的任何三个点也都能够组成一个三角形。因为原来的四边形当中的四个点之间具有一定的关系，那么它们所组成的三角形是否也会有什么特殊的性质呢？

接下来，我们在四边形当中寻找三角形。

(3) 如下图所示，从左至右分别是正方形 ABCD、长方形 EFGH 和平行四边形 MNPQ；请你自己动手连接 AC、EG 和 MP。



(4) 进入文件的下一页，也可以看到上面的三个图形：正方形 ABCD、长

方形 EFGH 和平行四边形 MNPQ，并且已经连接了 AC、EG 和 MP.

【探索与发现】

在正方形 ABCD 中的点 A 和点 B 可以被任意拖动.

在长方形 EFGH 中的点 E 和点 F 可以被任意拖动，点 G 也可以被拖动.

在平行四边形 MNPQ 中的点 M、点 N 和点 P 可以被任意拖动.

在每个图形当中，拖动那些可以拖动的点试试看，通过观察图形，回答以下问题：

(a) 在正方形 ABCD 当中，连接线段 AC 就得到了两个三角形 ABC 与 ADC，你认为这两个三角形有什么关系？根据正方形 ABCD 的性质，你能得到三角形 ABC 的哪些性质？

结论：大小与形状相同，或相同；边 AB 与 BC 长度相等， $\angle ABC$ 是直角.

(b) 在长方形 EFGH 当中，连接线段 EG 就得到了两个三角形 EFG 与 EHG，你认为这两个三角形有什么关系？根据长方形 EFGH 的性质，你能得到三角形 EFG 的哪些性质？

结论：大小与形状相同，或相同； $\angle EFG$ 是直角.

(c) 在平行四边形 MNPQ 当中，连接线段 MP 就得到了两个三角形 MNP 与 MQP，你认为这两个三角形有什么关系？在三角形 MNP 当中，是否存在相等的边或者大小固定的角？

结论：相同；不存在，不存在.

【多知道一些】

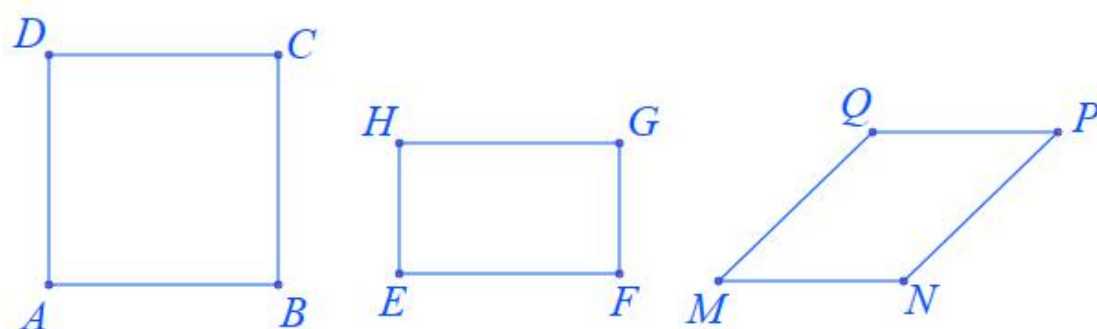
在正方形 ABCD 当中，AB 与 CD 是一组相对的两条边，BC 与 DA 也是一组相对的两条边，都简称对边。类似地，我们可以把 $\angle A$ 和 $\angle C$ 称作是一组相对的两个角，把 $\angle B$ 和 $\angle D$ 称作是一组相对的两个角，都简称对角。

对边，就是不相邻的两条边，没有公共的顶点。

对角，就是不相邻的两个角，没有公共的边长。

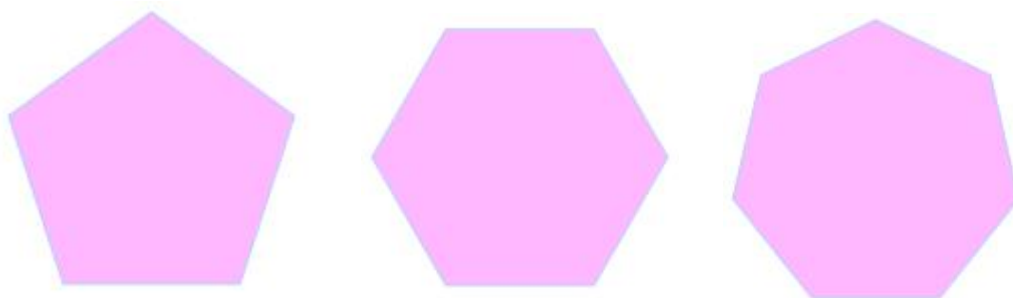
两个对角所在顶点的连线，可以称作是对角线。例如，在正方形 ABCD 中，线段 AC 是它的一条对角线；在长方形 EFGH 中，线段 EG 是它的一条对角线；在平行四边形 MNPQ 中，线段 MP 是它的一条对角线。

那么，在一个四边形当中，一共有多少条对角线？请你在下图当中，画出它们所有的对角线。



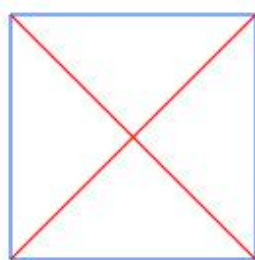
在三角形当中，是否存在对角线呢？如果存在，一共有多少条？如果不存在，你能说明理由吗？

在五边形当中，一共有多少条？在六边形、七边形当中呢？请你在下面画一画，然后再数一数。



【问题与思考】

(1) 如下图所示，已经绘制出了正方形中的所有对角线。通过绘制这些对角线，我们得到了多少个三角形？这些三角形具有哪些性质和特征？这些三角形之间具有什么关系？请叙述你所观察到的结论，并谈谈你的观点。



把正方形换为长方形和平行四边形，请你重新回答上面的问题。

结论：8 个；邻边相等，有一个直角；大的完全相同，小的完全相同；

8 个；大的有一个直角，小的邻边相等；大的完全相同，小的分两组；

8 个；没什么特征；大的分 2 组，小的分两组。

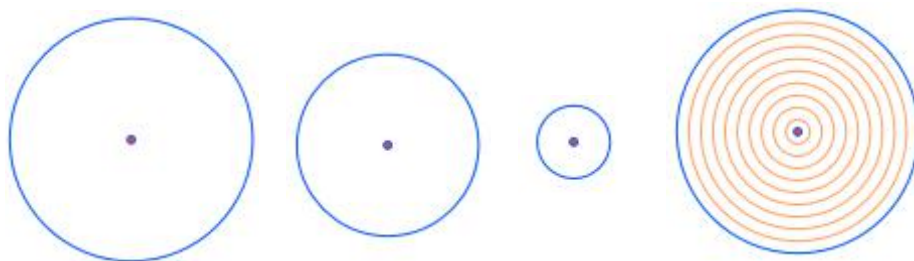
(2) 三角形和四边形，都被统一称作多边形，它们只是顶点个数不同，对应的边界个数和角的个数也不同。

但是为什么四边形以边的个数命名，而三角形以角的个数命名呢？

也许，这与人类认识世界、认识自然的历史有关。你是否可以通过网络或书

籍查找相关的文献，探索三角形和四边形名字的来源？

活动 5，圆



与三角形和四边形相同的是，圆也是一个封闭的图形。但与它们不同的是，圆的边界上没有顶点，也没有直边，更加没有角。

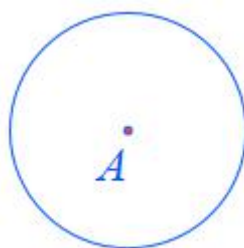
那么，圆具有哪些特征？拥有什么性质？

接下来我们利用不同的方式绘制不同，进行探索与研究。

【动手与操作】

首先绘制一个大小固定的圆，操作过程和步骤如下：

- (1) 建立一个新的文档；单击【画笔】工具，在工作区作出一个自由点 A。
- (2) 单击【选择】工具，选择点 A，单击【圆】菜单中的【半径圆】命令，在弹出的对话框中输入圆的半径：2，单击【确定】按钮，结果如下图所示，作出了一个以点 A 为圆心、半径为 2 的圆。

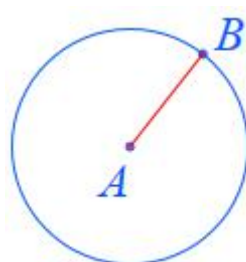


这个圆的圆心是点 A，通常也把这个圆表示为 $\odot A$ ，其中 \odot 是圆的表示符号。

拖动点 A，观察 $\odot A$ 就会随着圆心位置的变化而变化.

我们所绘制的这个圆的半径是 2，那么它的半径在哪里？它的半径为 2 又表现在什么地方？

(3) 单击【画笔】工具，在圆周上随便取一点 B；连接线段 AB，如下图所示；单击【选择】工具，退出画图状态.



圆心到圆周上一点的连线，就是圆的半径. 根据作图过程我们可以知道，线段 AB 的长度等于 2.

圆有半径，你认为在圆当中与“半”相对的是什么？

【探索与发现】

(a) 拖动点 B，点 B 可以在圆周上运动而且只能在圆周上运动，它也是一个半自由点. 当点 B 在的 $\odot A$ 过程中，线段 AB 的长度会发生改变吗？

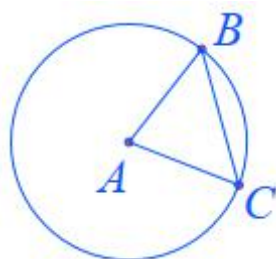
结论：不会.

(b) 当点 B 在圆周上不同的位置时，它仍然是 $\odot A$ 的半径吗？你认为 $\odot A$ 有多少条半径？

结论：是的；无数多条.

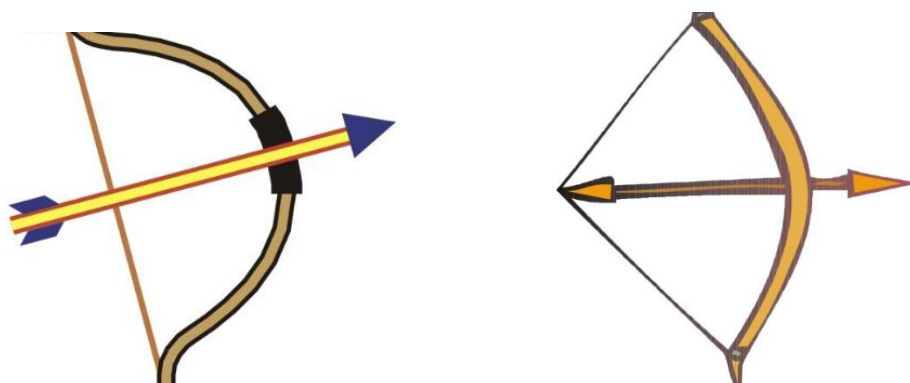
【动手与操作】

(4) 单击【画笔】，在 $\odot A$ 上继续任取一点 C ，连接半径 AC 和线段 BC ，结果如下图所示；单击【选择】工具，退出画图状态。



【探索与发现】

圆周上两点之间的连线，例如这里的线段 BC ，被称作是这个圆的弦。在现实生活中，弦指的是在弓箭背后两端的、能发箭的绳子形状的东西，如下图所示，一个是拉伸前的弦，一个拉伸后的弦。



保持点 B 的位置不动，拖动点 C ，通过观察到现象回答下面的问题：

(c) 当点 C 在 $\odot A$ 上运动的过程中，弦 BC 的长度会发生改变吗？让点 C 从点 B 的位置出发，沿着时针的方向在 $\odot A$ 上旋转一周的过程中，弦 BC 的长度是如何改变的？

结论：不会。

(d) 当点 C 在 $\odot A$ 上运动的过程中，弦 BC 什么时候最短？最短是多少？

弦 BC 什么时候最长？最长是多少？

结论：在点 B 处；为 0；点 C、点 B 与点 A 在同一条直线上时；4.

【多知道一些】

当弦 BC 经过圆心 A 时，半径 AC 与半径 AB 的方向相反，点 A、点 B、与点 C 也在同一条子线上，弦 BC 有最大值，等于两条半径的长度之和.

当弦 BC 经过圆心 A 时，它就被称作是圆 A 的直径. 也可以说，直径是经过圆心的弦，那么它的长度等于半径的 2 倍.

那么一个圆有多少条直径？

【问题与思考】

(1) 四边形有对角线，我们也可以把圆的直径看做是圆的“对角线”. 那么一条直径就把圆分为两部分，这两部分之间具有什么关系？

(2) 两条直径把圆分割为几部分？这些被分割的图形具有哪些性质？它们之间具有什么关系？

五、图形分割

任何一个图形都可以被分割.

一个图形被分割成为两个或多个图形，分割之后的图形是原来图形的一部分.

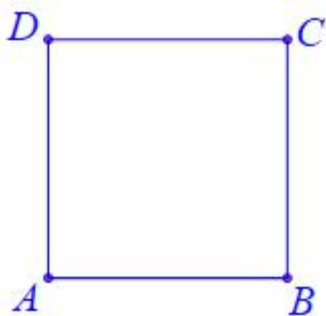
那么，分割得到的图形与原来的图形以及分割得到的图形之间，在大小、形状、周长、面积等方面具有哪些联系？存在哪些关系？这些都是需要进一步探索与研究的问题.

【活动目的】

通过研究图形的分割问题，进一步熟悉对应图形的性质，了解图形之间的联系.

【活动过程】

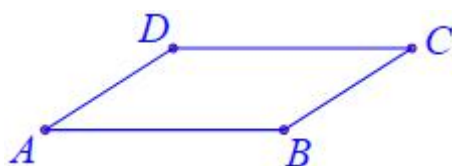
如何分割正方形，才能得到完全相同的两个长方形？如果把正方形分割成为完全相同的两块，一定会得到两个长方形吗？



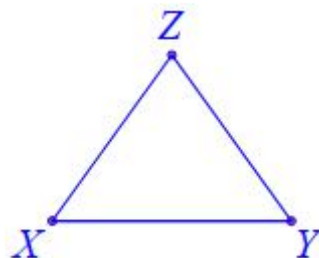
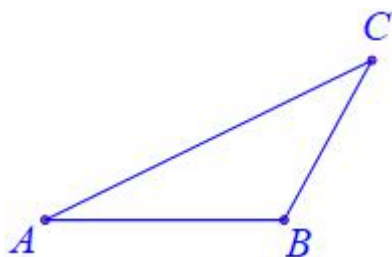
如果需要把长方形分割成为完全相同的两部分，应该坚持什么原则？分割得到的图形可能是正方形吗？可能是长方形吗？还可能是其他什么图形？



能不能把一个一般的平行四边形分割成为完全相同的两部分？如果不可以，请说明理由；如果可以，请你给出你所想到的一种或几种方法.

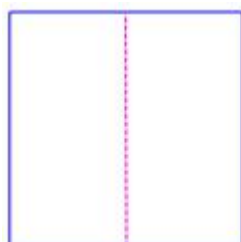


你认为 ,能不能把一般的三角形分割为完全相同的两部分？如果你认为不可以，能不能进一步说明理由？如果认为可以，请把下面两个三角形进行分割.

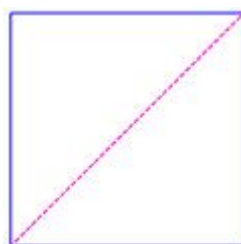


活动 1，正方形分两块

沿着与正方形其中一条边相同的方向把它分割成为两个形状与大小都相同的长方形，这是我们最熟悉的方式。所得到的两个长方形的长都等于正方形的边长，它们的宽都等于正方形边长的一半。



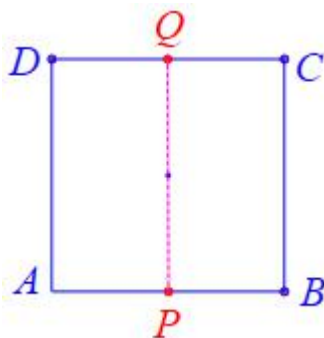
我们还在前面研究过，把正方形相对的两个顶点之间连线，即连接正方形的对角线，就把正方形分割成为两个形状与大小都相同的三角形。这两个三角形都是等腰直角三角形，因为它们都有一个直角，并且各自有两条相等的边。



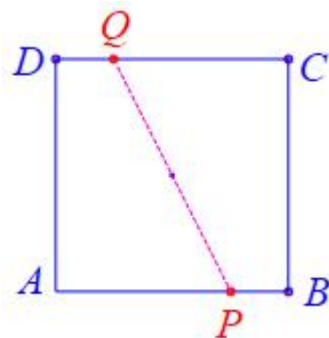
除此之外，还有没有其他方式把正方形一分为二，得到两个完全相同的图形呢？

【动手与操作】

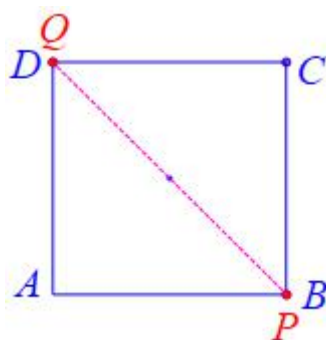
打开文件“图形分割.dmr”，如下图所示，有一个水平放置的正方形 $ABCD$ ，还有一条粉红色的虚线，它把正方形分割成为两部分，我们把它称之为分割线。



步骤 1：向右拖动分割线的红色端点 P ，让它位于正方形顶点 B 的左侧，结果如下图所示。



步骤 2：继续向右拖动分割线的红色端点 P ，让它与正方形的顶点 B 重合，如下图所示。



【探索与发现】

(a) 当分割线 PQ 处于竖直方向时，点 P 位于边 AB 的什么位置？点 Q 位于边 CD 的什么位置？此时正方形被分割成了两个什么图形？这两个图形完全相同吗？

结论：中点；中点；长方形；相同。

(b) 当点 P 在 AB 上移动时，点 Q 也在 CD 上移动。当点 P 远离点 A 而靠近点 B 时，点 Q 远离哪个点而靠近哪个点？

结论：远离点 C 而靠近点 D。

(c) 在步骤 1 中，正方形被分割成了两个什么图形？这两个图形完全相同吗？

结论：直角梯形；相同。

(d) 在步骤 2 中，当点 P 与点 B 重合时，点 Q 与哪个点重合？这时，正方形被分割成了两个什么图形？这两个图形完全相同吗？

结论：等腰直角三角形。

【多知道一点】

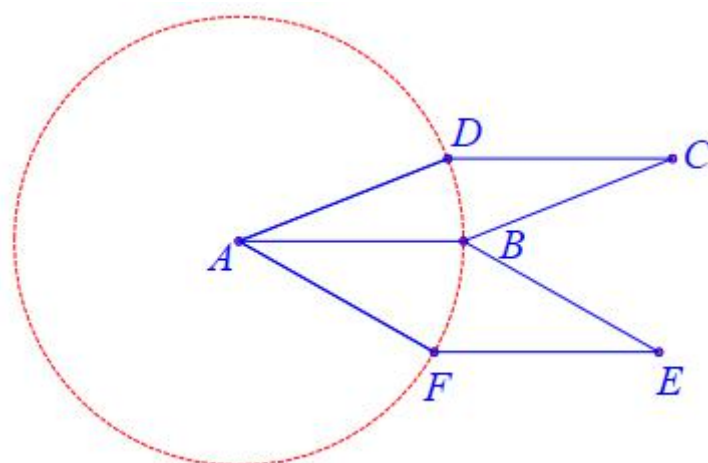
我们说两个图形完全相同，指的是它们的形状相同，大小也相同。

事实上，只有在形状相同的前提下，进一步讨论它们的大小才有实际意义。

否则，如果形状不同，那么这两个图形也不可能完全相同。

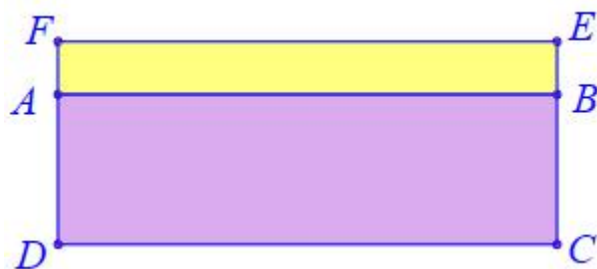
那么，形状相同究竟表示什么含义？形状相同到底应该如何表示？

多边形是由几条边围成的封闭图形，多边形当中具有顶点、边长和角度。对于顶点个数相同的两个多边形来说，它们的边长可能都分别对应地相等，但是形状却未必相同。例如，在下图中，所有边长都相等的菱形 $ABCD$ 和菱形 $ABEF$ ，却不具有相同的形状。



看来，我们不能只是利用边长表示多边形的形状。

然而，我们对多边形的了解与认识，也就只有边长和角度。因此是否可以利用角度表示多边形的形状呢？在下图中，所有的角都是直角的两个长方形 $ABCD$ 和 $ABEF$ ，显然形状也不相同。



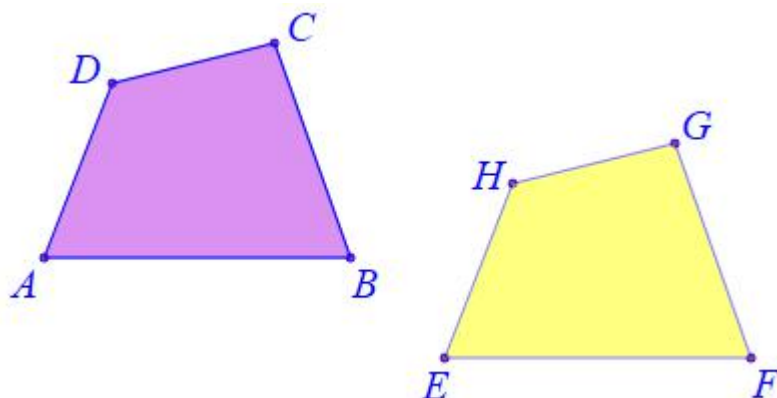
因此，我们也不能只是利用角度表示多边形的形状.

那么，只能同时利用边长和角度来表示多边形的形状了. 因此，对于判断两个多边形是否完全相同，我们可以进一步的约定：

对应的边长都相等，并且对应的角度都相等.

所谓对应，指的是一个对着一个. 在两个多边形当中，这个多边形中的一个角对着那个多边形中的一个角，这个多边形中的一条边对着那个多边形中的一条边.

例如，在下图两个四边形 ABCD 和 EFGH 当中顶点、边、角都存在一个对一的对应关系.



点的对应：A 与 E、B 与 F、C 与 G、D 与 H；

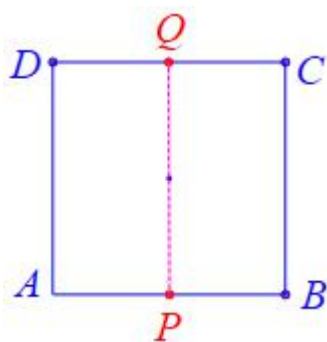
边的对应：AB 与 EF、BC 与 FG、CD 与 GH、DA 与 HE；

角的对应： $\angle A$ 与 $\angle E$ 、 $\angle B$ 与 $\angle F$ 、 $\angle C$ 与 $\angle G$ 、 $\angle D$ 与 $\angle H$.

对应的好处在于，不遗漏、不重复地考虑两个图形中每个点、每条边以及每个角.

【问题与思考】

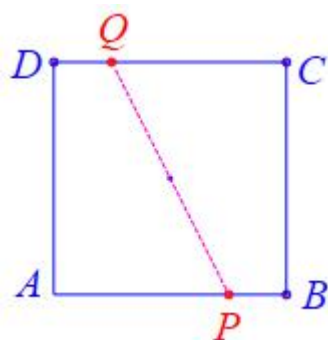
(1) 在下图中，正方形被分割线分为两个图形，在每种情况下请你找出两个图形当中的对应点、对应边和对应角.



对应点：

对应边：

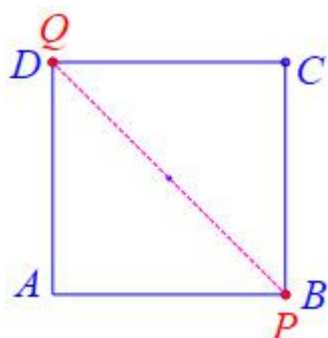
对应角：



对应点：

对应边：

对应角：



对应点：

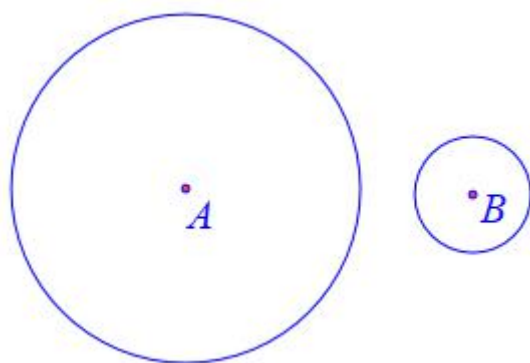
对应边：

对应角：

(2) 点表示一个位置，没有大小. 因此我们可以说，所有的点都具有相同的形状与大小.

直线表示一个方向，没有宽度，因此我们也可以说，所有的直线都具有相同的形状与大小.

圆表示是一个曲线，一个圆的所有的点到它的圆心距离都相等. 因此我们可以说，所有圆的形状都相同，但是大小可以不同. 每个圆的大小，可以用圆上一点到圆心的距离，即圆的半径，进行表示.



活动 2，相同的两部分

前面我们研究正方形的分割问题时，只是将分割线的端点 P 从 AB 的中点位置向右移动，最后移动到了点 P 的位置。从而经历了正方形被分割成为两个长方形、两个直角梯形和两个等腰直角三角形的过程。思考一下，是否还有其他没有考虑到的情况或情形，从而能够得到其他形状或性质的图形？

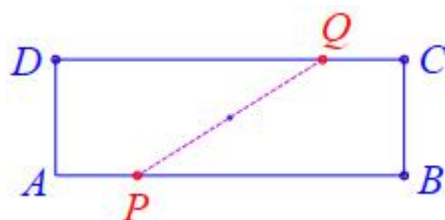
类似的，我们可以利用分割正方形的方法，继续分割长方形和平行四边形。所得到的两部分仍然是完全相同的，即形状相同大小也相同。

但是与正方形不同的是，长方形的两条邻边不相等，而且平行四边形当中没有直角。这说明，分割得到的图形将会更加的丰富与多样。

那么，就让我们动手尝试一下，看看能够得到哪些类型的图形吧。

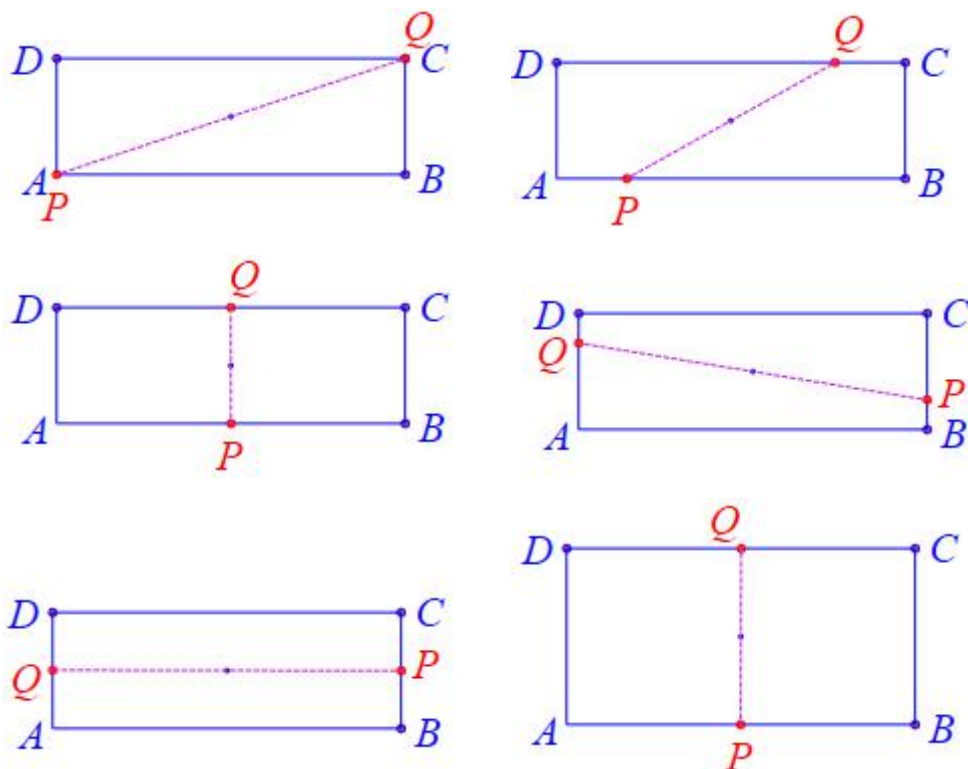
【动手与操作】

进入文件“图形的分割.dmr”的下一页，如下图所示，有一个长为 6、宽为 2 的长方形 ABCD，拖动点 C 还可以改变长方形的宽；线段 PQ 把长方形 ABCD 分割成为两部分，其中点 P 是长方形的边界上一点，可以拖动到长方形的边界上任何一个位置。



【探索与发现】

(a) 你得到了与它们相同或相近的图形有几个？



(b) 长方形被线段 PQ 分割之后，能够得到哪些图形？

结论：直角三角形，直角梯形，长方形，正方形.

(c) 长方形被线段 PQ 分割之后能否得到两个正方形？如果你认为不能，请说明理由；如果你认为可以，请说明成立的条件.

结论：可以，当 BC 的长度等于 3 即可.

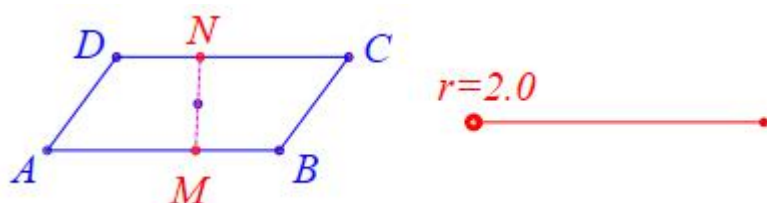
(d) 若长方形被线段 PQ 分割之后得到两个长方形，那么点 P 应该位于什么位置？

结论：AB 的中点位置，或 BC 的中点位置.

【动手与操作】

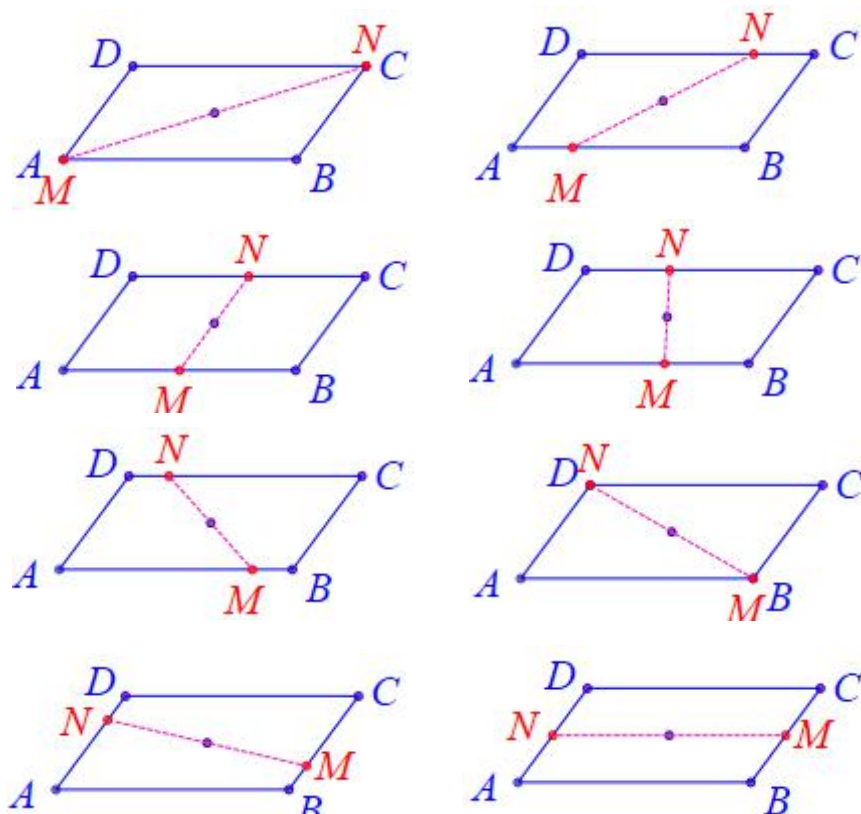
进入文件“图形的分割.dmr”的下一页，如下图所示，有一个平行四边形

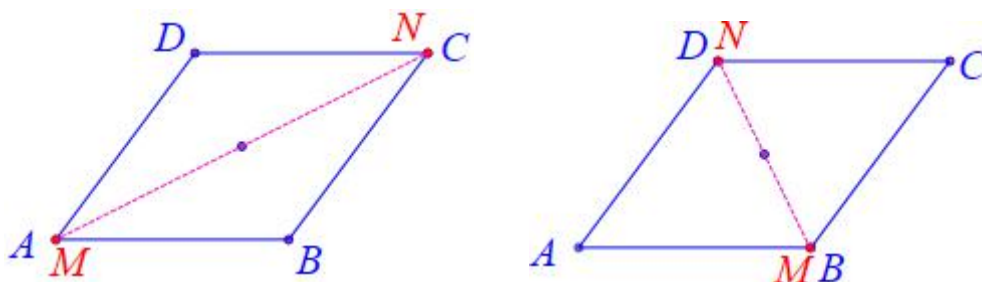
ABCD，它的边 AB 长为 4、边 BC 长为 2，拖动点 C 可以改变长方形的形状，通过字母 r 的变量尺可以改变 BC 的长度；线段 MN 把平行四边形 ABCD 分割成为两部分，其中点 M 是平行四边形的边界上一点，可以拖动到平行四边形的边界上任何一个位置.



【探索与发现】

(a) 你得到了与它们相同或相近的图形有几个？





(b) 平行四边形被线段 MN 分割之后，能够得到哪些图形？

结论：三角形，梯形，平行四边形.

(c) 平行四边形被线段 MN 分割之后能否得到两个直角梯形？如果你认为不能，请说明理由；如果你认为可以，请说明成立的条件.

结论：可以，当 MN 与 AB 垂直，或者 MN 与 BC 垂直即可.

(d) 平行四边形被线段 MN 分割之后能否得到直角三角形？如果你认为不能，请说明理由；如果你认为可以，请说明成立的条件.

结论：可以，当 AB 的长度是 BC 的长度的两倍或一半时.

(e) 平行四边形被线段 MN 分割之后能否得到两个等腰三角形？如果你认为不能，请说明理由；如果你认为可以，请说明成立的条件.

结论：可以，当 AB 的长度与 BC 的长度相等时.

(f) 平行四边形被线段 MN 分割之后能否得到两个等边三角形？如果你认为不能，请说明理由；如果你认为可以，请说明成立的条件.

结论：可以，当 AB 的长度与 BC 的长度相等，且 $\angle A$ 或 $\angle B$ 为 60° 时.

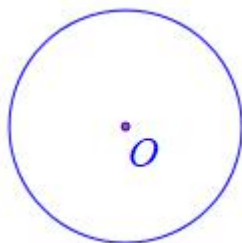
【多知道一点】

前面我们分割正方形、长方形或平行四边形的过程中，无论分割得到的两个图形是三角形还是四边形，它们总是完全相同的.

这是因为我们所选择的分割线都经过这些图形的中心.

通过翻阅词典或上网搜索，可以知道：中心，它的字面意思是与四周距离相等的点.

按照这个要求，那么一个圆的圆心就是它中心，因为圆心到圆周上任何一个位置的距离都相等.



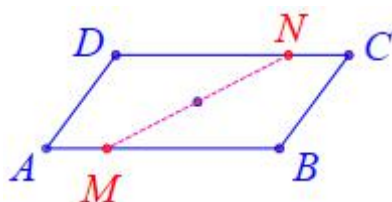
但是，任何一个多边形的内部都不可能存在一个点，满足它到多边形边界上任何一点的距离都相等.

实际上，在数学中，我们说一个点是某个图形的中心，指的是：

在这个图形上随便找一点，就能够在这个图形上找到另外一点，它们到中心的距离相等.

到中心的距离相等的两个点，我们说：它们关于中心对称.

例如，在我们前面研究的问题当中，分割线经过平行四边形的中心，点 M 与点 N 到中心的距离始终相等.



具有中心的图形，也叫作中心对称图形，这个中心也叫作这个图形的对称中心.

正方形、长方形、菱形、平行四边形都具有中心，都是中心对称图形.

当点 M 在点 A 的位置时，点 N 就在点 C 的位置处. 因此对角线 AC 的中点就是平行四边形 $ABCD$ 的中心. 这个中心是真个平行四边形的中心，因此它也是对角线 BD 的中点.

【问题与思考】

(1) 我们熟悉的多边形还有等腰梯形、直角梯形、等边三角形、等腰三角形、等腰直角三角形和直角三角形，它们都有自己的中心吗？它们都是中心对称图形吗？请做出你的判断，然后说出你的理由.

(2) 对于一个图形来说，如果它没有自己的中心，或者说它不是一个中心对称图形，那么是否就意味着它不能被分割成为完全相同的两部分？请谈谈你的看法，然后结合实际例子，说出你的理由.

活动 3，没有对称中心

对于中心对称图形来说，任何一条经过它的对称中心的直线，都可以把它分割成为完全相同的两部分。

对于没有对称中心的图形来说，是否就意味着它们不可能被分割成为完全相同的两部分呢？

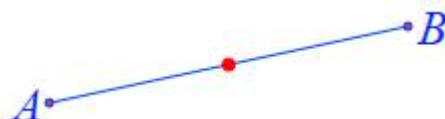
因此，对于一个图形来说，要看它能不能被分割成为完全相同的两部分，首要的任务是判断它是否具有对称中心。

我们从简单到复杂，逐一进行讨论：

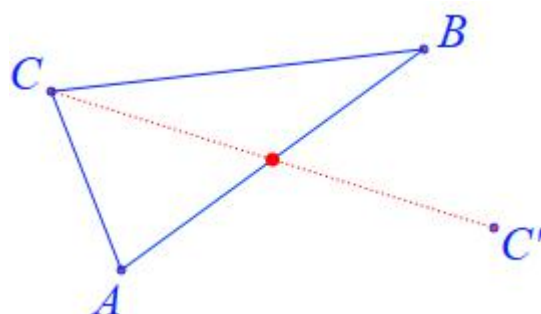
一个点，是中心对称图形，它的对称中心就是它本身。



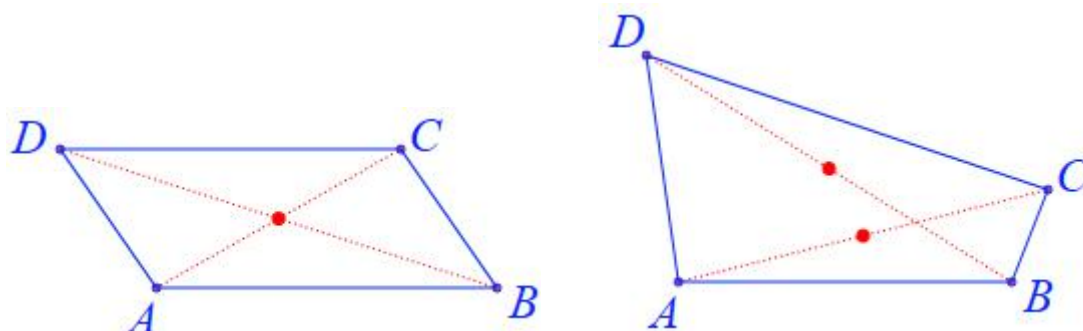
一条线段，是中心对称图形，它的对称中心就是它的中点。



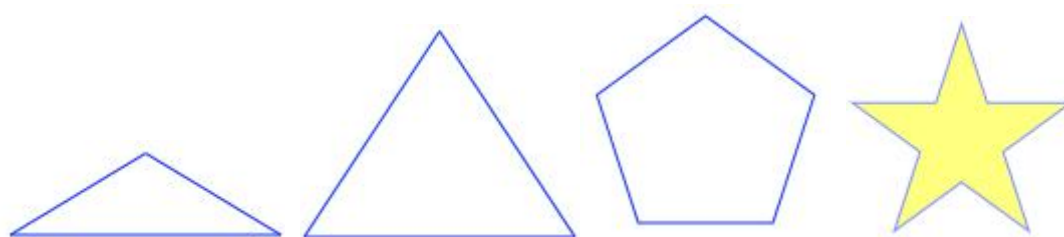
一个三角形，不是中心对称图形，因为它只有三个点，以任何一条边的中点为对称中心，那么第三个点的对称点，都不在三角形上。



一个四边形，只有当两条对角线的中点为同一个点时，四边形才是中心对称图形，对称中心就是对角线的交点；否则，四边形不是中心对称图形。



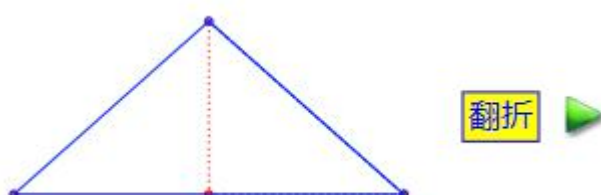
以此类推，容易知道：当多边形的顶点个数是单数时，一定不是中心对称图形，如下图所示.



那么，对于没有对称中心的图形来说，是否就意味着就不能够被分割成为完全相同的两部分呢？

【动手与操作】

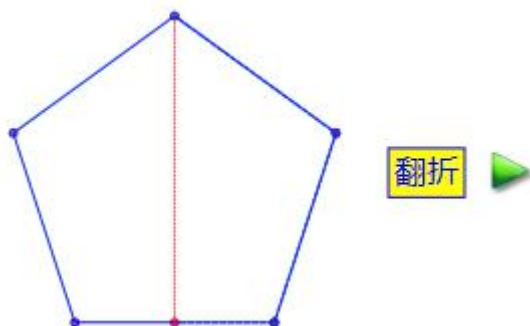
(1) 进入文件“图形的分割.dmr”的下一页，如下图所示，有一个等腰三角形，沿着它的顶点和底边中点之间的有一条红色分割线.



(2) 单击【翻折】按钮，三角形沿着红色分割线被分为两部分，并且右侧的部分沿着分割线翻折到左侧.

(3) 按钮的名称变为【返回】，单击【返回】按钮，恢复到原来的状态.

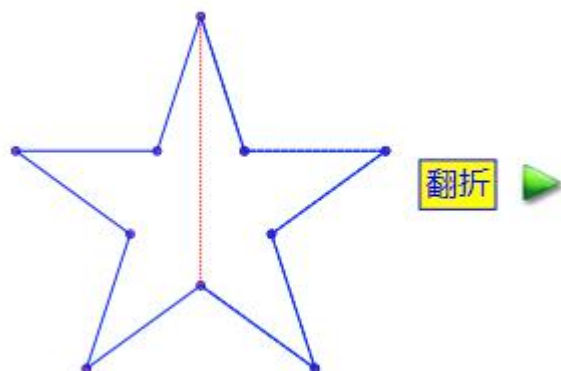
(4) 进入文件“图形的分割.dmr”的下一页，如下图所示，有一个正五边形，沿着它的顶点和一条边的中点之间的有一条红色分割线.



(5) 单击【翻折】按钮，正五边形沿着红色分割线被分为两部分，并且右侧的部分沿着分割线翻折到左侧.

(6) 按钮的名称变为【返回】，单击【返回】按钮，恢复到原来的状态.

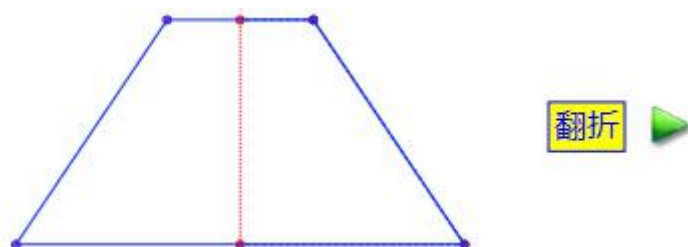
(7) 进入文件“图形的分割.dmr”的下一页，如下图所示，有一个五角星，经过它的一个顶点有一条红色分割线.



(8) 单击【翻折】按钮，五角星沿着红色分割线被分为两部分，并且右侧的部分沿着分割线翻折到左侧。

(9) 按钮的名称变为【返回】，单击【返回】按钮，恢复到原来的状态。

(10) 进入文件“图形的分割.dmr”的下一页，如下图所示，有一个梯形，经过它的上底边中点与下底边中点有一条红色分割线。



(11) 单击【翻折】按钮，梯形沿着红色分割线被分为两部分，并且右侧的部分沿着分割线翻折到左侧。

(12) 按钮的名称变为【返回】，单击【返回】按钮，恢复到原来的状态。

【探索与发现】

(a) 在步骤 2 当中，红色割线把等腰三角形分割成为两个什么图形？被分

割的右侧部分沿着分割线翻折之后,能够与左侧部分完全重合吗?分割线把等腰三角形分割成为完全相同的两部分吗?

结论：直角三角形；能完全重合；完全相同。

(b) 在步骤 5 当中,红色割线把正五边形分割成为两个什么图形?被分割的右侧部分沿着分割线翻折之后,能够与左侧部分完全重合吗?分割线把正五边形分割成为完全相同的两部分吗?

结论：四边形；能完全重合；完全相同。

(c) 在步骤 8 当中,红色割线把五角星分割成为两个什么图形?被分割的右侧部分沿着分割线翻折之后,能够与左侧部分完全重合吗?分割线把五角星分割成为完全相同的两部分吗?

结论：五角星的一半；能完全重合；完全相同。

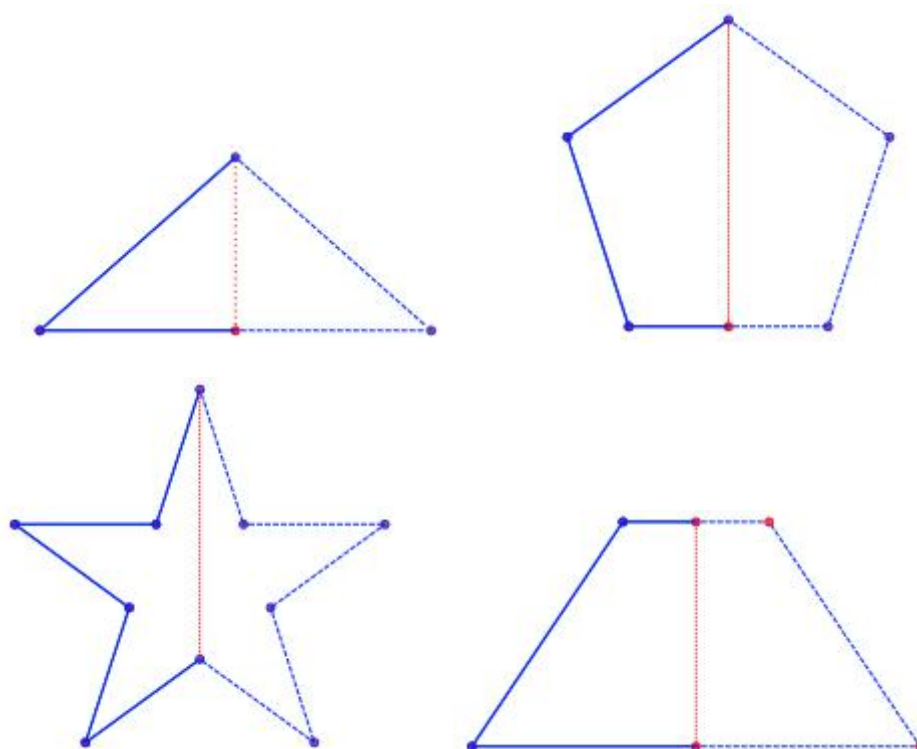
(d) 在步骤 11 当中,红色割线把等腰梯形分割成为两个什么图形?被分割的右侧部分沿着分割线翻折之后,能够与左侧部分完全重合吗?分割线把等腰梯形分割成为完全相同的两部分吗?

结论：直角梯形；能完全重合；完全相同。

【多知道一点】

在上面的实验当中,一个图形沿着一条割线被分割成为两部分,其中一部分以分割线为轴进行旋转和翻折之后,能够与另外一部分完全重合.这说明,分割

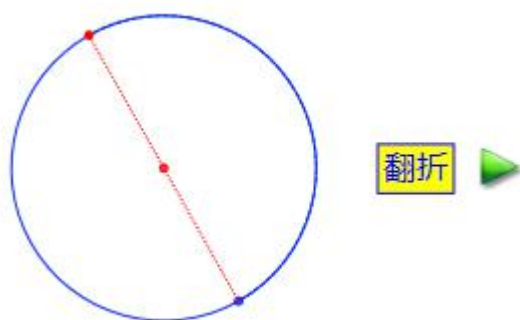
得到的两部分是完全相同，即：具有相同的形状和相同的大小.



我们把这个分割线叫做这个图形的对称轴，这个图形本身也叫做轴对称图形.

一个中心对称图形，只有一个对称中心. 但是，一个轴对称图形，却可能有许多条或无数多条对称轴.

进入文件“图形的分割.dmr”的下一页，如下图所示，圆的直径把圆分为形状与大小都相同的两部分，并且可以把其中一部分绕直径翻折之后能够与另外一部分重合，因此圆的直径就是它的对称轴.



拖动红色端点，可以改变圆的直径的位置.

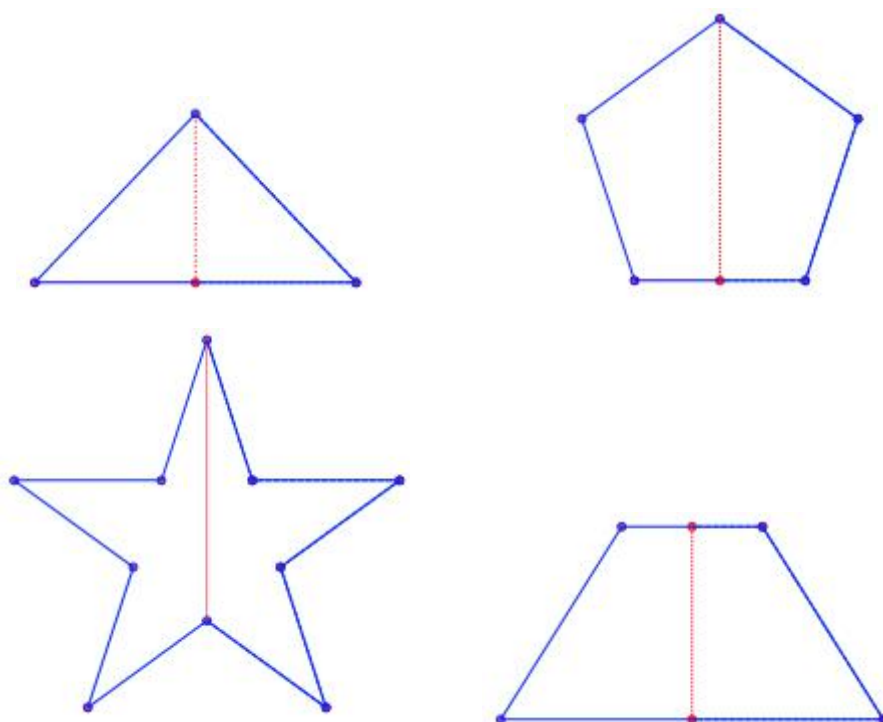
单击【翻折】按钮，可以观察直径一侧的半圆绕直径翻折之后与另一侧的半圆重合的过程.

这说明，圆是轴对称图形. 它的直径就是它的对称轴，因此它有无数多条对称轴.

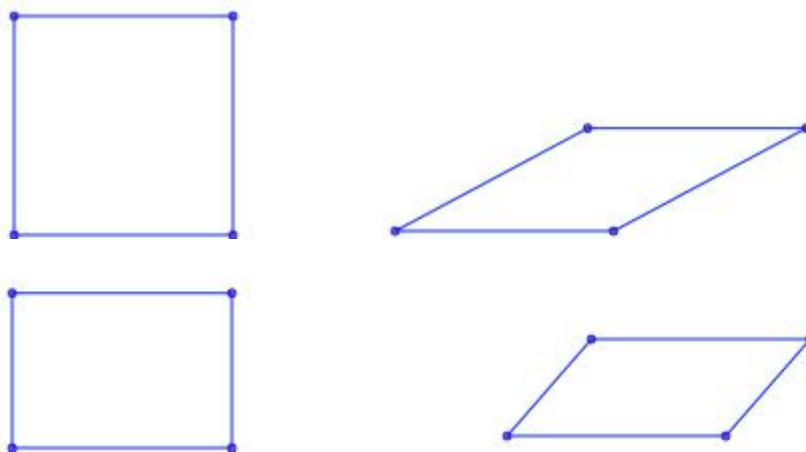
我们还知道，圆也是中心对称图形，圆心就是它的对称中心.

【问题与思考】

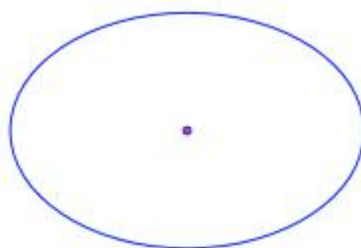
(1) 下面是我们研究过的四个图形，已经为它们各自绘制出了一条对称轴. 它们每个图形各自共有多少条对称轴？请你把每个图形当中其他所有的对称轴都画出来.



(2) 我们研究过的中心对称图形有正方形、长方形、菱形、平行四边形，它们也都是轴对称图形吗？如果是，请说明它们各自共有多少条对称轴？并在下面的图形当中，绘制出它们所有的对称轴。



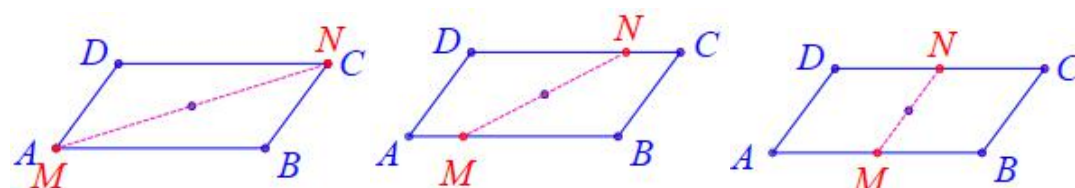
(3) 椭圆是中心对称图形吗？也是轴对称图形吗？如果是，那么它有多少条对称轴？



六、图形剪拼

前面的“图形分割”专题，事实上就是在讲一个问题：把一个图形剪切一次，得到两个完全相同的图形.

例如，经过平行四边形对称中心的直线把它分割成为两个完全相同的图形，或者是三角形，或者是梯形，或者是平行四边形.



类似地，经过正方形中心的直线、经过长方形中心的直线，都把它们分割成为完全相同过的两部分.

问题是，如何说明通过分割得到的两部分确实是完全相同的图形呢？

就像把轴对称图形的一侧绕着轴翻折可以检验两侧是否完全相同一样，我们也可以选一种运动方式对中心对称图形的两部分进行检验与验证.

【活动目的】

通过旋转，检验中心对称图形的性质.

通过旋转，把一个图形复制之后与原来的图形剪拼成为一个中心对称图形，从而进一步研究和了解中心对称图形的结构与性质.

活动 1，旋转之后重合

我们知道，一条线段是中心对称图形，它的中点就是它的对称中心.

那么，一条线段绕它的中心旋转半周之后，就会与原来的线段重合；或者是，其中一半绕中点旋转半周之后，就会与另外一半线段重合.

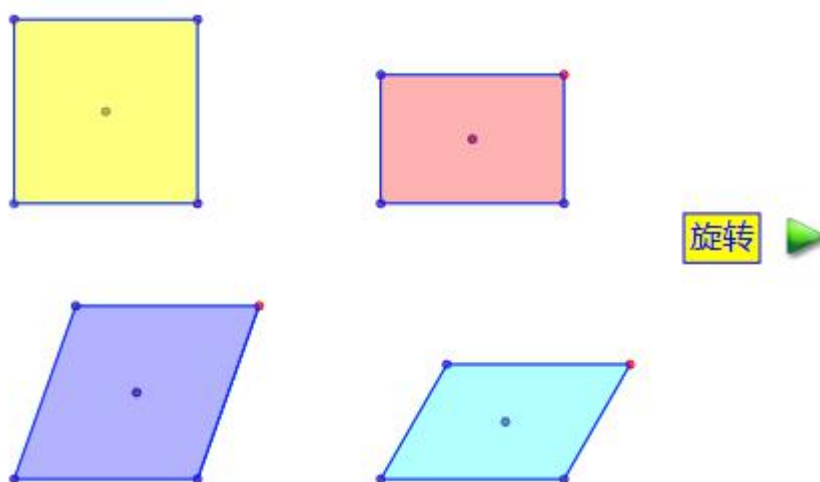


这是因为， $\angle AOB$ 是一个平角，等于半个周角.

类似地，我们也可以利用相同的方法检验其他中心对称图形的性质.

【动手与操作】

步骤 1：打开文件“图形剪拼.dmr”，如下图所示，有四个图形：正方形、长方形、菱形和平行四边形，还有一个按钮【旋转】.



步骤 2：单击【旋转】按钮，每个图形绕着它自己的中心按照逆时针的方向

旋转半周. 这时按钮的名称变为【返回】，这时单击按钮【返回】，还可以让旋转后的图形沿顺时针方向旋转半周而回到原来的位置.

【探索与发现】

在步骤 2 中，正方形绕它的中心旋转了半周之后，是否与原来的图形重合了？长方形呢？菱形呢？平行四边形呢？

结论：重合；重合；重合；重合.

【多知道一点】

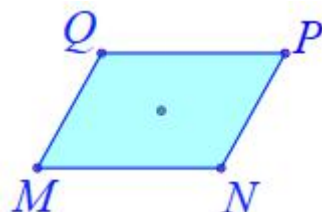
中心对称图形，绕它的中心旋转半周之后，能够与原来的图形完全重合. 这说明，对于一个中心对称图形来说：

关于中心对称的两个对应点到中心的距离相等，与中心在同一条直线上；

关于中心对称的两条对应边具有相同的长度，而具有相反的方向；

关于中心对称的两个对应角具有相同的大小，角的对应边具有相反的方向.

【问题与思考】



(1) 请在平行四边形 MNPQ 当中，找出与它的中心距离相等的每一组对应点.

(2) 请在平行四边形 MNPQ 当中，找出方向相同的每一组对应边，方向相反的每一组对应边.

(3) 请在平行四边形 MNPQ 当中，找出角度大小相等的对应角.

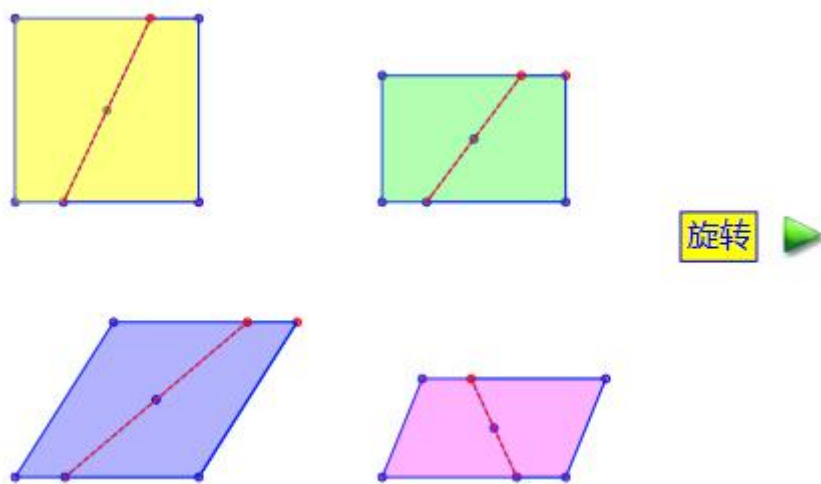
活动 2，检验是否相同

一个中心对称图形，绕它的中心旋转半周之后，能够与原来的图形重合。这说明，经过中心的直线把它分割成为的两部分，任何一部分旋转半周之后都能够与另外一部分重合。

这表明了分割得到的两部分是完全相同，即具有相同的形状和相同的大小。而无论什么的中心对称图形被分割，也无论被分割成为什么样的图形。

【动手与操作】

步骤 1：进入文件“图形剪拼.dmr”的下一页，如下图所示，正方形、长方形、菱形和平行四边形分别被经过各自中心的红色虚线分割为两部分。分割线的红色端点可以拖动，从而改变分割线的位置与方向，对应地得到不同的分割图形。



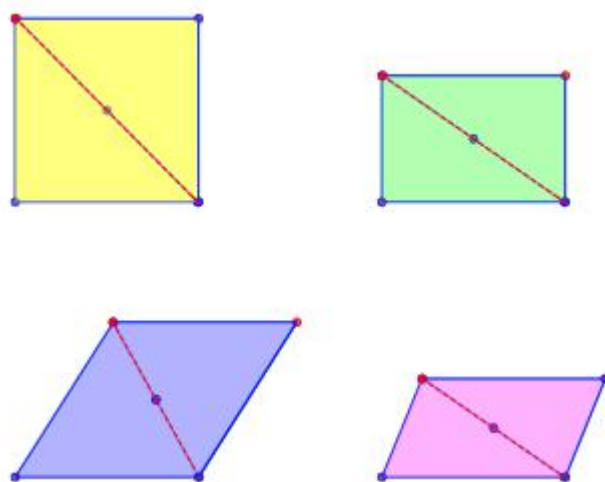
步骤 2：单击【旋转】按钮，在每个图形当中，分割得到的一部分绕图形的中心按照逆时针方向旋转半周。这时按钮的名称变为【返回】，这时单击按钮【返回】，还可以让旋转后的图形沿顺时针方向旋转半周而回到原来的位置。

【探索与发现】

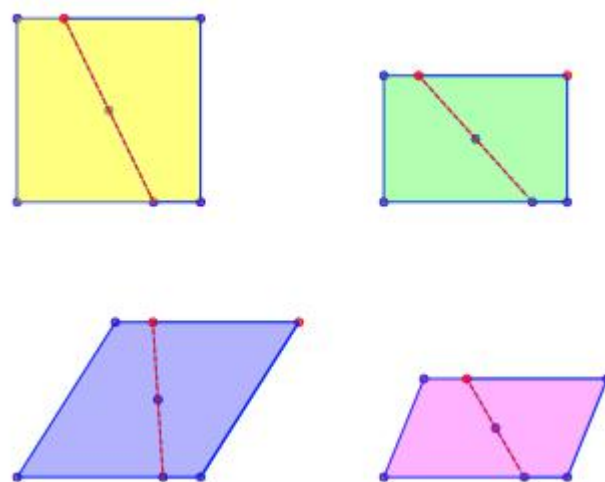
(a) 在步骤 2 中，正方形内，分割得到的一部分绕它的中心旋转了半周之后，是否与另一部分完全重合了？长方形内呢？菱形呢？平行四边形呢？

结论：重合；重合；重合；重合。

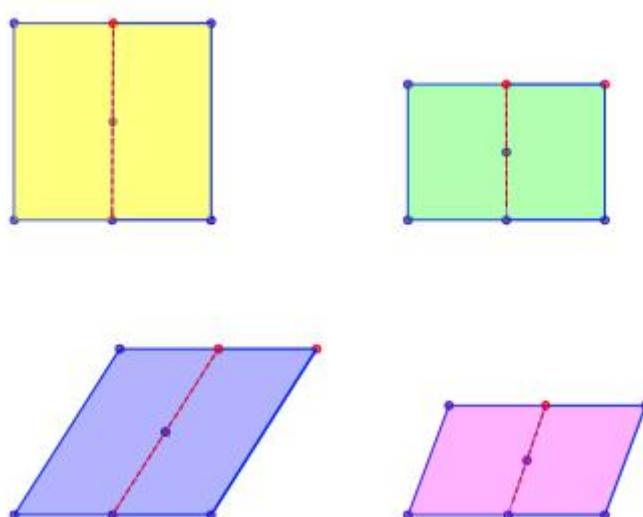
(b) 请在下图中标示出大小相同的角和长度相同的线段。



(c) 请在下图中标示出大小相同的角和长度相同的线段。



(d) 请在下图中标示出大小相同的角和长度相同的线段.



【多知道一点】

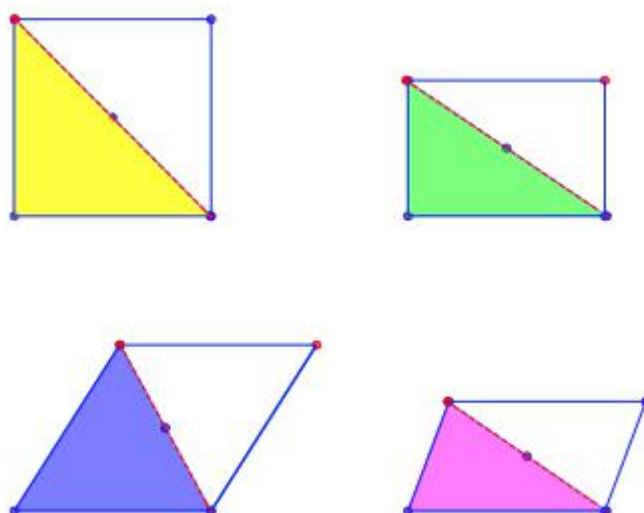
单击【返回】按钮，可以看作是一个图形绕某个点旋转半周之后，与原来的部分组成了一个中心对称图形. 如下图所示，可以分别看作是：

等腰直角三角形绕它斜边的中点旋转半周与原来的图形组成了正方形.

直角三角形绕它斜边的中点旋转半周与原来的图形组成了长方形.

等腰三角形绕它底边的中点旋转半周与原来的图形组成了菱形.

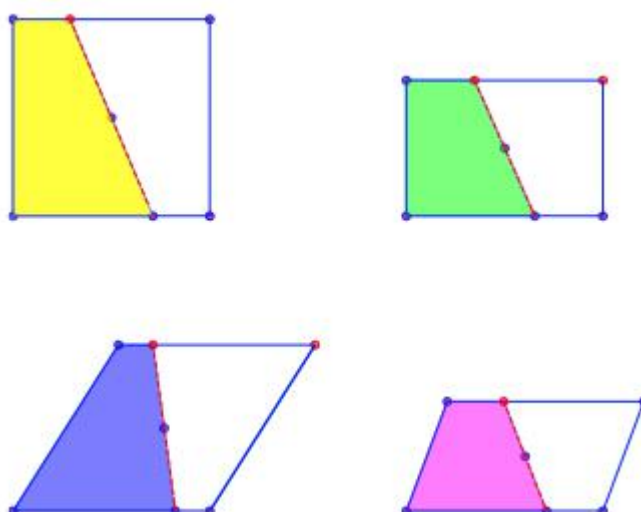
三角形绕它一边的中点旋转半周与原来的图形组成了平行四边形.



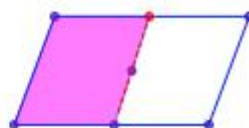
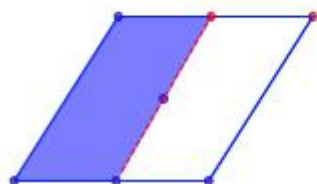
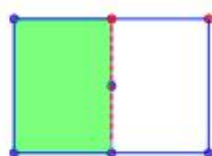
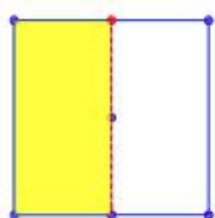
在这里，旋转的图形都是三角形，旋转的中心都是三角形一条边的中点. 这是因为旋转半周之后，这条边能够跟自己原来的位置重合.

【问题与思考】

(1) 如下图所示，可以分别看做把什么图形以什么位置为中心旋转半周之后，分别得到了正方形、长方形、菱形和平行四边形？



(2) 如下图所示，可以分别看做把什么图形以什么位置为中心旋转半周之后，分别得到了正方形、长方形、菱形和平行四边形？



活动 3，利用旋转组图

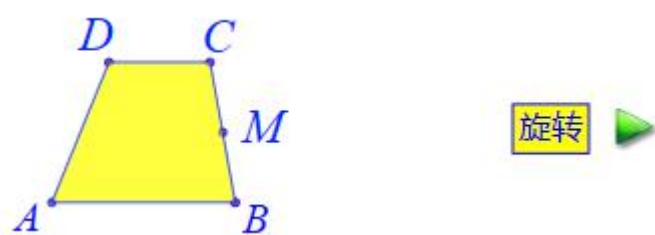
根据我们对中心对称图形的理解，可以知道：

任何一个图形绕以任何一个点为中心旋转半周，所得到的图形与原来的图形，都是一个中心对称图形.

那么，我们可以通过旋转一个图形的方式，得到一个具有中心对称性质的组合图形.

【动手与操作】

步骤 1：进入文件“图形组合.dmr”的下一页，如下图所示，有一个多边形 ABCD 和 BC 的中点 M，拖动点 C 或点 D，可以改变多边形的形状，例如让它变为正方形、长方形、菱形、平行四边形、等腰梯形、直角梯形、一般梯形、等腰直角三角形、直角三角形、等腰三角形、一般三角形甚至是一条线段.

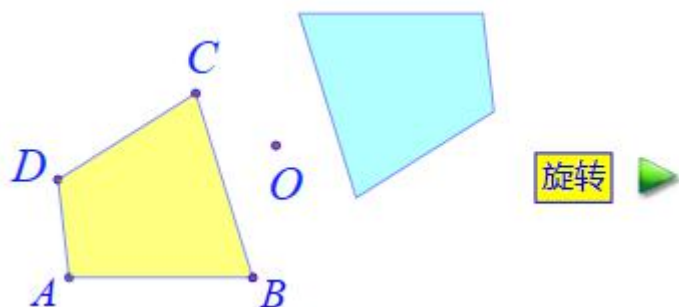


步骤 2：单击【旋转】按钮，多边形会绕点 M 旋转半周.

步骤 3：然后可以继续拖动点 C 或点 D，而得到形形色色的具有中心对称性质的图形.

步骤 4：进入文件“图形组合.dmr”的下一页，如下图所示，有一个多边形

ABCD 和一点 O，青绿色多边形是以点 O 为中心将多边形 ABCD 旋转半周而得到的。还可以单击【动画】按钮，展示多边形 ABCD 以点 O 为中心旋转半周后得到青绿色多边形的过程。



步骤 5：拖动点 C 或点 D，可以改变多边形的形状，拖动点 O 可以改变旋转中心的位置，从而得到形形色色的具有中心对称性质的图形。

【探索与发现】

(a) 在步骤 3 中，你得到了哪些图形请写出它们的名字，如果不能说出它们的名字，请绘制出它们的大致形状。

(b) 在步骤 5 中，当点 C 与点 A 重合时，多边形 ABCD 变为什么图形？请绘制出整个图形的大致形状；当点 D 与点 B 重合时，多边形 ABCD 变为什么图形？请绘制出整个图形的大致形状

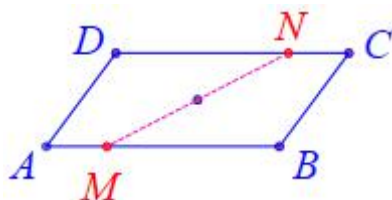
【多知道一点】

一条线段绕一个点旋转半周之后，所得到的线段与原来的线段方向相反.

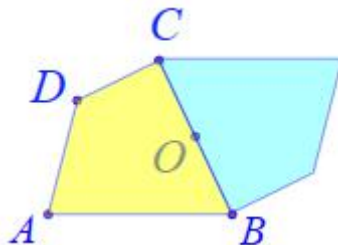
例如，水平向左的线段 OA 绕点 O 旋转后得到水平向右的线段 OB .



例如，在平行四边形 $ABCD$ 当中， AD 绕中心旋转得到 CB ， AM 绕中心旋转得到 CN ， MB 绕中心旋转得到 ND .



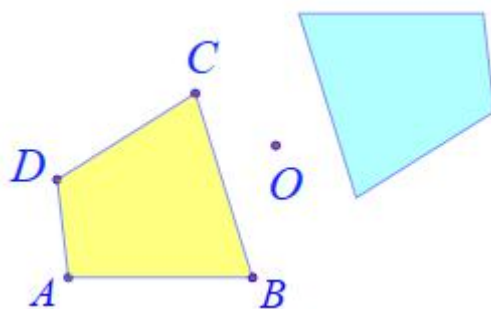
因此，若四边形 $ABCD$ 不是梯形，当它绕一条边的中点，例如 BC 的中点 O ，旋转半周后，就不会得到一个平行四边形.



【问题与思考】

请在下图中，给绿色多边形的顶点标注上名字，找出大小相同的角，指出方

向相反的线段.



活动 4，剪切以及拼组

由一个图形分割成为两个或多个图形，称作是图形的剪切；由两个或多个图形剪拼而组合成为一个图形，称作是图形的拼组。

图形的剪切和拼组，统称为图形的剪拼，或简称为剪拼。

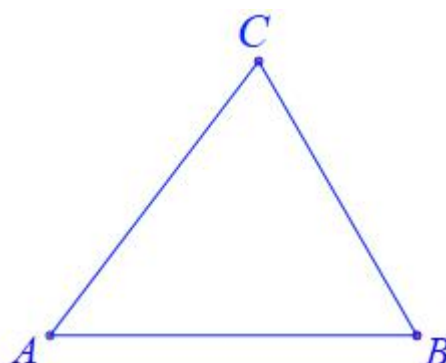
图形的剪拼，有许多现实的意义，还有重要的用途。

前面我们所研究的所有剪切问题，都是把一个图形通过剪切一次而得到两个完全相同两部分的问题。

一般的三角形、四边形、梯形，既不是中心对称图形，也不是轴对称图形，因此无法通过剪切一次而把他们分割成为两部分。但是，如果剪切的次数不限制为一次，那么把一般的三角形、四边形和梯形，能否通过剪切之后再拼组在一起而得到两个完全相同的部分呢？

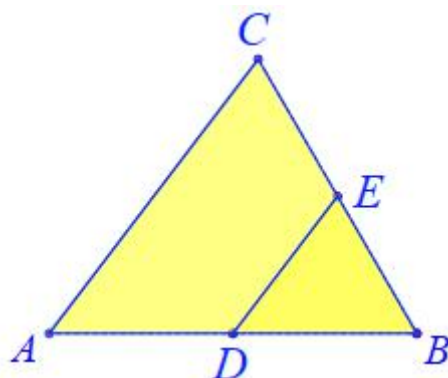
因此任何多边形都可以分割成为若干的小三角形，因此只要三角形的问题解决了，其他任意多边形的问题也都能够解决了。

例如，在下图中有一个任意的三角形，你能想方设法，把它剪切成为若干部分之后，在拼组在一起，得到两个完全相同的图形吗？

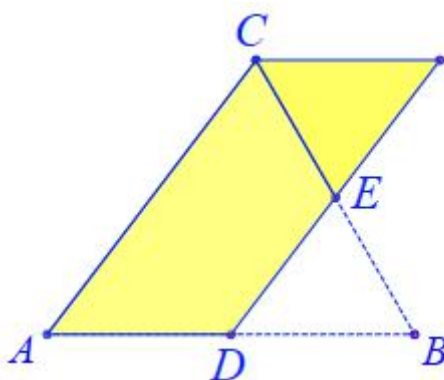


【动手与操作】

步骤 1：进入文件“图形剪拼.dmr”，如下图所示，有一个三角形 ABC ， D 和 E 分别是 AB 和 BC 的中点。



步骤 2：单击【剪切】按钮，三角形沿着 DE 的方向把剪开，然后绕点 E 旋转半周。

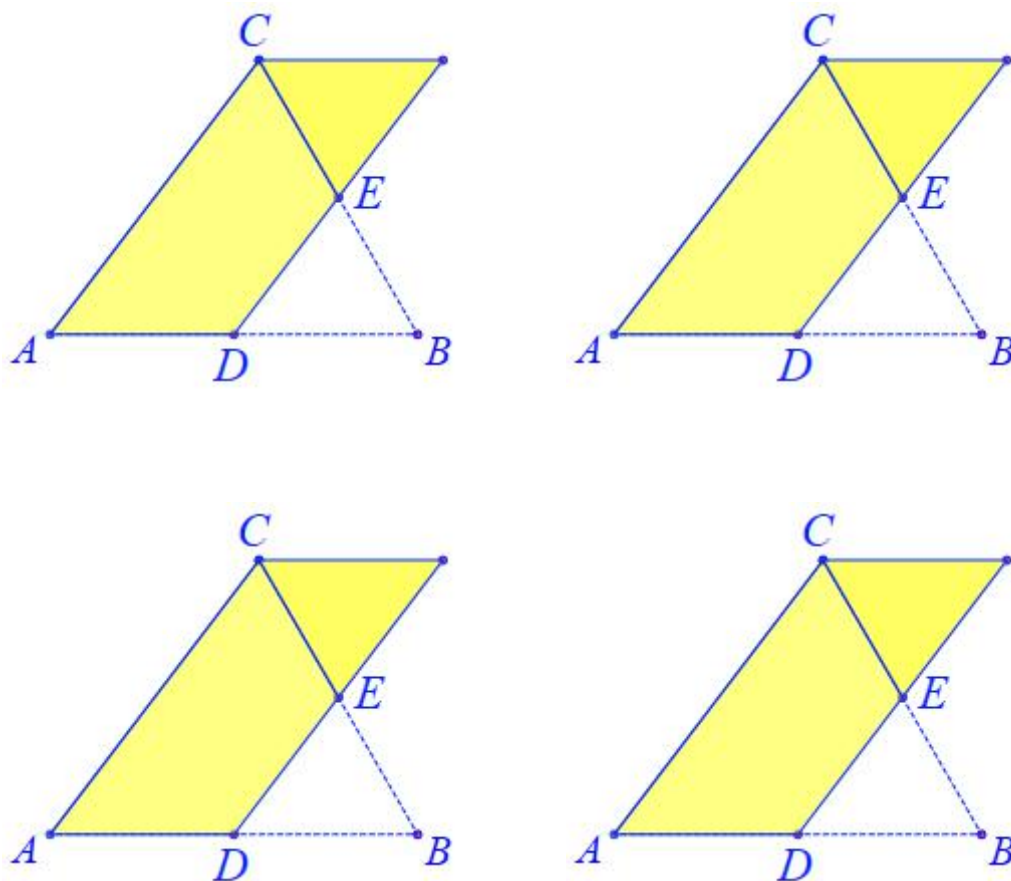


【探索与发现】

(a) 三角形 ABC 沿着 DE 剪切成为两部分，然后三角形 BED 绕点 E 继续

旋转半周之后，与原来剩余的四边形 ADEC 组成了一个什么图形？并说说其中的道理.

(b) 请你把剪切之后又拼组得到的图形，按照四种不同过的方式，分为完全相同过的两部分，并说说其中的道理.



【多知道一点】

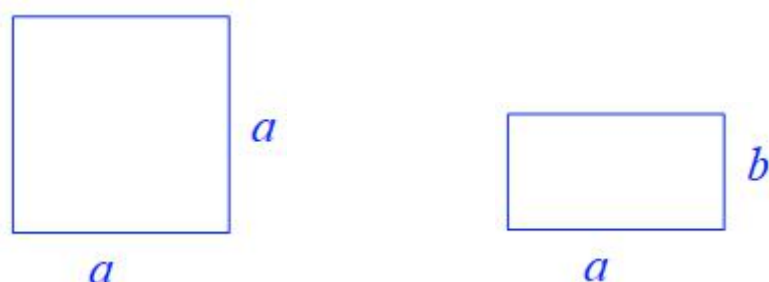
我们知道，一个图形所占据的区域的大小被称作是它的面积. 同时我们还知道：

一个点的面积为 0，无论它的位置在哪里.

一条线的面积为 0，无论它有多长，也无论它的方向是什么.

一个正方形的面积是 $a \times a$ ，如果它的边长是 a .

一个长方形的面积是 $a \times b$ ，前提是它的长为 a 并且宽为 b ，当然如果宽为 a 并且长为 b 也可以.

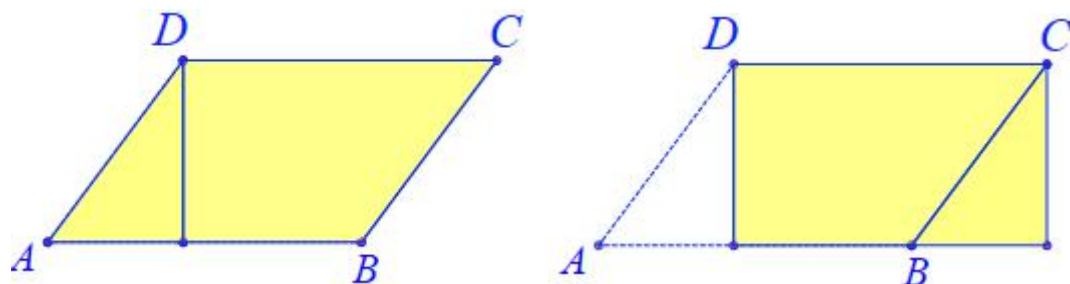


一个图形被分割成为两部分或几部分，分割之后的图形的面积总和与原来图形的面积相等；反过来，两个图形或多个图形组成成为一个新的图形，原来图形的面积总和与新组成的面积相等.

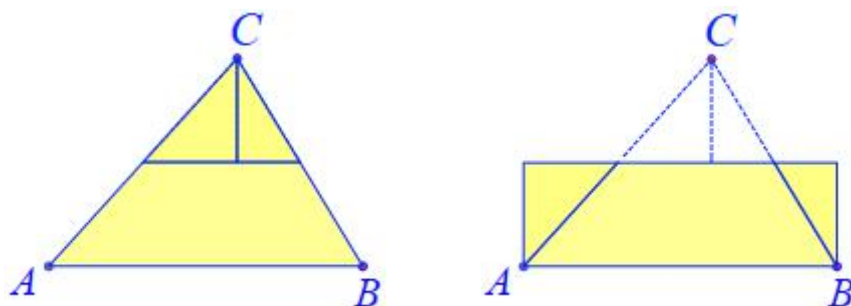
这是图形在剪切或拼组过程中，所存在的基本事实，或者是基本规律.

那么，根据这个规律，我们可以解决很多问题或者解释很多现象.

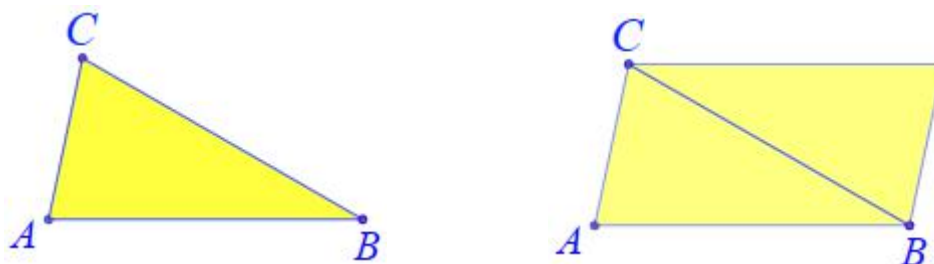
例如，按照如下图所示的剪拼方式，可以由长方形的面积推导得到平行四边形的面积：底 \times 高.



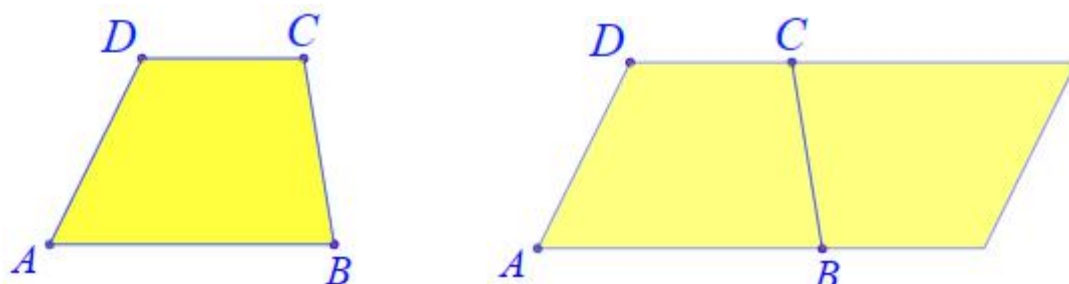
例如，按照如下图所示的剪拼方式，可以由长方形的面积推导得到三角形的面积： $(\text{底} \times \text{高}) \div 2$.



例如，按照如下图所示的拼组方式，也可以由平行四边形的面积推导得到三角形的面积： $(\text{底} \times \text{高}) \div 2$.



例如，按照如下图所示的拼组方式，由平行四边形的面积还可以推导得到梯形的面积： $(\text{上底} + \text{下底}) \times \text{高} \div 2$.



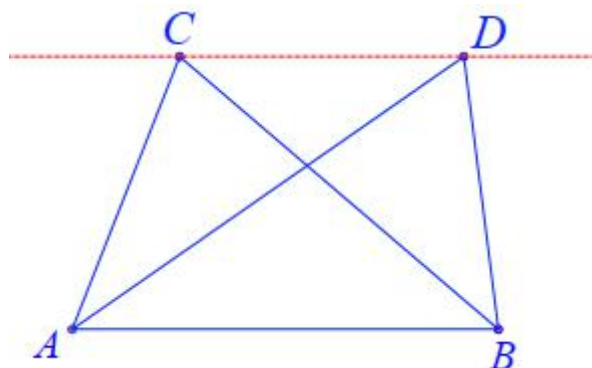
实际上当点 C 与点 D 重合时，梯形就变为三角形，与上面的过程同出一辙。

进入文件“图形剪拼.dmr”后面的四个页面，可以依次动态地展示上述四个过程。

【问题与思考】

(1) 面积相等的两个图形，是不是总是能够把其中一个剪切成若干部分之后，重新拼组成为另一个。

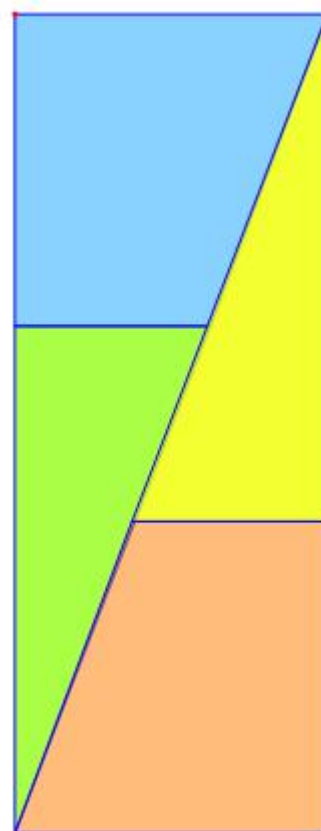
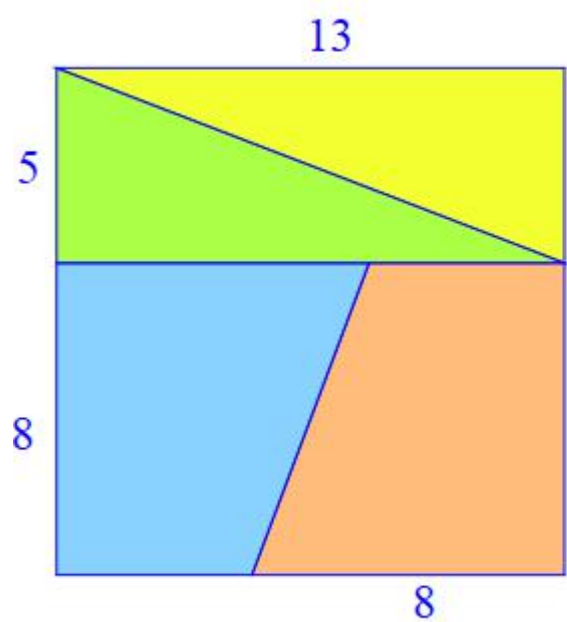
如下图所示，三角形 ABC 与三角形 ABD 的面积相等，并且它们的高相等、底边都是 AB 。能不能把三角形 ABD 剪切成为若干部分之后，重新拼组成为三角形 ABC ，请你动手试试看。



进入文件“图形剪拼.dmr”的下一页，单击【剪拼】按钮，可以动态展示其中的一种解法。

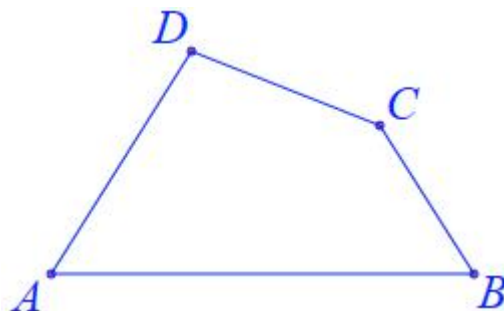
(2) 一个边长为 13 的正方形，按照如下图所示的方式进行剪切，然后拼成一个长为 21、宽为 8 的长方形。计算一下它们的面积各是多少，通过比较它

们的面积你能发现什么？



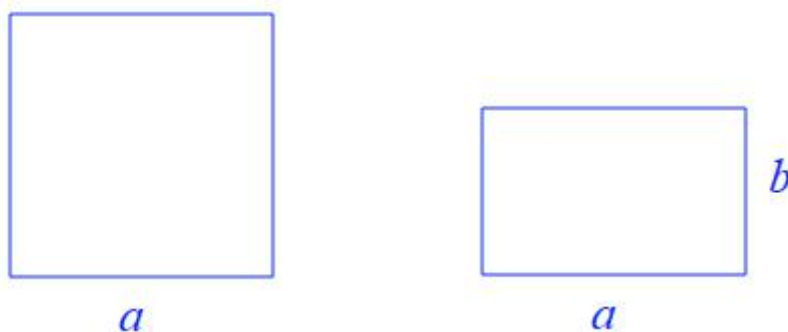
活动 5，剪拼后周长变

如下图所示，有一个四边形 ABCD. 如果要找一条绳子把它的四周围起来，那么这条绳子的长度就等于： $AB+BC+CD+DA$.

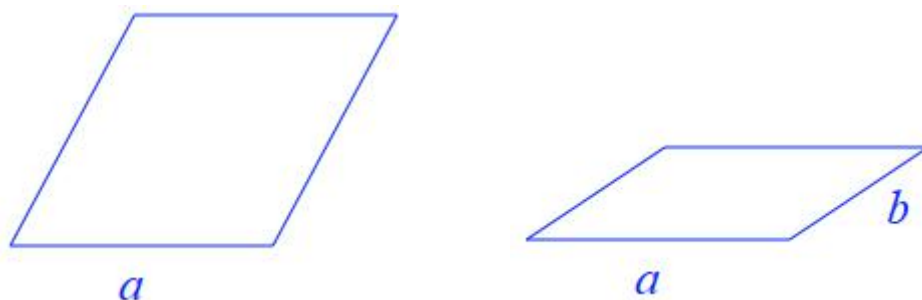


绕图形一周的长度，就叫做这个图形的周长.

那么，我们很快就知道：边长为 a 的正方形的周长为 $4a$ ；长为 a 、宽为 b 的长方形的周长为 $2(a+b)$.



实际上，边长为 a 的菱形的周长也为 $4a$ ；两条邻边长分别为 a 和 b 的平行四边形的周长也是 $2(a+b)$.



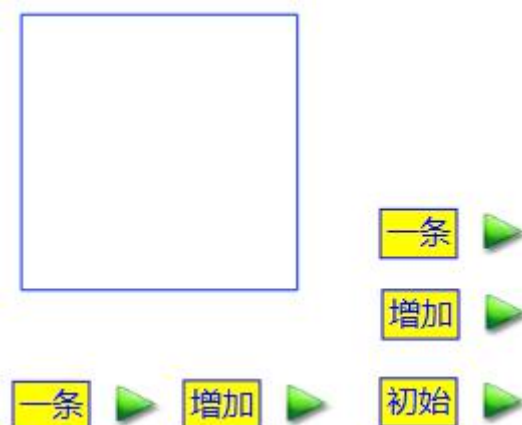
图形在剪切前后：原来图形的面积等于分割之后所有图形的面积之和；图形在拼组前后：原来几个图形的面积之和等于拼组后图形的面积.

这就是图形剪拼过程中的基本事实或基本规律：总面积始终保持不变.

那么，图形在剪拼过程中，它的周长是否也会始终保持不变吗？或者说存在什么样的变化规律呢？

【动手与操作】

进入文件“图形剪拼.dmr”的下一页，如下图所示，有一个边长为 a 的正方形.



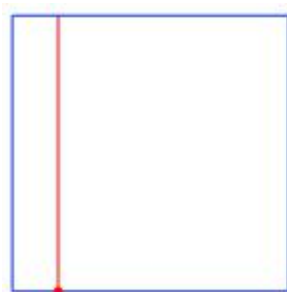
在正方形的下侧有两个按钮【一条】和【增加】：显示竖直方向的一条分割

线和增加竖直方向分割线的数量.

在正方形的右侧有两个按钮【一条】和【增加】：显示水平方向的一条分割线和增加增加方向分割线的数量.

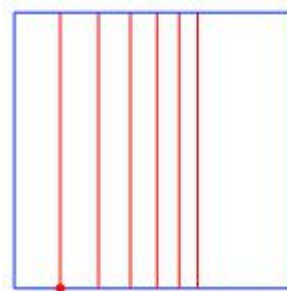
在正方形的右下角有一个按钮【初始】：使得图形回到初始状态，即没有任何方向的分割线.

步骤 1：单击正方形下方的【一条】按钮，显示出竖直方向的一条分割线.

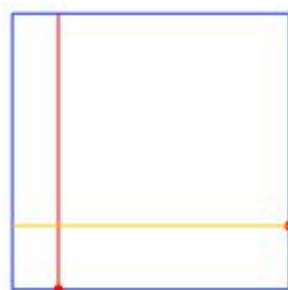


步骤 2：拖动分割线的下方端点，还可以左右平移分割线的位置. 但是需要保证分割线始终在正方形的内部，否则就无法完成分割.

步骤 3：单击下方的【增加】按钮，每单击这个按钮一次，竖直分割线就增加 1 条.

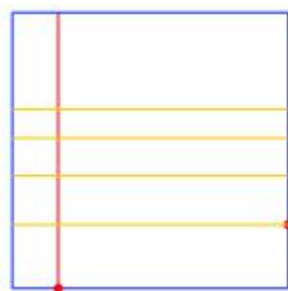


步骤 4：单击正方形下方的【一条】按钮，显示出竖直方向的一条分割线；
再单击正方形右侧的【一条】按钮，显示出水平方向的一条分割线。



步骤 5：拖动竖直分割线的下方端点，或者拖动水平分割线的右侧端点，还可以平移分割线的位置。但是需要保证分割线始终在正方形的内部。

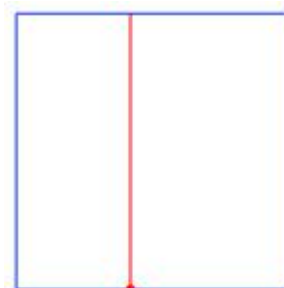
步骤 6：单击右侧的【增加】按钮，每单击这个按钮一次，水平分割线就增加 1 条。



步骤 7：单击下方的【增加】按钮，每单击这个按钮一次，竖直分割线就增加 1 条。

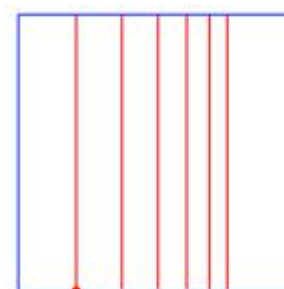
【探索与发现】

(a) 在步骤 1 中，1 条竖直的分割线把正方形分为几个长方形？这些长方形的周长之和是多少？相对于原来正方形的周长，这些长方形的周长之和是否发生了改变？如果发生了改变，那么变化值是多少？

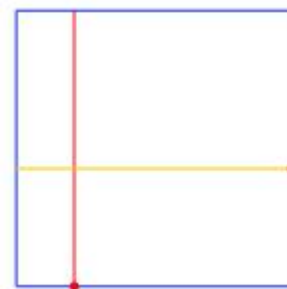


(b) 在步骤 2 中，两个长方形的周长之和是否发生了改变？如果发生了改变，是怎样改变的？

(c) 在步骤 3 中，每增加 1 条分割线，增加了几个小长方形？每增加 1 条分割线，所有小长方形的周长之和增加了多少？如果有 6 条分割线，那么分割得到多少个小长方形？这些小长方形的周长之和比原来正方形的周长多出了多少？

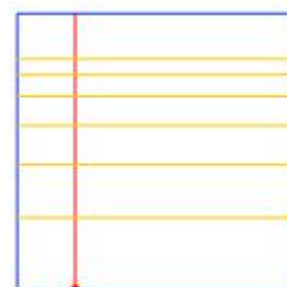


(d) 在步骤 4 中，正方形被一条竖直方向的分割线和一条水平方向的分割线分割成多少个小长方形？这些小长方形的周长之和是多少？它们比原来正方形的周长多出了多少？

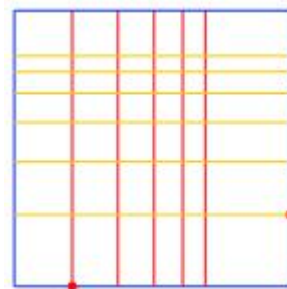


(e) 在步骤 5 中，所有小长方形的周长之和是否发生了改变？如果发生了改变，是怎样改变的？

(f) 在步骤 6 中，每单击右侧的【增加】按钮一次，就增加了几个小长方形？所有小长方形的周长之和增加了多少？如果有 6 条水平方向的分割线，那么分割得到多少个小长方形？这些小长方形的周长之和比原来正方形的周长多出了多少？



(g) 在步骤 7 中，假设已经有 6 条水平方向的分割线，那么每单击下方的【增加】按钮一次，就增加多少个小长方形？所有小长方形的周长之和增加了多少？如果有 5 条竖直方向的分割线，那么分割得到多少个小长方形？这些小长方形的周长之和比原来正方形的周长多出了多少？



【多知道一点】

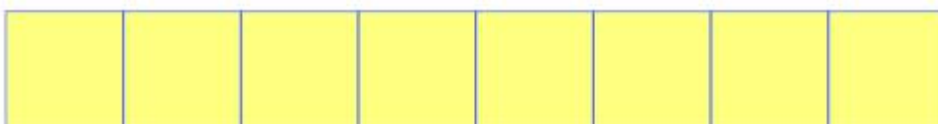
把一个图形剪切为两部分，所得到的图形相对于原来图形的周长就增加了，增加的部分就是剪切线的 2 倍.

所以，如果一个水平放置的正方形，被竖直方向的 n 条分割线与水平方向的 m 条分割线同时分割为 $n \times m$ 个小长方形，那么 $n \times m$ 个小正方形的周长之和比原来正方形的周长之和增加了 $2 \times n \times m$.

相反，如果把几个图形拼组在一起，那么拼组后图形的周长会减小. 最简单的情况就是：2 个完全相同的正方形拼成一个长方形，结果周长减小了 2 个边长.

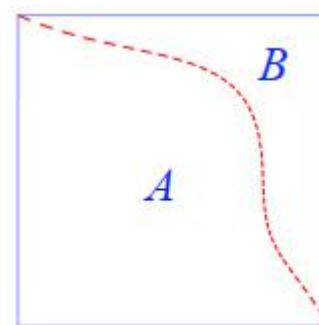


如果依次这样排列下去，那么每增加 1 个小正方形与原来的图形拼组在一起，那么所有图形的周长之和就继续减小了 2 个边长.

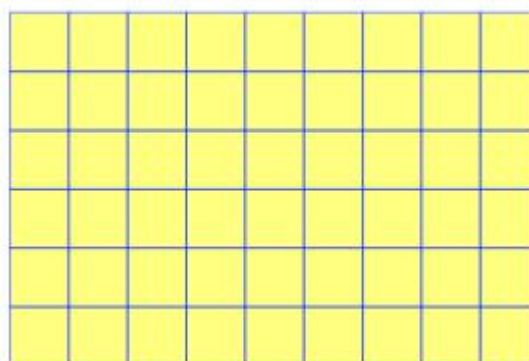


【问题与思考】

(1) 一个正方形按照如下图所示，被分割成为两部分：A 和 B，请问哪部分的周长更大？请说明你的理由.



(2) 数一数，下面是由多少个小正方形所拼组而成的长方形. 如果小正方形的边长为 1，那么这个大长方形的周长比这么多小正方形的周长之和少了多少？



七、点与位置

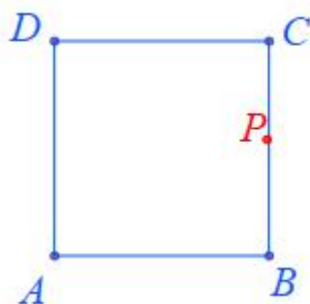
在数学当中所研究的点，只是表示一个位置，没有大小，也没有形状. 例如，我们站在大地上可以把天空中的飞机当做一个点，坐在飞行中的飞机内也可以把大地上某个城市当做一个点.

位置，是一个物体相对于另外一个物体而言的，具有参照物.

我们熟悉的：上与下、前与后、左与右、内与外等等，都是关于相对位置的具体描述.

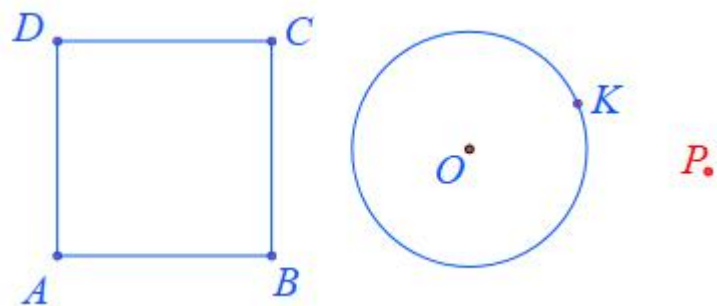
或上或下，或前或后，或左或右，或内或外……，这些所谓的位置，实际上就是两个物体之间的关系.

例如，在下图中，点 P 是在正方形 $ABCD$ 的内部还是在它的外部？或者就在它的边界上？类似这样的问题，很多时候通过眼睛观察很难作出准确的判断.



那么，利用我们所学习的数学方法，应该如何处理类似这样的问题？

例如，在下图中，点 O 、点 K 和点 P 的位置各不相同，但是它们都在正方形 $ABCD$ 的右侧；点 A 、点 B 、点 C 、点 D 和点 P 的位置也各不相同，同样它们也都在圆 O 的外侧；……



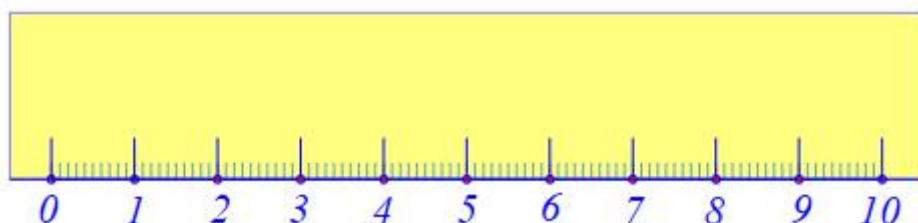
由此看来，这些表示位置关系的词语，是比较模糊的. 那么，如何利用我们所精确的数学语言描述这些模糊的位置关系呢？

这些都是我们接下来要研究与探讨的问题.

活动 1，一点一位置

如何准确地判断某一个点的所在位置呢？这首先需要我们利用其它的点来规定或说明这个点的位置.

我们可以从观察与研究我们所熟悉的直尺开始. 如下图所示，在直尺上，数字 0、1、2、3、4、5、6、7、8、9 和 10 各表示一个位置.



当这把直尺水平放置时，它上面的刻度从左向右是按照从小到大的顺序依次排列的. 通过观察这个尺子，我们不难得到一些规律，例如：

2 在 1 的右边，却在 3 的左边；5 在 4 的右边，却在 6 的左边，等等.

这样一来，就可以准确地判断某个点所在的位置了.

例如，1、2、3 均小于 4，而 5、6、7 均大于 4，那么 1、2、3 所在的位置均位于 4 所在位置的左侧，而 5、6、7 所在的位置均位于 4 所在位置的右侧.

事实上，我们也可以在纸上绘制一条像尺子那样的水平直线，然后从左至右依次标记上 0、1、2、3、....我们把这条与数有关的直线轴称之为：数轴. 在数轴上，0 表示一个位置. 类似地，其他所有的数都表示一个位置.



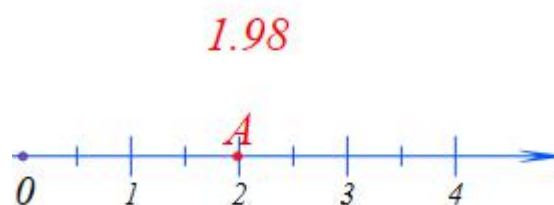
在 0 与 1 之间、1 与 2 之间、2 与 3 之间、...，还有许许多多的位置，每一个位置也都表示一个数。然而它们表示的都是小数，而不是整数。

【动手与操作】

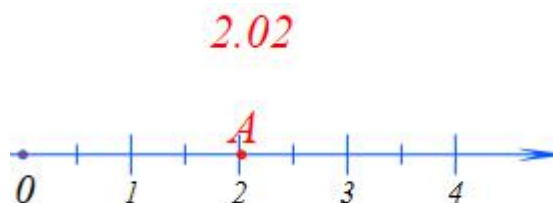
打开文件“点与位置.dmr”，如下图所示，在数轴上还有一个点 A，它所表示的数已经显示在它的位置上方。



步骤 1：拖动点 A，结果如下图所示。



步骤 2：拖动点 A，结果如下图所示。



步骤 3：从左向右拖动点 A。

步骤 4：从右向左拖动点 A。

【探索与发现】

(a) 在步骤 1 中，点 A 在 2 的左侧还是右侧？在 1 的左侧还是右侧？在 3 的左侧还是右侧？

结论：左侧；右侧；左侧。

(b) 在步骤 2 中，点 A 在 2 的左侧还是右侧？在 1 的左侧还是右侧？在 3 的左侧还是右侧？

结论：右侧；右侧；左侧。

(c) 当点 A 在 2 的左侧时，它所表示的数应满足什么条件？当它在 2 的右侧时呢？

结论：小于 2；大于 2。

(d) 当点 A 在 1 的右侧时，它所表示的数应满足什么条件？当它在 3 的左侧时呢？

结论：大于 1；小于 3。

(e) 当点 A 在 1 与 2 之间时，它所表示的数应满足什么条件？

结论：大于 1 且小于 2。

(f) 当点 A 在 2 与 3 之间时，它所表示的数应满足什么条件？

结论：大于 2 且小于 3。

(g) 在步骤 3 中，点 A 对应的数值在变大还是在变小？在步骤 4 中呢？

结论：变大；变小.

【多知道一点】

在一条数轴上，把 0 对应的位置可以看做是起点，从 0 开始向右依次可以标注上 0、1、2、3、4、...对应的位置，可以把这些位置分别是看做 $0+1$ 、 $0+2$ 、 $0+3$ 、 $0+4$ 、...对应的位置.

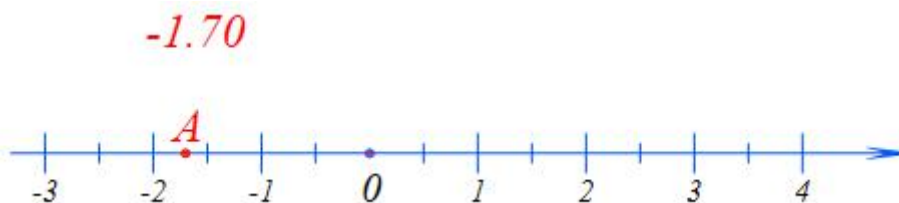
在数轴上，如果认定从左到右的位置所表示的数依次增加，那么从右到左的位置所表示的数就是依次减小.

大家也习惯性地把 0 对应的位置称作是原点，英文为：Original，因此也有时候用字母 O 表示.

因此，也可以从 0 开始向左依次标记上 $0-1$ 、 $0-2$ 、 $0-3$ 、 $0-4$ 、...对应的位置.

$0+1$ 、 $0+2$ 、 $0+3$ 、 $0+4$ 、...的值分别是：1、2、3、4、...；为了进行区别，把 $0-1$ 、 $0-2$ 、 $0-3$ 、 $0-4$ 、...的值分别用 -1、-2、-3、-4 表示，读作负 1、负 2、负 3、负 4、...

选择数轴，把它的左端向左拖动，就可以把数轴在 0 左侧的部分绘制出来，结果如下图所示的情形，就可以准确地描述位置 0 的左侧所表示的数了，然后也可以把点拖动到 0 的左侧.



我们把数轴在原点右侧的部分称之为正半轴，把数轴在原点左侧的部分称之为负半轴.

【问题与思考】

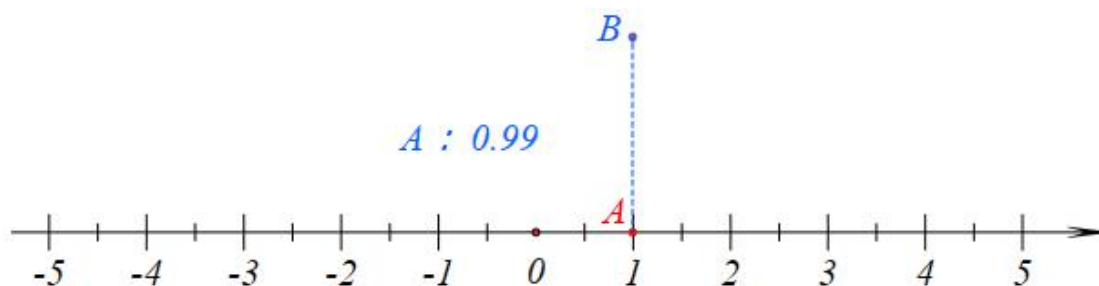
(1) 若 A 表示的数是-2.99，那么点 A 在-3 对应位置的左侧还是右侧？A 在-4 的右侧还是左侧？A 在-2 的右侧还是左侧？

(2) 若 A 表示的数是-3.01，那么点 A 在-3 对应位置的左侧还是右侧？A 在-4 的右侧还是左侧？A 在-2 的右侧还是左侧？

活动 2，数轴要两个

对于数轴上的两个点，我们通过比较它们所表示的两个数的大小，从而比较它们在水平方向的相对位置：哪个在左侧？哪个在右侧？

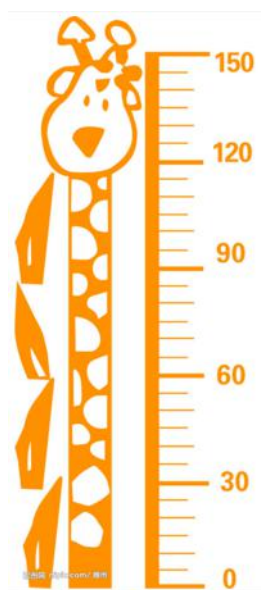
例如，下图所示，点 A 在水平数轴上所表示的数是 0.99，有一条竖直方向的线段 AB，显然点 A 和点 B 都在 1 所在位置的左侧。



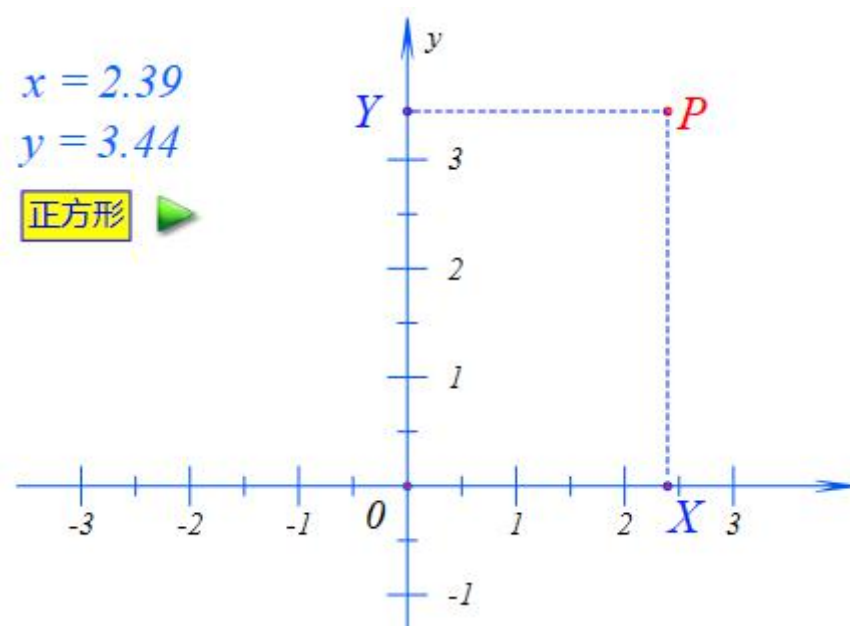
但是，在平面上，点 A 和点 B 显然具有不同的位置，那么应该如何区分它们呢？

因为点 A 和点 B 在水平方向上具有相同的位置，那么我们只需要在竖直方向上对它们进行区分。

因此在平面内，我们还需要引入一个竖直方向的数轴。这就像我们测量身高时需要有一把竖直的尺子，如下图所示。



进入文件“点与位置.dmr”的下一页，如下图所示，有一条水平的数轴和一条竖直的数轴。通常，大家把水平数轴的原点与竖直数轴的原点重合在一起。[当然，也可以不重合在一起，而且有时候不重合在一起反而更加简单，因此需要根据情况而确定]



点 P 是平面内的任意一个点，点 X 和点 Y 分别在水平数轴和竖直数轴上，并且线段 PX 是竖直的、线段 PY 是水平的。那么，点 P 与点 X 具有相同的水平位置，点 P 与点 Y 具有相同的竖直位置。

拖动点 P ，可以观察到 PX 始终

如果利用 x 、 y 分别表示点 X 在水平数轴上的位置、点 Y 在竖直轴上的位置，那么利用 x 和 y 就可以表示点 P 在平面上的位置。例如我们可以书写为 $P = (x, y)$ ，其中括弧内的是由两个数组成的数组，两个数之间用逗号分开，分别表示水平方向的位置和竖直方向的位置。

我们把 (x, y) 称作是点 P 在平面上的位置所对应的坐标，简称点的坐标。

水平数轴和竖直数轴都叫做坐标轴，也分别叫做横坐标轴和纵坐标轴。那么坐标中的 x 和 y 也叫做点的横坐标与纵坐标，或者直接叫做 x 坐标与 y 坐标。

大家也习惯把横坐标轴和纵坐标轴合在一起称为坐标系。在两个数轴的交点，及它们共同的 0 位置处，称之为坐标系的原点。数轴上的数字及短线，被称作坐标系的刻度。

【动手与操作】

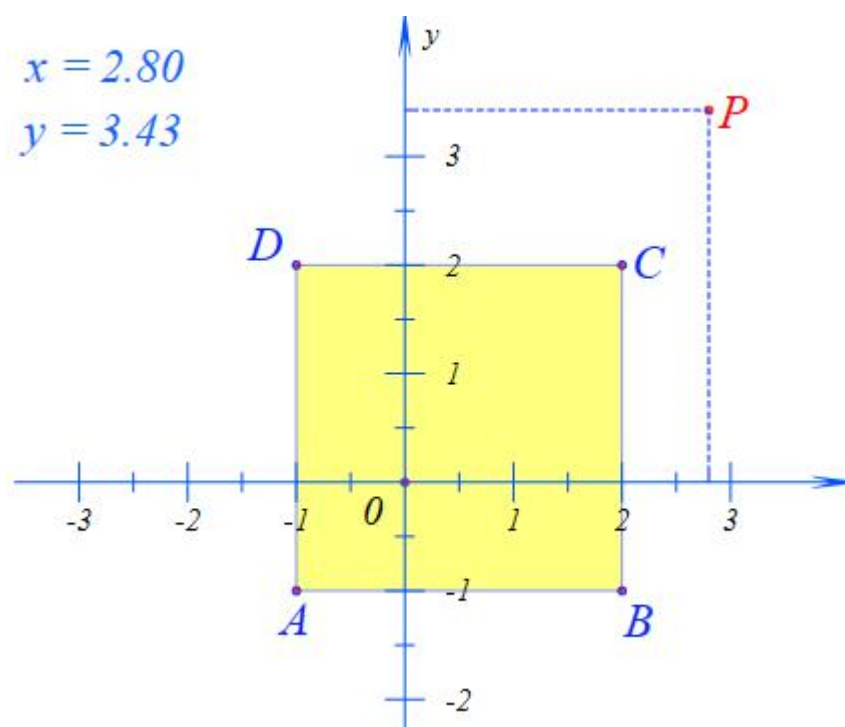
步骤 1：从左向右拖动点 P ，观察和研究点 P 的横坐标的变化规律。

步骤 2：从右向左拖动点 P ，观察和研究点 P 的横坐标的变化规律。

步骤 3：自下而上拖动点 P ，观察和研究点 P 的纵坐标的变化规律。

步骤 4：自上而下拖动点 P ，观察和研究点 P 的纵坐标的变化规律。

步骤 5：单击【正方形】按钮，显示出正方形 $ABCD$ ，结果如下图所示。



【探索与发现】

(a) 在步骤 1 中，点 P 的横坐标是如何变化的？在步骤 2 当中呢？

(b) 在步骤 3 中，点 P 的纵坐标是如何变化的？在步骤 4 当中呢？

(c) 在步骤 5 中，请你写出点 A、点 B、点 C 和点 D 的坐标：

A(,), B(,), C(,), D(,).

(d) 若点 P 在正方形的左侧，那么点 P 的坐标 (x, y) 应该满足什么条件？

若点 P 在正方形的右侧呢？然后通过拖动点 P 验证你的结论.

(e)若点 P 在正方形的上方 , 那么点 P 的坐标 (x, y) 应该满足什么条件 ?

若点 P 在正方形的下方呢 ? 然后通过拖动点 P 验证你的结论.

(f)若点 P 在正方形的内部 , 那么点 P 的坐标 (x, y) 应该满足什么条件 ?

若点 P 在正方形的外部呢 ? 然后通过拖动点 P 验证你的结论.

(g)若点 P 在正方形的边界上 , 点 P 的坐标 (x, y) 应该满足什么条件 ?

【多知道一点】

当坐标原点同时为横坐标的 0 点位置和纵坐标的 0 点位置时 , 横坐标轴上所有点的纵坐标值均为 0 , 而纵坐标轴上所有点的横坐标值也均为 0. 那么平面内所有的点的坐标都可以用一个数对来表示了.

【问题与思考】

而在空间当中 , 具有上下、左右和前后三个方位 , 那么还需要一条能够表示前后的数轴 , 那么对于空间中的一个点需要用三个数来表示它的位置 , 例如 (x, y, z) , 分别表示水平方向的位置、竖直方向的位置和前后方向的位置.

点 A 和点 B 是空间内的两个点 , 它们的坐标分别是 (a_1, a_2, a_3) 、 $(b_1,$

b_2, b_3) .

若点 A 在点 B 的右侧，它们的坐标应该满足什么条件？

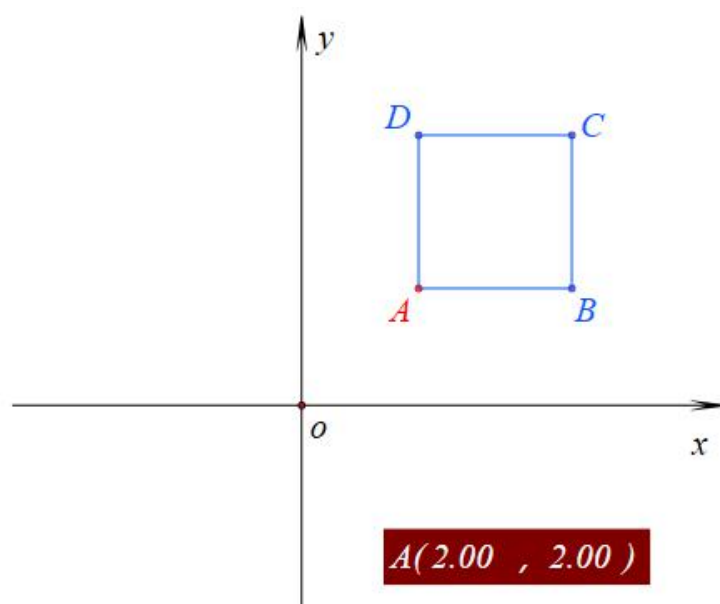
若点 A 在点 B 的上方，它们的坐标应该满足什么条件？

若点 A 在点 B 的前面，它们的坐标应该满足什么条件？

活动 3，位置即关系

我们知道正方形每一条边的长度都等. 那么，对于一个水平放置的正方形来说，如果知道了它的边长以及其中一个顶点的坐标，是否能够知道另外三个顶点的坐标呢？

进入文件“点和位置.dmr”的下一页，如下图所示，在一个没有显示刻度的坐标系之内有一个边长为 2 的正方形 ABCD，顶点 A 的坐标为 $A(2.00, 2.00)$.



那么，其他顶点的坐标分别是：

B(____, ____)、C(____, ____)、D(____, ____).

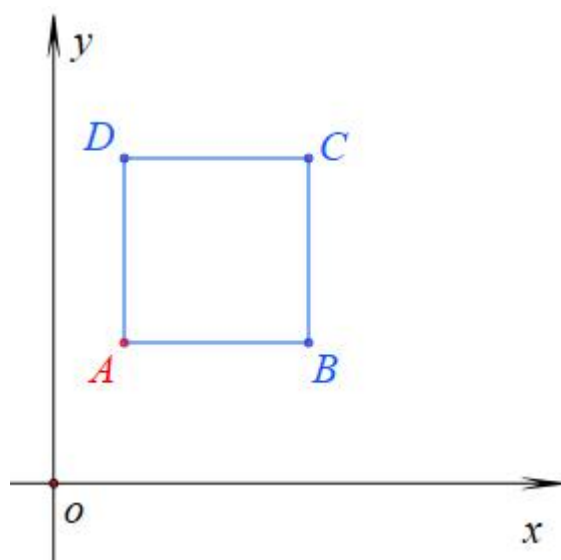
坐标系只是存在于我们大脑中的一个概念，例如在这里我们并没有显示出数轴上的刻度，但并不妨碍我们说点 A 的坐标是 $(2.00, 2.00)$.

而通过点 A 的坐标与正方形的边长得到了另外三个点 B、C、D 的坐标，知道了它们所在的具体位置，这是因为正方形的性质决定了点 A 与点 B、点 C、点 D 之间的数学关系，由数学关系确定了点的位置.

当然，在正方形当中，我们也可以通过点 A 的坐标与点 B 的坐标，而求得点

C 的坐标和点 D 的坐标. 例如若点 A 和点 B 的坐标分别是 $A(2.00, 4.00)$ 、 $B(2.00, 8.00)$, 那么点 C 和点 D 的坐标应该是:

$C(\underline{\hspace{1cm}}, \underline{\hspace{1cm}})$ 、 $D(\underline{\hspace{1cm}}, \underline{\hspace{1cm}})$.

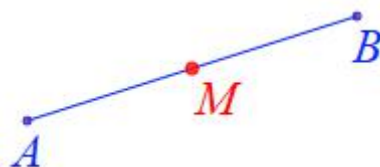


那么, 能否通过点 A 和点 C 的坐标求得点 B 和点 D 的坐标呢? 如果知道点 B 和点 D 的坐标是否也能够求得点 A 和点 C 的坐标?

不难发现, 对于正方形来说, 由任意两个点的坐标就可以确定另外两个点的坐标, 也就是说由任意两个点的位置就能够确定另外两个点的位置.

那么对于其他图形来说, 是否也有类似的性质呢?

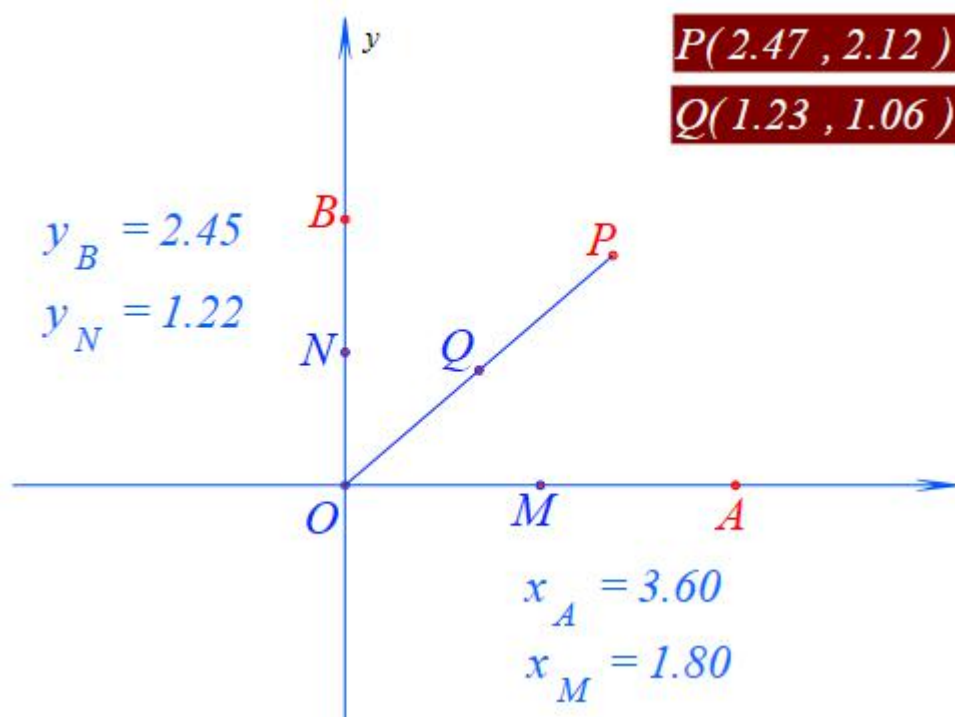
可以从最简单的图形与最熟悉的关系开始研究, 例如一条线段中点和它的两个端点之间的坐标关系. 这是因为当线段的任何一个端点位置改变时, 中点的位置都会随之发生改变.



【动手与操作】

步骤 1：进入文件“点和位置.dmr”的下一页，如下图所示，在 x 轴上有一条线段 OA 以及它的中点 M ，在 y 轴上有一条线段 OB 以及它的中点 N ，点 P 是平面上的任意一点并且 Q 是 OP 的中点。

点 A 、点 B 和点 P 可以被任意拖动，并且已经测量出点 A 和点 M 的 x 坐标、点 B 和点 N 的 y 坐标、点 P 和点 Q 的坐标。



【探索与发现】

(a) 若点 A 的坐标为 $(a, 0)$ ，则点 M 的坐标是多少？点 A 的坐标与点 M 的坐标之间存在什么关系？拖动点 A 检验你的结论。

结论： $(a/2, 0)$ ，两倍。

(b) 若点 B 的坐标为 $(0, b)$ ，则点 N 的坐标是多少？点 B 的坐标与点 N 的坐标之间存在什么关系？拖动点 B 检验你的结论.

结论： $(0, b/2)$ ，两倍.

(c) 若点 P 的坐标为 (x, y) ，则点 Q 的坐标是多少？点 P 的坐标与点 Q 的坐标之间存在什么关系？拖动点 P 检验你的结论.

结论： $(x/2, y/2)$ ，两倍.

【多知道一点】

在 x 轴上，因为 M 是 OA 的中点，所以 OA 的长度是 OM 的两倍，因此点 A 的横坐标是点 M 的横坐标的两倍，即： $x_A = 2x_M$. 当然点 A 和点 M 的纵坐标也满足 $y_A = 2y_M$ 的关系，即： $0 = 2 \times 0$.

类似地，点 B 和点 N 的坐标也满足这种关系： $x_B = 2x_N$ 且 $y_B = 2y_N$.

在这种 x 坐标之间与 y 坐标之间具有相同数量关系的情况下，可以简化一些从而把它们缩写为： $A=2M$ 、 $B=2N$. 它所表示的意思是：

$$(x_A, y_A) = 2(x_M, y_M) = (2x_M, 2y_M)$$

$$(x_B, y_B) = 2(x_N, y_N) = (2x_N, 2y_N)$$

在这里，字母 A、B、M、N 既表示点的名字又表示点的坐标. 而且还表明了坐标之间的数量关系.

通过前面的探索与实验，可以发现：事实上，对于平面上任意一点 P 以及 OP 的中点 Q 来说，都满足：

$P=2Q$ ，即： $x_P=2x_Q$ 且 $y_P=2y_Q$.

【问题与思考】

由 $A=2M$ 、 $B=2N$ 、 $P=2Q$ 可得： $A-M=M$ 、 $B-N=N$ 、 $P-Q=Q$.

M 、 N 、 Q 表示一个点的坐标，那么 $A-M$ 、 $B-N$ 和 $P-Q$ 表示什么呢？

我们可以把 $A-M$ 、 $B-N$ 和 $P-Q$ 分别表示线段 MA 、 NB 和 QP 的坐标.

线段的坐标：线段的终点坐标减去线段的起点坐标.

在平面坐标系当中，所有点 (x, y) 的坐标也都可以看做它的坐标减去原点 $O(0, 0)$ 的坐标，即： $(x, y) = (x, y) - (0, 0) = (x-0, y-0) = (x, y)$.

即： $M=M-O$ 、 $N=N-O$ 、 $Q=Q-O$. 那么，

$A-M=M$ 、 $B-N=N$ 、 $P-Q=Q$ 就表示：

$A-M=M-O$ 、 $B-N=N-O$ 、 $P-Q=Q-O$.

它表示的是：

线段 MA 与 OA 长度相等、线段 NB 与 ON 长度相等、线段 QP 与 OQ 长度相等.

反过来又可以得到：

$2M=O+A$ 、 $2N=O+B$ 、 $2Q=O+P$. 或者：

$M=(O+A)\div 2$ 、 $N=(O+B)\div 2$ 、 $Q=(O+P)\div 2$.

这样，我们通过一条线段的两个端点的坐标就可以得到它的中点坐标了.

那么，如果这里的点 O 不是原点，而是平面上任意一点，这个结论是否依然成立呢？

请你自行设计一个实验，然后进行探索和验证是否满足： $2C=A+B$ 或

B-C=C-A.

在平面上任意绘制一条线段 AB，然后取它的中点 C；

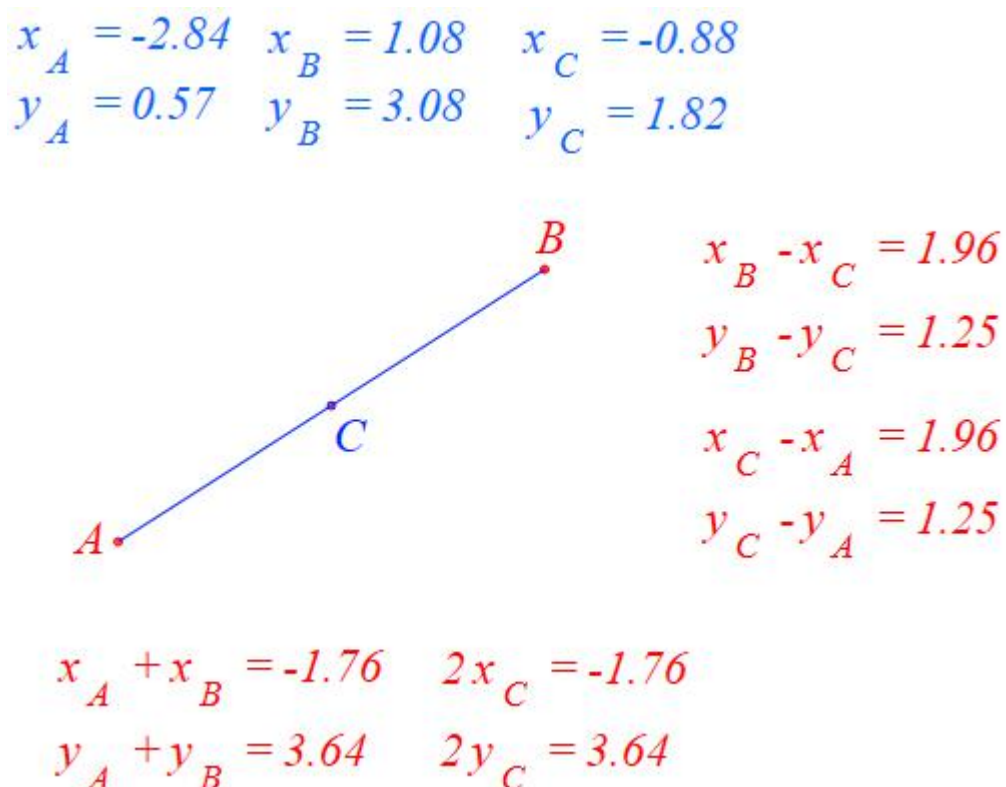
测量点 A、点 B 和点 C 的横坐标；

测量点 A、点 B 和点 C 的纵坐标；

计算 $x_B - x_C$ 与 $x_C - x_A$ 的值；计算 $2x_C$ 与 $x_B - x_A$ 的值；

计算 $y_B - y_C$ 与 $y_C - y_A$ 的值；计算 $2y_C$ 与 $y_B - y_A$ 的值.

进入文件“点与位置.dmr”的下一页，如下图所示，也可以利用设计好的实验进行探索和研究，有一条线段 AB 以及它的中点 C，点 A 和点 B 可以任意拖动，已经测量出点 A、点 B 和点 C 的 x 坐标与 y 坐标以及其他相关坐标计算值.



活动 4，多边形顶点

通过前面的研究，我们知道，如果 M 是线段 AB 的中点，则有：

$B-M=M-A$ ，即： $x_B-x_M=x_M-x_A$ ， $y_B-y_M=y_M-y_A$ 。或者，

$M=(A+B)\div 2$ ，即： $x_M=(x_A+x_B)\div 2$ ， $y_M=(y_A+y_B)\div 2$ 。

通常情况下，利用字母表示的名字直接表示坐标，这样在中间的运算过程中，就减少了很多麻烦。而如果需要，那么到了最后可以再转化为坐标的形式，或者利用坐标进行验证或检验。

下面我们以点的坐标为工具，研究平行四边形的性质，包括：

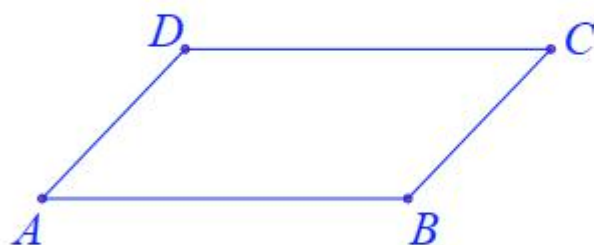
对边之间的长度相等的关系；

对角顶点之间的中心对称性质。

【动手与操作】

步骤 1：进入文件“点与位置.dmr”的下一页，如下图所示，有一个平行四边形 $ABCD$ ，已经测量出点 A 、点 B 、点 C 和点 D 的 x 坐标与 y 坐标以及相关测量值；拖动点 A 、点 B 或点 C ，观察测量值 x_B-x_A 、 y_B-y_A 、 x_C-x_D 和 y_C-y_D 的变化规律。

$$\begin{array}{llll} x_A = -5.17 & x_B = 1.65 & x_C = 4.31 & x_D = -2.50 \\ y_A = -0.69 & y_B = -0.69 & y_C = 2.09 & y_D = 2.09 \end{array}$$



$$\begin{array}{ll} x_B - x_A = 6.82 & x_C - x_D = 6.82 \\ y_B - y_A = 0.00 & y_C - y_D = 0.00 \end{array}$$

步骤2：进入文件“点与位置.dmr”的下一页，如下图所示，有一个平行四边形 ABCD，已经测量出点 A、点 B、点 C 和点 D 的 x 坐标与 y 坐标以及相关测量值；拖动点 A、点 B 或点 C，观察测量值 $x_D - x_A$ 、 $y_D - y_A$ 、 $x_C - x_B$ 和 $y_C - y_B$ 的变化规律。

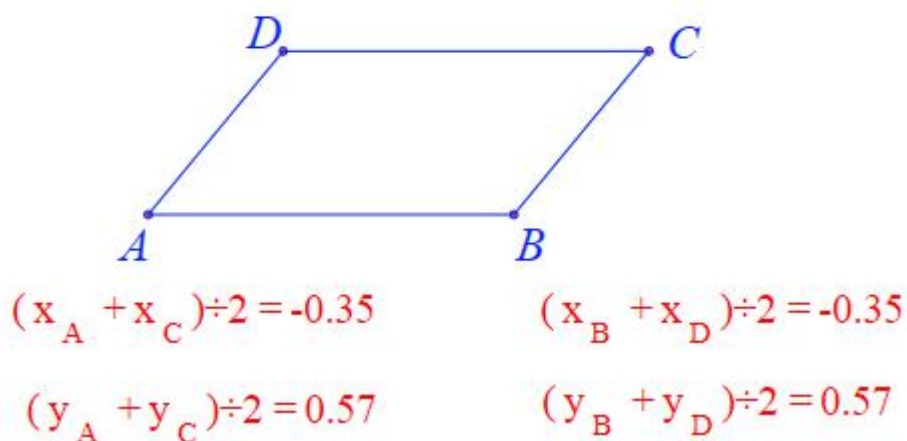
$$\begin{array}{llll} x_A = -5.02 & x_B = 1.80 & x_C = 4.31 & x_D = -2.50 \\ y_A = -0.39 & y_B = -0.39 & y_C = 2.09 & y_D = 2.09 \end{array}$$



$$\begin{array}{ll} x_D - x_A = 2.52 & x_C - x_B = 2.52 \\ y_D - y_A = 2.49 & y_C - y_B = 2.49 \end{array}$$

步骤3：进入文件“点与位置.dmr”的下一页，如下图所示，有一个平行四边形ABCD，已经测量出点A、点B、点C和点D的x坐标与y坐标以及相关测量值；拖动点A、点B或点C，观察测量值 $(x_A+x_C)\div 2$ 、 $(y_A+y_C)\div 2$ 、 $(x_B+x_D)\div 2$ 和 $(y_B+y_D)\div 2$ 的变化规律。

$$\begin{array}{cccc} x_A = -5.02 & x_B = 1.80 & x_C = 4.31 & x_D = -2.50 \\ y_A = -0.95 & y_B = -0.95 & y_C = 2.09 & y_D = 2.09 \end{array}$$



【探索与发现】

(a) 在步骤1中，测量值 $x_B - x_A$ 与 $x_C - x_D$ 有什么关系？测量值 $y_B - y_A$ 与 $y_C - y_D$ 有什么关系？这些规律，说明了线段AB与线段CD之间具有什么关系？

结论：相等；相等；长度相同。

(b) 在步骤2中，测量值 $x_D - x_A$ 与 $x_C - x_B$ 有什么关系？测量值 $y_D - y_A$ 与 $y_C - y_B$

有什么关系？这些规律，说明了线段 BC 与线段 AD 之间具有什么关系？

结论：相等；相等；长度相同.

(c) 在步骤 3 中，测量值 $(x_A + x_C) \div 2$ 与 $(x_B + x_D) \div 2$ 有什么关系？测量值 $(y_A + y_C) \div 2$ 与 $(y_B + y_D) \div 2$ 有什么关系？这些规律，说明了平行四边形的什么性质？

结论：相等；相等；顶角顶点的中点重合，是中心对称图形.

【多知道一点】

对于平面内的一个点 $P(x, y)$ 来说，只要它的位置确定了，原点 O 到它的距离和方向也就同时确定了.

对于平面上的任意两个点 M 、 N 来说也是如此， $N-M$ 不但能够确定线段 MN 的长度还能确定线段 MN 的方向.

进入“点与位置.dmr”的下一页，如下图所示，测量得到了点 M 、点 N 的坐标值以及相应的计算结果.

$$\begin{array}{ll} x_M = -4.75 & x_N = -2.36 \\ y_M = -1.08 & y_N = 2.13 \end{array}$$



$$\begin{array}{l} x_N - x_M = 2.39 \\ y_N - y_M = 3.21 \end{array}$$

拖动点 M ，通过计算结果可以知道 $x_N - x_M$ 与 $y_N - y_M$ 的测量值始终保持不变，由此可以知道，线段 MN 的长度与方向始终保持不变。这说明，长度与方向都相同的线段，可以具有不同的起点和终点。

因此，在平行四边形当中 $B - A = C - D$ ，这说明边 AB 与边 DC 具有相同的长度，也具有相同的方向。类似地，边 BC 与边 AD 也具有相同的长度和相同的方向。

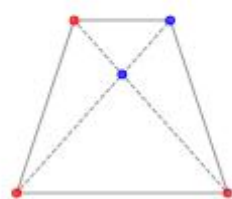
【问题与思考】

(1) 已知平行四边形 $ABCD$ 三个顶点的 A 、 B 、 C 的坐标分别是：

$A(x_A, y_A)$ 、 $B(x_B, y_B)$ 、 $C(x_C, y_C)$ 。

求第四个顶点 D 的坐标。

(2) 请你设计一个数学实验，检验和说明等腰梯形是不是中心对称图形。



八、线与长度

点在运动过程中所经过的路径，就是我们数学上所研究的线. 点在运动过程中的每一个时刻都有一个位置，对应地在线上就有一个点. 因此，我们说点的运动形成了线，或者说线是由点所组成的.

点没有大小，线也没有宽度.

但是，点具有位置，可以利用坐标表示，那么线具有什么特征，应该如何表示呢？

线有直的也有弯的，有长的也有段的，有水平的也有竖直的，有封闭的也有开放的，那么应该对它们如何进行分类，如何进行研究呢？

活动 1，各种各样线

曲线，在现实生活和大自然中随处可见。并且，大自然中的曲线，形形色色、千变万化，也绝不会重复。

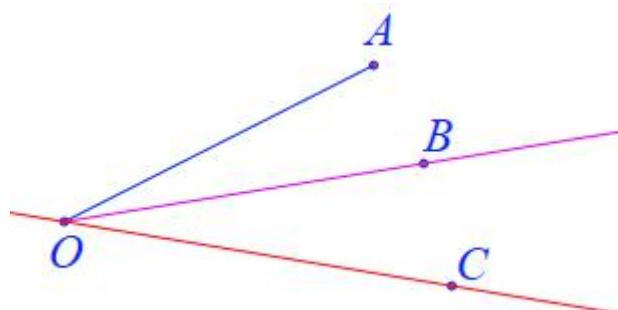
曲线，在数学当中也是重点研究的内容。但是，我们数学中所研究的曲线，只是屈指可数的几个种类。

并且，数学中的曲线也只是现实世界当中某些形状或某些现象的理想状态或简化结果。不过，即使这么屈指可数的几个种类的曲线也足以能够帮助我们描述和理解大自然中的很多现象，给我们的实际生活带来许多帮助。

那么，我们在今后的学习过程中会接触到哪些曲线呢？让我们先目睹一下它们的风采吧。

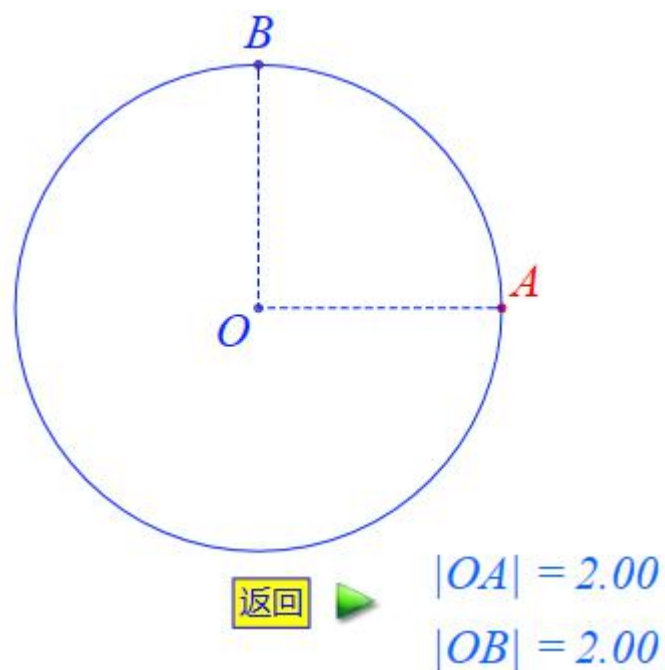
【动手与操作】

步骤 1：打开文件“线与长度.dmr”，如下图所示，经过点 O 有一条线段 OA 、一条射线 OB 和一条直线 OC 。点 O 、点 A 、点 B 和点 C 均可以被拖动。

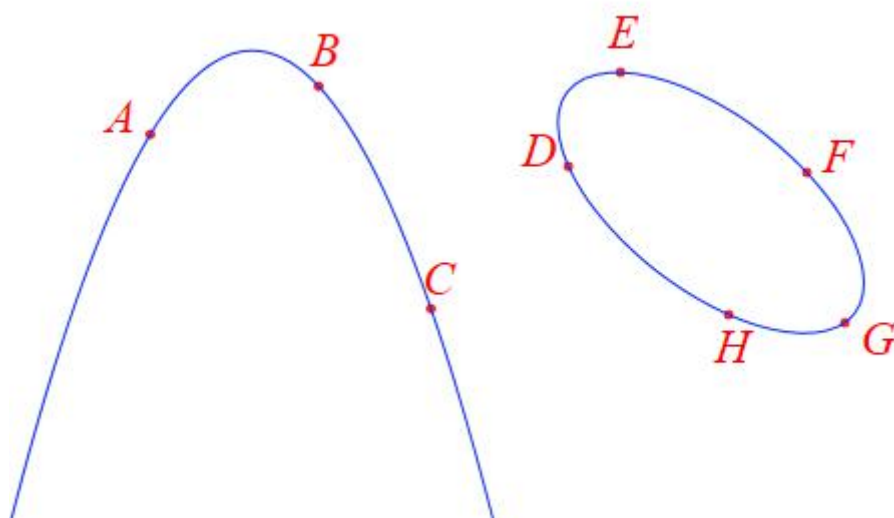


步骤 2：进入文件“线与长度.dmr”的下一页，如下图所示，有一个以 O 为

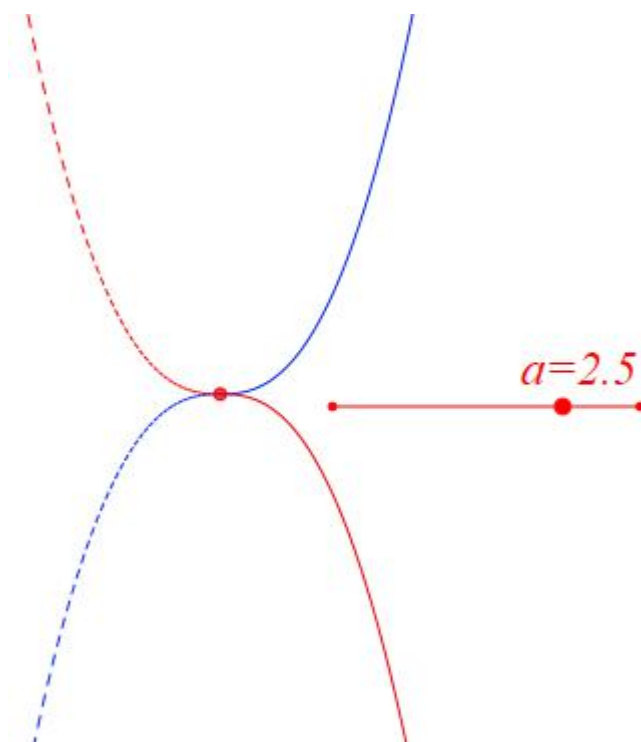
中心的圆形，A 和 B 是它上面的两个点，并且 OA 处于水平方向、OB 处于竖直方向，这时 OA 与 OB 的长度都等于 2. 点 A 可以被拖动，从而能够把图形在水平方向上进行拉伸或压缩. 单击【返回】按钮，可以返回到



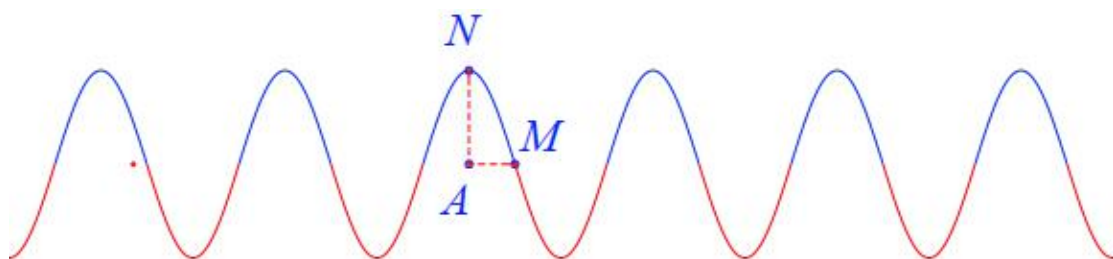
步骤 3: 进入文件“线与长度.dmr”的下一页，如下图所示，经过三个点 A、B 和 C 有一条曲线，经过五个点 D、E、F、G 和 H 有一条曲线. 所有的点均可以被拖动.



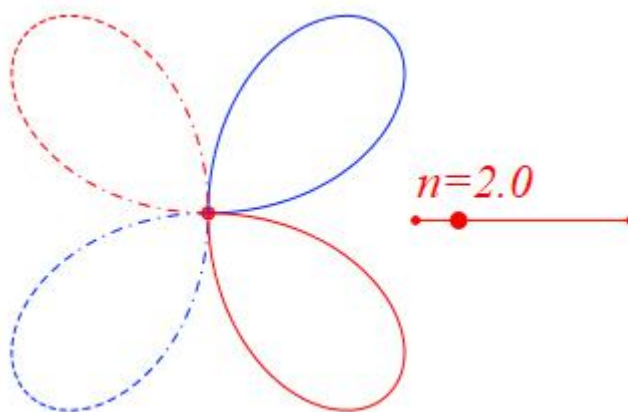
步骤4：进入文件“线与长度.dmr”的下一页，如下图所示，有四段曲线，其中两段是红色的、两段是蓝色的、两段是实线、两段是虚线。通过变量尺改变字母 a 的值，可以同时改变四条曲线的形状。



步骤 5：进入文件“线与长度.dmr”的下一页，如下图所示，有一段一段的蓝色曲线和一段一段的红色曲线. 还有一条水平方向的线段 AM 和竖直方向的线段 AN，点 M 和点 N 都可以被拖动.



步骤 6：进入文件“线与长度.dmr”的下一页，如下图所示，有四条曲线，其中两条是红色的、两条是蓝色的、两条是实线、两条是虚线. 通过变量尺改变字母 n 的值，可以同时改变四条曲线的形状.

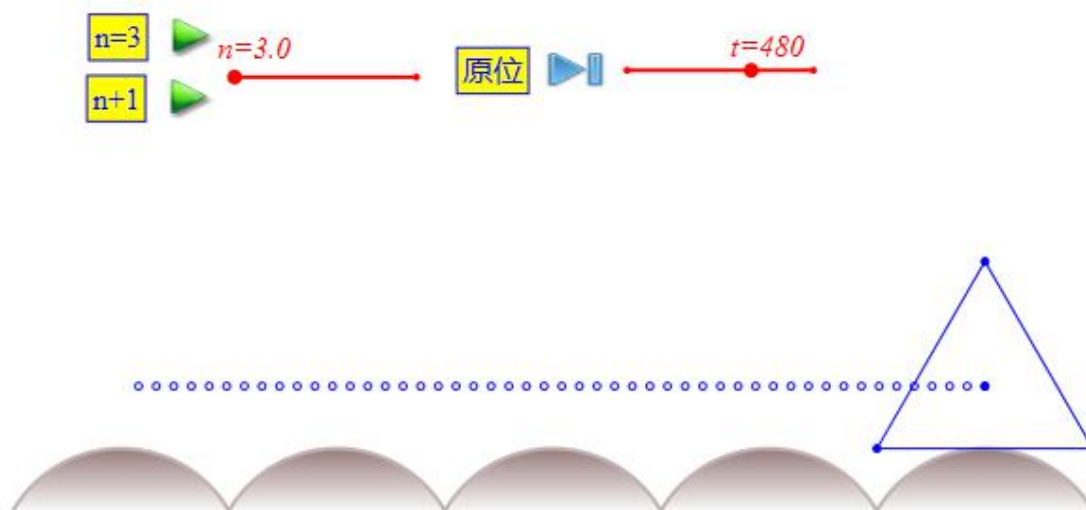


步骤 7：进入文件“线与长度.dmr”的下一页，如下图所示，有一条曲线.



步骤 8：进入文件“线与长度.dmr”的下一页，如下图所示，有一个在曲线路面上滚动的等边三角形车轮，单击【滚动】按钮，可以观察到车轮在曲线路面上平稳地行驶的过程，继续单击按钮可以让车轮回到起始的位置。

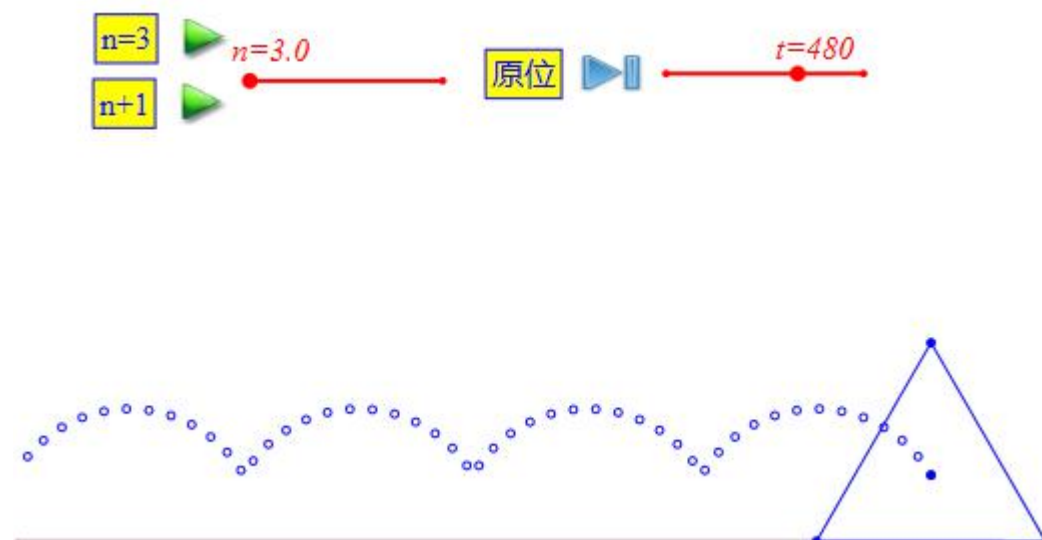
单击【n+1】按钮， n 的值会增加 1，车轮的边数会增加 1，行驶的路面也会发生改变。



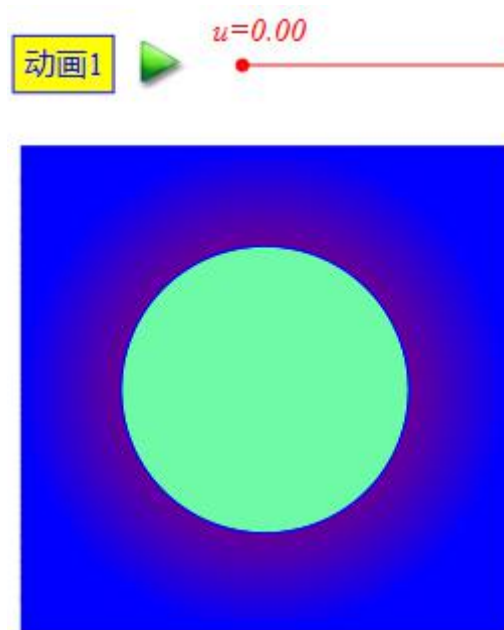
步骤 9：进入文件“线与长度.dmr”的下一页，如下图所示，有一个在水平路面滚动的等边三角形车轮，单击【滚动】按钮，可以观察到车轮在曲线路面上行驶的过程，并跟踪得到了它的中心所经过的路径，继续单击按钮可以让车轮回

到起始的位置.

单击【n+1】按钮， n 的值会增加 1，车轮的边数会增加 1，车轮中心经过的路径的形状也会发生改变.



步骤 10: 进入文件“线与长度.dmr”的下一页，如下图所示，在正方形的内部有一个圆. 单击【动画 1】按钮，可以观察到圆逐渐变为正方形的过程；继续单击【动画 2】按钮，可以观察到正方形逐渐变为圆的过程.



【探索与发现】

(a) 在步骤 1 中，拖动点 A，线段 OA 的长度与方向都会发生改变吗？拖动点 B，射线 OB 如何改变？拖动点 C，直线 OC 如何改变？如果拖动点 O 呢？

结论：长度和方向都会改变；方向会改变；方向会改变；线段 OA 的长度与方向都会改变，射线 OB 与直线 OC 的长度会发生改变。

(b) 在步骤 2 中，向右拖动点 A，得到什么图形？向右拖动点 A，图形如何改变？单击【返回】按钮后，向左拖动点 A 得到什么图形？向左拖动点 A，图形如何改变？

结论：椭圆；越来越扁；椭圆；越来越扁，又越来越宽，再越来越扁。

(c) 在步骤 3 中，拖动点 A，经过点 A、B 和 C 的曲线是中心或轴对称图形吗？经过点 D、E、F、G 和 H 的曲线呢？

结论：轴对称图形；轴对称图形也是中心对称图形。

(d) 我们学习过的图形有中心对称图形和轴对称图形。在步骤 4 中所显示的四段曲线，哪两段组成了中心对称图形？哪两段组成了轴对称图形？改变 a 的值，说说看你发现了哪些规律？蓝色实线、红色虚线和红色实线呢？

结论：两段蓝色（红色）曲线组成中心对称图形；两段实线（虚线）组成轴对称图形；越来越陡峭；都是越来越陡峭。

(e) 观察步骤 5 当中的图形，每一段蓝色曲线与步骤 3 当中经过点 A、点

B 和点 C 的曲线形状相同吗？每一段红色曲线呢？

结论：[学生自由回答]；[学生自由回答]。

(f) 每一段蓝色曲线是中心对称图形或轴对称图形吗？每一段红色曲线呢？相邻的一段蓝色曲线和一段红色曲线组合在一起是中心对称图形或轴对称图形吗？整个红色曲线有什么特点？整个蓝色曲线呢？整个图形呢？

结论：轴对称图形；轴对称图形；中心对称图形；每一段都相同/重复性地出现，轴对称图形；每一段都相同/重复性地出现，轴对称图形；重复性出现，是轴对称图形也是中心对称图形。

(g) 观察步骤 5 当中的图形，拖动点 A，整个图形会怎么改变？拖动点 M 呢？拖动点 N 呢？

结论：水平移动；水平方向上被拉伸；竖直方向上被拉伸。

(h) 观察步骤 6 中的图形，有没有中心对称图形？有没有轴对称图形？改变 n 的值，说说看你发现了哪些规律？

结论：蓝色与蓝色，红色与红色，整个图形；红色之间，蓝色之间，虚线之间，实线之间，整个图形

(i) 观察步骤 7 中的图案，它是中心对称图形或轴对称图形吗？你认为这条曲线与你熟悉的哪个事物相像？请你给它取一个形象的名字。

结论：轴对称图形；[学生自由发挥]；[学生自由发挥]。

(j) 在步骤 8 当中，车轮中心所经过的路径是水平的吗？当 n 增加时，车轮的形状有什么变化趋势？路面的形状有什么变化趋势？

结论：趋近于圆；趋近于直线.

(k) 在步骤 9 当中，车轮中心所经过的路径是水平的吗？当 n 增加时，车轮的形状有什么变化趋势？车轮中心所经过的路径有什么变化趋势？

结论：趋近于圆；趋近于直线.

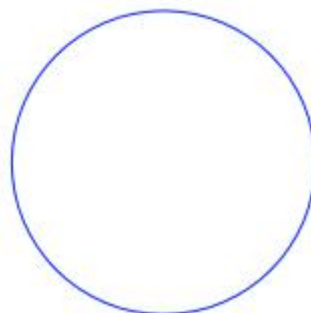
【多知道一点】

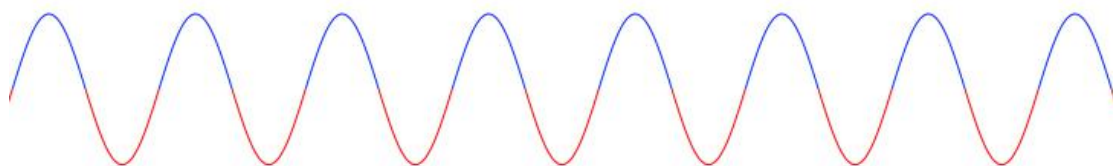
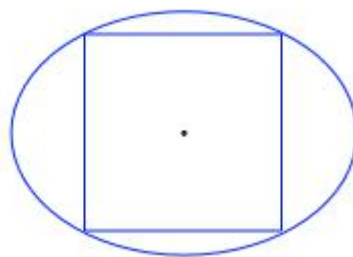
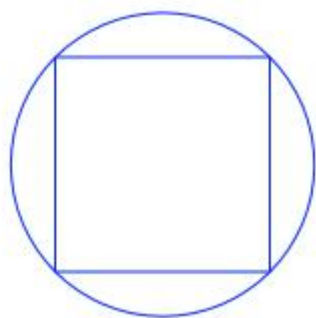
我们关心一个图形是不是中心对称图形，或者是不是轴对称图形，那是因为把图形其中一部分的性质研究清楚了，其他部分也就自然了解了.

【思考与练习】

一个中心对称图形只有一个对称中心，那么一个轴对称图形也只有一条对称轴吗？

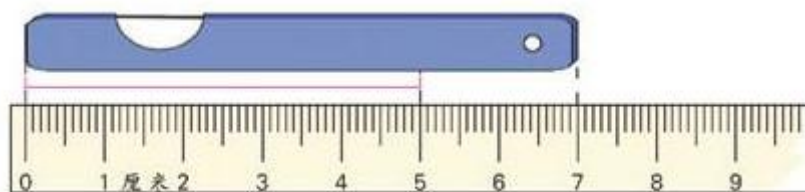
请你绘制出下列图形的对称轴.



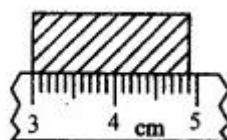


活动 2，线段的长度

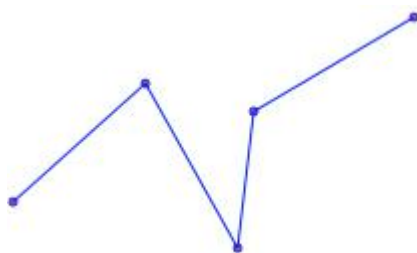
对于一条直线段来说，如果想知道它的长度，那么拿一把直尺，测量一下就可以了。方法是将刻度为 0 的位置放在线段的起点处，然后让尺子的边沿与直线重合，然后终点在直尺上的位置对应的刻度就是线段的长度值，如下图所示。



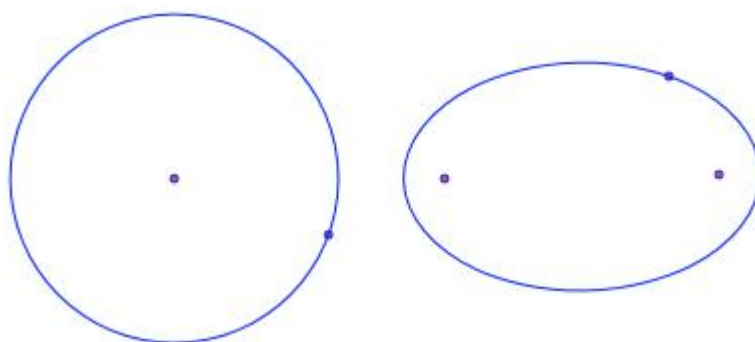
当直线与尺子的边沿重合时，若直线的起点不是尺子的 0 刻度，如下图所示，那么能否得到直线的长度测量值呢？



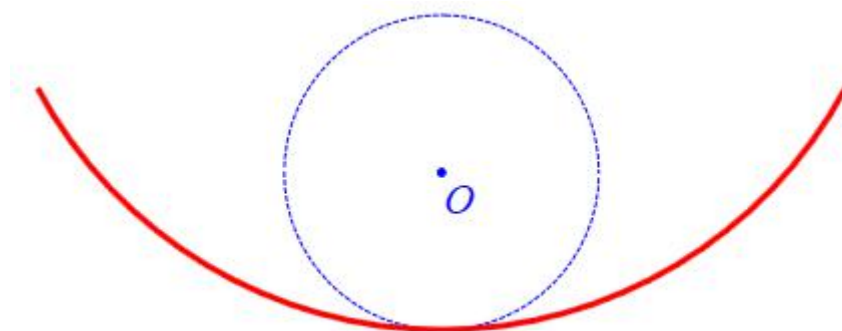
如果要测量一条折线段的长度呢？如下图所示，我们知道它的每一段都是直线段，因此用直尺逐段测量，然后加起来即可。



如果要测量一段曲线的长度，如下图所示，有一个圆形和一个椭圆，那么可以找一把软尺，然后沿着圆或椭圆“行走”一周，即可测量得到这条曲线段的长度.

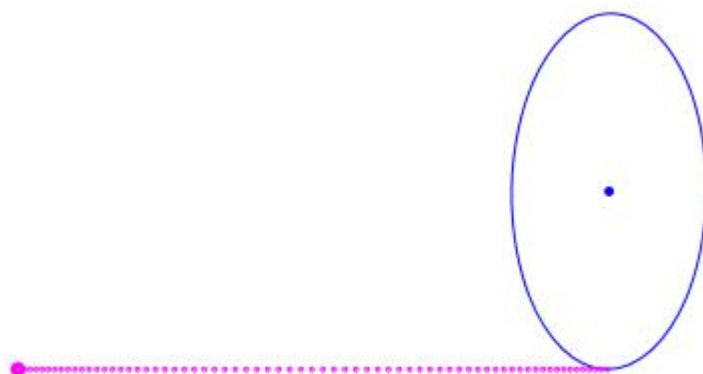


如果身边找不到软尺，可以把曲线拉伸成为直的，如下图所示，然后利用直尺进行测量.

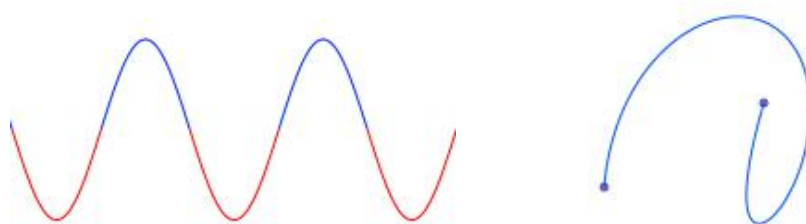


如果在没有软尺的情况下，这个曲线由于过于坚硬不能被拉伸成为直的，或者由于对原来的物件会造成破坏而不允许拉伸为直的，那么，可以让它在水平面上滚动，滚动过的距离就是它的长度. 如下图所示，椭圆在水平面上滚动一周，

它在水平路面上所经过的路径，就是它一周的长度.



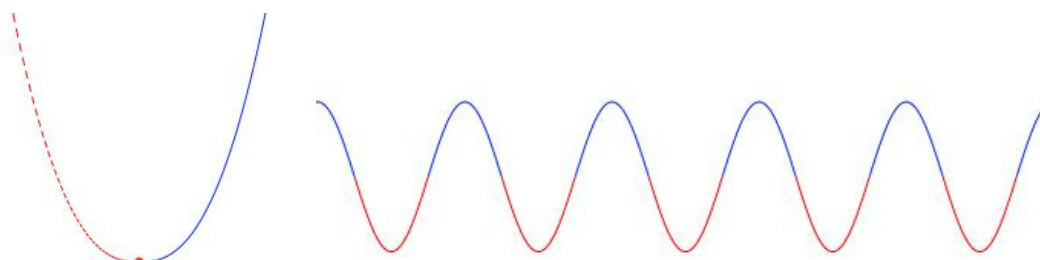
但是有些形状的曲线物体，不能在平面上滚动，如下图所示，其中一个是我们前面见过的图形的一部分，那么在没有软尺的情况下就不能直接测量得到它的长度.



实际上，有很多形状的物体，都无法通过直接测量知道它们的长度. 例如下面的蝴蝶曲线，及时给我们一把可以随便弯曲的软尺，也难以准确地测量出这条曲线的长度.



不过，我们数学上所研究的很多曲线，它本身根本就没有长度。例如我们熟悉的直线或射线，它们分别是向两边或向一边无限延长，要多长就有多长，或者说它永远会比你所想象出来的每一个具体长度都要长。如下图所示，这些曲线也可以是向各自的方向无限延长，它们也没有长度。



我们把具有固定长度的曲线，叫做曲线段。当然具有固定长度的直线，叫做直线段，简称线段。

当然，不能直接进行测量不仅仅是很多曲线段，很多直线段也不能直接进行测量，例如地球到太阳的直线距离、太阳的半径、地球的半径等等。

但是，人们仍然知道这些长度的具体数据。那是因为，这些数据都是科学家们根据某种科学方法计算出来的。事实上，很多无法测量或无法准确测量，长度的曲线段，也可以利用一定的方法计算出来，我们在今后的学习过程中会不断了解和学习这些科学计算方法。

其实，为什么有时候一定要测量线的长度呢？

首先，与现实生活中许多实际问题都有联系。例如，知道了某个物体每条边的长度，就能计算出它所需要的材料多少，等等。

然后，数学中需要明确不同对象之间的精确关系。例如，有两条线段，其中一条的长度是另外一条的长度的几倍？或者说哪一条更长一些而哪一条更短一

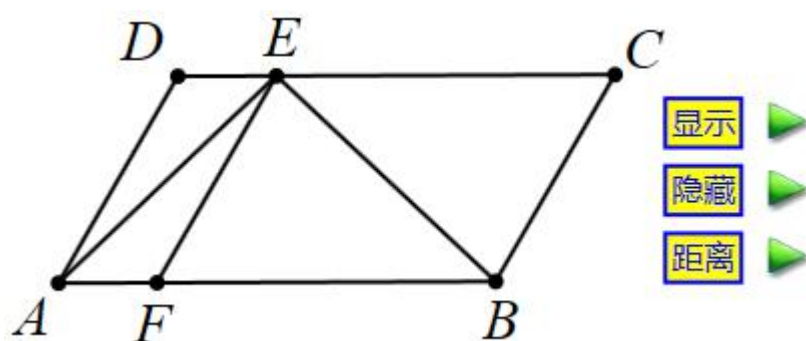
些？

对于差别比较大的两条线段，通过眼睛观察就能够直接判断出哪个是长的而哪个是短的？然而对于长度差别比较小的两条线段，就很难进行准确的判断谁长谁短，也更加不可能通过观察就能了解两条线段之间长度的精确关系。

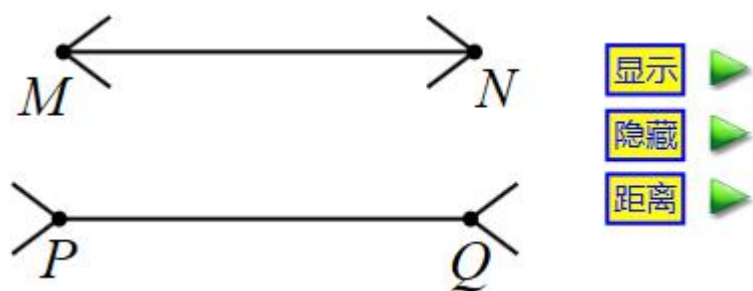
并且，人们观察物体时，由于物体受到形、光、色的干扰，加上人们的生理、心理原因而误认物象，会产生与实际不符的判断性的视觉误差或视觉错误。实际上，这种错误或误差是经常存在的。

【动手与操作】

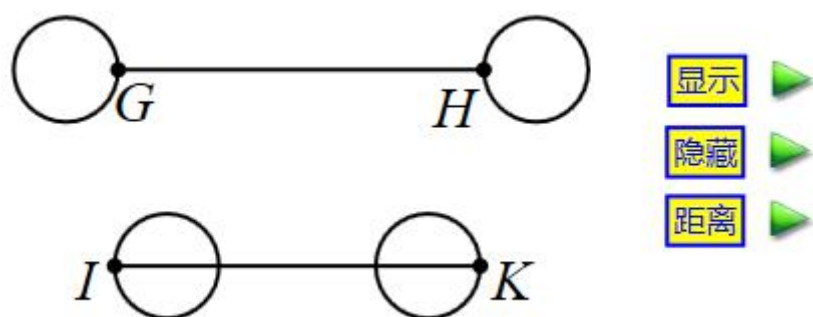
(1) 进入文件“线与长度.dmr”的下一页，如下图所示，点E和F分别在平行四边形的边CD和AB上。



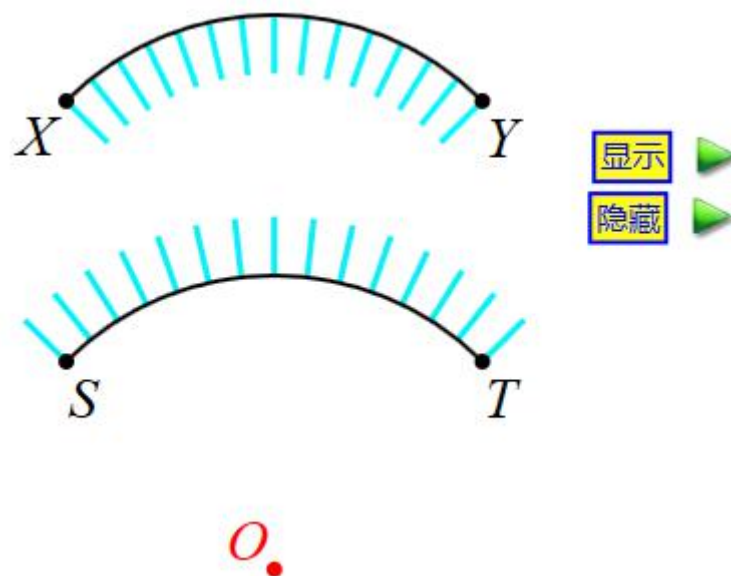
(2) 进入文件“线与长度.dmr”的下一页，如下图所示，有两条线段 MN 和线段 PQ。



(3) 进入文件“线与长度.dmr”的下一页，如下图所示，有两条线段 GH 和 IK.



(4) 进入文件“线与长度.dmr”的下一页，如下图所示，有两段圆弧 XY 和 ST.



【探索与发现】

(a) 在步骤 1 当中，你认为线段 AE 和线段 BE，哪个更长？哪个更短？然后单击【隐藏】按钮，重新进行判断；同时选择点 A 和点 B，单击【距离】按钮，即可得到线段 AE 的长度测量值，类似地可以得到线段 BE 的长度测量值，从而检验你的结论.

【结论】[学生自由发挥]；[学生自由发挥].

(b) 在步骤 1 当中，你认为线段 MN 和线段 PQ，哪个更长？哪个更短？然后单击【隐藏】按钮，重新进行判断；测量线段 MN 和线段 PQ 的长度，检验你的结论.

【结论】[学生自由发挥]；[学生自由发挥].

(c) 在步骤 3 当中，你认为线段 GH 和线段 IK，哪个更长？哪个更短？然后单击【隐藏】按钮，重新进行判断；测量线段 GH 和线段 IK 的长度，检验你

的结论.

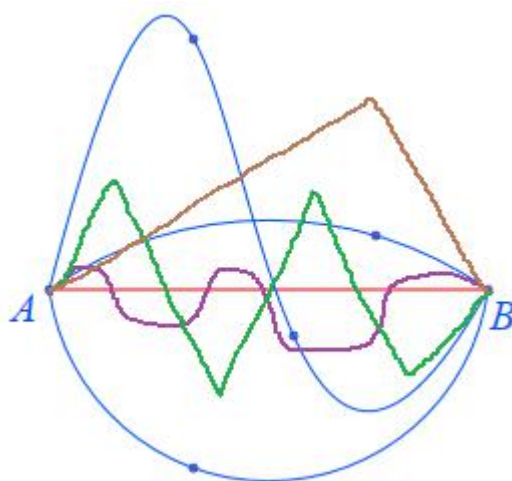
【结论】[学生自由发挥]; [学生自由发挥].

(d) 在步骤 4 当中, 你认为圆弧 XY 和圆弧 ST, 哪个更长? 哪个更短? 然后单击【隐藏】按钮, 重新进行判断; 拖动点 O, 当 S 与点 X 重合时, 点 T 与点 Y 重合吗? 两个圆弧重合吗?.

【结论】[学生自由发挥]; [学生自由发挥].

【多知道一点】

从运动的观点看待问题, 我们知道在平面上从点 A 到点 B 的运动路径有很多种方式或选择, 可以说有无数多种方式或选择, 如下图所示, 但是在这么多方式或选择当中, 沿着直线方向从 A 运动到 B 所经过的路径最短.



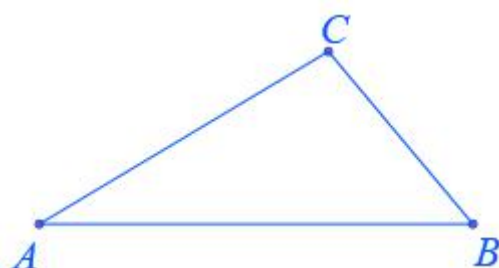
我们把这个事实用一句话表示为: 两点之间直线段最短. 这条直线段, 也叫作这两点之间的距离.

前面我们也提到过，直线是向两边无限延伸的，没有长度。但是作为直线的一部分，线段是有长度的，而且可以进行测量。

【问题与思考】

在三角形当中，如下图所示，由两点之间直线段最短这个事实立刻就能够得到以下结论：

$$BC+CA>AB、AB+BC>CA、CA+AB>BC.$$



而 AB 、 BC 、 CA 都是三角形的边，因此把上面的三个结论可以统一地叙述为：

三角形的两边之和大于第三边。

这是关于三角形三条边的整体性质，因为这个性质让所有的边都参与进来。

顺便提一下：类似地，今后将要深入研究的三角形的内角和等于平角，也是三角形的整体性质，不过它是关于三个内角的整体性质；多边形的外角和等于周角，也是所有多边形的整体性质，是关于多边形外角的整体性质。

根据三角形的这个整体性质，我们知道：组成一个三角形的三条边的长度不是随意的，而是有一定的要求。

例如，边长分别为 1、1、2 的三条线段就不能构成一个三角形，边长分别为 1、1、3 的三条线段也不能构成一个三角形。

下面给出了每条线段的长度，请你对每组线段进行判断，看它们能不能构成

一个三角形？

A 组：2、2、3； B 组：4、4、3； C 组：5、5、3；

D 组：3、3、3； E 组：3、4、5； F 组：1、2、3.

活动 3，直线与方向

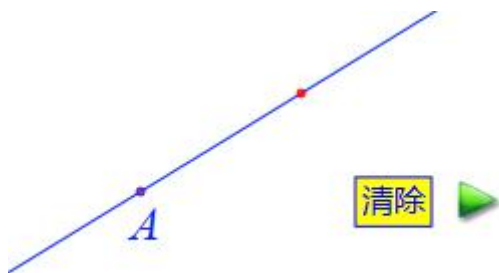
我们知道，一个点在运动方向不改变的情况下所经过的路径，是一条直线.

那么，如果只是知道运动点所经过的某一个位置，如下图所示，是否能够知道这个点所经过的路径和方向呢？

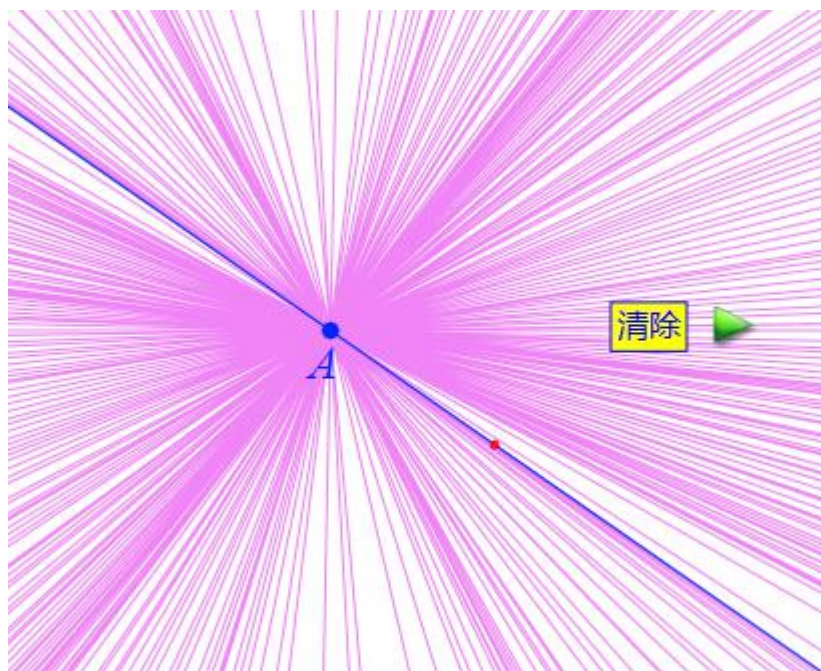


【动手与操作】

进入文件“线与长度.dmr”的下一页，如下图所示，经过点 A 有一条直线，拖动另外一个红色的点，观察直线的变化规律.



结果如下图所示.



【探索与发现】

你认为经过点 A 的直线有多少条？

结论：[学生自由发挥].

【多知道一点】

通过前面的操作，可以感受到：一个点不能确定直线的方向。也就是说，经过一个点可以有很多条直线，实际上是无数多条直线，想要多少就能画出来多少。

但是，当红色的点的位置固定时，直线的方向就固定了。或者说，直线的方向随着红色点的位置改变而改变。因此，我们说：

两个点能够确定一条直线。

实际上指的是两个点就能够确定一条直线的方向，以及它的位置。

我们用数对的形式表示点的位置，这个数对就叫做点的坐标。那么应该用什么表示直线的位置和方向呢？

事实上，前面我们已经尝试了利用点的坐标表示线段的方法.

例如点 $A(x_A, y_A)$ 和点 $B(x_B, y_B)$ ，那么线段 AB 的坐标就可以表示为 $(x_B - x_A, y_B - y_A)$. 但是通过线段的坐标，我们仍然难以直观地“看清”它的方向.

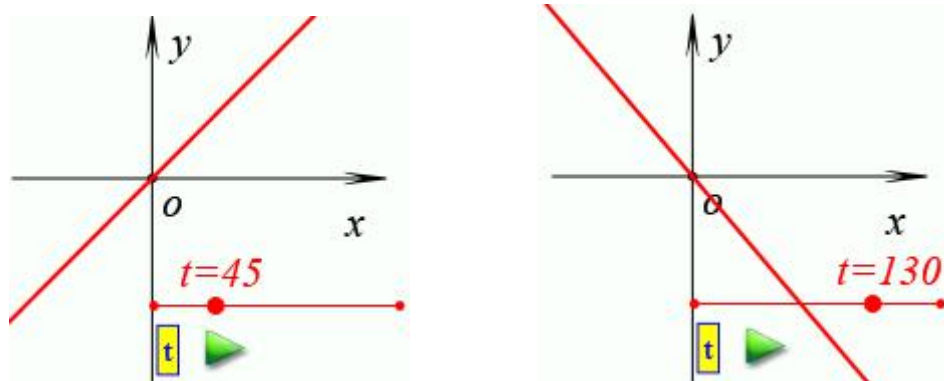
这就需要利用我们熟悉的内容表示或表达方向.

我们知道，角度是直线方向的改变量. 那么，反过来，能否利用角度表示直线的方向呢？

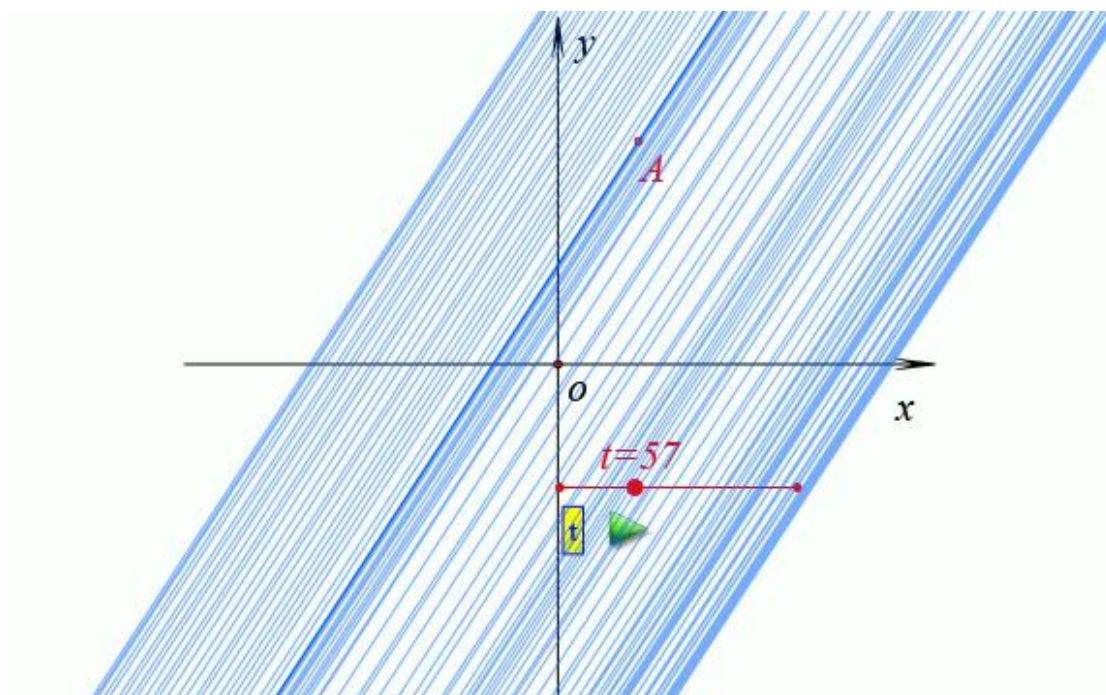
例如，我们规定所有的直线都是从水平方向按照逆时针方向旋转得到的.

那么，就可以把水平方向直线的方向规定为： 0° ，把竖直方向直线的方向规定为： 90° . 并且，为了简单起见，我们需要规定直线的方向小于 180° ，否则当角度等于或大于 180° 时，就会与原来的位置重复.

进入文件“线与长度.dmr”的下一页，如下图所示，通过变量尺改变 t 的值或者通过按钮设置 t 的值，可以改变直线的方向，从而帮助我们在角度与直线方向建立一个直观、形象的联系与认识.



再进入文件“线与方向.dmr”的下一页，如下图所示，拖动点 A，直线的方向不会改变，因此我们认识到，具有相同方向的直线有无数多条.



但是，在知道了直线的方向的情况下，再知道它所经过的某一个点，那么这条直线就确定下来了.

【问题与思考】

(1) 若知道一条直线 m 经过一个点 $A(x, y)$ ，并且知道它的方向是 t° ，那么我们不妨把这条直线表示为 $m: (x, y, t^\circ)$. 当然你也可以把它表示为 (t°, x, y) 或者其他形式，只要大家相互明白这种约定即可.

我们知道，一条直线上有很多点，那么只需要知道这条直线所经过的任意一点的位置，就可以把这条直线表示出来. 例如：

$(-3, 0, 0^\circ)$ 、 $(2, 0, 0^\circ)$ 、 $(1.9, 0, 0^\circ)$ 和 $(2.1, 0, 0^\circ)$ 都表示同一条直线，即 x 轴.

$(0, 3, 90^\circ)$ 、 $(0, -2, 90^\circ)$ 、 $(0, -1.9, 90^\circ)$ 和 $(0, -2.1, 90^\circ)$ 都表示同一条直线，即 y 轴.

但是，只要给定了任何一个数组，那么它所表示的直线就是确定的，即位置

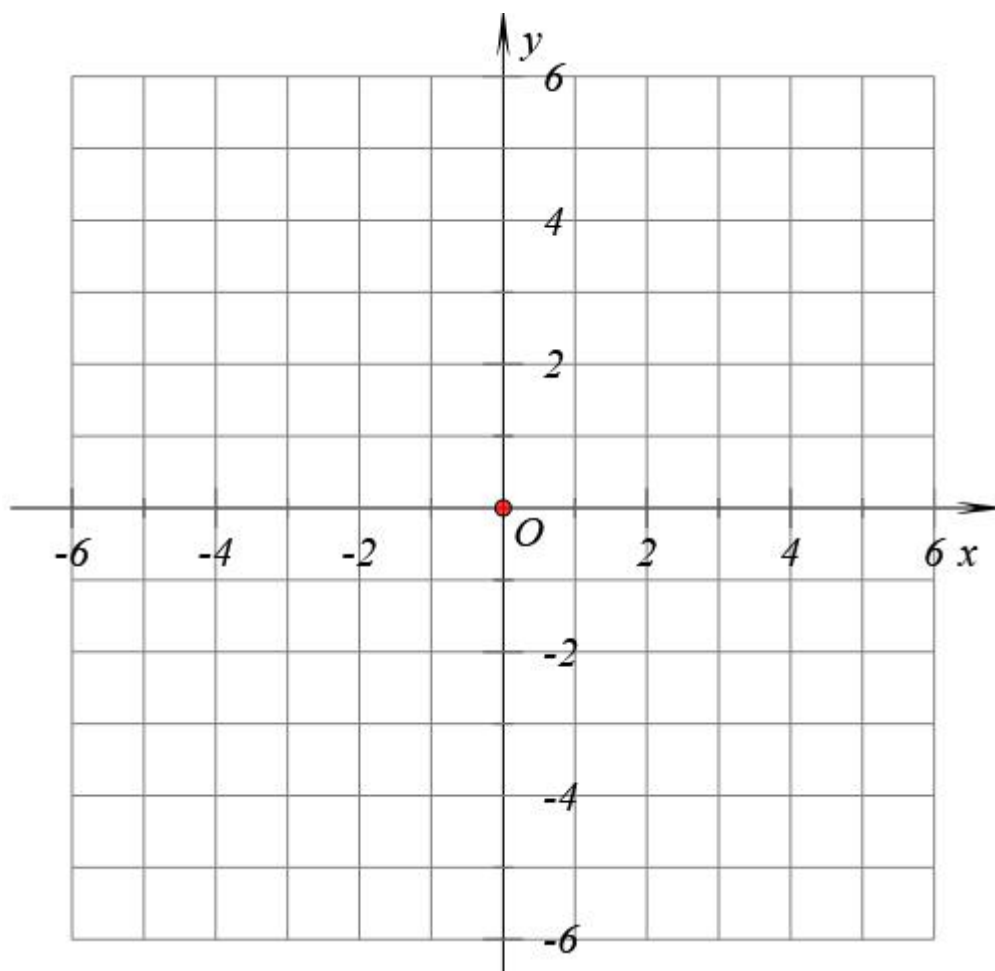
与方向都是确定的.

已知点 $A(1, 1)$ 、 $B(2, 2)$ 、 $C(3, 3)$ 和 $D(5, 5)$ 都在直线 $m(x, y, 45^\circ)$ 上. 那么 m 可以表示为： $(1, 1, 45^\circ)$ 或 $(2, 2, 45^\circ)$ 或 $(3, 3, 45^\circ)$ 或 $(5, 5, 45^\circ)$. 当然 m 还有更多或者无限多种表示方法. 只要在 m 上随意取一点，利用这个点的坐标就可以表示直线 m .

那么，这些表示方法之间有什么联系或特征吗？

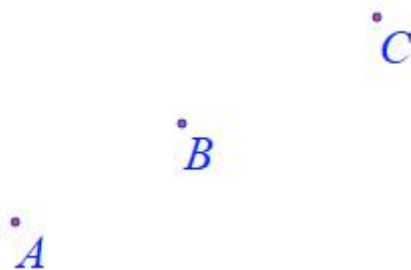
(2) 请你在下方的坐标系中绘制出下列数组对应直线的大致位置：

- 1.a： $(1, 1, 10^\circ)$ ， 2.b： $(2, 2, 45^\circ)$ ， 3.c： $(4, 4, 45^\circ)$ ，
4.d： $(-3, -3, 10^\circ)$ ， 5.e： $(-3, -3, 90^\circ)$ ， 6.f： $(-3, -3, 100^\circ)$



(3) 我们说, 一个运动方向不改变的点所经过的路径, 就是一条直线. 那么, 在这条直线上有无数多个点. 为什么只需要 2 个点而不是 3 个点就能确定一条直线呢? 包括它的方向与位置.

如下图所示, 有三个点 A、B、C, 是一个点 P 在运动的过程中所经过的三个位置. 请你设计一种方案, 判断点 P 在运动的过程中, 它的运动方向有没有发生改变?



九、角与方向

从图形的构成来看，角是由一个点以及从这个点出发的两条射线所共同组成的图形。

从运动的角度来看，角可以是一条直线绕一个点旋转而形成的图形，也可以看做是一个做直线运动的点改变了一次方向（之后继续做直线运动）而形成的拐角。

由此看来，从不同的角度看待同样一个事物，就会获得不同的结果或发现。但是更进一步，这些在形式上仿佛不同的结果或发现，而在本质上都是一致的。

角，是由点和线所组成的最简单图形，也是数学当中非常基本同时非常重要的概念，将会出现在几乎所有的图形当中。因此我们需要通过不同的角度去了解和研究它，从而能够更加深刻地认识到角的概念与本质。

【活动目的】

通过点的运动方向认识角的形成过程。

通过线的改变方向了解角的形成过程。

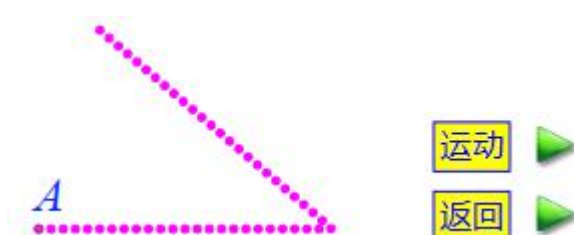
认识和了解形形色色的角、大小各异的角。

通过运动方向的该变量，认识多边形的外角和，并求得内角和。

活动 1，方向与拐角

我们说，一个点在运动过程中，每改变一次运动方向，就会出现一个拐角，就形成了一个角。

打开文件“角与方向.dmr”，有一个点 A，单击【运动】按钮，可以观察点的运动过程以及角的形成过程，结果如下图所示。



点 A 在运动过程中，它运动方向发生了一次改变，就得到了一个我们所说的角。那么改变运动方向的那个位置，即拐角处，就是角的顶点。

点 A 在运动的过程中，在形成拐角前和形成拐角后，它可以运动的时间很长，也可以运动的时间很短。但是无论运动的时间长还是运动的时间短，所得到的拐角大小都是一样的。

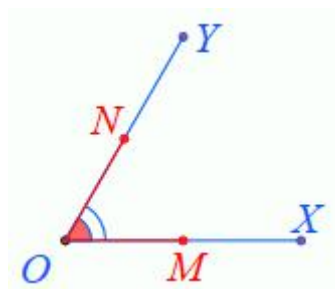
因此，组成角的两条边的长度不影响角的大小。所以通常说，角的两条边是两条射线。

所谓射线，就是从一点出发，向某个方向无限地延长的直线。这个点称作这条射线的端点或起点。

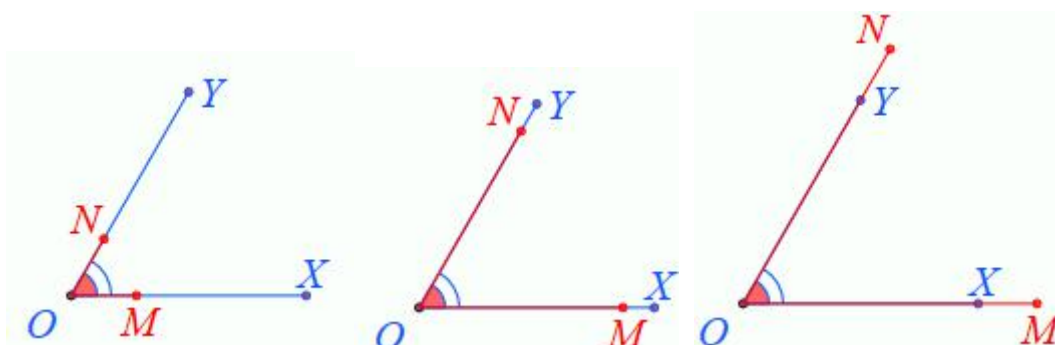
但是，我们无法在有限的空间当中绘制无限长的射线，因此在画角的过程中，两条边有时会画的短一些，有时会画的长一些。但是，角的大小不会因为组成角的两条边的长短而不同。

【动手与操作】

进入文件“角与方向.dmr”的下一页，如下图所示，点 M 和点 N 分别在射线 OX 和射线 OY 上. 点 M 可以在射线 OX 上被拖动，点 N 的长度也会随之发生变化.



如下图所示，为其中的几种情形.



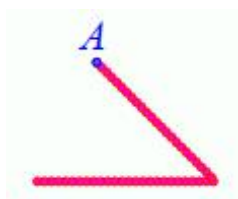
【探索与发现】

在上述几种情况下，是否都有 $\angle XOY = \angle XOY$ 成立？为什么？请谈谈你的看法.

结论：是的；[由学生自己发挥].

活动 2，旋转与角度

如下图所示，点 A 在运动过程中与点 B 在运动过程中，都形成了拐角，但拐角的形状不同，也就是说所形成的角的大小不同.



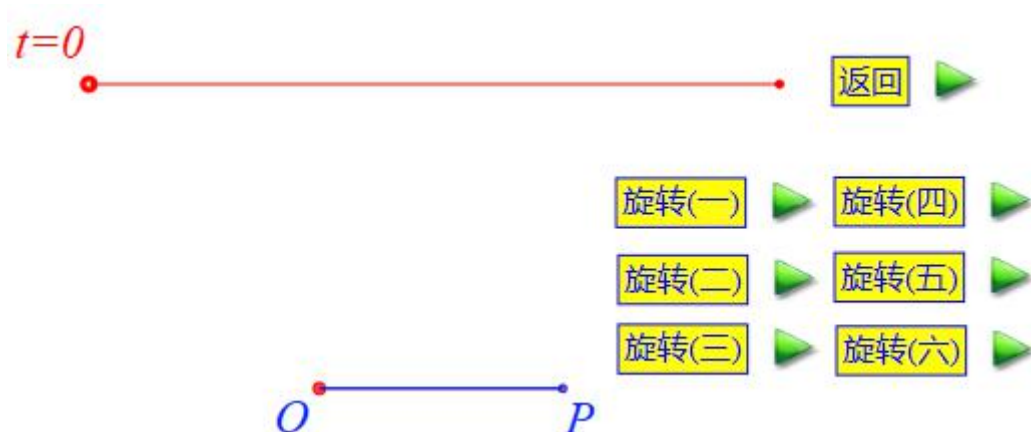
那么应该如何计算角的大小呢？

这就需要我们清楚地知道，到底什么叫做角.

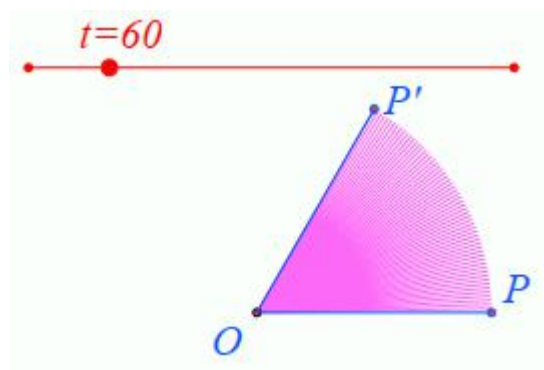
我们知道，角是由一个顶点、两条射线组成的图形. 那么我们也可以把一条射线通过旋转的方式得到一个角.

【动手与操作】

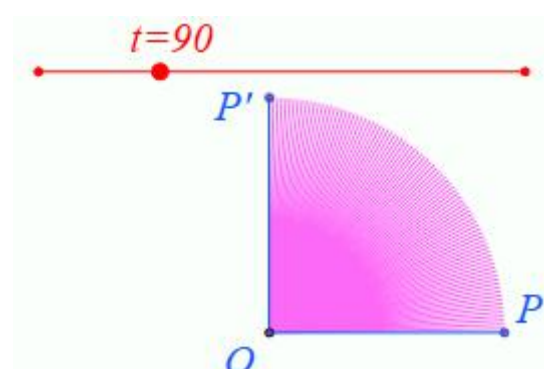
进入文件“角与方向.dmr”的下一页，如下图所示，有一条直线段 OP 和几个按钮，左上方还有一个显示字母 t 的数值的一把尺子，这时 t 的值为 0.



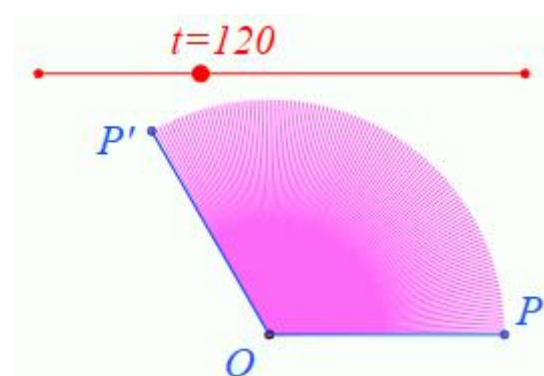
步骤 1：单击【旋转(一)】按钮，结果如下图所示，线段 OP 绕点 O 旋转得到线段 OP'，中间的阴影部分就是线段 OP' 所经过的区域.



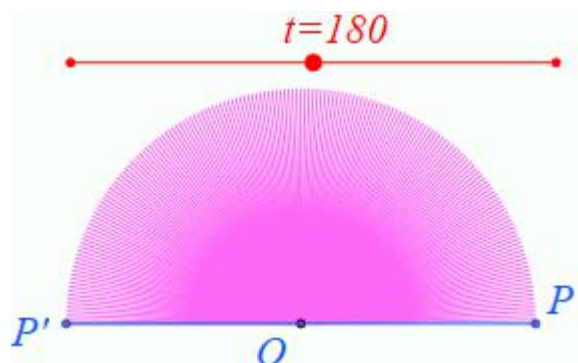
步骤 2：单击【旋转(二)】按钮，结果如下图所示，线段 OP 绕点 O 旋转得到线段 OP' ，中间的阴影部分就是线段 OP' 所经过的区域。



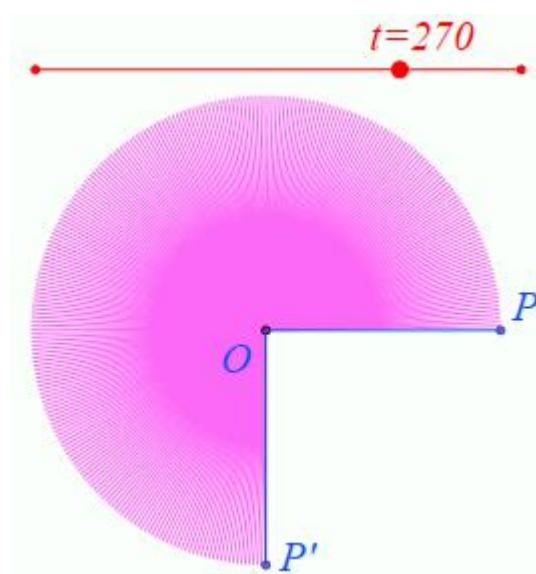
步骤 3：单击【旋转(三)】按钮，结果如下图所示，线段 OP 绕点 O 旋转得到线段 OP' ，中间的阴影部分就是线段 OP' 所经过的区域。



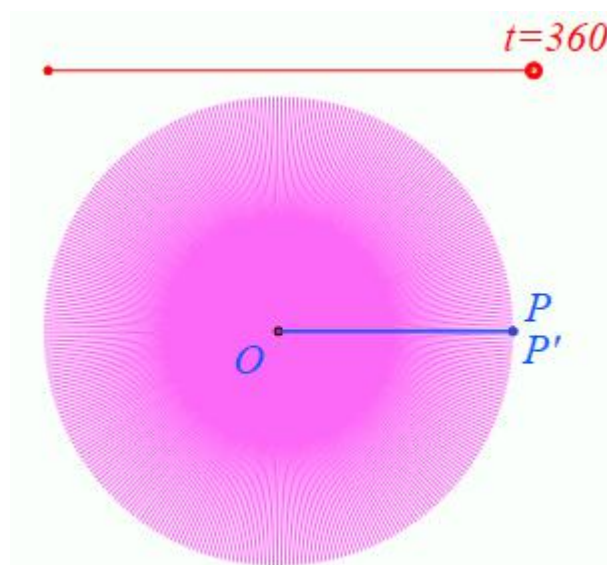
步骤 4：单击【旋转(四)】按钮，结果如下图所示，线段 OP 绕点 O 旋转得到线段 OP' ，中间的阴影部分就是线段 OP' 所经过的区域。



步骤 5：单击【旋转(五)】按钮，结果如下图所示，线段 OP 绕点 O 旋转得到线段 OP' ，中间的阴影部分就是线段 OP' 所经过的区域。



步骤 6：单击【旋转(六)】按钮，结果如下图所示，线段 OP 绕点 O 旋转得到线段 OP' ，中间的阴影部分就是线段 OP' 所经过的区域。



【探索与发现】

(a) 当 OP 没有开始旋转时, 线段 OP 与 OP' 的方向有什么关系? 它们所成的角度是多少?

结论: 相同; 0° .

(b) 当 OP 绕点 O 旋转一周之后, 就得到了一个周角, 线段 OP 与 OP' 的方向有什么关系? 它们所成的角度是多少?

结论: 相同; 360° .

(c) 当 OP 绕点 O 旋转半周之后, 线段 OP 与 OP' 的方向有什么关系? 它们所成的角度是多少? 再继续旋转多少度就能得到一个周角.

结论: 相反; 180° ; 180° .

(d) 当 OP 绕点 O 旋转 90° 之后, 线段 OP' 处于什么方向? 再继续旋转

多少度就能得到 180° 的角？

结论：竖直向上； 90° .

(e) 当 OP 绕点 O 旋转 270° 之后，线段 OP' 处于什么方向？再继续旋转多少度就能得到一个周角？

结论：竖直向下； 90° .

【多知道一点】

角度就是一个方向到另外一个方向的改变量.

在古代，人们认为 360 天为一年. 一年的时间正好观测到黄道面循环一周，而且那时用一种朴素的哲学上的统一观点认为 360 是一个世界上的常数. 因此后来在天文观测以及圆周丈量的时候就用 360 做为圆周的度数.

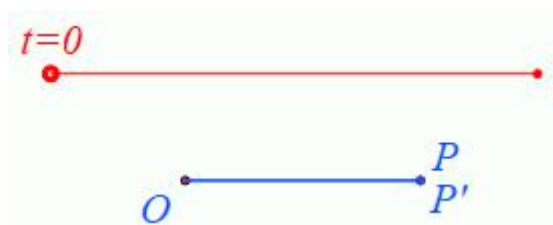
一条直线段绕它的端点旋转一周后回到原来的位置，旋转过的角度就是 360° 的一个周角.

那么线段 OP' 由水平向右的方向旋转到水平向左的方向，正好是周角的一半，那么旋转过的角度为 180° ，这时角的两条边 OP 和 OP' 在同一条直线上，角是平的，因此 180° 的角也叫作平角.

而当线段 OP' 由水平向右的方向旋转到水平向上的方向，正好是平角的一半，那么旋转过的角度为 90° ，这时角的两条边 OP 和 OP' 处于垂直关系，因此 90° 的角也叫作直角.

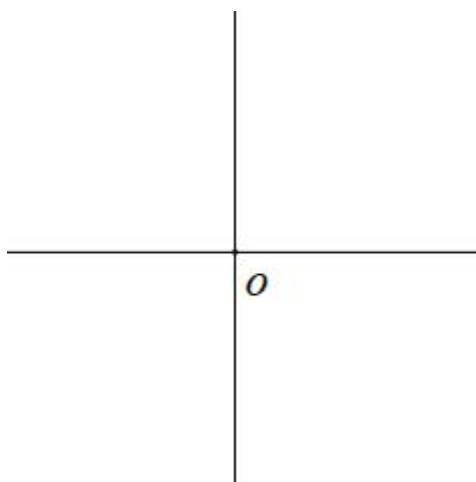
那么，现在你理解上面每个图形当中 t 的测量值所表示的含义了吗？

若单击【返回】按钮，结果如下图所示，线段 OP' 处于与线段 OP 相同的方向，这时我们可以认为线段 OP' 没有旋转，也可以认为它旋转过的角度为 0° 。



【思考与问题】

请你在下方分别绘制出 30° 、 45° 、 80° 、 100° 、 135° 、 150° 、 170° 的粗略图。

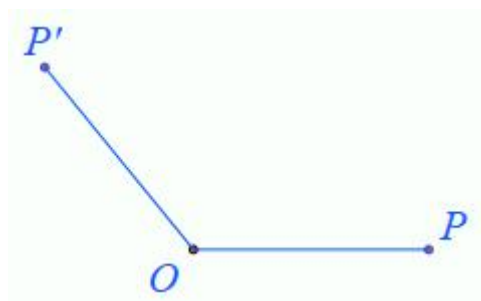
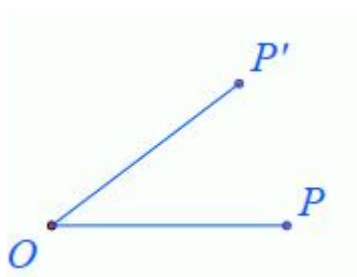


活动 3，各种各样角

我们知道的角有周角、平角、直角和 0° 的角.

除此之外，大家还规定小于 90° 的角叫做锐角，而把大于 90° 而小于 180° 的角叫做钝角.

锐，就是锐利；钝，就是不尖锐、不锋利. 如下图所示，锐角看起来比较尖锐，而钝角则不够尖锐、不够锋利.



我们把小于 0 的数称作负数，那么，有没有小于 0° 的角呢？

类似地，有没有大于 360° 的角呢？

在前面的研究过程中，我们知道， 0° 的角与 360° 的角对应的情况都是 OP' 与 OP 重合.



实际上， OP' 绕点 O 旋转 2 周、3 周之后，结果仍然是 OP' 与 OP 重合.

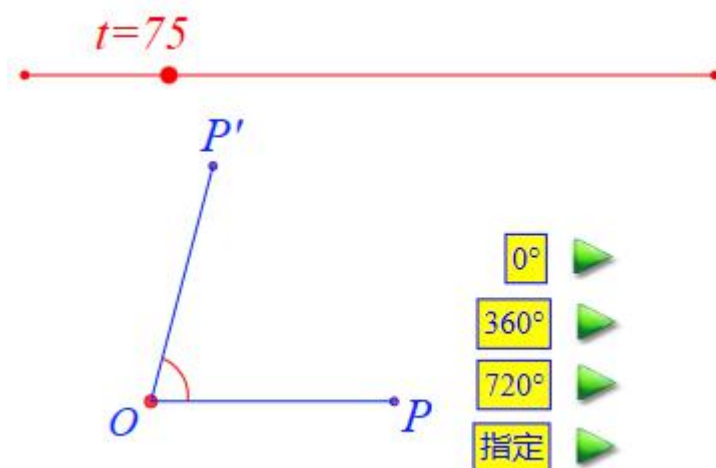
我们知道，角就是射线方向的改变量. 虽然结果都是 OP' 与 OP 重合，但是过程是不一样的，因此所表示的角度不同. 那么旋转 2 周得到的角度就应该是

720°，旋转 3 周得到的角度就应该是 1080°...

那么这就需要利用角的标注符号对不同的角度进行标示.

【动手与操作】

进入文件“角与方向.dmr”的下一页，如下图所示，有几个按钮和一个变量尺，通过单击按钮或者拖动变量尺可以观察到对应的角，以及角的标注符号.



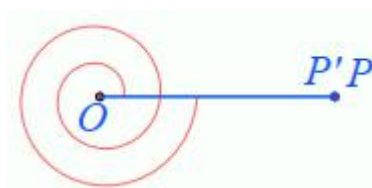
步骤 1：单击 0° 按钮，结果如下图所示，得到了一个 0° 的角.



步骤 2：单击 360° 按钮，结果如下图所示，得到了一个 360° 的角.



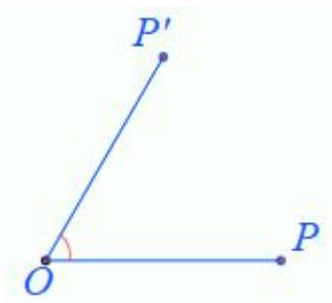
步骤 3：单击 720° 按钮，结果如下图所示，得到了一个 720° 的角.



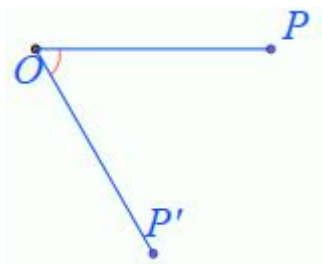
除此之外，虽然都是旋转，从 OP 的水平位置出发向上旋转 60° 与向下旋转 60° 的过程与结果都是不一样的。

就像我们之前规定数的正负一样，我们也可以规定角度的正负。例如就规定：向上旋转得到的角为正角，向下旋转得到的角为负角。

步骤 4：单击【指定】按钮，在弹出的对话框中，输入：60，单击【确定】即可得到一个 60° 的角，如下图所示。



步骤 5：单击【指定】按钮，在弹出的对话框中，输入：-60，单击【确定】即可得到一个 -60° 的角，如下图所示。



【多知道一点】

很快我们就发现，利用向上旋转和向下旋转分别规定正角与负角的方法，不规范，也不严谨。

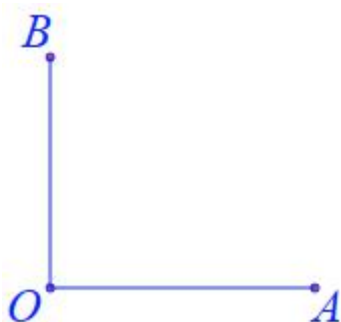
例如，当 OP 水平向右时，向上旋转得到 90° 的角时，如果继续旋转就是向

下旋转，那么角度就突然由正角变为负角.

因此，人们把钟表的指针转动方向为参照物，那么运动的方向可以分为两种：
与钟表指针转动的方向相同，或者与钟表时针转动的方向相反. 分别简称为：
顺时针方向和逆时针方向.

【问题与思考】

如下图所示，线段 OA 水平向右，线段 OB 竖直向上. 线段 OB 是由线段 OA 以点 O 为中心旋转而得到的. 那么这个角度是多少大？请你在下面的图形上同时把这个角度标示出来.

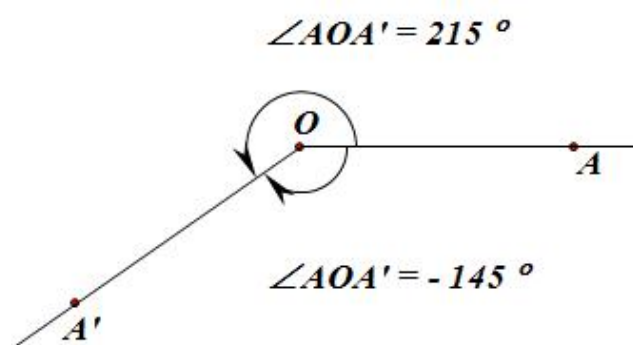


如果，线段 OA 是由线段 OB 以点 O 为中心旋转而得到的呢？

活动 4，多边形的角

我们认识了正角、负角，而且还了解了大于 360° 的正角. 当然，类似地，也有小于 -360° 的负角.

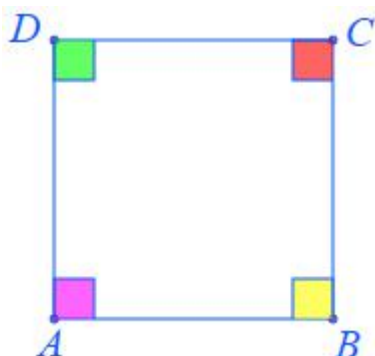
这样一来，从一个顶点出发的两条射线，所表示的角就有无数多个，而在 -360° 与 360° 之间的角就有两个，如下图所示.



这样，会给我们的学习、交流和研究带来一定的麻烦. 因此，今后在不做特别说明的情况下，我们所关注和研究的角就是小于平角的正角.

在这里， $\angle AOA'$ 是角的表示方法，第一个字母是角的始边上一点的名字，第二个字母是角的顶点，第三个字母是角的终边上一点的名字.

如下图所示，在正方形 ABCD 当中，有 4 个角小于平角的正角. 并且这四个角都在封闭图形的内部，所以叫做正方形的内角.

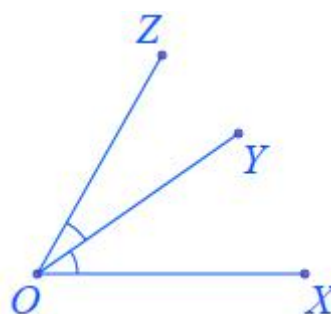


正就是不偏不斜，表示为相等；方就是直，表示为直角。所以正方形的意思就是：每个角都是直角、每条边都相等的四边形。

正方形的四个内角分别记作： $\angle DAB$ 、 $\angle ABC$ 、 $\angle BCD$ 、 $\angle CDA$ 。

在这里，每一个顶点处只有一个角，因此也可以简单地记作： $\angle A$ 、 $\angle B$ 、 $\angle C$ 、 $\angle D$ 。

而下面的情况，只能使用 $\angle XOY$ 、 $\angle YOZ$ 表示，而不能简单地表示成为 $\angle O$ 和 $\angle O$ 。



直角是角度大小为 90° 的角，而正方形有 4 个直角，因此它的四个内角正好组成一个周角，所以正方形的四个内角之和等于 360° 。

当然，这个性质对于长方形也成立，因为长方形也是有 4 个直角。不过，具有四个普通内角的一般四边形是否也具有这个性质呢？

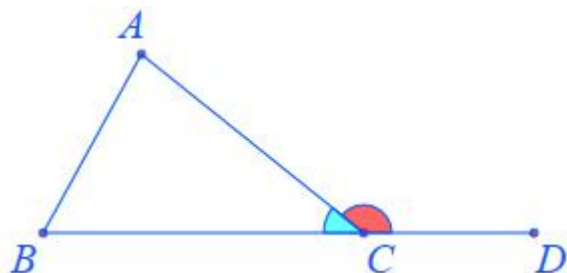
四边形有四个内角，三角形有三个内角。而且，三角形是最简单的封闭图形了，有三个顶点、三条边、三个内角。三角形的三个内角又具有哪些性质呢？

我们在研究点动成线的过程中，曾提到过一个点绕多边形的边界运动一周，方向改变的角度之和为周角的问题。接下来，我们重新回忆这个过程，然后顺便

解决多边形的内角和问题.

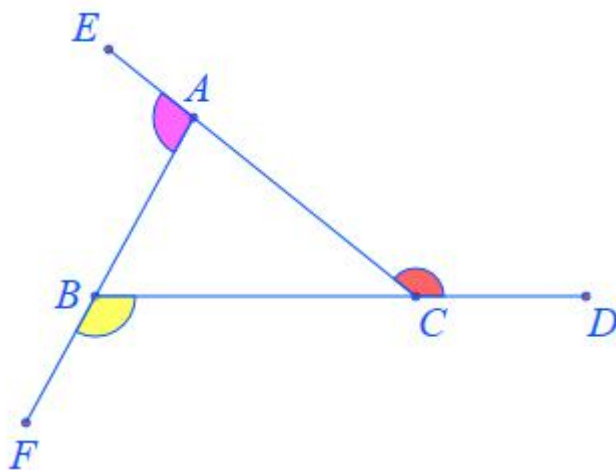
我们说：有内，也应该有外. 我们认识了内角，那么外角在哪里呢？

在三角形 ABC 当中，在点 C 处把 $\angle C$ 的一条边 BC 沿着三角形外部的方向延长，那么这条延长线与 $\angle C$ 的另外一条边 CA 所组成的角，我们把它称作是三角形 ABC 在点 C 处的外角，如下图所示.



在这里， $\angle BCA$ 与 $\angle DCA$ 之和形成了一个平角，即： $\angle BCA + \angle DCA = 180^\circ$.

举一反三，每个顶点处都有一个外角，那么就有三个外角，如下图所示.

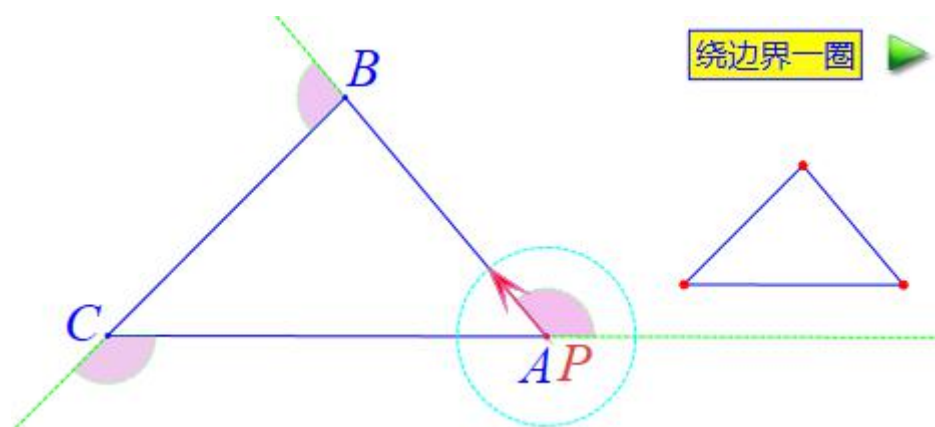


我们为什么要关注和研究三角形的外角呢？又为什么这样规定三角形的外角呢？

【动手与操作】

进入文件“角与方向.dmr”的下一页，有一个三角形 ABC，标示出了它的

三个外角.

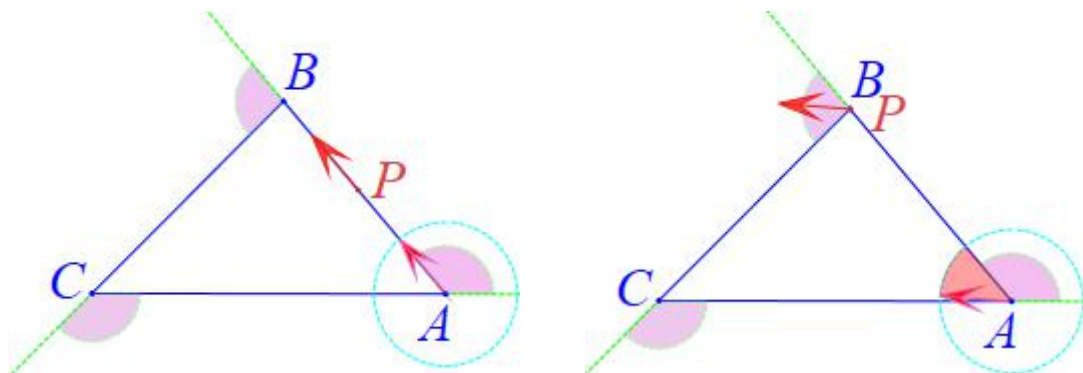


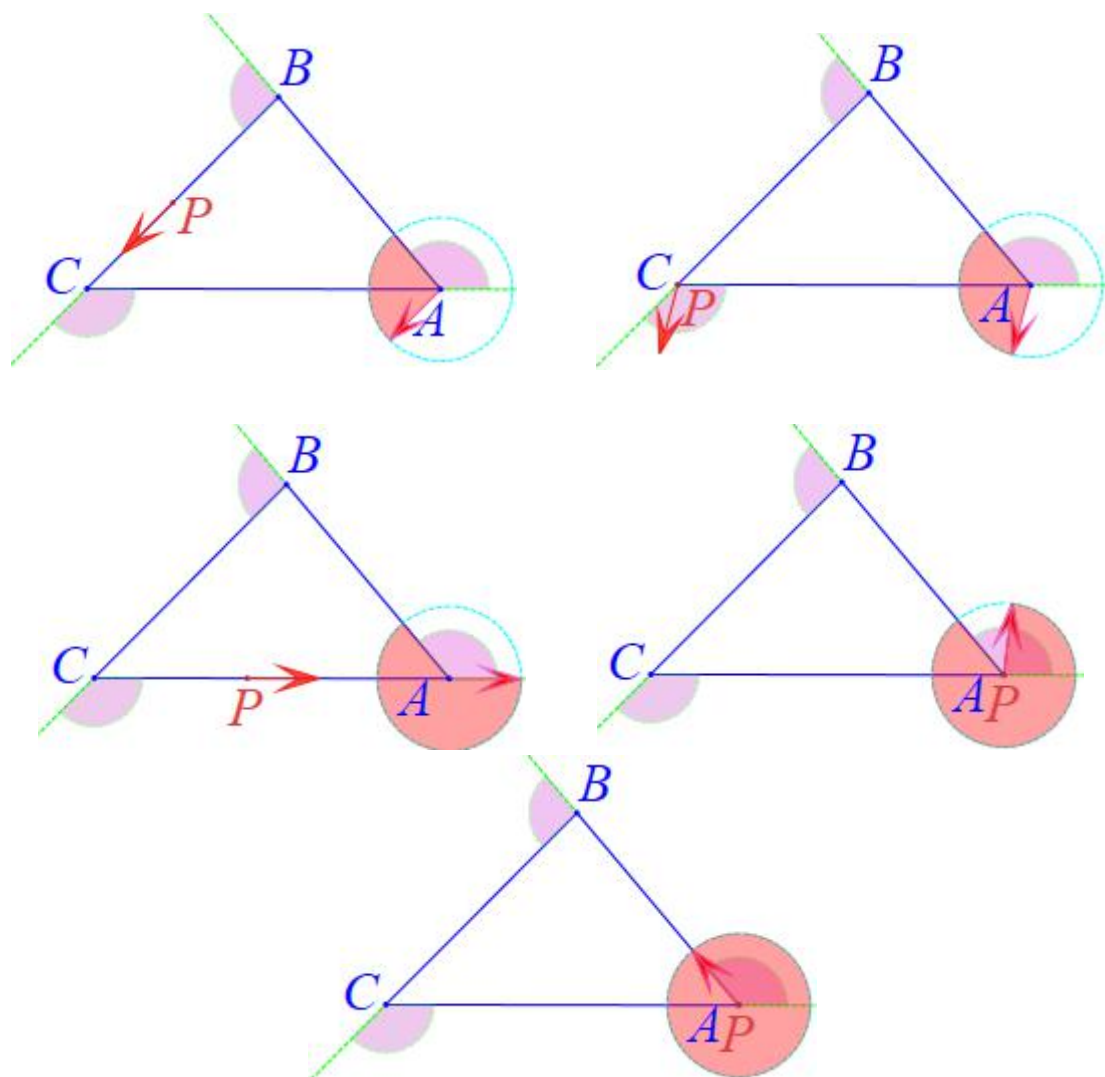
右侧三角形与三角形 ABC 具有相同的形状，并且拖动右侧三角形的红色顶点还可以同时改变它们的形状.

单击【绕三边界一圈】按钮，可以展示点 P 在三角形 ABC 的边界上运动一周的过程，红色箭头标示出了点 P 在每一个时刻的运动方向.

【探索与发现】

如下图所示，为红色箭头绕三角形的边界旋转一圈的过程中的几个瞬间.





(a) 运动的点 P 在边 AB 上，运动的方向有没有改变？若改变了，那么改变了多少？可以用 $\angle A$ 或 $\angle B$ 或 $\angle C$ 表示.

结论：没有改变.

(b) 运动的点 P 在顶点 B 处，运动的方向有没有改变？若改变了，那么改变了多少？可以用 $\angle A$ 或 $\angle B$ 或 $\angle C$ 表示.

结论：改变了， $180^\circ - \angle B$.

(c) 运动的点 P 在边 BC 上，运动的方向有没有改变？若改变了，那么改

变了多少？可以用 $\angle A$ 或 $\angle B$ 或 $\angle C$ 表示.

结论：没有改变.

(d) 运动的点 P 在顶点 C 处，运动的方向有没有改变？若改变了，那么改变了多少？可以用 $\angle A$ 或 $\angle B$ 或 $\angle C$ 表示.

结论：改变了， $180^\circ - \angle C$.

(e) 运动的点 P 在边 CA 上，运动的方向有没有改变？若改变了，那么改变了多少？可以用 $\angle A$ 或 $\angle B$ 或 $\angle C$ 表示.

结论：没有改变.

(f) 运动的点 P 在顶点 A 处，运动的方向有没有改变？若改变了，那么改变了多少？可以用 $\angle A$ 或 $\angle B$ 或 $\angle C$ 表示.

结论：改变了， $180^\circ - \angle A$.

(g) 运动的点 P 在三角形 ABC 的边界上运动一周的过程中，运动的方向有没有改变？若改变了，那么改变了多少？可以用 $\angle A$ 或 $\angle B$ 或 $\angle C$ 表示.

结论：改变了， $540^\circ - (\angle A + \angle B + \angle C)$ 或 360° .

【多知道一点】

那运动的点 P 在三角形 ABC 的边界上运动一周的过程中，运动的方向总共改变了一个周角，即 360° . 但运动方向的改变全部是在顶点处完成的，而在各

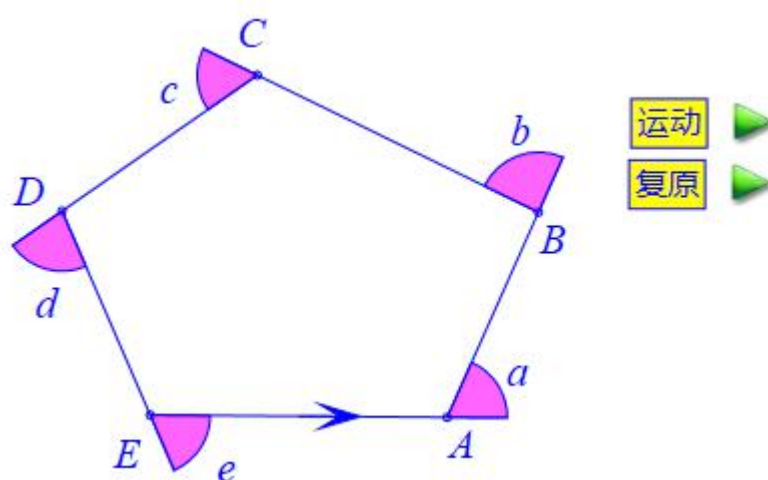
边上运动过程中没有改变. 因此, 在所有顶点处改变的角度之和等于周角.

而在每个顶点处所改变的角度, 就是这个图形在这个顶点处的外角, 因此:

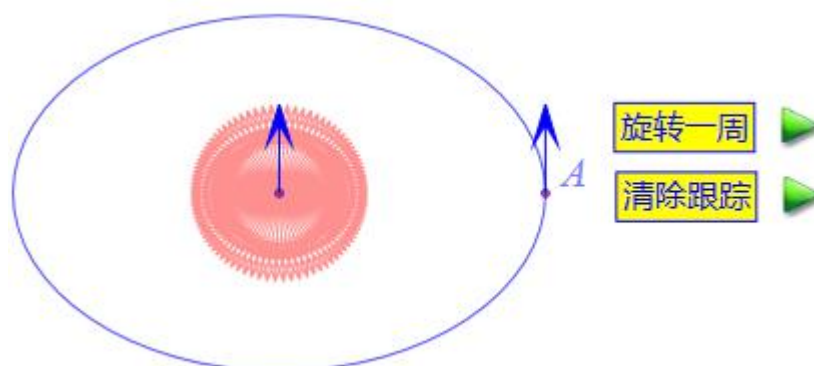
三角形的外角和为 360° .

容易验证: 对于正方形或长方形来说, 在每个顶点处改变的方向都是 90° , 因此四边形的外角也是 360° .

对于五边形来说, 会有怎样的情况呢? 进入“角与方向.dmr”的下一页, 可以观察到一个箭头绕一个五边形的边界旋转一周的过程.



如果绕着一个圆形或椭圆的边界呢? 进入“角与方向.dmr”的下一页, 可以观察到一个箭头绕一个椭圆的边界旋转一周的过程.



事实上, 一个箭头, 绕一个图形的边界旋转一周的过程中, 只要它总是按照同一个方向 (逆时针或顺时针) 转弯, 旋转过的角度都是一个周角, 即 360° .

这样一来，我们就能够轻松地知道，所有多边形的外角和都是 360° ，无论它是三角形、四边形、五边形...

【问题与思考】

(1) 由多边形的外角和，我们也可以轻松求得多边形内角和：

三角形的内角和为 _____ $^\circ$ ；

四边形的内角和为 _____ $^\circ$ ；

五边形的内角和为 _____ $^\circ$ ；

... ..

这是因为，在多边形的每一个顶点处，一个内角与一个外角之和为 180° ，若多边形有 n 的顶点，那么 n 组内角与外角之和为 _____。

而所有外角之和为 360° ，所以：

n 边形的内角之和为 _____。

通过前面探索与发现过程也可以检验这一个结论。例如，点 P 在三角形的边界上运动一周过程中，它的方向改变量为 $(180^\circ - \angle A) + (180^\circ - \angle B) + (180^\circ - \angle C)$ ，等于 360° ，所以：

$540^\circ - (\angle A + \angle B + \angle C) = 360^\circ$ ，算得：

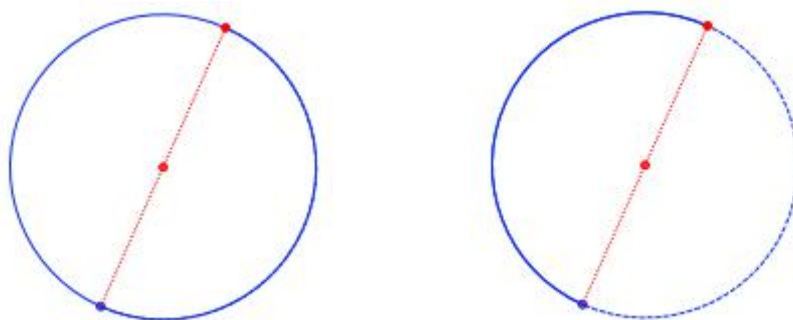
$\angle A + \angle B + \angle C = 180^\circ$ 。

(2) 在 n 边形的内角和公式 $n \times 180^\circ - 360^\circ$ 当中, 如果 n 为 2, 那么内角之和为: 0° , 这说明什么呢? 你能给出合理的解释吗?

十、图形对折

把一个图形沿着一条直线进行对折，如果直线两侧的两部分能够重合，我们就认为这个图形关于这条直线对称，这条直线叫做这个图形的对称轴，那么这个图形也叫做轴对称图形。

例如，在下图中，一个圆沿着它一条直径对折后，直径两侧的两个半圆能够完全重合。

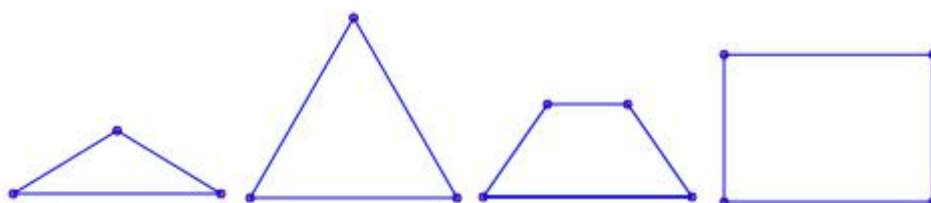


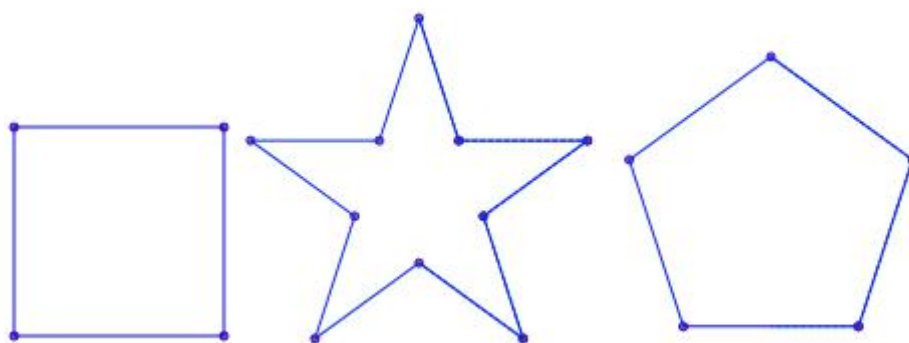
圆的这条直径，就是它的一条对称轴。

一个圆有无数多条直径，因此它有无数多条对称轴。也就是说，沿着圆的任意一条直径把圆进行对折，直径两侧的两个部分都能够重合。

我们知道，能够重合的两个图形，不但形状相同，大小也要相等。

我们知道的轴对称图形有很多，例如：等腰三角形、等边三角形、等腰梯形、长方形、正方形、正五边形、正五角星等等。





这些图形或者有一个，或者有两个，或者有三个，或者有四个，或者有五个对称轴... 它们虽然都不像圆一样有无数条对称轴，但是它们已经，非常幸运、足够特殊. 因为一般的图形，或者说绝大多数图形都不是轴对称图形.

不过，对于任何一个图形来说，只要选定了一条直线作为对称轴，然后绘制出这个图形关于这条直线的对称图形，那么整个图形就构成了一幅具有轴对称性质的图形.

那么，应该如何绘制一个图形关于一条直线的对称图形呢？这需要我们深入地研究和了解轴对称图形的数学关系.

因为具有轴对称性质的图形来说，对称轴两侧的两个部分，不但形状与大小完全相同，它们与对称轴之间的位置关系还有一定的要求.

活动 1，把线段对折

一条线段就是一条轴对称图形.

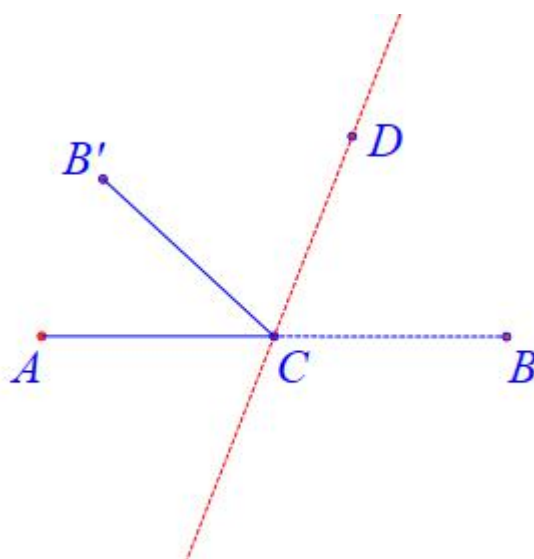
例如在一个硬纸片上有一条线段 AB ，经过它的中点 C 处的直线就可以把它分为能够完全重合的两部分.

若经过点 C 的直线为 CD ，当直线 CD 与直线 AB 具有什么关系时，才能保证将 CB 沿着 CD 翻折后能够与 CA 重合？

在很多时候探讨这个问题很重要，因为硬纸片或者其他材料的面板对折一次就会断开了，也就是说只能对折一次. 所以我们在进行对折之前，需要准确地找出对折的位置.

【探索与实验】

打开文件“图形对折.dmr”，如下图所示，点 C 是线段 AB 的中点，线段 CB' 是线段 CB 关于 CD 的对称图形，即 CB 以 CD 为轴翻折之后的图形.



步骤1：拖动点D，可以改变直线CD的方向，对应地线段CB'也会发生改变.

(a) 在上图中，有多少组长度相等的线段？请你分别找出来.

结论：3组； $CA=CB$ 、 $CB'=CB$ 、 $CB'=CA$.

(b) 在上图中，有多少组角度相等的角？请你分别找出来.

结论：1组； $\angle BCD=\angle B'CD$.

(c) $\angle ACB$ 等于多少？

结论：平角。

(d) 当 $C'B$ 与 CA 重合时， $\angle BCD+\angle B'CD$ 等于多少？ CD 与 AB 具有什么关系？

结论：平角；成 90° 的角，或者垂直.

【多知道一点】

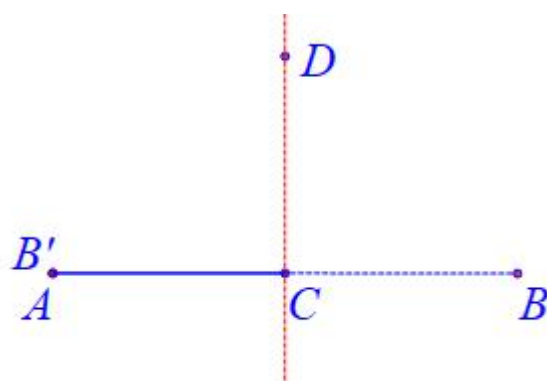
所谓对折，就是把平面内的一个图形，沿着一条直线在空间内翻折之后又回到了原来的平面内的过程.

翻折的过程是空间内实现的，翻折中的图形与原来的图形也不在同一个平面内.

我们今后讨论的内容，基本上是同一个平面内的问题。也即是说，关注翻折之前的状态与翻折之后的结果，而不基本不研究翻折的过程。

即使不关注空间内的翻折过程，也并不妨碍我们在平面内研究一个图形的轴对称性质，甚至是直接绘制出一个图形关于一条直线的轴对称图形。

通过前面的研究与探索，我们知道：当经过 AB 中点 C 的直线 CD 与 AB 垂直时，CB' 才能够与 CA 重合，如下图所示。



直线 CD 过 AB 的中点 C，保证了把直线分为长度相等的两部分。

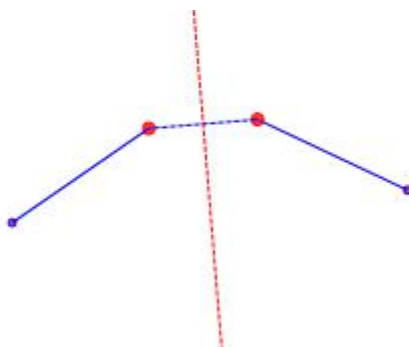
直线 CD 与 AB 垂直，才能保证 $\angle ACB' = 0^\circ$ ，即点 B' 与点 A 重合。

所以线段 AB 的对称轴是它的垂直平分线，即：过线段的中点且与线段垂直的直线，简称中垂线。

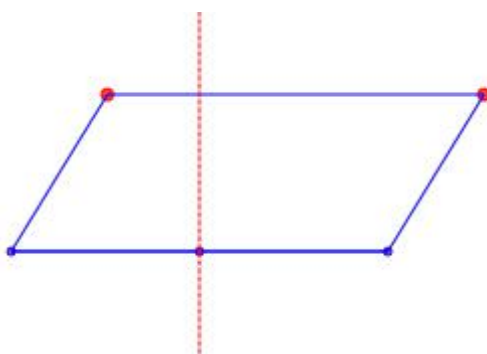
通过这个结论，我们立刻就可以确定以下几件事情：

1，在一个轴对称图形当中，绘制出一组对应点之间连线的中垂线，就得到了这个轴对称图形的一条对称轴。

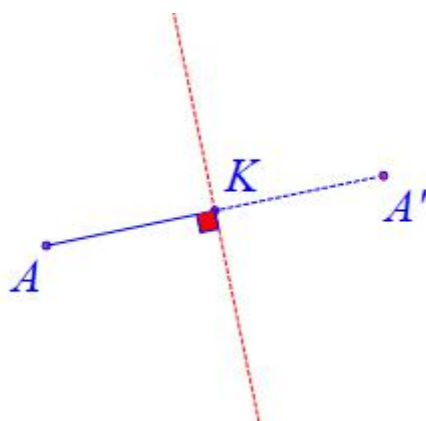
当然这条对称轴也是其他任何一组对应点之间连线的中垂线。



2，检验一条直线是否为一个图形的对称轴，连接两个对应点之间的线段，然后检验这条直线能否垂直且平分这条连线.



3，要绘制一个图形关于一条直线的轴对称图形，只要绘制出这个图形上的每个点到这条直线的垂线段，然后把垂线段延长 1 倍，就可以得到这个点的对应点.



【问题与思考】

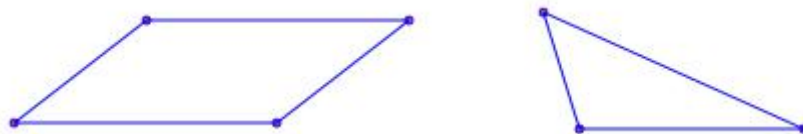
(1) 一个点，是轴对称图形吗？如果你认为不是，请说明理由；如果你认为是，那么它有多少条对称轴？请你在下方绘制出它的一条或多条对称轴.



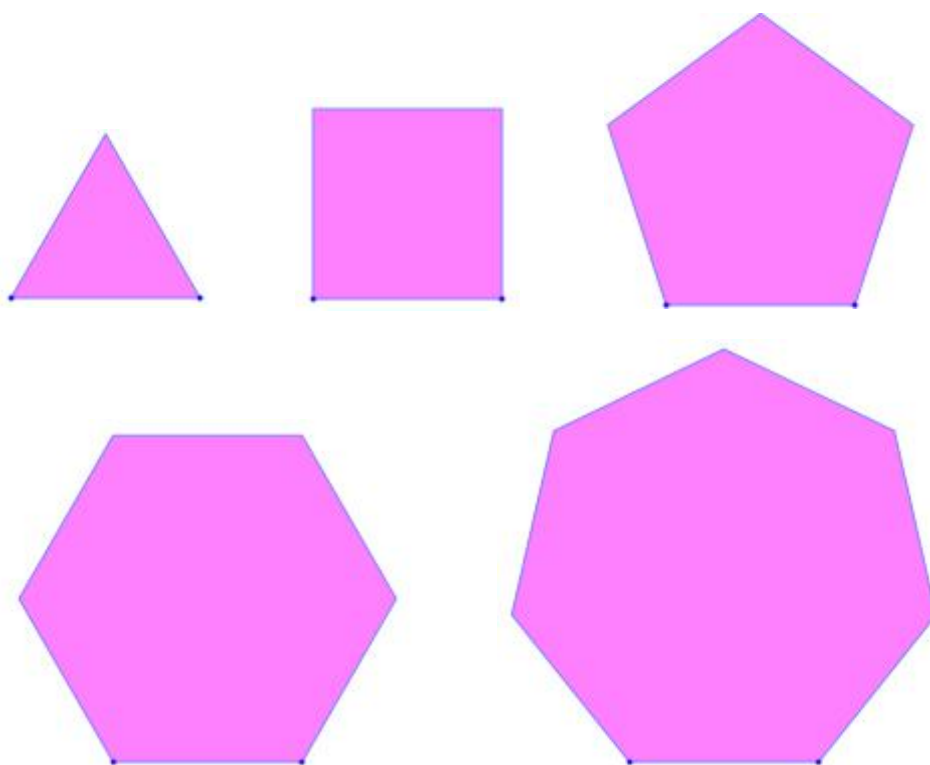
(2) 一条线段是轴对称图形，它的中垂线就是它的一条对称轴. 除此之外，它还有其他的对称轴吗？如果存在，请你在下方绘制出它的一条或多条对称轴.



(3) 一般的平行四边形是轴对称图形吗？一般的三角形呢？请分别说明其中的道理.

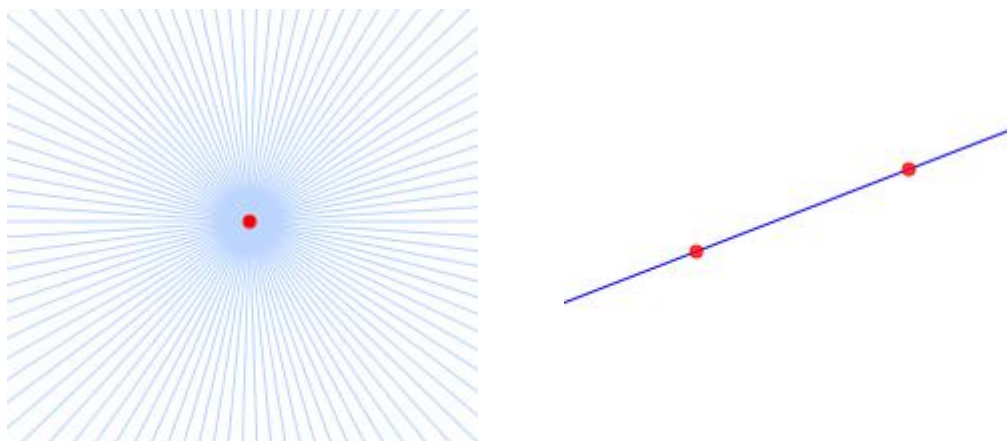


(4) 等边三角形、正方形、正五边形、正六边形、正七边形分别有多少条对称轴？想一想、画一画，它们有什么规律？请叙述你的发现。你认为正八边形和正九边形和正十边形分别有多少条对称轴？

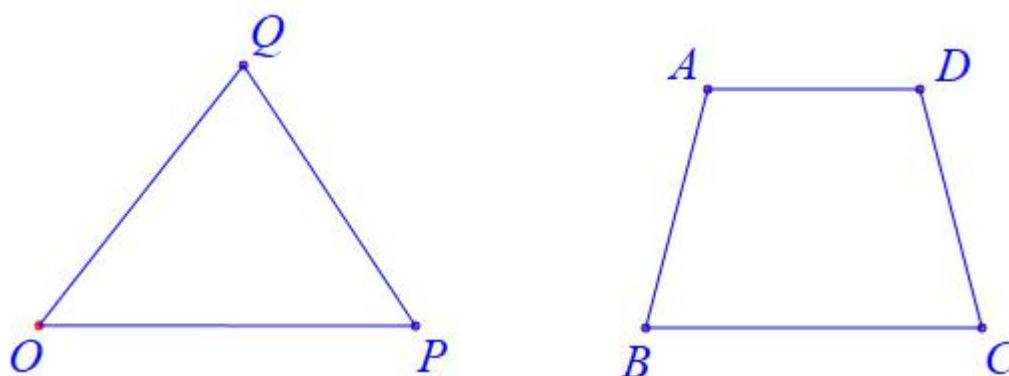


活动 2，检验轴对称

通过前面的研究我们知道，一个点也是轴对称图形，而且经过它的直线都是它的对称轴，因此有无数多条直线；一条线段也是轴对称图形，除了它的中垂线之外，它所在的直线本身也是它的对称轴。

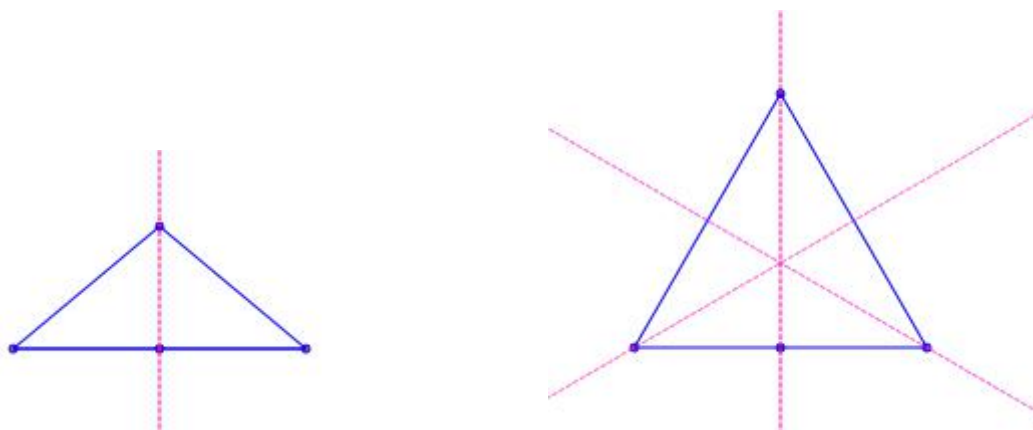


类似这样简单的图形，就能直接作出判断。然而对于稍微复杂的图形来说，就需要利用具体的研究才能进行判断。例如，下图中的三角形 ABC 和梯形 EFGH，它们是不是轴对称图形呢？

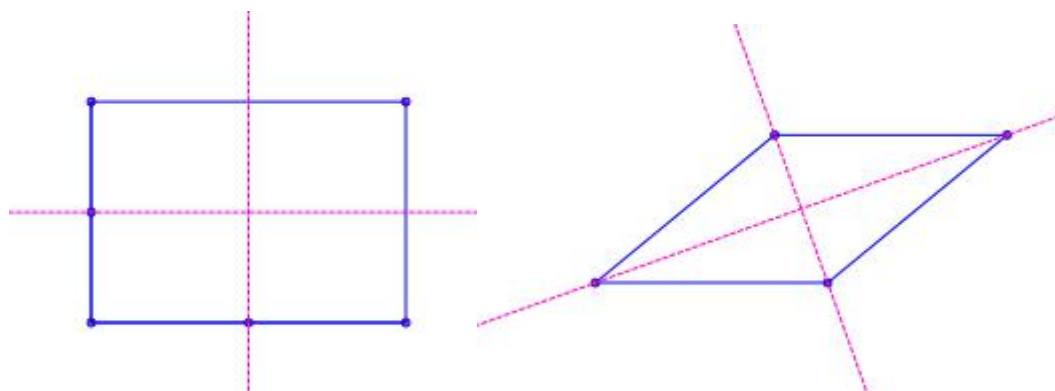


我们当然不能单靠肉眼观察就作出判断，需要思考和寻找恰当的数学方法进行探索和研究。

对于三角形来说，如果它是轴对称图形，那么它的一条对称轴一定经过一个顶点，同时也是另外两个顶点之间的中垂线。如果它有多条对称轴，那么每一条对称轴都满足这个规律。

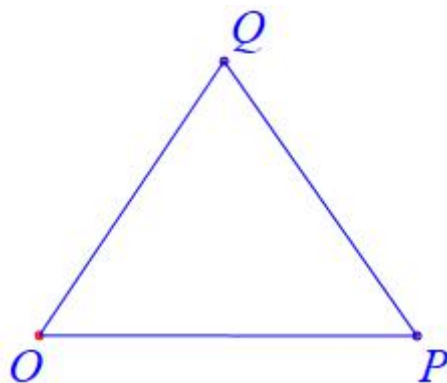


对于四边形来说，如果它是轴对称图形，两组顶点之间的中垂线重合，或者一组顶点之间的中垂线也是另一组顶点之间的中垂线。或者两点之间的连线是另外两点之间的中垂线。如果它有有多条对称轴，那么每一条对称轴都满足这个规律。



【探索与实验】

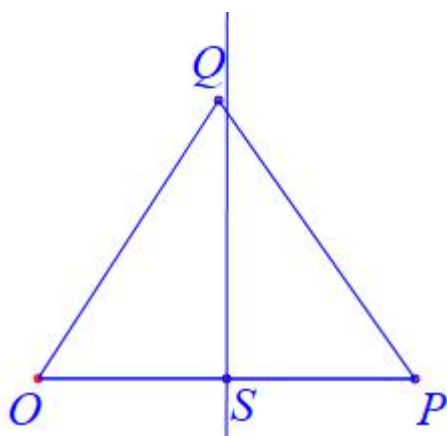
进入文件“图形对折.dmr”的下一页。如下图所示有一个三角形 ABC。



如果线段 OP 的中垂线是三角形 OPQ 的对称轴，那么它就一定经过点 Q 。那么我们可以先作出 OP 的中垂线，然后判断它是否经过点 Q 。

步骤 1：选择点 O 和点 P ，执行命令“中点”，做出线段 OP 的中点 S 。

步骤 2：选择点 S 和线段 OP ，执行命令“垂线”，做出经过点 S 垂直于 OP 的垂线，即线段 OP 的中垂线。如下图所示：



问题 1：线段 OP 的中垂线是否经过点 Q ？那么线段 OP 的中垂线是否为三角形 OPQ 的对称轴？

结论：不经过；不是。

一条直线是否经过一个点，有时候很难通过肉眼观察直接作出判断。那么如

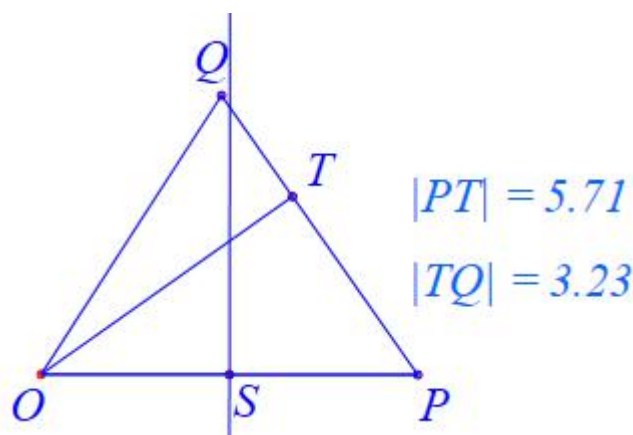
何判断一条直线是否经过某个一个点?或者说,如何判断一个点是否在某一条直线上?

在能够回答这类问题之前,我们是否能够思考并设计另外一种判断轴对称图形的方法?

我们也可以先做出一条经过点 P 的直线,若这条直线是三角形 OPQ 的对称轴,那么它应该是线段 OP 的垂直平分线,即垂直于 OP 并且把它分为相等的两部分.

步骤 3: 按照先后顺序,依次选择点 O 和线段 PQ,执行命令“垂足”,结果做出点 O 到线段 PQ 的垂足 T.

步骤 4: 按照先后顺序,依次选择点 P 和点 T,执行“距离”,得到点 P 到点 T 的距离测量值;类似地,测量点 T 到点 Q 的距离测量值.结果如下图所示:



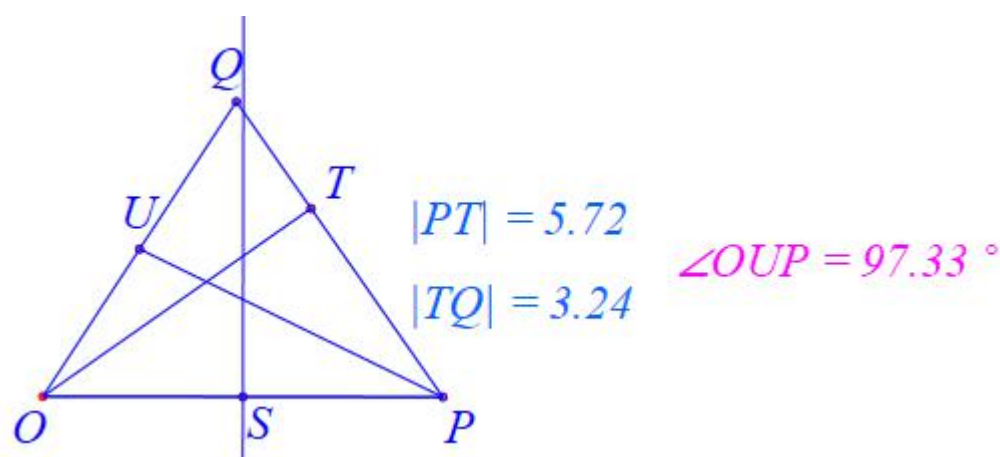
问题 2 :线段 PT 的长度测量值和线段 TP 的长度测量值相等吗?垂直于 PQ 的线段 OT 是否也平分线段 PQ? 线段 OT 是否为三角形 OPQ 的对称轴?

结论: 不相等; 不平分; 不是.

这是先作出了线段 PQ 的垂线，再判断是否把它平分。也可以先作出把它平分的直线，再判断是否与它垂直。

步骤 5：按照先后顺序，依次选择点 O 和点 Q，执行命令“中点”，结果做出线段 OQ 的中点 U；连接线段 PU。

步骤 4：按照先后顺序，依次选择点 O、点 U 和点 P，执行命令“角度”，得到 $\angle OUP$ 的测量值。结果如下图所示：



问题 3： $\angle OUP$ 等于直角吗？线段 PU 垂直于线段 OQ 吗？线段 PU 是否为三角形 OPQ 的对称轴？

结论：不等于直角；不垂直；不是。

【多知道一点】

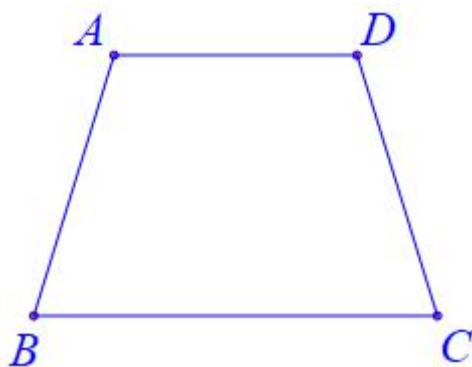
一个图形的对称轴，可能经过一个顶点，也可能经过两个顶点，还可能不经过任何顶点。这需要根据具体的问题进行具体的研究。

一个图形可能有一条对称轴，也可能有多条对称轴，还可能没有任何对称轴。

当判断一个图形是否为轴对称图形时，需要对每一种情况分别进行讨论与判断.

【问题与思考】

进入文件“图形对折”的下一页，如下图所示有一个梯形 ABCD.



请你设计两种方案，判断它是否为轴对称图形，叙述详细的实验过程和记录真实的实验结果.

活动 3，对称的特征

我们已经知道，对于一个轴对称图形来说，对应点之间的连线被对称轴垂直且平分，也就是说对应点到对称轴的距离相等。

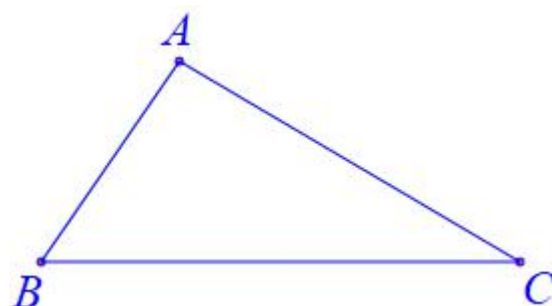
对于一个图形来说，包含了点、线、角等基本元素，那么轴对称图形当中对应边的长度是否会相等？对应角的大小是否也相等？

根据轴对称图形的概念，我们知道对称轴两侧的部分，通过把其中一部分翻折后能够与另外一部分重合的特征，可以知道对应的边具有相同过的长度，对应的角具有相同过的角度。

特殊图形所具有的特殊性质，在一般图形当中都是不存在的。如果我们能够经历一般图形变化到特殊图形的过程，那么对于特殊图形的特殊性质的认识就会更加深刻与透彻。

【探索与实验】

进入文件“图形对折.dmr”的下一页，如下图所示有一个三角形 ABC，其中点 A 可以被任意拖动，从而改变三角形 ABC 的形状。



步骤 1：选择点 B 和点 C，执行命令“中点”，作出边 BC 的中点 D；连接

线段 AD.

步骤 2：选择点 A 和线段 BC，执行命令“垂足”，作出顶点 A 到边 BC 的高线 AE.

步骤 3：按照先后顺序，依次选择点 A、点 B 和点 C，执行命令“角度”，得到 $\angle ABC$ 的测量值；类似地，测量 $\angle ACB$ 的值.

步骤 4：选择点 A 和点 B，执行命令“距离”，得到线段 AB 的长度测量值；类似地，测量线段 AC 的长度.

拖动点 C，观察 AB 与 AC 的长度测量值、 $\angle ABC$ 与 $\angle ACB$ 的测量值以及直线 AD 与直线 AE 的位置关系，然后回答下面的问题：

问题 1：当点 D 与点 E 不重合时，直线 AD 与直线 AE 重合吗？线段 AB 与线段 AC 的长度相等吗？ $\angle ABC$ 与 $\angle ACB$ 的大小相等吗？

结论：不重合；不相等；不相等.

问题 2：当点 D 与点 E 重合在一起时，直线 AD 与直线 AE 是否重合？线段 AB 与线段 AC 的长度是否相等？ $\angle ABC$ 与 $\angle ACB$ 的大小是否相等？

结论：重合；相等；相等.

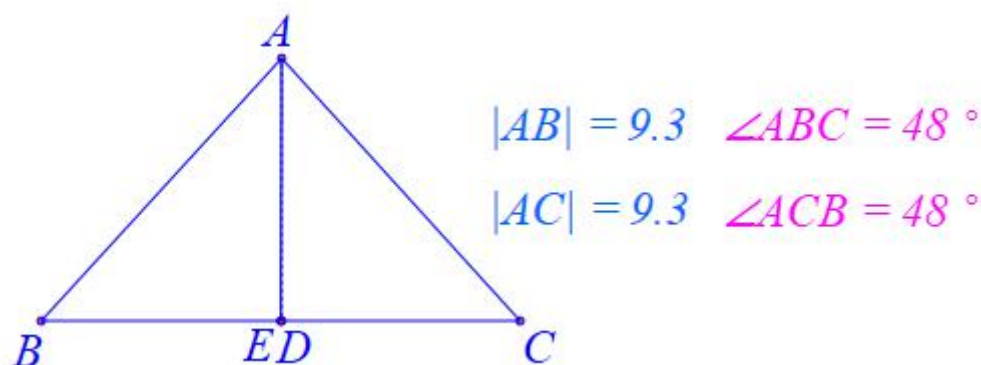
【多知道一点】

点 D 是边 BC 的中点，AD 被称作是三角形 ABC 的边 BC 的中线.

AE 垂直于边 BC，并且垂足 E 在边 BC 上，AE 被称作是三角形 ABC 的边

BC 上的高线，简称高.

当点 D 与点 E 重合时，中线 AD 也垂直于 BC，高线 AE 也平分了 BC. 这时，中线 AD 或高线 AE 都是三角形 ABC 的对称轴，把三角形 ABC 分割为完全相同的两部分，因此这时有： $AB=AC$ 、 $\angle ABC=\angle ACB$.



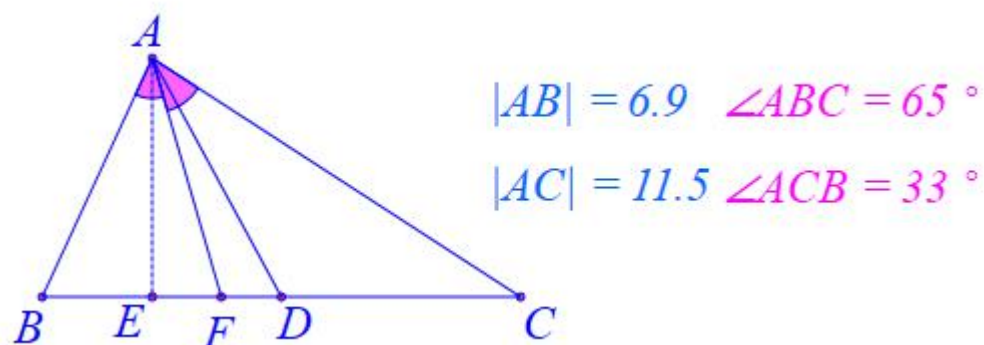
而且这时 $\angle BAC$ 也被平分为相等的两部分，即 $\angle BAD=\angle CAD$ 或 $\angle BAE=\angle CAE$.

经过一个角的顶点的直线如果把这个角分为相等的两部分，这条直线被称为这个角的分角线，也叫做角平分线.

这时候，AD 和 AE 都是 $\angle BAC$ 的角平分线. 但是在一般情况下，三角形的中线或高线未必是角平分线，也可以说，一个角的角平分线未必是对边的中线或高线.

【问题与思考】

进入文件“图形对折.dmr”的下一页，如下图所示，AD、AE 和 AF 分别是三角形 ABC 的中线、高线和角平分线.



拖动点 A，观察测量数据和图形的变化规律.

当 AB 与 AC 的长度相等时， $\angle ABC$ 与 $\angle ACB$ 也相等，这是点 D 与点 E 会重合，点 F 与点 D 和点 E 也会重合吗？

我们知道三角形面积的计算公式是：底 \times 高 $\div 2$. 那么，三角形的中线 AD 就把三角形分为面积相等的两部分.

三角形的高线 AE 分割得到的两部分的面积有什么关系？

三角形的角平分线 AF 分割得到的两部分呢？

活动 4，绘制对称形

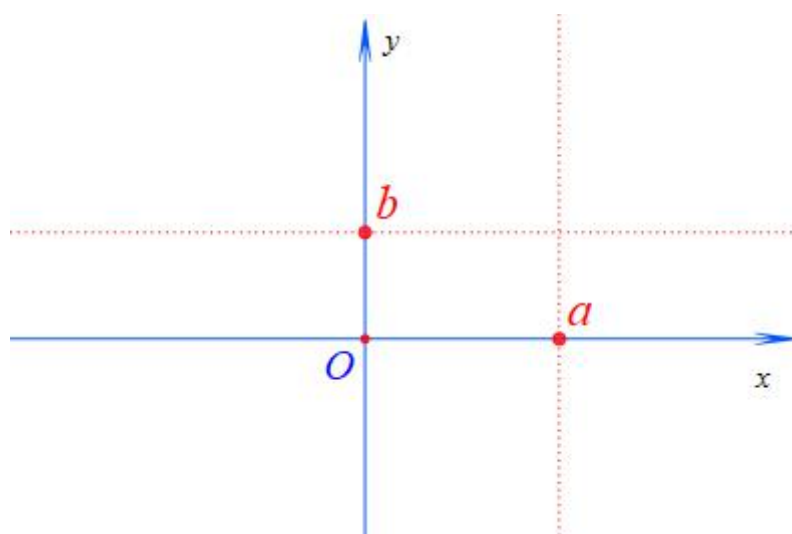
在完全弄清楚了轴对称图形的数学概念和数学性质之后，我们就可以动手绘制一个图形关于一条直线的轴对称图形了。

之前我们学习了坐标轴，了解了利用数组表示点和直线的方法。因此我们可以利用坐标研究并绘制轴对称图形。

为了方便起见，我们还可以明确一些特殊直线的表示方法。

例如，经过 x 轴上一点 $A(a,0)$ 的竖直直线，可以用 $x=a$ 表示，这是因为这条直线上所有点的 x 坐标都等于 a 。

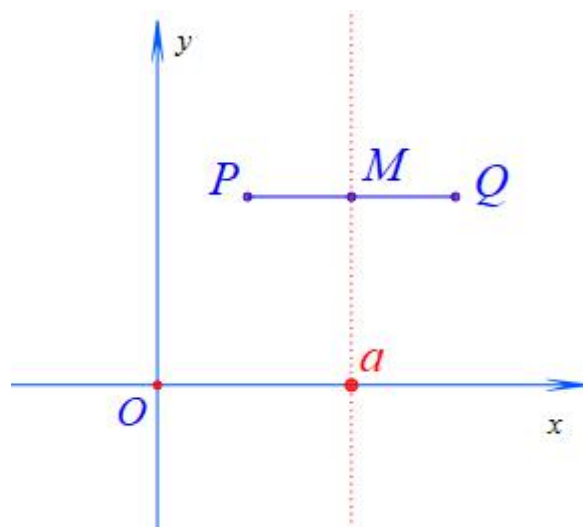
类似地，经过 y 轴上一点 $B(0,b)$ 的水平直线，可以用 $y=b$ 表示，这是因为这条直线上所有点的 y 坐标都等于 b 。



这样一来， x 轴可以用 $y=0$ 表示， y 轴也可以用 $x=0$ 表示。

那么，平面上一个点 $P(x, y)$ 关于竖直直线 $x=a$ 的对称点在哪里？坐标是什么？它关于水平直线 $y=b$ 的对称点呢？

先探索和研究点 $P(x, y)$ 关于直线 $x=a$ 的对称点 Q 。



因为直线 $x=a$ 是竖直方向，而线段 PQ 被直线 $x=a$ 垂直且平分，所以点 Q 的 y 坐标等于点 P 的 y 坐标，等于 y 。因此可以设点 Q 的坐标为 (x', y)

设 PQ 与直线 $x=a$ 相交于点 M ，那么点 M 的坐标可以表示为 (a, y) 。这是因为，它在直线 $x=a$ 上，并且在线段 PQ 上。

又因为点 M 就是 PQ 的中点，所以有 $x' - a = a - x$ 或 $2a = x' + x$ ，可以解得：

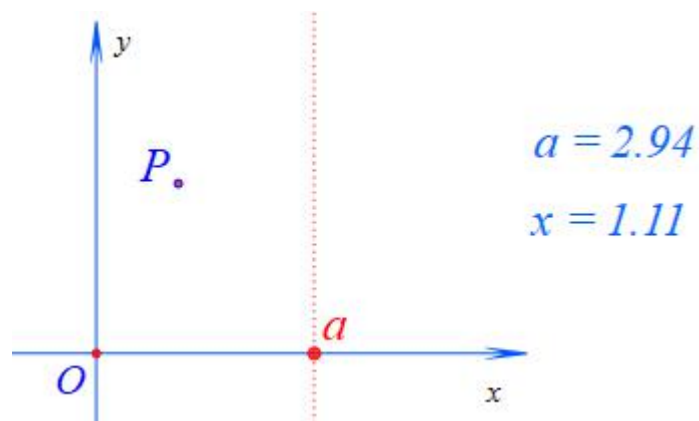
$$x' = 2a - x.$$

所以点 Q 的坐标是 $(2a - x, y)$ ，它完全是由点 P 的坐标 (x, y) 和直线 $x=a$ 所表示的。

通过实验检验我们所得到的结论。

【探索与实现】

进入文件“图形对折.dmr”的下一页，如下图所示，

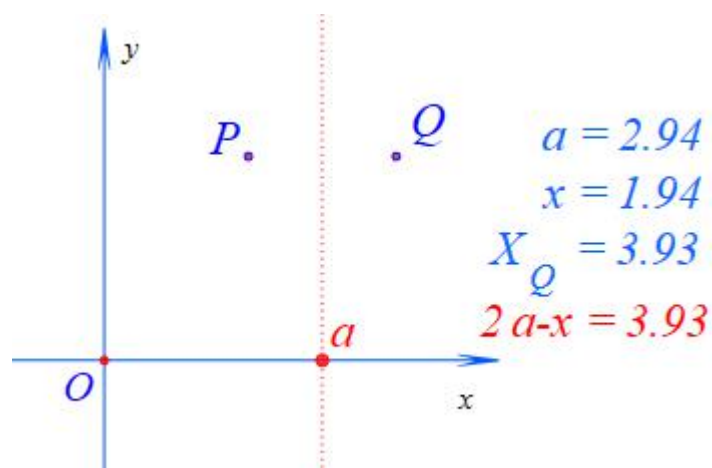


步骤 1：按照先后顺序，依次选择点 P 和直线 $x=a$ ，执行命令“反射”，结果做出点 Q.

步骤 2：选择点 Q，执行命令“y 坐标”，得到点 Q 的 y 坐标的测量结果.

步骤 3：执行命令“表达式...”，计算 $2*a-x$ 的值.

结果如下图所示：



拖动点 P，或者拖动点 a，观察测量数据的变化规律，然后回答下面的问题.

问题 1：拖动点 P，当点 P 在靠近直线 $x=a$ 的过程中，点 Q 靠近还是远离直线 $x=a$ ？当点 P 远离直线 $x=a$ 的过程中呢？

结论：靠近；远离.

问题 2：拖动点 a ，当直线 $x=a$ 靠近点 P 的过程中，直线 $x=a$ 是靠近还是远离点 Q ？当直线 $x=a$ 远离点 P 的过程中呢？

结论：靠近；远离.

问题 3：向右拖动点 P ，点 Q 向左运动还是向右运动？向左拖动点 P 呢？

结论：向左运动；向右运动.

问题 4：向右拖动直线 $x=a$ ，点 Q 向左运动还是向右运动？向左拖动直线 $x=a$ 呢？

结论：向右运动；向左运动.

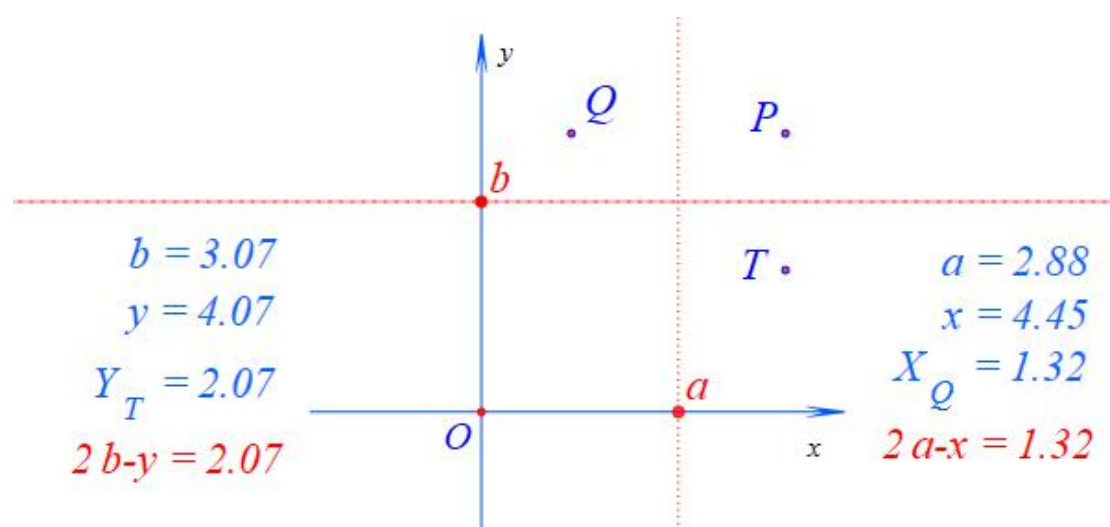
问题 5：在上述过程中，点 Q 的 x 坐标与 $2a-x$ 的值是否始终成立？

结论：是的.

类似地，点 $P(x, y)$ 关于直线 $y=b$ 的对称点 T 的坐标应该如何表示呢？

参照之前的方法，我们可以推导出点 T 的坐标为： $(x, 2b-y)$ 。

进入文件“图形对折.dmr”的下一页，如下图所示，拖动点 P 或点 b ，也可以继续检验我们所得到的结论。



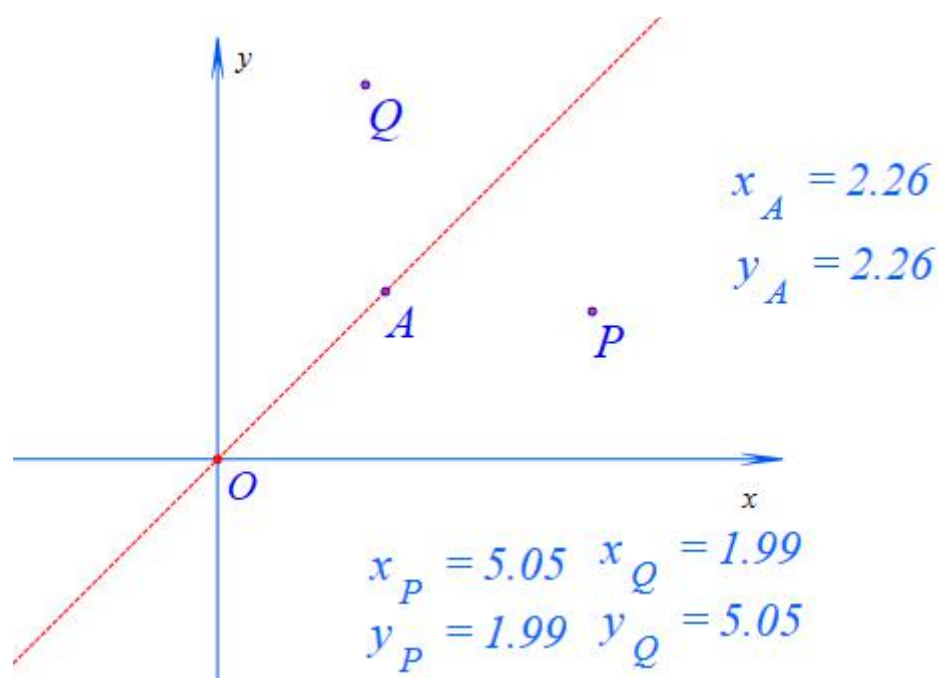
【多知道一点】

相对于 $x=a$ 和 $y=b$ 这种竖直方向和水平方向的直线，大部分直线都是倾斜的。例如我们可以用数组 (a, b, Θ) 经过点 (a, b) 、倾斜角为 Θ 的直线。

那么平面内的一个点 $P(x, y)$ 关于直线 (a, b, Θ) 的对称点的坐标应该如何表示呢？

同时，其他一般的直线是否也可以使用类似于 $x=a$ 或 $y=b$ 的等式进行表示呢？我们先了解和研究比较简单的一种直线，其他类型的直线以后我们再进行专门的探索与研究。

进入文件“图形对折.dmr”，如下图所示，红色虚线是经过原点 O 并且与 x 轴成 45° 角的一条直线，点 A 是红色直线上一点。



拖动点 A ,可以发现始终有 $x_A=y_A$,那么我们可以把这条直线表示成为 $y=x$,这是因为它表明了这条直线上每个点的 x 坐标与 y 坐标之间的数量关系.

当然直线 $x=a$ 与 $y=b$ 也是表明了直线上每个点的 x 坐标与 y 坐标之间的数量关系：直线 $x=a$ 表示的意义是无论 y 坐标等于多少， x 坐标都等于 a ；直线 $y=b$ 表示的意义是无论 x 坐标等于多少， y 坐标都等于 b .

也可以说，类似于 $x=a$ 、 $y=b$ 、 $y=x$ 这些等式，更像是描述了直线上所有的点所具有的特征.

【问题与思考】

拖动点 P ,观察点 P 与点 Q 的坐标变化规律，然后根据你所发现的规律，猜测点 $P(x, y)$ 关于直线 $y=x$ 对称点的坐标，之后进一步进行检验和验证.

活动 5，小鸡照镜子

最常见的轴对称图形，就是人们照镜子的情景。镜子里面和镜子外面的事物组合在一起，就构成了一幅轴对称图案。从侧面观察镜子，镜子就变成了一条直线，这条直线就是整个对称图形的对称轴。

反过来，在我们学习了绘制轴对称图形的方法之后，就可以通过绘制一个图形关于一条直线的对称图形，从而了解和研究照镜子的时候的一些行为与特征。

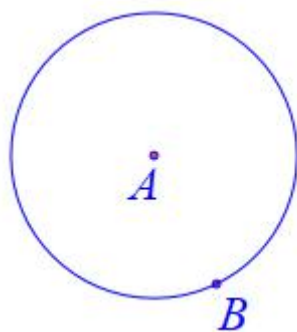
为了简便起见，我们可以绘制一个简单的图形，例如一个小鸡，然后任意选择一条直线，构造这个图案的轴对称图形。

【探索与实验】

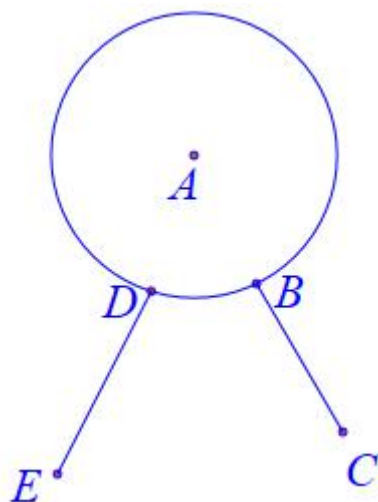
进入文件“图形对折.dmr”的下一页，有一个空白页面。

先让我们动手绘制一只快乐的小鸡。

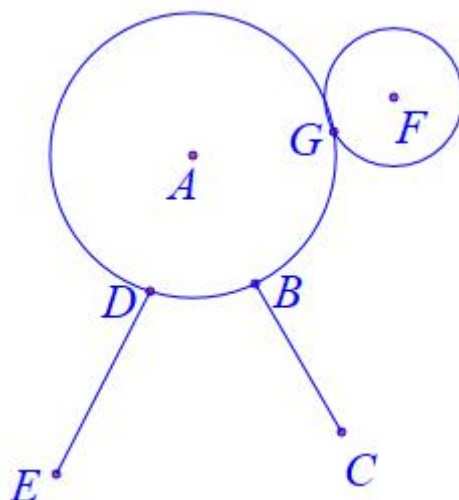
步骤 1：单击【画图】工具，进入画图状态；单击鼠标右键，并按住拖动一段距离后松开，作出以点 A 为圆心、经过点 B 的圆，如下图所示。可以把这个圆 A 当作小鸡的身躯。



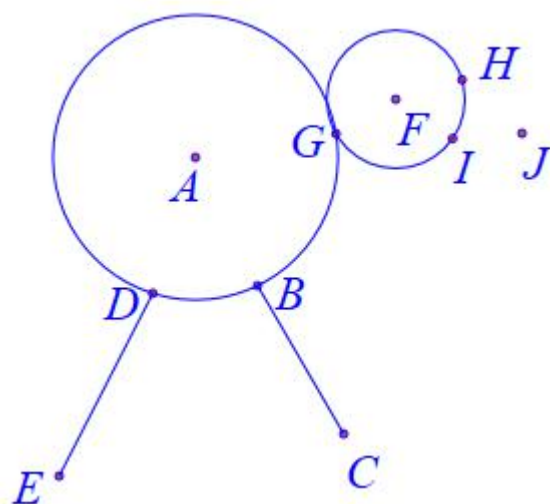
步骤 2：绘制出任意线段 BC；在圆 A 上任取一点 D 并画线段 DE，如下图所示，可以把线段 BC 和 DE 当作小鸡的两只脚。



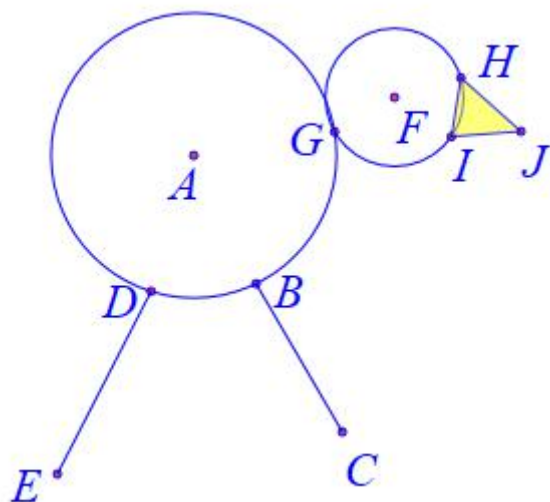
步骤 3：在圆 A 之外右键单击鼠标，并按住拖动到圆 A 上之后松开，作出以点 F 为圆心、经过点 G 的圆，其中点 G 在圆 A 上，如下图所示，可以将圆 F 当作小鸡的头部。



步骤4：在圆F上任取两点H、I，在圆F外任取一点J，如下图所示，将点H、点I和点J所在的多边形当作小鸡的嘴部。



步骤5：单击【选择】工具，返回到选择状态；按住【Ctrl】键，分别单击点H、点I和点J（就可以将它们同时选中），执行命令“多边形”，作出多边形HIJ，就把小鸡的嘴巴绘制出来了。



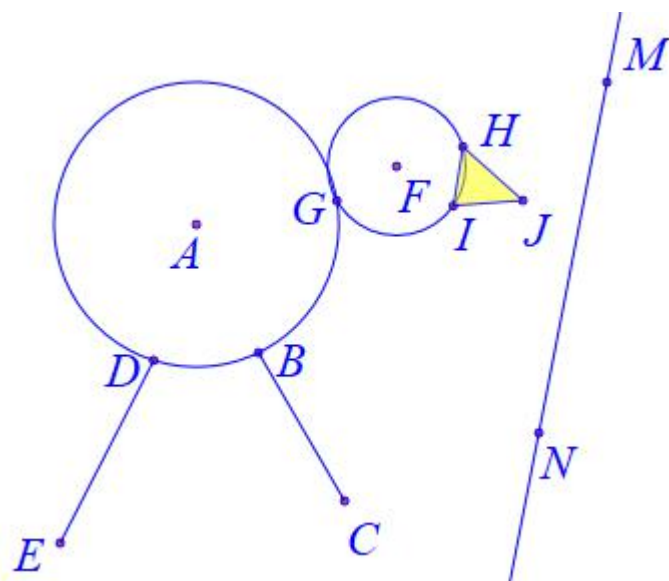
然后在小鸡面前竖起一面镜子：画一条直线作为对称轴，再绘制小鸡关于直线的对称图形.

步骤 6：单击【画图】工具，进入绘图状态；在小鸡的前方分别单击鼠标两次，任意取两个点 K、L.

步骤 7：单击【选择】工具，重新返回到选择状态；鼠标右键单击点 K，在弹出的属性对话框中，如下图所示，将其名字修改为 M；重复类似操作将点 L 的名字修改为 N.



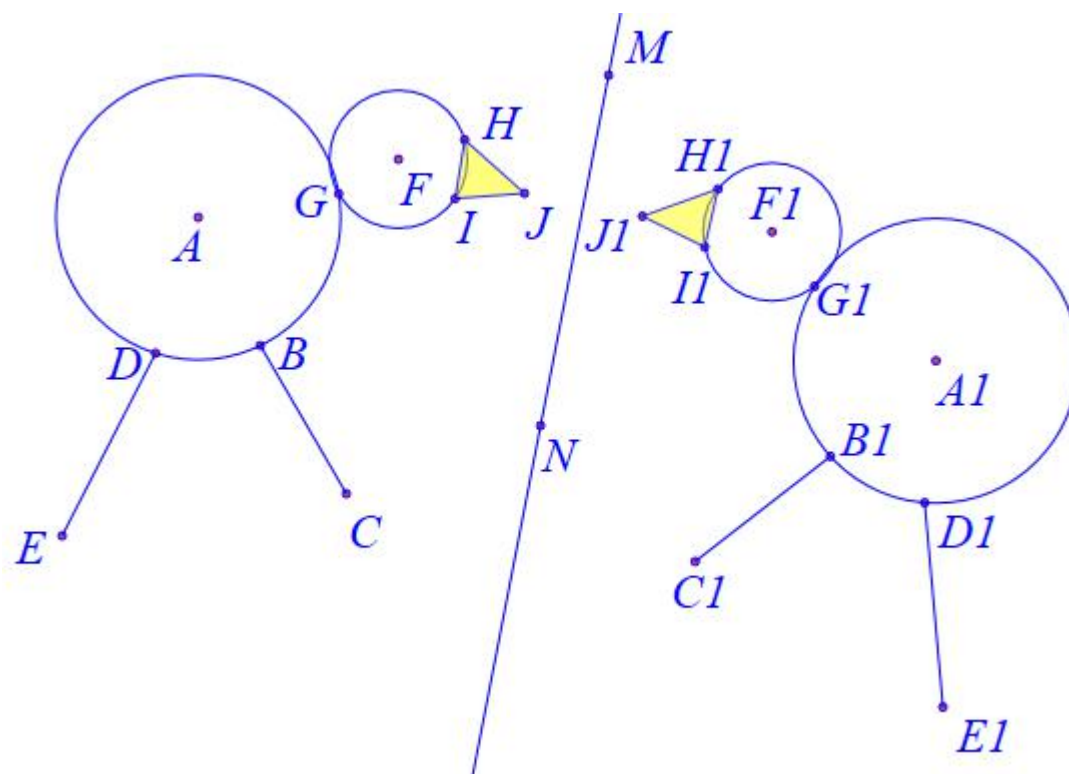
步骤 8：同时选择点 M 和点 N，执行命令“直线”，作出直线 MN，如下图所示，可以将直线 MN 当作小鸡前面的镜子.



步骤 9：在什么都没有选择的情况下，在空白处右击鼠标，在弹出的窗口中的“其他”标签下，如下图所示，在弹出的用户对话框中输入 A1，单击【确定】按钮完成。

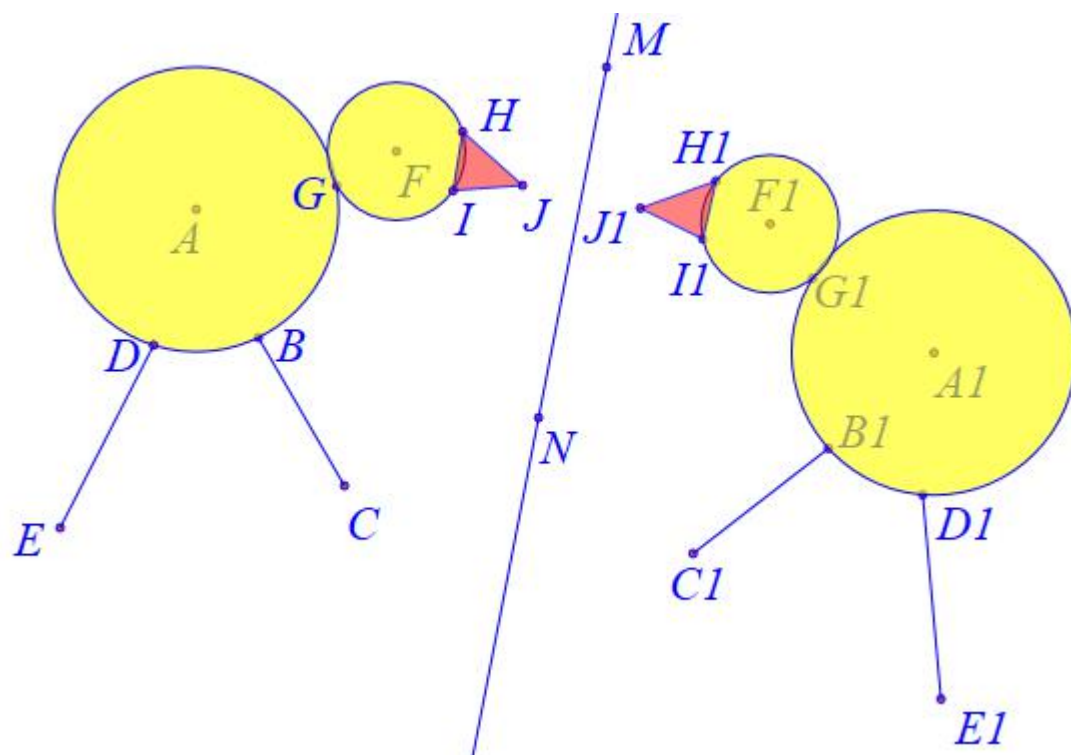
下一个点的名字:

步骤 10：按住【Ctrl】键，按照顺序依次选择点 A、点 B、点 C、点 D、点 E、点 F、点 G、点 H、点 I、点 J、线段 BC、线段 DE、圆 F、圆 A、多边形 HIJ 和直线 MN，执行命令“关于直线对称”，结果得到了镜子中的小鸡关于直线 MN 的轴对称图案。



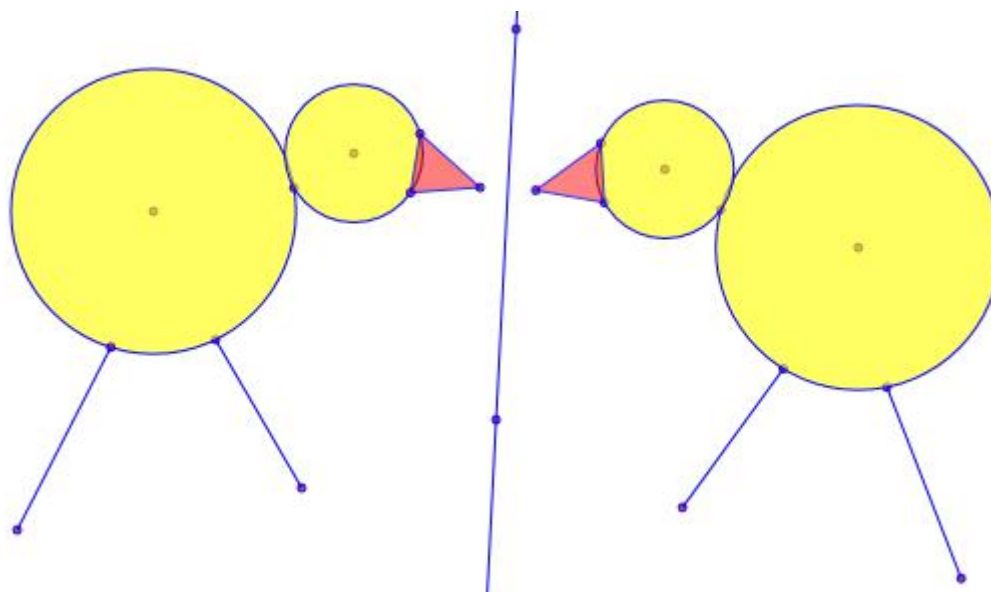
步骤 13: 选择小鸡的嘴巴所在的两个三角形，单击“属性”菜单下“填充颜色”子菜单中的“红色”命令，把小鸡的嘴巴修改为粉红色。

步骤 14: 选择四个圆，单击“属性”菜单下“填充颜色”子菜单中的“黄色”命令，把小鸡的身体颜色修改为浅黄色。结果如下图所示：



为了让整个图形界面看起来比较整洁，我们可以把所有点的名字都隐藏掉，
操作过程是：

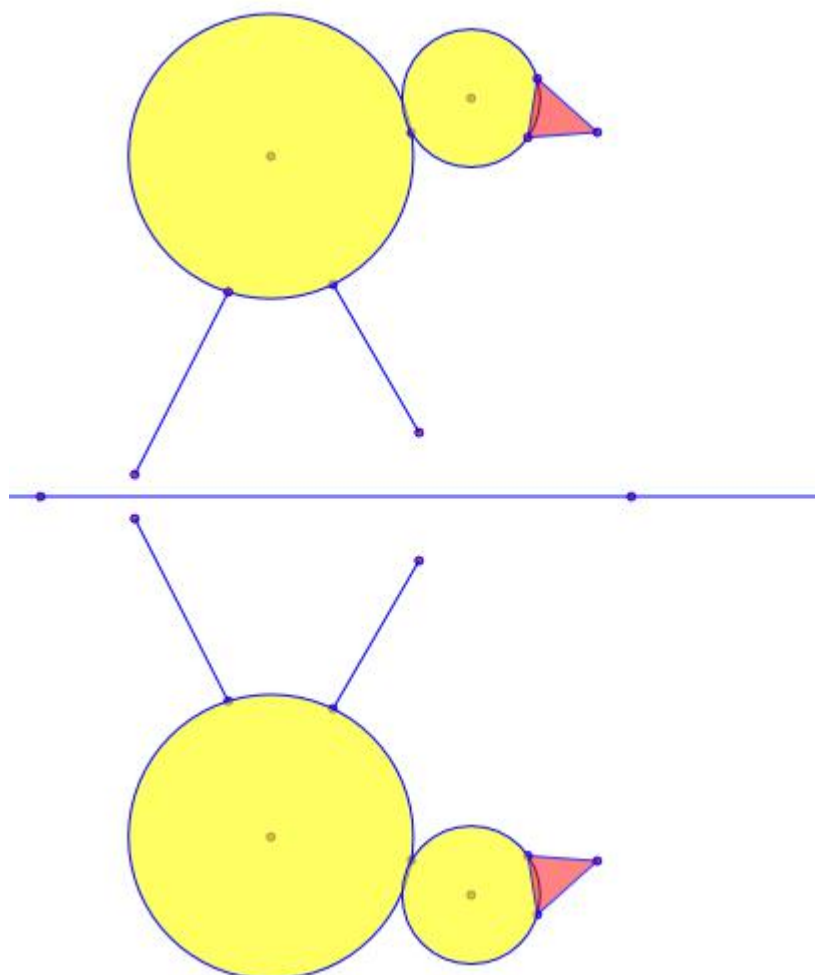
步骤 15：单击【属性】菜单下【选择】中的【所有的点】命令，就可以把所有
的点选中；然后单击【属性】菜单下【点的名字】中的【隐藏】命令。



可以通过拖动小鸡身上各部分对应的点以实现：让它抬抬脚、低低头、翘翘嘴巴或者转转身，看看镜子中的小鸡有什么变化？

【多知道一点】

如果把直线 MN 放置为水平状态，那么小鸡的对称图形可以看做小河中的倒影，而对称轴可以看做是小河的水面，如下图所示：



【问题与思考】

能否设计小鸡在河边行走的过程？并且有时还会低下脑袋捕捉地上的食物.

活动 6，制作万花筒

你玩过万花筒吗？你是否知道万花筒就轴对称图形的一个典型应用. 了解了轴对称图形的概念和性质以及掌握了轴对称图形的绘制方法之后, 每个人都可以根据自己的意愿创作一个完全属于自己的万花筒.

进入文件“图形对折.dmr”的下一页，单击“动画”按钮就可以看到一个变化多端、千姿百态的万花筒，如下图所示是其中的几个图案，你想知道这个万花筒是怎么制作的吗？首先请你自己观察一下它有哪些特点。

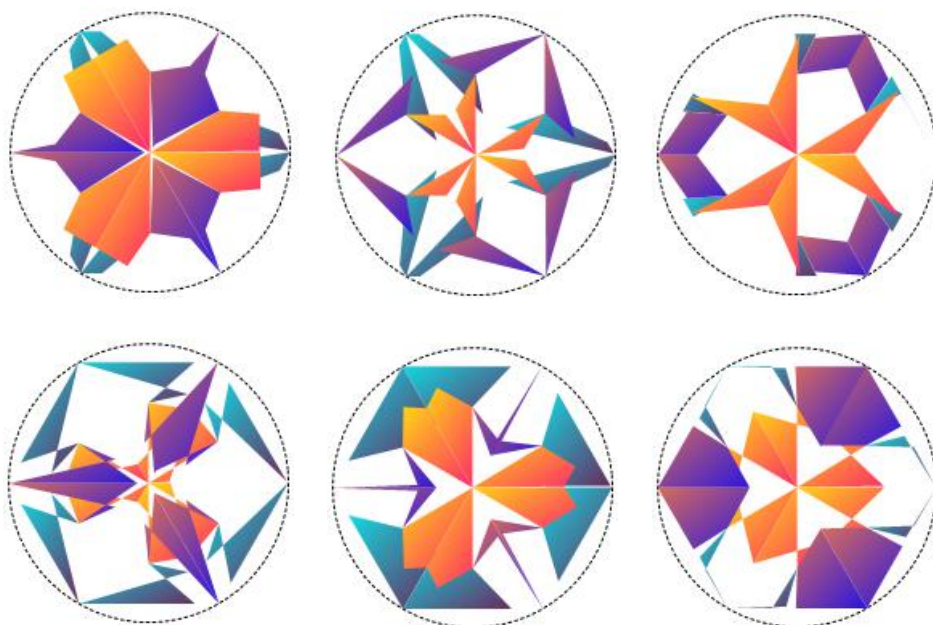


图 1

它是一个轴对称图形吗？如果是，它可能关于多少条直线对称呢？

让我们也动手试试看吧.

【探索与实验】

进入文件“图形对折.dmr”的下一页，是一个只有一个点 O 的空白页面.

我们首先绘制一个圆，以及圆上的三个点：

步骤 1：选择点 O，执行命令【已知圆心和半径的圆】，在弹出的用户输入对话框中输入：3，单击【确定】按钮，作出以点 O 为圆心、半径为 3 的圆。

步骤 2：单击【画图】工具，在圆 O 上任取一点 A，如下图所示；单击【选择】工具返回。

步骤 3：按住【Ctrl】键，依次单击点 A 和圆 O，执行【旋转】命令，如下图所示，在弹出的对话框中“旋转次数”输入为：2，“旋转角度”输入为：60，单击【确定】，作出圆上的另外 2 个点：B 和 C。

步骤 4：单击【画图】工具，连接 OA、OB、OC 和 AB。

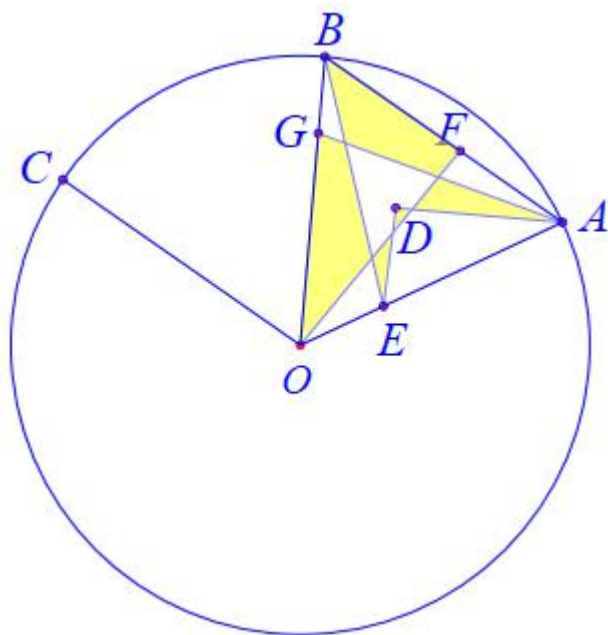
然后绘制出用于制作万花筒的基本图案：

步骤 5：单击【选择】工具，同时选择点 O、点 A 和点 B，执行【画图】菜单下【约束点】子菜单中的【内心】命令，作出三角形 OAB 的内心 D。

三角形的内心，一定位于三角形的内部。

步骤 6：单击【画图】工具，在线段 OA、AB 和 OB 分别取一个点：E、F、G。

步骤 7：单击【选择】工具，按照顺序先后选择点 D、点 E、点 B、点 F、点 O、点 G 和点 A，执行命令【多边形】，作出由着七个点组成的一个多边形 DEBFOGA，结果如下图所示。

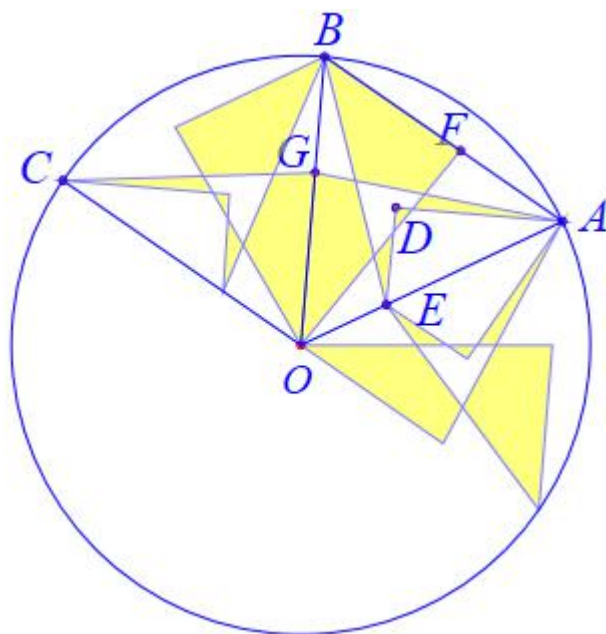


最后进行轴对称变换：

步骤 8：先后同时选择多边形 DEBFOGA 和线段 OA，执行命令【反射】。

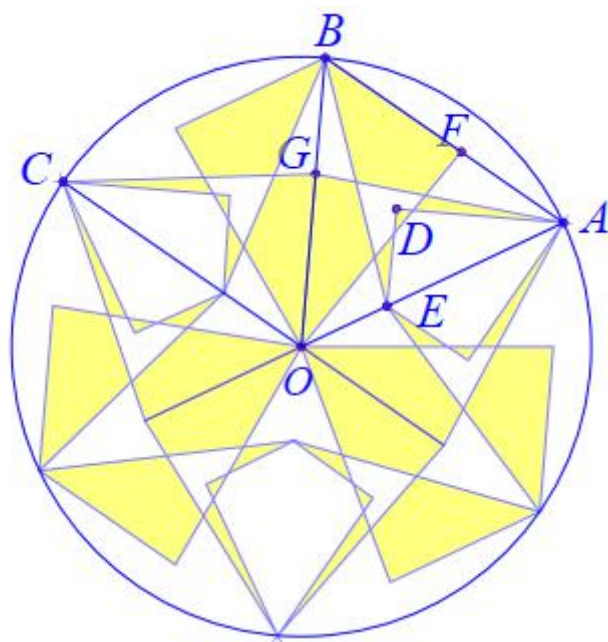
步骤 9：先后同时选择多边形 DEBFOGA 和线段 OB，执行命令【反射】，

结果如下图所示：



步骤 10：选择所有的三个多边形，然后选择线段 OC，再执行命令【反射】。

结果如下图所示：



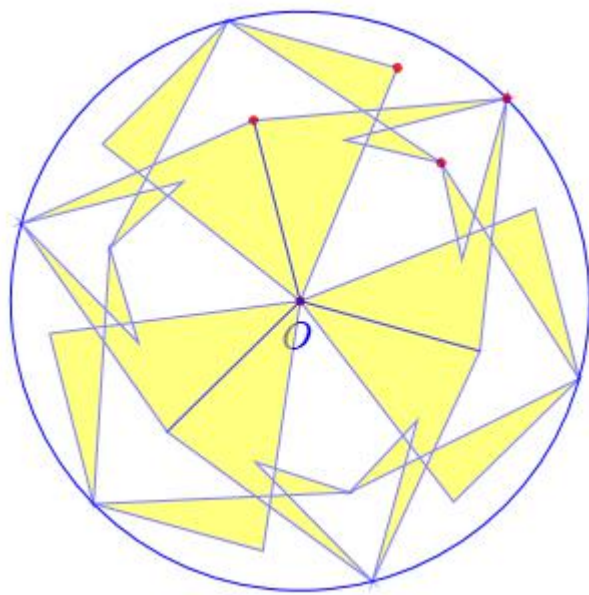
现在，万花筒的制作就完成了。拖动点 E 或点 F 或点 G，就可以看到一个变化的万花筒。

为了让界面美观而简洁，我们可以继续如下操作：

步骤 11：选择点 A、点 E、点 F 和点 G，通过【属性】菜单中的【画线颜色】命令把它们设置成为：红色。

步骤 12：执行命令【选择】【所有的点】，然后执行命令【点的名字】【隐藏】

步骤 13：在对象工作区中，隐藏点 B、点 C、点 D 和线段 OA、OB、OC 和 AB。结果如下图所示：



【探索与发现】

问题 1：整个图形是一个轴对称图形吗？如果是，有多少条对称轴？

【多知道一点】

我们也可以利用 O 、 A 、 B 、 D 、 E 、 F 、 G 这其他点构造两个或三个或四个多边形，然后以这些多边形为基本图形进行轴对称变换，并且各自设计成为不同过的颜色，从而制作出更加丰富多彩的万花筒图案。

【问题与思考】

请你按照自己的方式设计一个万花筒。

十一、图形平移

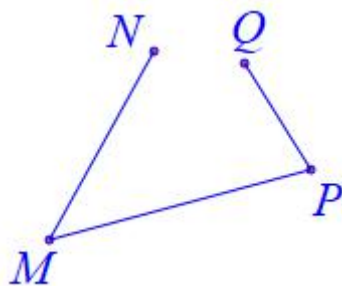
平移，是最简单的运动方式.

以平移方式移动的物体，它的运动方向始终没有发生改变.

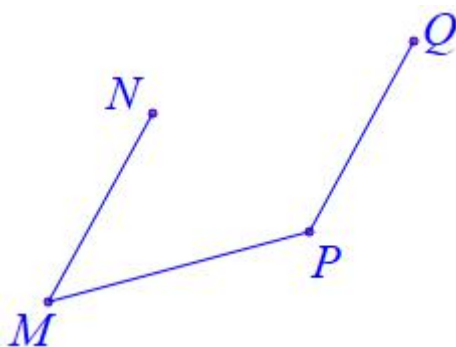
那么，平移二字的“平”表示什么含义呢？平稳？平行？还是其他什么意思？

对于任意两个点来说，可以从其中一个点平移到另外一个点. 平移的距离与方向，就是一个点到另一个点的直线段.

对于一般的两个图形，通常并不能通过平移的方式由其中一个图形另外一个图形. 有些情况一目了然，一看便知，如下图所示，我们可以直接作出判断：不能通过平移的方式由线段 MN 得到线段 MP ，也不能得到线段 PQ .



但是，也有一些情况通过观察不能直接作出判断，如下图所示，在这种情况下，能否通过平移 MN 而得到 PQ 呢？



那么，如何判断两个图形之间是否具有平移的关系呢？也就是说，如何判断一个图形是否能够通过平移的方式得到另外一个图形？

要回答这个问题，这就需要我们利用熟悉的角度、长度或坐标从数学上说明什么是平移.

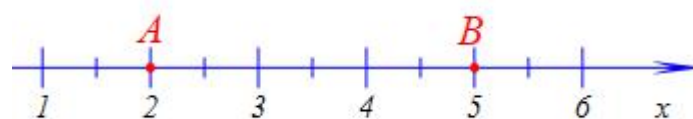
活动 1，点到点平移

我们知道，两个点能够确定一条直线.

因此从一个点到另外一个点，沿着它们之间的直线段移动，运动方向始终不变. 所以，对于任意两个点来说，都可以通过平移的方式由一个点得到另一个点.

但是对于两个点来说，由哪个点通过平移得到另外一个点，结果都是得到两个点，但是平移的过程却不相同.

例如，数轴上的两个点 A 和 B，分别表示 2 和 5. 若由 A 通过平移得到的点 B，那么平移的距离是 3，平移的方向是向右；若由点 B 通过平移得到点 A，那么平移的距离依然是 3，平移的方向却是向左.



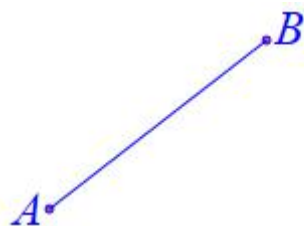
上述过程，分别叫做：从 A 平移到 B 和从 B 平移到 A. 移动的距离相同，移动的方向却是相反的.

因此，平移包含了大小又包含了方向.

像这种既包含大小又包含方向的量，称之为向量. 例如在这里可以说按照向量 AB 进行平移，或者按照向量 BA 平移.

用向量表示一个点到另外一个点的距离大小和方向也是为了叙述的方便. 例如在上面我们还可以说向右移动 3 个或向左移动 3 个单位. 但是在一般情况下，我们不知道两个点之间的距离，它们方向也不是水平或竖直的，这时候利用

向量 AB 或向量 BA 就是非常方便的.

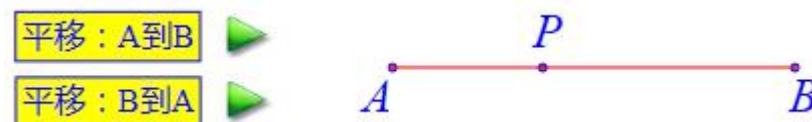


对于向量 AB 来说, 点 A 和点 B 分别是它的起点和终点; 而对于向量 BA 来说, 点 A 和点 B 分别是它的终点和起点.

向量, 实际上就是有方向的线段, 因此也称之为: 有向线段. 这与直线的方向是类似的, 而且比直线的方向“要求还要高”, 例如直线只是“精确到”: 水平, 而有向线段却要求“精确到”: 向左或者向右.

【探索与实验】

打开文件“图形平移.dmr”, 如下图所示, 有一条线段 AB , 在 AB 上有一点 P .



步骤 1: 拖动点 B , 观察点 B 对线段 AB 的影响.

步骤 2: 拖动点 A , 观察点 A 对线段 AB 的影响.

步骤 3: 拖动线段 AB 中间的部分, 观察线段的变化过程.

步骤 4：单击按钮【平移：A 到 B】，观察点 P 从点 A 沿着有向线段 AB 平移到点 B 的过程.

步骤 5：单击按钮【平移：B 到 A】，观察点 P 从点 B 沿着有向线段 BA 平移到点 A 的过程.

问题 1：拖动点 B 的过程中，线段 AB 的长度会发生改变吗？线段 AB 的方向会发生改变吗？

结论：会；会.

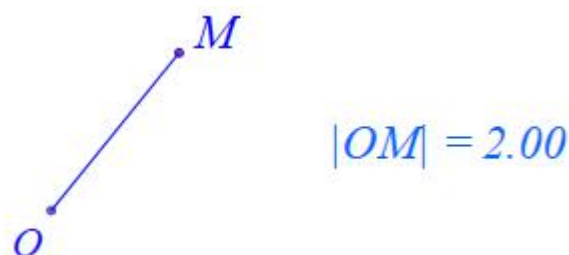
问题 2：拖动点 A 的过程中，线段 AB 的长度会发生改变吗？线段 AB 的方向会发生改变吗？

结论：会；会.

问题 3：在步骤 3 中，拖动线段 AB 中间的部分，整个线段 AB 会同时进行移动，线段 AB 的长度是否会发生变化？线段 AB 的方向是否会发生变化？

结论：不会；不会.

进入文件“图形平移.dmr”的下一页，如下图所示，有一条线段 OA，它的长度为 2.



步骤 6：拖动点 M ，观察线段 OM 的变化规律.

问题 4：在拖动点 M 的过程中，线段 OM 的长度是否发生变化？线段 OM 的方向是否发生变化？

结论：不会；会.

【多知道一点】

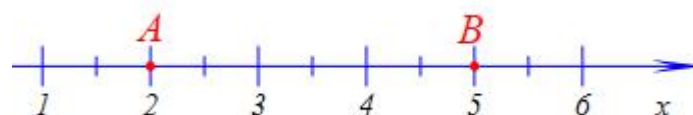
在步骤 6 中，拖动点 M ，虽然线段 OM 的长度没有发生改变，但是它的方向发生了改变，因此表示不同的有向线段. 因此，我们习惯使用 OM 表示有向线段，而用 $|OM|$ 表示有向线段的长度.

在步骤 1 中拖动点 B ，或在步骤 2 中拖动点 A ，有向线段 AB 的长度与方向都会发生改变，因此有向线段与它的起点和终点都有关系.

在步骤 3 中拖动整个线段 AB ，点 A 和点 B 与线段一起整体移动，我们发现，有向线段 AB 的长度与方向都没有改变. 这说明了起点与终点共同决定了有向线段的长度与方向.

问题是，如何利用有向线段的起点与终点表示有向线段.

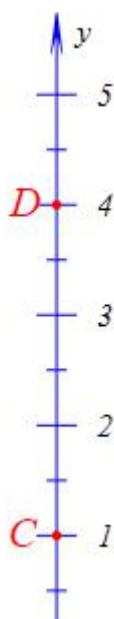
仍然是从最简单的问题开始考虑. 如下图所示，在数轴上点 A 和点 B 分别表示 2 和 5，那么有向线段 AB 就是从 A 到 B ，水平向右 3 个单位长度的线段；有向线段 BA 就是从 B 到 A ，水平向左 3 个单位长度的线段.



在数轴上，把向右记作正的，把向左记作负的。因此有向线段 AB 就是 $+3$ ，有向线段 BA 就是 -3 。

而 $+3=5-2$ 、 $-3=2-5$ 。所以，有向线段的结果就是终点表示的数减去起点表示的数。

但是，如果把数轴竖立起来，如下图所示，如果仍然用 $+3$ 和 -3 表示有向线段 CD 和有向线段 DC，那么就无法与之前的水平状态进行区分了。因此我们仍然需要从整个平面考虑问题。



在平面上，每个点也有一个位置，用一对数进行表示，叫做它的坐标。

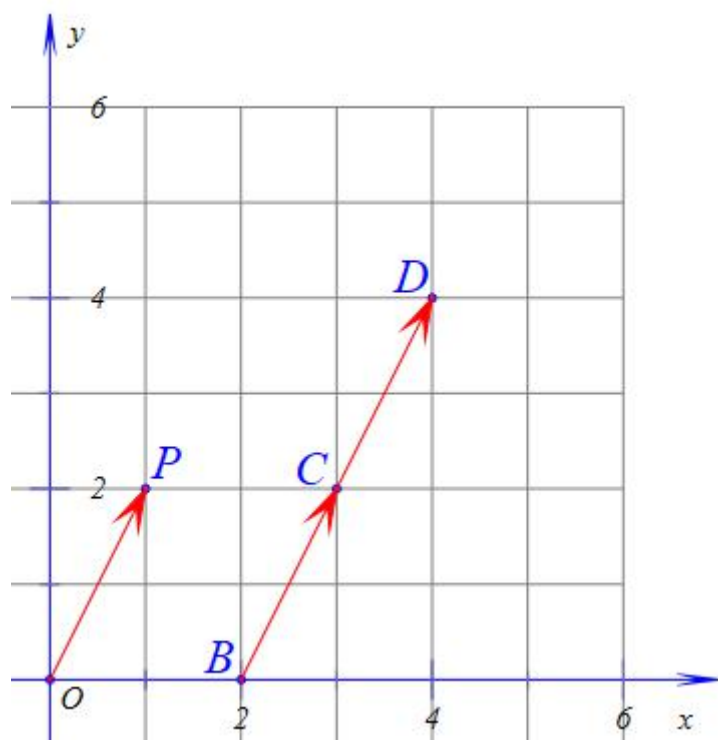
例如水平数轴上的点 A 和点 B 可以分别用 $(2,0)$ 、 $(5,0)$ 表示，类似地，也用坐标相减表示有向线段，那么有向线段 AB 为： $(5,0) - (2,0) = (3,0)$ ，有向线段 BA 为： $(2,0) - (5,0) = (-3,0)$ 。

坐标相减就是横坐标减去横坐标，纵坐标减去纵坐标.

这样有向线段 CD 和有向线段 DC 就分别表示为： $(0, 3)$ 和 $(0, -3)$. 这样一来就与有向线段 AB 与有向线段 BA 区分开来.

类似地，对于起点或终点不在数轴上的有向线段，也可以直接利用终点坐标减去起点坐标来表示向量.

【问题与思考】



(1) 用数组表示有向线段 OP、BC 和 CD，它们之间有什么特点或规律.

(2) 用数组表示有向线段 BD 和 CB，它们之间有什么特点或规律.

(3) 用数组表示有向线段 OC 和 PD，它们之间有什么特点或规律.

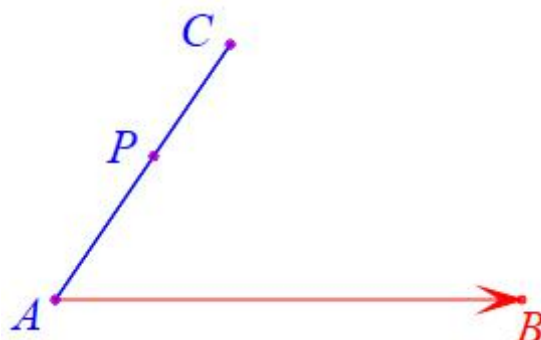
活动 2，平移得平行

平移，就是方向不改变的移动.

线段是除了点之外最简单的图形，我们可以通过线段的平移过程，探索与发现平移的特征与内涵.

【探索与实验】

进入文件“图形平移.dmr”的下一页，如下图所示，有一条线段 AB 和一条线段 AC，并且点 P 是直线 AC 上任意一点.



通过前面我们研究的点与线的运动过程，可以知道：

点 P 和点 C，经过的路径都是一个点，沿着同一个方向运动，就得到了一条直线；

一条线段，沿着同一个方向运动，就得到了一个平行四边形.

我们把这种沿着同一个方向移动的过程，就叫做平移.

平移过程中图形上方任何两个点所经过的路径，平移，也可以理解为平行移

动，也就是说平移过程中物体的任何两个点所经过的路径，都具有平行关系.

【活动目的】

理解平移的数学概念和数学特征.

利用平移构造几何图形，从而加深对平移变换以及图形本身的认识.

十二、制作钟表

【活动目的】

适合内容：认识钟表.

了解分针与时针之间的关系，理解钟表当中的十二进制.

【前期准备】

能够认识钟表中的整点.

【活动过程】

活动 1，一个常见的钟表

打开文件“钟表与时间.dmr”，如下图所示，是一个我们常见的钟表.



观察一下，在这表盘上有多少个数字？又有多少个刻度？

通过下方的变量尺可以设置当前的时间，如下图所示：



单击按钮【正常 1 分钟】可以观察正常行走 1 分钟的过程，单击按钮【快速 1 小时】可以观察快速行走 1 小时的过程，单击【设置为 0 时】可以将当前的时间设置为 0 点.

请你分别指出钟表的秒针、分针和时针.

请你通过按钮把时间设置为 3 点正.

请你通过按钮把时间设置为 3 点 5 分.

通过下面的尺子改变 t 的数值时，秒针、分针和时针都会动，你能说说 t 具体表示什么含义吗？

活动 2，设置钟表时间

进入文件“钟表与时间.dmr”的下一页，如下图所示，是一个只有分针和时

针的钟表.



单击按钮【增加 1 小时】，可以使得时针快速指向下一个钟点；单击按钮【减小 1 小时】，可以使得时针快速指向上一个钟点. 这两个过程中，分针是如何运动的？

单击按钮【增加 1 分钟】，可以使得分针快速指向下一个刻度；单击按钮【减小 1 分钟】，可以使得分针快速指向上一个刻度. 这两个过程中，时针是否也运动了？

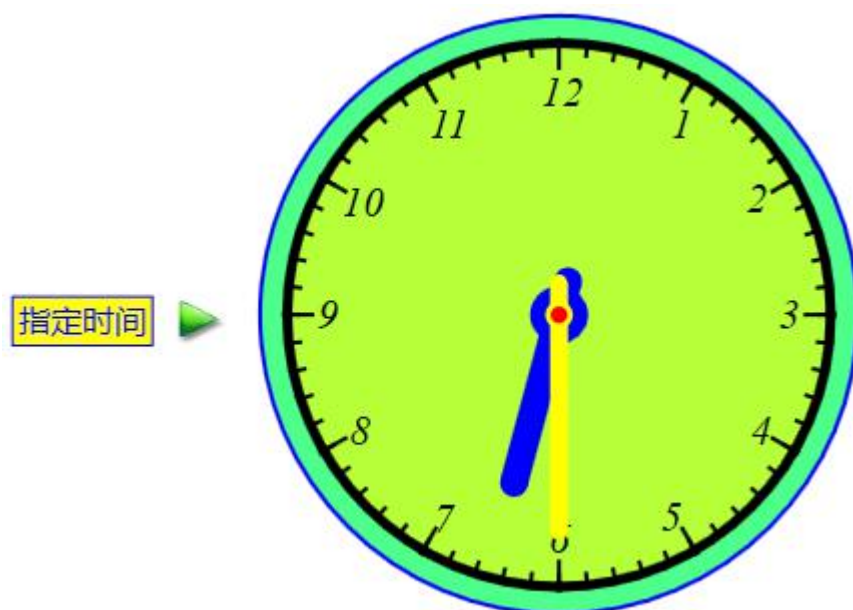
请你分别设置钟表的时间为 5 时、8 时、9 时、12 时.

请你分别设置钟表的时间为 5 时 5 分、8 时 10 分、9 时 15 分、12 时 30 分.

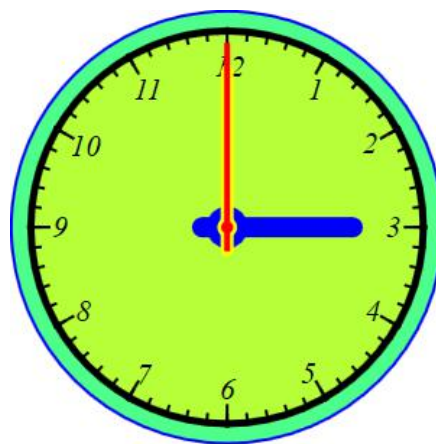
活动 3，随时指定时间

进入文件“钟表与时间.dmr”的下一页，如下图所示，在这个钟表的旁边

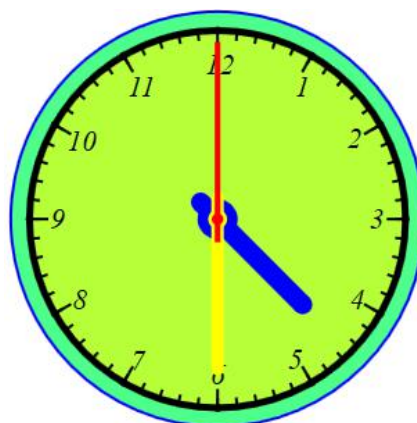
只有一个按钮.



单击按钮【指定时间】，如下图所示，弹出输入对话框，这时你可以设置时、分、秒，比如我们可以设置 3 时 0 分 0 秒，然后单击【确定】按钮，结果如右下图所示.



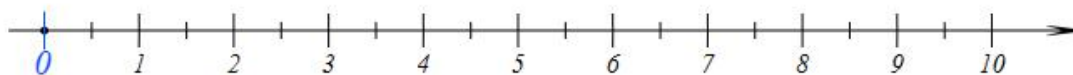
再次单击按钮【指定时间】，如下图所示，在弹出输入对话框中设置 4 时 30 分 0 秒，然后单击【确定】按钮，结果如右下图所示.



活动 4，钟表中的进制

在尺子上，刻度从左向右依次排列，并且是不断增加的，尺子越长能够显示的刻度越多.

我们还了解与研究过数轴，如果数轴不断向右画下去，数轴上的刻度就可以不断继续增加下去.



但是钟表的表盘是一个圆形. 指针从最上方旋转一周之后总会回到原来的位置，然后继续开始旋转.

就这样，转了一圈又一圈，不断继续、不断重复.



这就像我们前面所学习过的十进制，当一个数大于 9 之后，仍然用前面的十个数字继续表示.

在钟表当中，每 60 秒就是 1 分钟，每 60 分钟就是 1 小时，所以秒与分都是 60 进制.表盘的 60 个小的刻度就是用来方便读出分钟与秒钟的.

一天有 24 个小时，但是大家习惯用 12 小时制来表示时间，例如习惯说早上 8 点和晚上 8 点，下午 2 点和凌晨 2 点，等等. 因此钟表上有 12 个时刻.

所以说小时是 1 进制制. 晚上的 12 点通常也被称为 0 点，因此钟表上的 12 点实际上也就是 0 点.

【拓展练习】

1, 1 分 30 秒是多少秒？120 秒是几分几秒？

2, 通常每年有几个月，每月有多少天？那么表示时间的天和月分别是什么进制？

【思考问题】

1, 很多时候, 我们也采取 24 小时制, 那么你能否设计一个 24 小时制的钟表盘?

2, 按照每年 12 个月, 每个月 30 天计算, 请你设计一个月与天的钟表盘.

十三、图形的分类

【活动目的】

适合内容：分类与整理.

了解多边形分类的原则.

通过对图形进行分类，了解它们的性质.

利用边长与角度研究图形的大小与形状.

【前期准备】

对正方形、长方形、菱形、平行四边形、等腰梯形、直角梯形、等腰直角三角形、直角三角形、等腰三角形和等边三角形等具有了一定的认识.

【实验过程】

活动 1，三角形的分类

我们知道的三角形包括：等边三角形、等腰直角三角形、等腰三角形、直角三角形和任意三角形. 那么这些三角形之间具有哪些区别与联系呢？接下来，我们进行具体的研究和讨论.

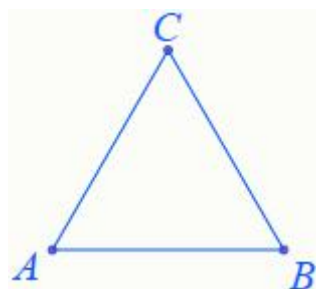
讨论问题首先需要确定一个标准，而对于三角形来说我们最为熟悉的就是边长和角度，因此我们可以从这两方面就行探索与分类.

(1) 按照边长分类

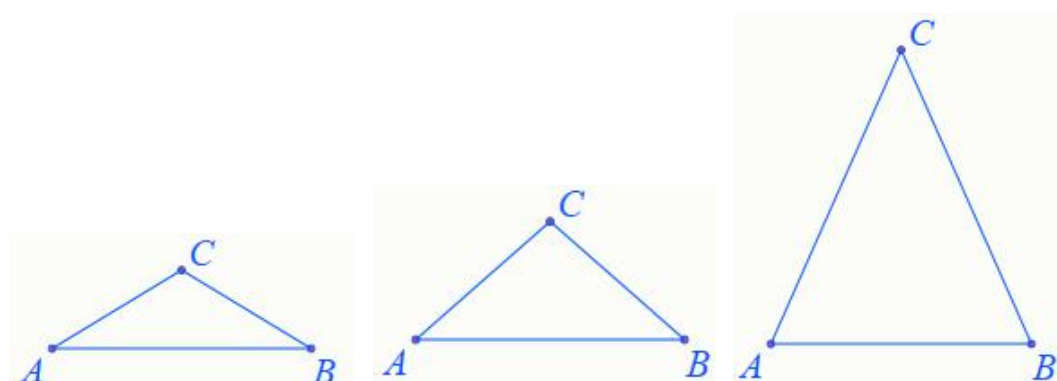
按照边长进行分类研究三角形时，最特殊的莫过于三条边都相等的等边三角形了.

打开文件“图形的分类.dmr”，如下图所示，有一个等边三角形 ABC. 点 A 或点 B 被拖动过程中，等边三角形的大小与位置会发生变化，但是我们发现它

的形状始终不变. 如果拖动点 C , 那么整个三角形就会被拖动, 三角形的形状与大小也始终不会发生改变.



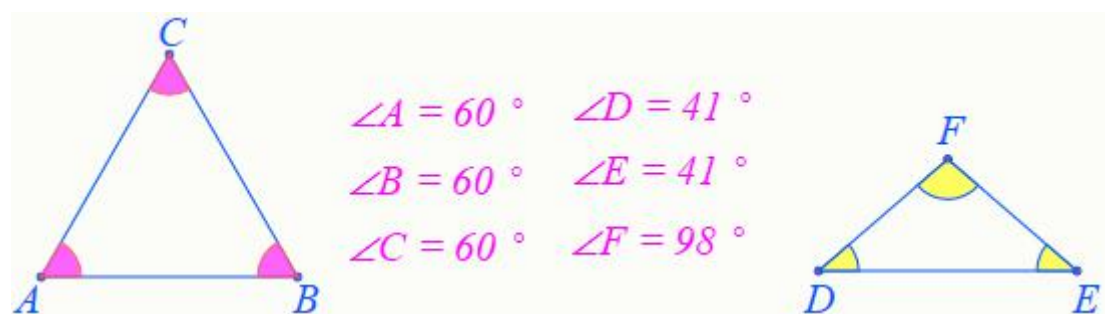
当只有两条边相等时, 就是我们熟悉的等腰三角形. 进入文件 “图形的分类.dmr” 的下一页, 如下图所示, 有一个等腰三角形 ABC . 点 A 或点 B 被拖动过程中, 等腰三角形的大小与位置会发生变化, 但是我们发现它的形状始终不变. 如果拖动点 C , 那么始终有 AC 等于 BC , 但是等腰三角形的形状就会发改变.



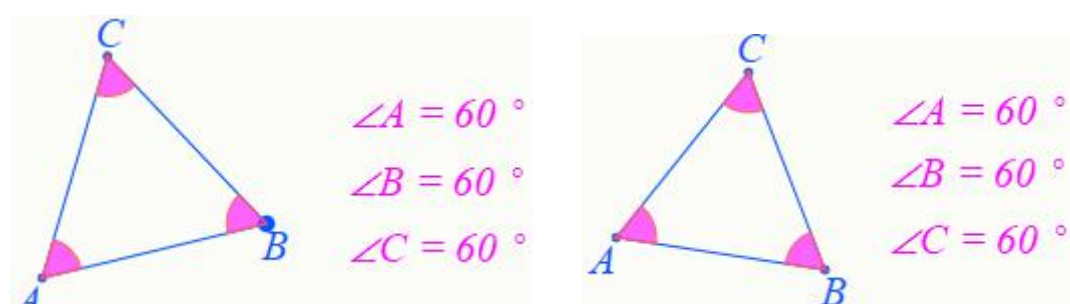
问题是什么叫做形状改变?

对于多边形来说, 除了边长之外还有角度. 边长会影响图形的大小, 而角度会影响图形的形状.

进入文件 “图形的分类.dmr” 的下一页, 如下图所示, 有一个等边三角形 ABC 和等腰三角形 DEF .

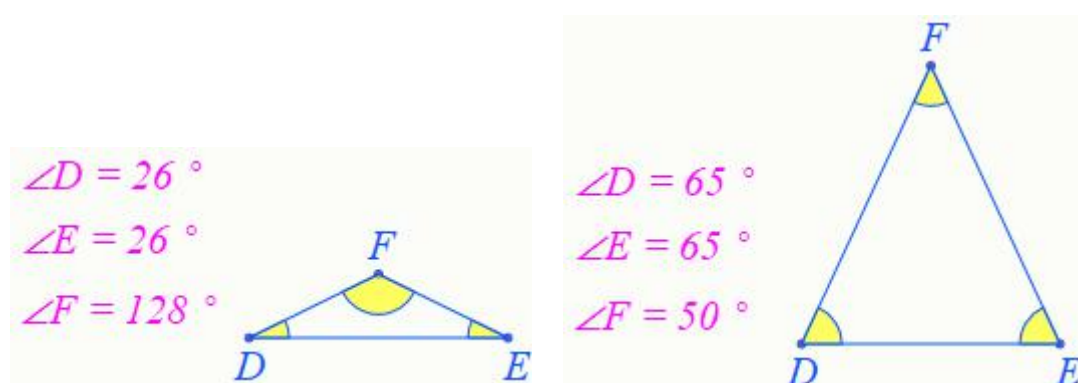


拖动点 A、点 B 或点 C，观察三角形 ABC 三个角度的变化情况，如下图所示.



可以发现，在等边三角形当中，无论它的三条边长如何改变，它的三个角都是 60° ，始终不变.

拖动点 D、点 E 或点 F，观察三角形 DEF 三个角度的变化情况，如下图所示.



可以发现，在当腰三角形当中，始终有两个角是相等的. 这两个角又分别是两个腰所对的角，被称为等腰三角形的底角，另外一个角被称之为等腰三角形的顶角. 顶角所在的两条边是等腰三角形中两条相等的腰. 顶角所对的边是等腰三

角形的底边.

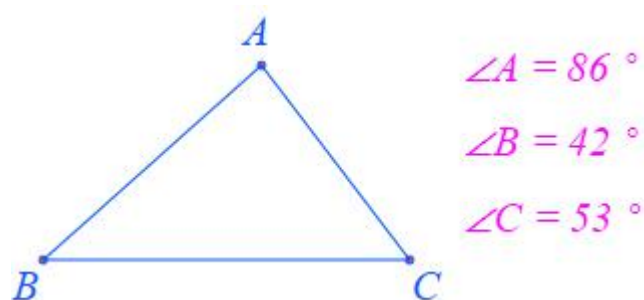
那么，我们可以认为，等边三角形的形状始终保持不变；而等腰三角形有时会变苗条，这时顶角会变小而底角会变大；有时会变粗壮，这时顶角会变大而底角会变小.

看来，三角形的边长只会影响它的大小，而不会影响它形状；而三角形的形状发生改变时，它的角度与边长都会发生改变.

那么对于三角形来说，我们就可以得到下面的结论：

当角度改变时，边长一定会改变，而三角形的形状就会发生改变；当边长改变时，角度不一定改变，因此三角形的形状不一定改变.

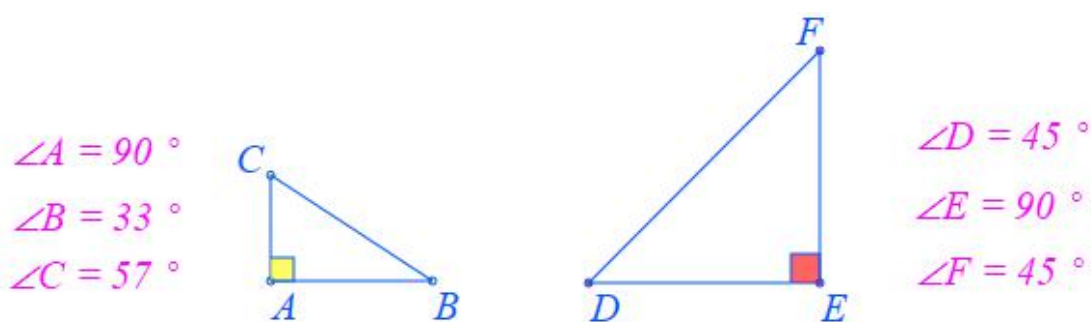
而对于一个形状可以任意改变的三角形来说，实际上是它的角度可以任意改变. 进入文件“图形的分类.dmr”的下一页，如下图所示，是一个任意三角形. 拖动它的顶点，感受和认识一下形状可以任意改变的三角形吧.



活动 2，按照角度分类

如果按照角度对三角形进行分类，那么我们最熟悉的特殊三角形就是直角三角形了，而等腰直角三角形又是最特殊的直角三角形.

进入文件“图形的分类.dmr”的下一页，如下图所示，有一个直角三角形和一个等腰直角三角形，点 A、点 B、点 C、点 D、点 E 和点 F 可以被任意拖动，观察和研究它们各自对图形的影响，从而了解直角三角形和等腰直角三角形的性质.

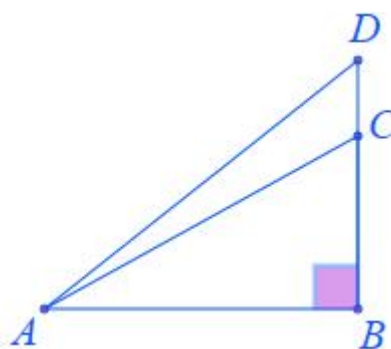


通过角度的测量结果我们知道：直角为 90° 。

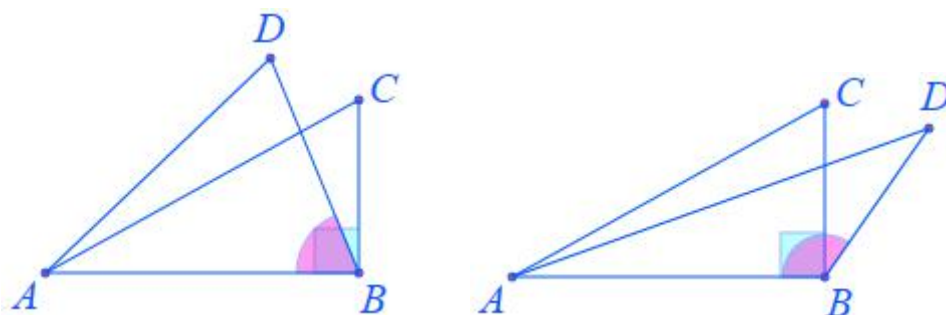
我们还发现，在等腰直角三角形当中，有两个相等的角，始终等于 45° 不变.

那么与直角三角形相对的是哪类三角形呢？

进入文件“图形的分类.dmr”的下一页，如下图所示，有两个直角三角形 ABC 和 ABD，它们有一条公共边 AB.



拖动点 D ，让三角形 ABD 的边 BD 在 $\angle ABC$ 的内部，如下图所示，红色的角的一条边在绿色直角的内部，这说明红色的角比绿色的直角小。我们把比直角小的角称作锐角。



拖动点 D ，让三角形 ABD 的边 BD 在 $\angle ABC$ 的外部，如下图所示，红色的角的一条边在绿色直角的外部，这说明红色的角比绿色的直角大。我们把比直角大的角称作钝角。

如果在一个三角形当中，有一个角是直角，那么就把它称作为直角三角形。

如果在一个三角形当中，有一个角是钝角，那么就把它称作为钝角三角形。

如果在一个三角形当中，没有直角也没有钝角，那么就把它称作为锐角三角形。

那么，

在一个钝角三角形当中，是否可能有两个或三个钝角？

在一个直角三角形当中是否可能有两个或三个直角？

在一个锐角三角形当中共有多少个锐角？

请你自己动手试试看。

实际上，通过等边三角形和等腰直角三角形的三个角度的测量结果能够很轻松计算出：

三角形的三个角之和等于 180° 。

在任意三角形当中，把三个角的测量值加起来，也是 180° 。所以，我们可以认为：

三角形的三个角之和等于 180° 。

那么就可以轻松地回答上面的几个问题了？

问题是，为什么三角形的三个角之和等于 180° ？

实际上，也可以按照角度是否相等进行分类。例如：

在一个三角形当中，有三个角都是相等的。

在一个三角形当中，只有两个角是相等的。

在一个三角形当中，所有的角都不相等。

但是，我们知道：

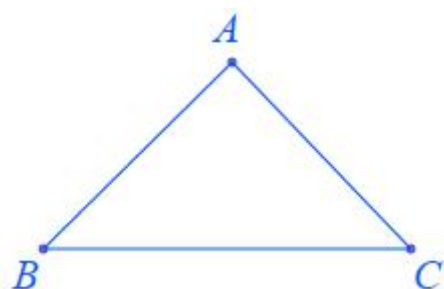
等边三角形当中，所有的边都相等，所有的角也都相等。因此，有三个角相等的三角形是等边三角形。

等腰三角形当中，两条腰长相等，两个底角也相等。因此，有两个角相等的三角形是等腰三角形。

看来，在一个三角形当中，边与边之间的关系影响着角与角之间的关系。

前面我们已经讨论过按照边长相等关系对三角形进行分类了，那么就不需要再讨论按照角度相等关系对三角形进行分类了。

问题在于，在现实生活中，如何知道三角形的两条边长是否相等或两个角度是否相等，如果确定一个角是直角还是钝角或锐角？因为通过肉眼观察还是不够的。例如下面的一个图形，是否有相等的线段？是否有钝角或直角？



这就需要今后学习了测量角度和长度的方法之后才能准确地回答这些问题。

活动 3，四边形的分类

与三角形的类似之处在于，四边形有四条边和四个角。因此我们也可以按照是否有相等的角或者是否有相等的边进行分类。

与三角形的不同之处也是，四边形有四条边和四个角。三角形的每两条边之间都有一个交点，从而组成了三角形的三个顶点；然而四边形的两组对边不一定都有交点，例如正方形、长方形、菱形、平行四边形的每一组对边都没有交点，梯形当中也有一组对边没有交点。因此，我们还可以按照对边是否有交点对四边形进行分类。

(1) 对边平行

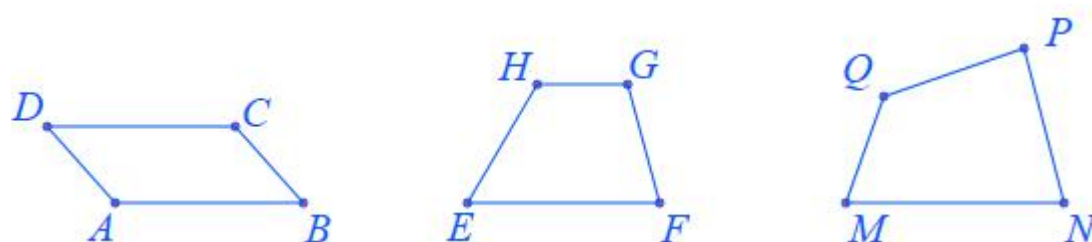
在一个平面内，我们把不想交的两条直线，称作平行。

例如，我们熟悉的平行四边形，它的每一组对边就是平行的，这也是它的名称的由来：由两组对边平行的四边形就是平行四边形。

有两组对边平行的四边形，还包括菱形、长方形和正方形，它们都是特殊的平行四边形.

梯形是只有一组对边平行的四边形，包括等腰梯形和直角梯形等特殊的梯形.

进入文件“图形的分类.dmr”的下一页，如下图所示，有一个平行四边形、一个梯形和一个任意四边形.



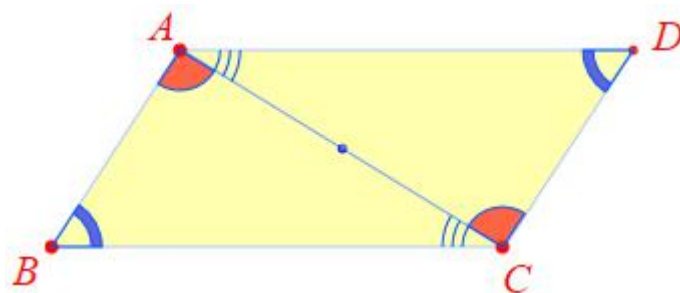
平行四边形 ABCD 的顶点都可以被拖动，从而改变平行四边形的形状与大小，但是两组对边平行的性质保持不变.

梯形 EFGH 的顶点都可以被拖动，从而改变梯形的形状与大小，但是只有一组对边平行的性质保持不变.

任意四边形 MNPQ 的顶点都可以被拖动，从而改变四边形的形状与大小，但是每一组对边都不平行.

前面我们研究三角形的过程中，我们发现三角形的边长关系影响角度关系. 那么在四边形当中，两条边的平行关系是否也会影响角度关系呢？

前面我们研究三角形通过拼接而得到平行四边形的过程中，如下图所示可以把平行四边形 ABCD 看作是把三角形 ABC 绕 AC 的中点旋转后与原来的图形拼接而得到的.



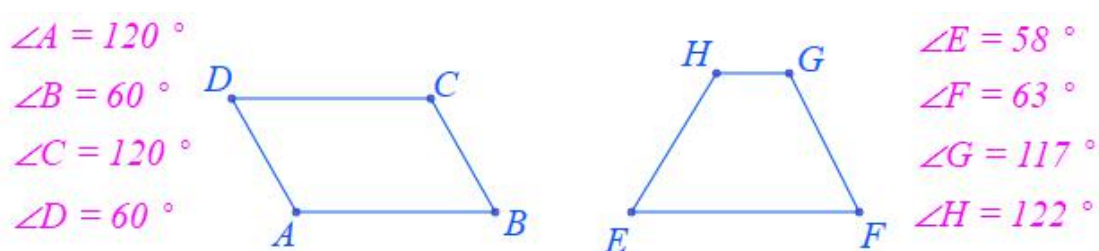
那么我们立刻就可以得到以下结论：

四边形的四个角之和，等于两个三角形的六个角之和，等于 $180^\circ + 180^\circ = 360^\circ$ 。

具有相同标示符号的角度相等，那么相对的两组角相等，即： $\angle A = \angle C$ 、 $\angle B = \angle D$ ；相邻的两个角之和等于 180° ，这是因为： $\angle A + \angle B + \angle C + \angle D = 2(\angle A + \angle B) = 360^\circ$ 。

在正方形或长方形当中，这两个结论显然成立。

进入文件“图形的分类.dmr”的下一页，如下图所示，有一个平行四边形和一个梯形以及每个角度的测量值。通过这些测量数据请你检验上面的结论。

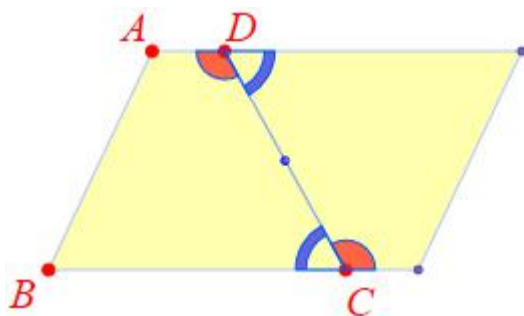


对于梯形来说，以腰为公共边的两个角之和等于 180° ，而以底边为公共边的两个角之和并不等于 180° 。

我们知道，把梯形绕着它的一条腰的中点旋转之后可以拼接成为一个平行四边形，如下图所示，因此我们也可以通过平行四边形的性质推导出梯形的性质。并且由此我们可以得到以下结论：

由于红色角与蓝色角之和等于 180° ，可以知道 180° 的角的两条边在同一条直线上，因此 180° 的角被称之为平角，即：角的两边是平的，没有弯折。

有一条线段的两个端点分别在两条平行线上，结果就形成了四个角。以这条线为公共边的两个角，若另外一条边的方向相同，那么这两个角之和等于 180° ，例如红色的角与蓝色的角；若另外一条边方向相反，那么这两个角相等，例如红色的角与红色的角，蓝色的角与蓝色的角。



这实际上都是因为旋转过程中，角的大小不变而产生的结论。

这是由边的平行关系所得到的角度之间的关系。

(2) 邻边相等

对于四边形的边来说，除了边与边之间的平行关系，还有边与边之间的相等关系。

还有哪些分类方式？

【拓展练习】

1，等边三角形的三个角各是多少？把三个角加起来是多少？等腰直角三角形的三个内角各是多少？把三个角加起来是多少？在其他三角形当中，三个角加起来是否还等于这个数？

团队介绍

Hawgent 皓骏数学技术团队由数学、计算机、数学教育等学科领域的专业队伍和具有丰富一线教学经验的优秀数学教师共同组成.

Hawgent 皓骏数学技术团队中的核心成员从 20 世纪 90 年代就开始了动态数学技术的理论研究、技术开发和教学应用等方面的工作.

Hawgent 皓骏数学技术团队所开发的动态数学教学软件在国内外数学教育界、教育信息技术等领域都产生了广泛而重要的影响.

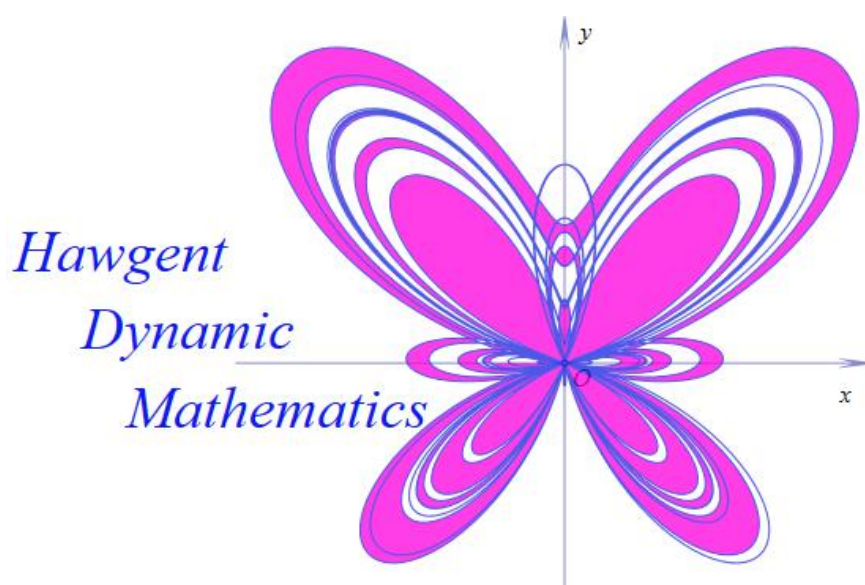
自 2002 年起, Hawgent 皓骏数学技术团队陆续在北大附中、华南师大附中、广州四十七中等 20 多所中学开展了动态数学探究实验课程.

承担和参与了广州市景中实验中学、广东广雅中学、广州市执信中学等几十多所学校数学实验室的策划、设计、建设和应用工作.

出版或编写了《专题数学实验》(小学版、初中版、高中版)、《同步数学实验》(小学版、初中班、高中版)、《动态解析高考数学综合题》、《动态解析中考数学压轴题》、《技术帮你学数学:图形与变换》、《技术帮你学数学:研究与实验》、《技术帮你学数学:运动与关系》、《奇妙的曲线》、《形形色色的曲线》等专著十几种.

Hawgent 皓骏数学技术团队的愿景:让更多的人喜欢数学、学好数学.

皓荡的大地，奔腾的骏马
只为向着那，最初的梦想



地址：广州市越秀区桂花岗广州大学北 8 号

广州市越秀区盘福路朱紫后街 1 号

邮件：11033149@qq.com

电话：020-36280771

网站：www.hawgent.com

QQ 群：367878041